

ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Κατασκευή σεναρίου από τον εκπαιδευτικό ΠΑΝΑΓΟ ΠΑΥΛΟ ΠΕ03 από το 2^ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΛΑΓΚΑΔΑ

1. 1. ΓΝΩΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ

ΑΛΓΕΒΡΑ Γ' γυμνασίου

1. 2. ΘΕΜΑ: «*ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ $(\alpha+\beta)^2$, $(\alpha-\beta)^2$ $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$* »

1. 3. ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ

Η αναγκαιότητα της κατανόησης των ταυτοτήτων και όχι η μηχανική τους απομνημόνευση με τη βοήθεια απλών γεωμετρικών εννοιών-κατασκευών, θα ωθήσει τους μαθητές σε μια πιο κριτική ματιά της ενότητας. Η γεωμετρική αντίληψη μπορεί να οδηγήσει στην λύση προβλημάτων που με διαφορετικό τρόπο θα ήταν αρκετά δύσκολη.

2. ΣΚΕΠΤΙΚΟ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

2.1 ΚΑΙΝΟΤΟΜΙΕΣ

Η χρήση του Η/Υ ως γνωστικού ή νοητικού εργαλείου στα σχολικά μαθήματα, και ιδιαίτερα στις θετικές επιστήμες προτείνεται ως το περισσότερο υποσχόμενο μοντέλο για να υποστηρίξει την ανακαλυπτική – κατασκευαστική μάθηση από τους μαθητές. Τα εργαλεία κατασκευής της γνώσης, μπορούν να βοηθήσουν το μαθητή να οικοδομήσει τη γνώση μέσω της κατασκευής εξωτερικών αντικειμένων ή αντικειμένων που μπορούν να «μοιρασθούν». Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μία δραστηριότητα για τη μελέτη των ταυτοτήτων από μια άλλη σκοπιά. Παρουσιάζεται με το λογισμικό **Sketchpad** και αντίστοιχα φύλλα εργασίας.

2.2

ΓΝΩΣΤΙΚΑ – ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ο εκπαιδευτικός που θα χρησιμοποιήσει το απαιτούμενο λογισμικό στην τάξη του, πρέπει να έχει πεισθεί για τα πλεονεκτήματα του μαθησιακού περιβάλλοντος, ώστε όχι μόνο να τα νομιμοποιεί, όταν εμφανίζονται, αλλά συγχρόνως να τα αναγνωρίζει και να τα υποστηρίζει με κατάλληλους σχεδιασμούς και αποφάσεις. Μια τέτοια αντίληψη για το ρόλο του στην εκπαιδευτική διαδικασία καθιστά αναγκαία τη στήριξη του εκπαιδευτικού αλλά και το χτίσιμο μιας σταθερής σχέσης με την εκπαιδευτική κοινότητα.

3. ΠΛΑΙΣΙΟ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

Το σενάριο απευθύνεται σε μαθητές της τρίτης τάξης του γυμνασίου. Οι προαπαιτούμενες γνώσεις είναι η έννοια της ευθείας, του ευθυγράμμου τμήματος, της καθετότητας, παραλληλίας, του κύκλου, εμβαδά γνωστών σχημάτων από προηγούμενες τάξεις καθώς και βασικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών (επιμεριστική, διπλή επιμεριστική) με ταυτόχρονη δυνατότητα χρήσης του λογισμικού Sketchpad για απλές γεωμετρικές κατασκευές. Οι προϋποθέσεις που απαιτούνται για την εφαρμογή του σεναρίου από μέρος των μαθητών είναι η εξοικείωση τους με λογισμικό, με ταυτόχρονη επανάληψη βασικών μαθηματικών εννοιών από σημαντικές ενότητες των μαθηματικών του γυμνασίου.

Το συγκεκριμένο σενάριο έχει τους παρακάτω διδακτικούς στόχους.

- ✓ Να αποκτήσουν οι μαθητές οικειότητα με τις απλές γεωμετρικές κατασκευές.
- ✓ Να μπορούν να ερμηνεύουν ένα γεωμετρικό σχήμα.
- ✓ Να μπορούν να ανακαλύπτουν αλγεβρικές ισότητες (πράξεις) μέσα από ένα σχήμα γεωμετρίας
- ✓ Να μπορούν να εκφράζουν με μαθηματικές σχέσεις πραγματικά προβλήματα.
- ✓ Να μπορούν να κάνουν υποθέσεις και να ελέγχουν την αλήθεια τους.

