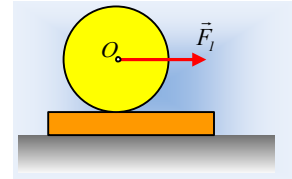


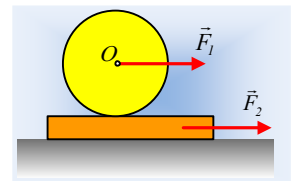
Μεταφορική κίνηση ή κύλιση;

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια σανίδα μάζας $m=20\text{kg}$, πάνω στην οποία ηρεμεί ένας ομογενής τροχός της ίδιας μάζας m . Ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ τροχού και σανίδας είναι $\mu_s=0,5$.



- i) Σε μια στιγμή ασκούμε στο κέντρο O του τροχού μια σταθερή οριζόντια δύναμη F , μέτρου 80N .
 - α) Υποστηρίζεται η άποψη ότι ο τροχός θα κυλίσει, χωρίς να κινηθεί η σανίδα. Να εξηγήσετε (χωρίς μαθηματικές εξισώσεις) αν η άποψη αυτή είναι σωστή ή λανθασμένη.
 - β) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας O του τροχού.
 - γ) Να βρεθεί επίσης η επιτάχυνση της σανίδας.

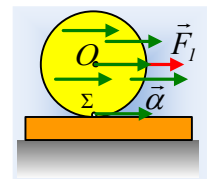
- ii) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, αλλά τώρα ασκούμε ταυτόχρονα και στον τροχό και στη σανίδα δύο ίσες δυνάμεις $F_1=F_2=80\text{N}$, όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε τις επιταχύνσεις που θα αποκτήσουν ο τροχός και η σανίδα.



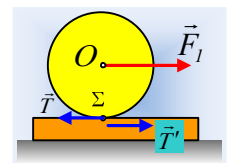
Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$ ενώ η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του $I= \frac{1}{2} mR^2$.

Απάντηση:

- i) Μόλις ασκηθεί η δύναμη F στον τροχό αυτός τείνει να αποκτήσει επιτάχυνση της ίδιας κατεύθυνσης, όπως στο σχήμα.



- α) Στον τροχό ασκείται μια δύναμη στο κέντρο μάζας του και προφανώς η δύναμη αυτή μπορεί να προκαλέσει (μεταφορική) επιτάχυνση, ίδια για όλα τα σημεία του. Οπότε και το σημείο Σ του τροχού που έρχεται σε επαφή με τη σανίδα, αποκτά την ίδια επιτάχυνση, πράγμα που σημαίνει ότι το Σ τείνει να κινηθεί ως προς τη σανίδα. Η επιφάνειες όμως των δύο σωμάτων δεν είναι λείες, οπότε στον τροχό, θα ασκηθεί ΚΑΙ δύναμη τριβής T , αντίθετης κατεύθυνσης. Η αντίδραση της δύναμης αυτής T' , θα ασκηθεί στη σανίδα, η οποία θα επιταχυνθεί και αυτή προς τα δεξιά. Η άποψη λοιπόν ότι η σανίδα θα παραμείνει ακίνητη είναι λανθασμένη.



- β) Θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, καθώς και την ωρολογιακή φορά περιστροφής του τροχού θετική, με εφαρμογή του 2^{ου} νόμου για τροχό και σανίδα παίρνουμε:

Τροχός: Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F = m \cdot a_{cm} \rightarrow F - T = m \cdot a_{cm} \quad (1)$

$$\text{Στροφοκίνη κίνηση: } \Sigma\tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T = \frac{1}{2} m R \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

$$\text{Σανίδα: } \Sigma F_x = m a_l \rightarrow T' = m \cdot a_l \quad (3)$$

Τι συμβαίνει όμως τώρα με το σημείο Σ; Ολισθαίνει ή όχι πάνω στη σανίδα; Υποθέτουμε ότι δεν ολισθαίνει, οπότε έχουμε κύλιση του τροχού πάνω στη σανίδα. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει, κάθε στιγμή, η ταχύτητα του εκάστοτε σημείου Σ να είναι ίδια με την ταχύτητα του σημείου της σανίδας, που βρίσκεται σε επαφή. Αλλά αυτό ισοδύναμα σημαίνει ότι η επιτάχυνση του Σ θα είναι ίση με την επιτάχυνση της σανίδας. Δηλαδή:

$$a_l = a_{cm} - \alpha_{\gamma\omega\nu} R. \quad (4)$$

Αλλά από τις (2) και (3) παίρνουμε $\alpha_{\gamma\omega\nu} R = 2a_l$, οπότε η (4) γίνεται $3a_l = \alpha_{cm}$ (5).

