ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων

Ονοματεπώνυμο____________________

Τεστ Β' τετραμήνου στις ανισώσεις-εξισώσεις β'Βαθμού

Ημερομηνία: 20/2/2019

Τάξη: Α' τμήμα 2 **Β' Ομάδα**

Θέμα 1ο

a. Συμπληρώστε Σ ή Λ ή επιλέξτε το σωστό: **(μονάδες 20)**

i. Οι αριθμοί 1 και 4 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 – 5x + 4 = 0$.

Απάντηση

Σωστό γιατί πχ $1^2 - 5 \cdot 1 + 4 = 0 \; και \; 4^2 - 5 \cdot 4 + 4 = 0$

β'τρόπος : από τους τύπους του Vieta $1 \cdot 4 = 4$ και $1+4=5=-\frac{\beta}{\alpha}$ για την εξίσωση που εξετάζουμε

ii. Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει δύο ρίζες αντίθετες τότε β=0

Απάντηση

Αν η εξίσωση έχει ρίζες αντίθετες τότε $\rho_1 + \rho_2 = 0$ οπότε $S = 0$ και επειδή $S = -\frac{\beta}{a}$ ισχύει ότι $-\frac{\beta}{a} = 0$ και άρα β=0, δεδομένου ότι στη δευτεροβάθμια εξίσωση $\alpha \neq 0$.

b. Να δώσετε (με τους τύπους του Vieta) τις λύσεις στις εξισώσεις: **(μονάδες 20)**

i. $x^2 - 6x + 8 = 0$
ii. $x^2 - 4x - 5 = 0$
iii. $x^2 - 18x + 77 = 0$

Απάντηση

$S = -\frac{\beta}{a}, P = \frac{\gamma}{\alpha}$ άρα για τις 3 περιπτώσεις που εξετάζουμε:

i. S=6, P=8 οπότε πρέπει να βρούμε αριθμούς που να έχουν άθροισμα 6 και γινόμενο 8. Αυτοί οι αριθμοί είναι οι 2 και 4. Άρα $\rho_1 = 2, \rho_2 = 4$
ii. S=4, P=-5 οπότε πρέπει να βρούμε αριθμούς που να έχουν άθροισμα 4 και γινόμενο -5. Αυτοί οι αριθμοί είναι οι -1 και 5. Άρα $\rho_1 = -1, \rho_2 = 5$
iii. S=18, P=77 οπότε πρέπει να βρούμε αριθμούς που να έχουν άθροισμα 18 και γινόμενο 77. Ξεκινάμε από το γινόμενο που έχει πιο εύκολο ανάπτυγμα σε γινόμενο παραγόντων,(δηλαδή $77 = 11 \cdot 7$ ή $77 = -11 \cdot (-7)$ ή $77 = 1 \cdot 77$ ή $77 = -1 \cdot (-77)$ Από αυτούς, άθροισμα 18 έχουν οι 7 και 11. Άρα $\rho_1 = 7, \rho_2 = 11$

Θέμα 2ο **(μονάδες 30)**

i. Να δειχθεί ότι: : $\alpha^2 – 4\alpha + 4\lambda > 0$ όπου λ>1 για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Απάντηση

Ας δούμε πρώτα τη διακρίνουσα:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4\lambda = 16 - 16\lambda = 16(1 - \lambda)$$

για όλα τα λ>1 ισχύει Δ<0 (γιατί $16(1 - \lambda) < 0 \Leftrightarrow 16 < 16\lambda \Leftrightarrow \lambda > 1 \, , \alpha\lambda\eta\theta\acute{\eta}\varsigma$) οπότε το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου είναι ομόσημο του α=1 άρα θετικό.

ii. Να δειχθεί ότι: $-x^2 - x - 1 < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απάντηση

Είναι $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1)(-1) = 1 - 4 = -3 < 0$ άρα το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου είναι ομόσημο πάντα του α=-1. Άρα το τριώνυμο είναι αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. Να βρεθούν τα διαστήματα που ισχύει η ανίσωση ότι $x^2 - x - 1 > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Απάντηση

Είναι $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1(-1) = 1 + 4 = 5 > 0$ άρα το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου είναι ομόσημο του α=+1 δηλαδή θετικό για τις τιμές εκτός των ριζών ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Για τις τιμές εντός των παραπάνω ριζών είναι αρνητικό. Δείτε και τον παρακάτω πίνακα

$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		∞
	+		-		+	

<u>Θέμα 3</u>

<u>Θέμα 3^o</u> (μονάδες 30)

i. Να λύσετε την εξίσωση

$$5x^2 + 7x + 2 = 0$$

Απάντηση

Είναι $\Delta = (7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 49 - 40 = 9 > 0$ οπότε έχει δύο λύσεις τις:

$$\rho_1 = \frac{-7 + \sqrt{9}}{2 \cdot 5} = -\frac{2}{5}, \rho_2 = \frac{-7 - \sqrt{9}}{2 \cdot 5} = -1$$

ii. Να λύσετε την εξίσωση

$$(\lambda + 1)x^2 + (\lambda + 3)x + 2 = 0$$

Απάντηση

- Αν $\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ η εξίσωση ανάγεται σε πρωτοβάθμια και θα έχουμε
$$0x^2 + (-1 + 3)x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$
- *Αν* $\lambda \neq -1$ τότε:
$\Delta = (\lambda + 3)^2 - 4 \cdot (\lambda + 1) \cdot 2 = \lambda^2 + 6\lambda + 9 - 8\lambda - 8 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 \geq 0$ οπότε:
  - Αν λ=1 η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα την $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\lambda+3}{2(\lambda+1)} = -\frac{1+3}{2(1+1)} = -1$
  - Αν $\lambda \neq 1$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις:
  $x_1 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(\lambda+3)+|\lambda-1|}{2(\lambda+1)}, x_2 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(\lambda+3)-|\lambda-1|}{2(\lambda+1)}$,
  οπότε παίρνουμε δύο περιπτώσεις τις:

$$x_1 = \frac{-(\lambda + 3) + \lambda - 1}{2(\lambda + 1)} = -\frac{4}{2\lambda + 2}, x_2 = \frac{-(\lambda + 3) - (\lambda - 1)}{2(\lambda + 1)} = -1$$