Για την υλοποίηση του σεναρίου προτείνεται η διδασκαλία του να υλοποιηθεί

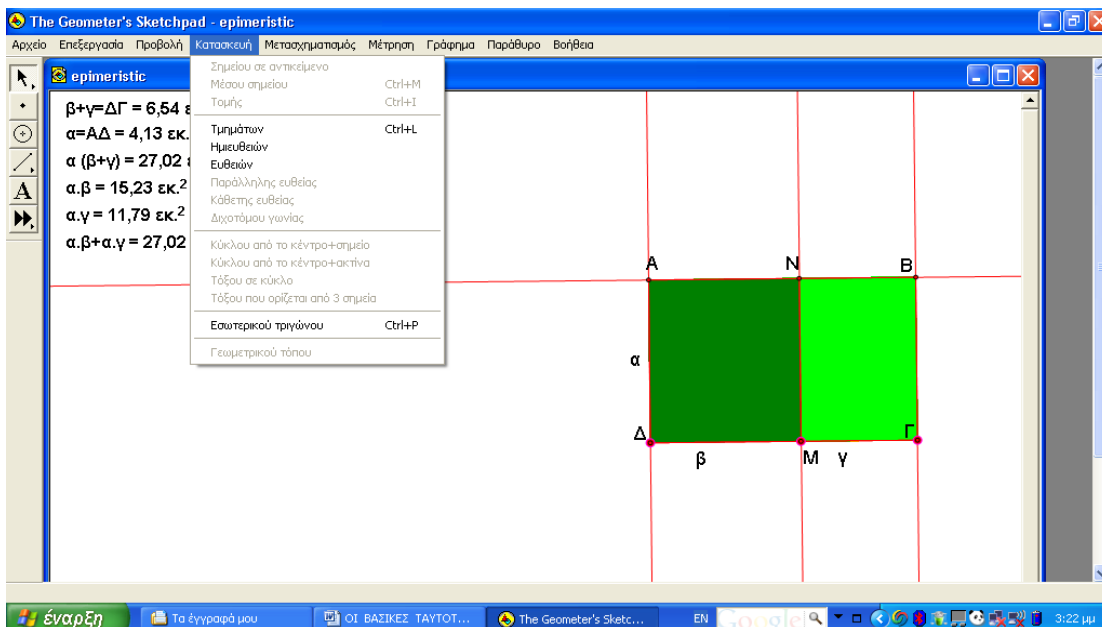
σε δύο διδακτικές ώρες , η οποία θα πραγματοποιηθεί στην αίθουσα πληροφορικής του σχολείου. Οι μαθητές προτείνεται να εργαστούν σε ομάδες των 2-3 ατόμων, όπου ο ένας μαθητής θα χειρίζεται τον υπολογιστή συνεπικουρούμενος από τους άλλους οι οποίοι θα επιβλέπουν και θα συμπληρώνουν τυχόν παραλήψεις του. Με τη διαδικασία αυτή επιμερίζονται οι εργασίες που θα τους δοθούν και έτσι αναπτύξουν το αίσθημα της συνεργασίας-άμιλλας κατά την επίλυση προβλημάτων.

4. ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ – ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΕ ΦΑΣΕΙΣ

4.1 ΦΑΣΗ ΠΡΩΤΗ

Δίνουμε στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας όπου αρχικά εμφανίζεται ένα ερώτημα από την καθημερινότητα. Το πρόβλημα αυτό είναι το εξής: Πως θα υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με γνωστές διαστάσεις αν είναι δυνατόν με δύο τρόπους.

Με την παρουσίαση του ερωτήματος κουβεντιάζουμε με τους μαθητές της τάξης και τους καθοδηγούμε στο λογικό συμπέρασμα ότι το ΕΜΒΑΔΟΝ του ορθογωνίου μπορεί να υπολογιστεί είτε με το γνωστό τύπο $E = β \cdot υ$ είτε να το χωρίσουμε σε επιμέρους ορθογώνια και να αθροίσουμε το εμβαδόν τους..



Ανοίγουμε το λογισμικό **Sketchpad** και ζητάμε από τους μαθητές να δημιουργήσουν ένα αρχείο έστω «epimeristic» να κατασκευάσουν ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ και στην συνέχεια στα άκρα του να φέρουν κάθετες από την εντολή του λογισμικού. Σε μια από αυτές τοποθετούμε τον κέρσορα και σημειώνουμε ένα σημείο A, ζητάμε από τους μαθητές να σχεδιάσουν την κάθετη ευθεία στο A. Αυτόματα δημιουργήθηκε ένα γνωστό τετράπλευρο το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ μεταβλητών διαστάσεων άρα και μεταβλητού Εμβαδού. Στη συνέχεια ζητάμε από τους μαθητές τα μετρήσουν τις διαστάσεις καθώς και το εμβαδόν του ορθογωνίου. Οι μαθητές με χρήση της δυνατότητας που τους δίνει το πρόγραμμα γράφουν σε ένα πίνακα τις τιμές που έχουν οι πλευρές του ορθογωνίου ώστε να είναι σε θέση να υπολογίσουν ευκολότερα και να γενικεύσουν τις έννοιες.