Έτσι με πρόσθεση των (1) και (3) κατά μέλη παίρνουμε:

$$F = m \alpha_{cm} + m a_l \rightarrow F = m \alpha_{cm} + m \frac{\alpha_{cm}}{3} \rightarrow$$

$$\alpha_{cm} = \frac{3F}{4m} = \frac{3 \cdot 80}{4 \cdot 20} m/s^2 = 3 m/s^2.$$

Το ζήτημα που τίθεται είναι αν η υπόθεσή μας ότι ο τροχός κυλιέται, είναι σωστή.

Υπολογίζουμε τη μέγιστη δυνατή τιμή της στατικής τριβής, την οριακή τριβή:

$$T_{op} = \mu_s N = \mu_s mg = 0,5 \cdot 20 \cdot 10 N = 100 N$$

Ενώ η ασκούμενη τριβή (στατική) που εξασφαλίζει την κύλιση είναι (από την (1)):

$$T = F - m \alpha_{cm} = 80 N - 20 \cdot 3 N = 20 N$$

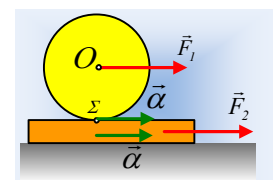
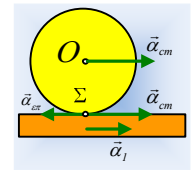
Τι ακριβώς βρήκαμε; Η εξάσκηση της δύναμης F προκαλεί την εμφάνιση δύναμης στατικής τριβής 20N χωρίς να αυξάνεται παραπέρα, οπότε αρχίζει η κύλιση και δεν πρόκειται να εμφανιστεί ολίσθηση.

γ) Από την εξίσωση (5) βρίσκουμε:

$$3a_l = \alpha_{cm} \rightarrow a_l = \frac{\alpha_{cm}}{3} = \frac{3}{3} m/s^2 = 1 m/s^2.$$

ii) Μόλις ασκηθούν ίσες δυνάμεις σε τροχό και σανίδα, τα δυο σώματα τείνουν να αποκτήσουν επιταχύνσεις με φορά προς τα δεξιά και μέτρο:

$$\alpha = \frac{F_1}{m} = \frac{F_2}{m}.$$



Αλλά τότε το σημείο επαφής του τροχού με τη σανίδα, σημείο Σ, δεν πρόκειται να κινηθεί σε σχέση με τη σανίδα, οπότε δεν υπάρχει κανένας λόγος να κάνει την εμφάνισή της δύναμη τριβής, μεταξύ τροχού και σανίδας. Αλλά τότε και ο τροχός θα εκτελέσει μόνο μεταφορική κίνηση (και όχι σύνθετη), με επιτά-

χυνση, ίση με την επιτάχυνση της σανίδας:

$$\alpha = \frac{F_1}{m} = \frac{F_2}{m} = \frac{80}{20} m/s^2 = 4 m/s^2.$$

Σχόλιο.

Στην τελευταία περίπτωση μπορούμε να εντάξουμε και την περίπτωση μιας σφαίρας πάνω σε σανίδα, σε λείο κεκλιμένο επίπεδο, όπως στο διπλανό σχήμα.

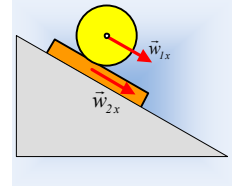
Εξαιτίας της συνιστώσας w_{1x} η σφαίρα αποκτά επιτάχυνση:

$$\alpha_{σφ} = \frac{w_{1x}}{m_1} = \frac{m_1 g \eta \mu \theta}{m_1} = g \eta \mu \theta$$

Η σανίδα αποκτά επίσης επιτάχυνση:

$$\alpha_{σαν} = \frac{w_{2x}}{m_2} = \frac{m_2 g \eta \mu \theta}{m_2} = g \eta \mu \theta$$

Αλλά από τη στιγμή που τα δυο σώματα, εξαιτίας των βαρών, αποκτούν ίδιες επιταχύνσεις, δεν υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ τους και δεν πρόκειται να εμφανιστεί δύναμη τριβής. Έτσι η σφαίρα θα εκτελέσει μόνο μεταφορική κίνηση.



dmargaris@gmail.com