Τιμές Πλευράς : ΑΔ=α	Τιμές Πλευράς : ΔΓ	Τιμές Εμβαδού : ΑΔ·ΑΓ

Θα ήταν σωστό κάθε ομάδα παιδιών να δουλέψει με διαφορετικά δεδομένα τιμών (αλλαγή της θέσης του σημείου Α,η,Δ,η,Γ). Τοποθετώντας ένα μεταβαλλόμενο σημείο έστω Μ εντός του τμήματος ΓΔ και φέρνοντας την παράλληλη προς τις δύο προηγούμενες κάθετες χωρίσαμε το αρχικό ορθογώνιο σε δύο μικρότερα από άποψη εμβαδού παραλληλόγραμμα έτσι ώστε το άθροισμα των εμβαδών τους να ισούται με το αρχικό μας σχήμα. Θα ήταν πιο εύκολο για τους μαθητές με τις κατάλληλες εντολές του λογισμικού να αποκρύψουμε τις ευθείες εξασφαλίζοντας την διατήρηση του αρχικού σχήματος.

Οι μαθητές στη συνέχεια γράφουν σε ένα δεύτερο πίνακα τις τιμές που έχουν οι πλευρές του ορθογωνίου με δεδομένο ότι το αρχικό σχήμα χωρίστηκε σε επιμέρους ορθογώνια .

Τιμές Πλευράς : $A\Delta=\alpha$	Τιμές Πλευράς : $\Delta M=\beta$	Τιμές Πλευράς : $M\Gamma=\gamma$	Τιμές Εμβαδού : $\alpha \cdot (\beta+\gamma)$	Τιμές Εμβαδού : $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

The screenshot shows the 'The Geometer's Sketchpad - epimeristic' window. On the left, a list of values is displayed:

- $\beta + \gamma = \Delta\Gamma = 7,00$ εκ.
- $\alpha = A\Delta = 3,75$ εκ.
- $\alpha (\beta + \gamma) = 26,24$ εκ.²
- $\alpha \cdot \beta = 18,44$ εκ.²
- $\alpha \cdot \gamma = 7,80$ εκ.²
- $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma = 26,24$ εκ.²

The main workspace shows a diagram of a rectangle $AB\Gamma\Delta$ divided into three regions by a vertical line NM . The left region $ANM\Delta$ is shaded green, the right region NMB is shaded light green, and the bottom region $\Delta M\Gamma$ is shaded yellow. The side length $A\Delta$ is labeled α , the bottom segment ΔM is labeled β , and the bottom segment $M\Gamma$ is labeled γ . The top vertices are A and B , and the bottom vertices are Δ and Γ . Points N and M are on the top and bottom edges respectively.

Συζήτηση στην τάξη

Οι μαθητές παροτρύνονται να διατυπώσουν κανόνες για τις τιμές που πρέπει να δίνουν στις μεταβλητές ώστε να κατασκευάσουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο αλλά και να παρατηρήσουν την ισότητα που δημιουργείται. Η εμπειρία από τη συνεχή επανάληψη θα τροφοδοτήσει σχετική συζήτηση τόσο στα πλαίσια της κάθε ομάδας ,όσο και στη τάξη συνολικά με στόχο να διατυπώσουν συμπεράσματα όπως τα παρακάτω:

* Το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους ορθογωνίων αποτελεί το αρχικό σχέδιο.

* Σε κάθε περίπτωση ισχύει η $a \cdot (\beta + \gamma) = a \cdot \beta + a \cdot \gamma$. Η επιμεριστική ιδιότητα γνωστή από τις προηγούμενες τάξεις και που ισχύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

Έτσι οι μαθητές αποκτούν μια πρώτη ιδέα για την έννοια της ταυτότητας, βοηθούμενοι από το γεωμετρικό σχήμα.

4.2 ΦΑΣΗ 2^η (Η ταυτότητα $(a+b)^2$)

Με το ίδιο φύλλο εργασίας θέτουμε στους μαθητές ένα απλό προβληματισμό.

Εάν η ισότητα $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot \beta + \beta^2$ μπορεί να μεταφραστεί-ερμηνευτεί γεωμετρικά με τη βοήθεια εμβαδών τετραγώνων, ορθογωνίων παραλληλογράμων.

Με ποιες προϋποθέσεις και κάτω από ποιες συνθήκες.

The Geometer's Sketchpad - (a+b)²

Αρχείο Επεξεργασία Προβολή Κατασκευή Μετασχηματισμός Μέτρηση Γράφημα Παράθυρο Βοήθεια

(a+b)²

α=AB = 3,71 εκ. α+β=ΑΓ = 5,54 εκ.
 β=ΒΓ = 1,83 εκ. γ+δ=ΑΕ = 5,54 εκ.
 γ=ΑΔ = 3,48 εκ.
 δ=ΔΕ = 2,05 εκ. (ΕΘΓΑ)=(α+β) (γ+δ) = 30,65 εκ.²

(α+β)·(γ+δ)=α·β+α·γ+β·γ+β·δ = 30,65 εκ.²

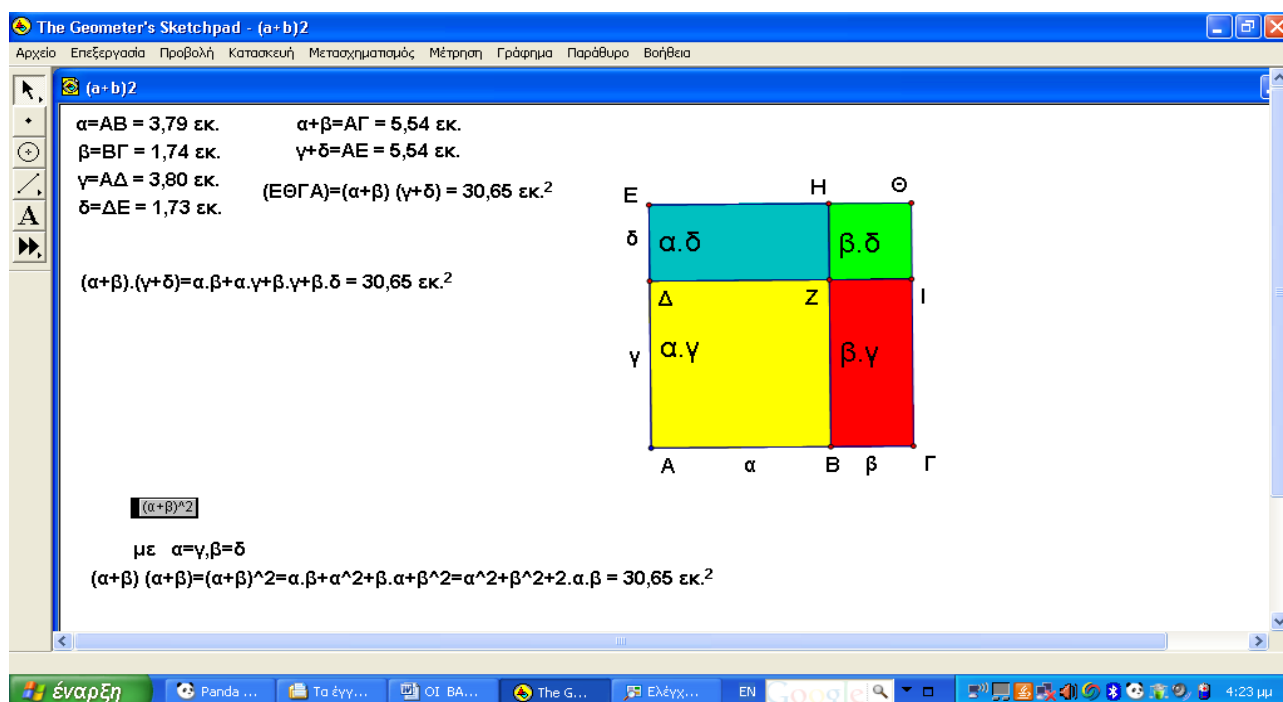
α δ β δ
 Δ Ζ Ι
 γ α·γ β·γ
 Α α Β β Γ

(a+b)²
 με α=γ, β=δ
 (α+β) (α+β)=(α+β)²=α·β+α²+β·α+β²=α²+β²+2·α·β = 30,65 εκ.²

έναρξη Τα έγγραφα μου Windows Media... ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ Τ... The Geometer's... EN Google... 3:29 μμ

Με το λογισμικό **Sketchpad** ζητάμε από τους μαθητές να δημιουργήσουν ένα δεύτερο αρχείο έστω « $(a+b)^2$ » να κατασκευάσουν ένα τυχαίο κύκλο (o,r) και στην συνέχεια να κατασκευάσουν ένα τετράγωνο $AEΘΓ$ με τη βοήθεια δύο κάθετων διαμέτρων. Στις πλευρές του AE,AG παίρνουμε αντίστοιχα δύο τυχαία μεταβλητά σημεία $B,Δ$ και φέρνουμε στα σημεία αυτά δύο κάθετες ευθείες με σκοπό να σχηματισθούν 4 ορθογώνια παραλληλόγραμμα. μεταβλητών διαστάσεων άρα και μεταβλητού εμβαδού.

Στη συνέχεια ζητάμε από τους μαθητές να ονομάσουν τα τετράπλευρα που δημιουργήθηκαν να μετρήσουν τις διαστάσεις καθώς και τα εμβαδά των τετραπλεύρων καθώς και να τα χρωματίσουν με την κατάλληλη εντολή σημειώνοντας τις 4 κορυφές και επιλέγοντας «Εσωτερικό τετραπλεύρου» με τον συνδυασμό των κατάλληλων χρωμάτων. Αυτόματα δημιουργήθηκε ένα ορθογώνιο με διαστάσεις $a+b, \gamma+\delta$ το οποίο αποτελείται από γνωστά ορθογώνια εμβαδού $a.\delta, a.\gamma, \beta.\gamma, \beta.\delta$ έτσι ώστε $(AEΘΓ)=(EHΔZ)+(HΘIZ)+(ZIΓB)+(ABZΔ)$. Θα ήταν σωστό κάθε ομάδα παιδιών να δουλέψει με διαφορετικά δεδομένα τιμών (αλλαγή της θέσης των σημείων $B,Δ$ έτσι ώστε ανα πάσα στιγμή να ισχύει η γνωστή ισότητα από τα εμβαδά $(a+b).\gamma+\delta=a.\delta+a.\gamma+\beta.\gamma+\beta.\delta$. Θα ήταν πιο εύκολο για τους μαθητές με τις κατάλληλες εντολές του λογισμικού να αποκρύψουμε τις ευθείες εξασφαλίζοντας τις ιδιότητες του αρχικού σχήματος

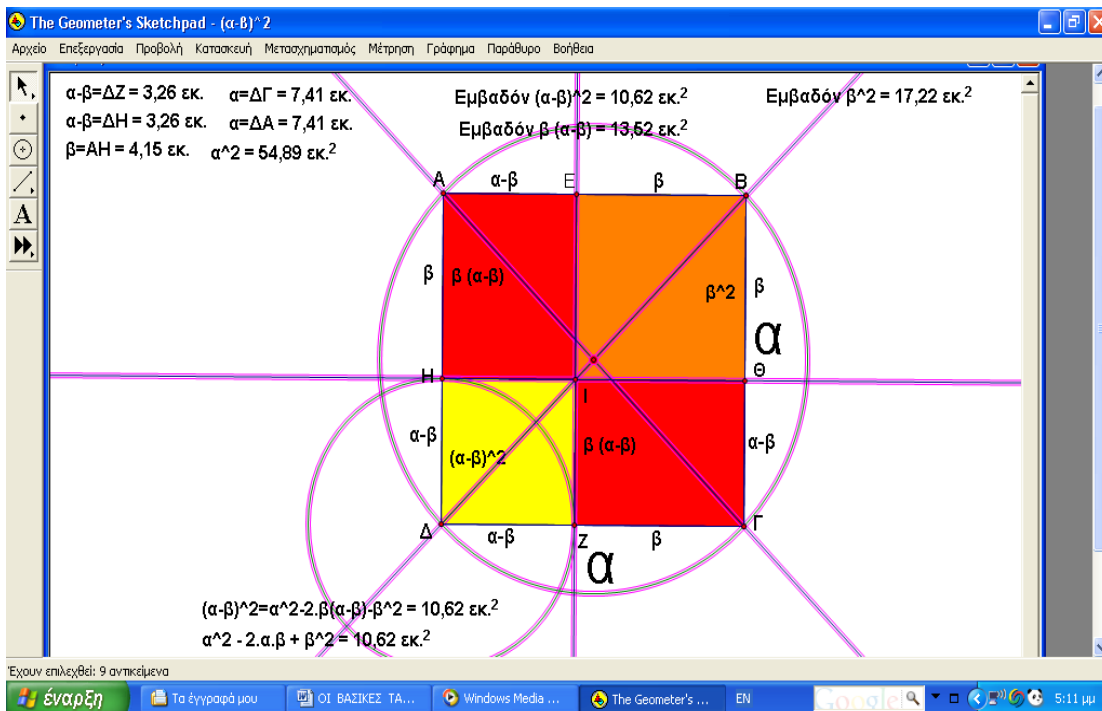


Ζητάμε από τους μαθητές να επαναλάβουν την παραπάνω διαδικασία και να σχηματίσουν ορθογώνια με διαστάσεις $a=\gamma$ και $\beta=\delta$ δηλαδή να δημιουργήσουν το τετράγωνο με διάσταση $a+\beta$ και εμβαδό $(a+\beta)^2$ και τα επιμέρους τετράγωνα με εμβαδά a^2 και β^2 καθώς και τα ορθογώνια με εμβαδά $a.\delta = a.\beta$ και $\beta.\gamma = \beta.a$. Οπότε η προφανής ισότητα $(a+\beta).\gamma+\delta = a.\delta + a.\gamma + \beta.\gamma + \beta.\delta$ μετατρέπεται πολύ εύκολα στην $(a+\beta)^2 = a^2 + 2.a.\beta + \beta^2$ η οποία αντιστοιχεί σε μια τις σπουδαιότερες βασικές ταυτότητες.

Συζήτηση στην τάξη

Συζητάμε με τους μαθητές την ισότητα με τα εμβαδά που δημιουργείται σε κάθε περίπτωση $(a+\beta).\gamma+\delta = a.\delta + a.\gamma + \beta.\gamma + \beta.\delta$ και η οποία μετασχηματίζεται στην γνωστή ταυτότητα ‘ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ’, δοσμένη από μια άλλη πλευρά διερευνώντας και ‘παίζοντας’ με τη βοήθεια της γεωμετρικής ερμηνείας. Είναι προφανές ότι οι μαθητές μπορούν να πειραματιστούν απεριόριστα και με τη βοήθεια του φύλλου εργασίας να εμπεδώσουν την έννοια της συγκεκριμένης ταυτότητας. Κατά τη διάρκεια του διαλόγου ίσως κάποιοι μαθητές διακρίνουν την διπλή επιμεριστική ιδιότητα σε αντιδιαστολή με την επιμεριστική στην πρώτη φάση του σεναρίου, οπότε αυτόματα εισάγουν και την έννοια της αποδεικτικής διαδικασίας και για τις υπόλοιπες ταυτότητες.

4.3 ΦΑΣΗ 3^η (Η ταυτότητα $(\alpha-\beta)^2$)

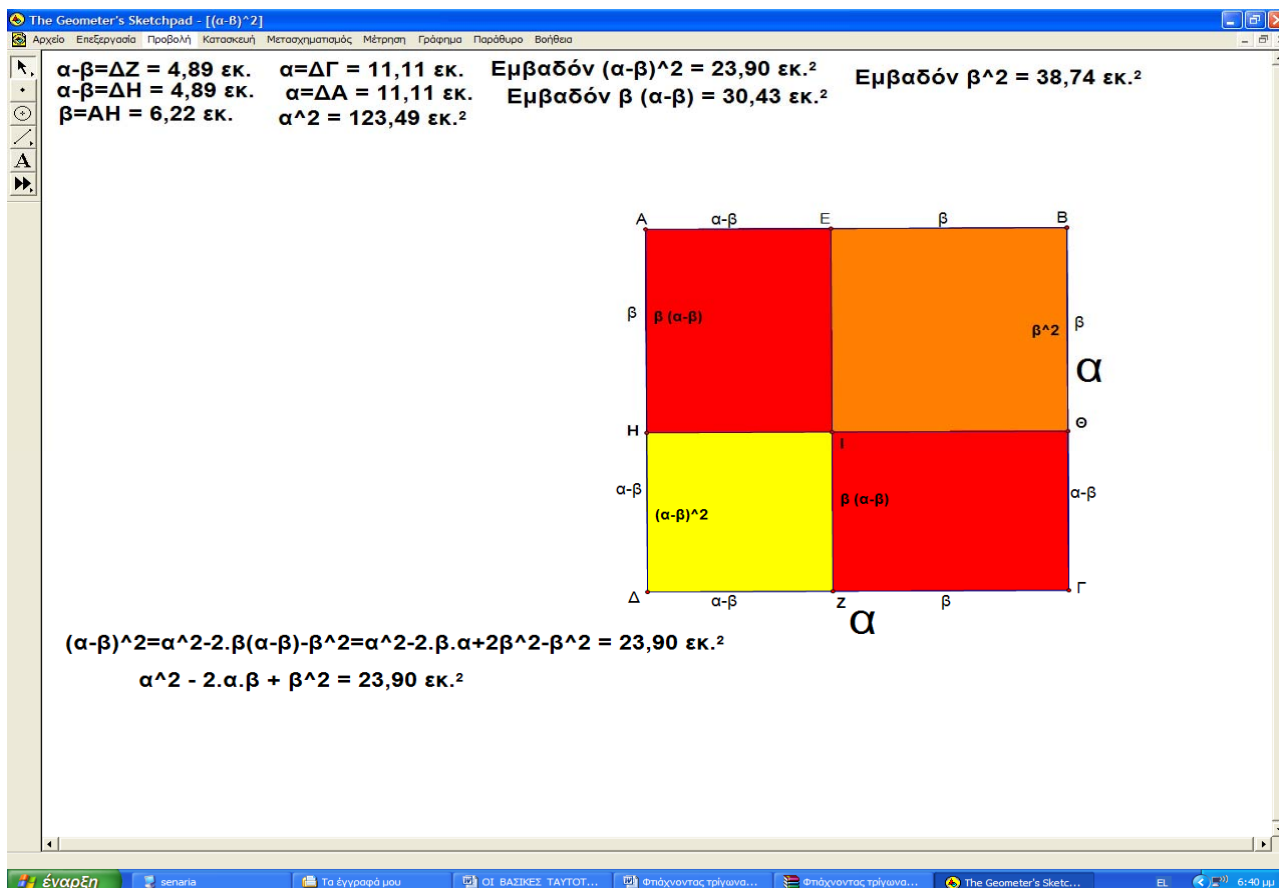


Δίνουμε στους μαθητές το δεύτερο φύλλο εργασίας , εξεικονωμένοι με τις προηγούμενες ισότητες ανοίγουμε το λογισμικό **Sketchpad** και ζητάμε από τους μαθητές να δημιουργήσουν ένα αρχείο έστω

« $(\alpha-\beta)^2$ » και να κατασκευάσουν ένα τυχαίο κύκλο (o,R) και στην συνέχεια να κατασκευάσουν ένα τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με τη βοήθεια δύο κάθετων διαμέτρων και με πλευρά α . Με κέντρο την κορυφή Δ και ακτίνα μεταβλητή έστω ρ σχεδιάζουμε κύκλο που τέμνει τις πλευρές AD , $D\Gamma$ σε τυχαία μεταβαλλόμενα σημεία Z , H και φέρνουμε στα σημεία αυτά δύο κάθετες ευθείες με σκοπό να σχηματισθούν τετράγωνα με διαστάσεις $\alpha-\beta$ και β . καθώς και ορθογώνια με διαστάσεις $\beta, \alpha-\beta$. .Στη συνέχεια ζητάμε από τους μαθητές να ονομάσουν τα τετράπλευρα που δημιουργήθηκαν καθώς και να τα χρωματίσουν με την κατάλληλη εντολή σημειώνοντας τις 4 κορυφές και επιλέγοντας «Εσωτερικό τετραπλεύρου» και τον συνδιασμό των κατάλληλων χρωμάτων. Αυτόματα δημιουργήθηκε ένα τετράγωνο με διαστάση α το οποίο αποτελείται από γνωστά τετράγωνα , ορθογώνια εμβαδού $(\alpha-\beta)^2$, β^2 , $\beta(\alpha-\beta)$ έτσι ώστε $(AB\Gamma\Delta)=(HI\Delta Z)+(AEHI)+(EB\Theta I)+(I\Theta\Gamma Z)$.

Θα ήταν σωστό κάθε ομάδα παιδιών να δουλέψει με διαφορετικά δεδομένα τιμών (αλλαγή της θέσης των σημείων Z,H έτσι ώστε ανα πάσα στιγμή να ισχύει η γνωστή ισότητα από τα εμβαδά

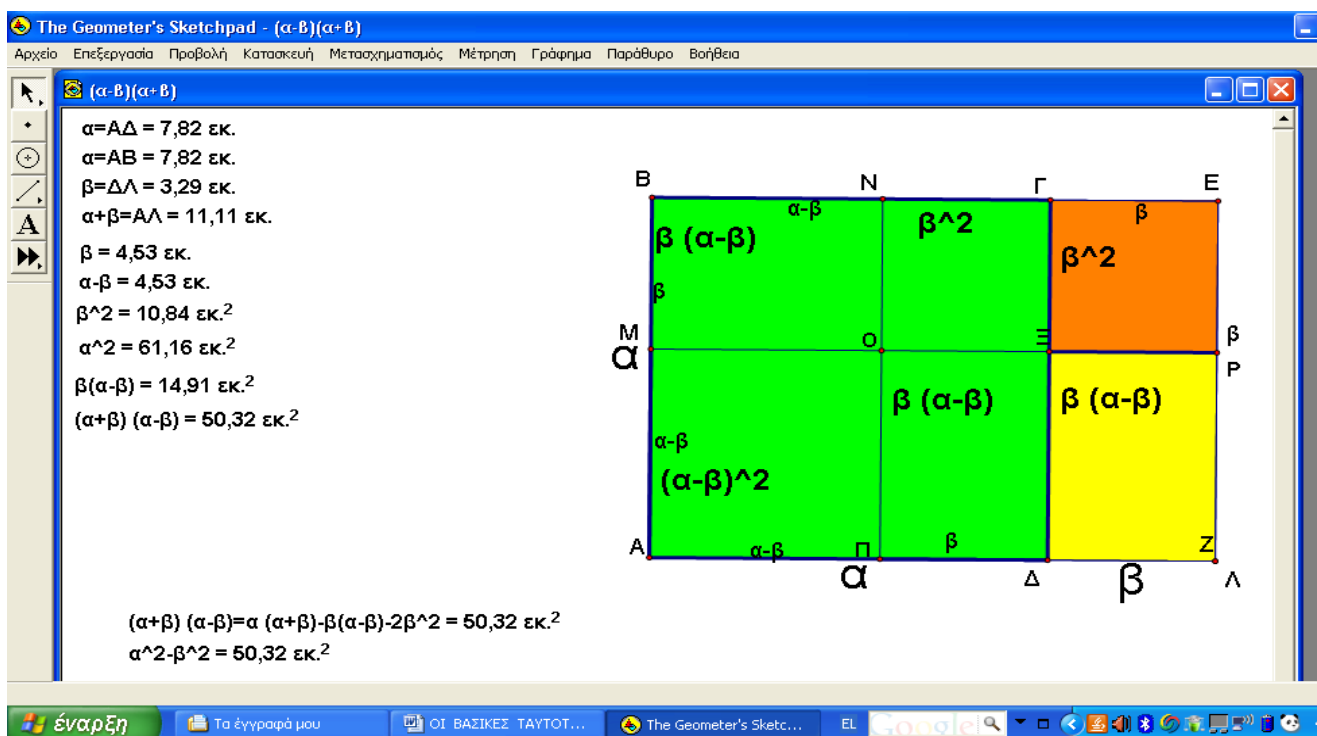
$a^2 = (a-b)^2 + \beta^2 + 2\beta \cdot (a-b)$. Θα ήταν πιο εύκολο για τους μαθητές με τις κατάλληλες εντολές του λογισμικού να αποκρύψουμε τις ευθείες εξασφαλίζοντας τις ιδιότητες του αρχικού σχήματος.



Συζήτηση στην τάξη

Κατά την ανταλλαγή σκέψεων με τους μαθητές πρέπει να τονισθεί η αφαιρετική τους ικανότητα που έχει αποκτηθεί στην επαφή τους με τα εμβαδά και που συνοψίζεται στην ισότητα $(a-b)^2 = a^2 - \beta^2 - 2\beta \cdot (a-b)$ η οποία συγκρινόμενη με τη $(a-b)^2 = a^2 + \beta^2 - 2\alpha \cdot \beta$ δημιουργεί την καινούρια ταυτότητα ‘ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ’. Κατά τη διάρκεια του μαθήματος όλοι οι μαθητές θα πρέπει να πειραματισθούν και με αντικατάσταση των μεταβλητών να πεισθούν για το αληθές της πρότασης.

Θα ήταν προτιμότερο κάθε ομάδα παιδιών να δουλέψει με διαφορετικά δεδομένα τιμών (αλλαγή της θέσης των σημείων Λ , Δ έτσι ώστε ανά πάσα στιγμή να επαληθεύσει την προηγούμενη ταυτότητα).



Συζήτηση στην τάξη

Είναι σημαντικό κατά τη συζήτηση μέσα στην τάξη να εμπεδωθεί η σύγκριση εμβαδών ορθογωνίου και τετραγώνων $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ και να αιτιολογηθεί αλήθεια της ισότητας η οποία δημιουργεί την καινούρια ταυτότητα ‘ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ’.

5. ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ

Το σενάριο αυτό μπορεί να προεκταθεί και για την διδασκαλία των υπόλοιπων ταυτοτήτων, με σημαντικές όμως δυσκολίες για τα παιδιά της Γ γυμνασίου καθώς οι ταυτότητες με τους κύβους δημιουργούν όγκους στερεών και ίσως ξεφεύγει η χρησιμότητα του σεναρίου από το γνωστικό τους πεδίο.

Η χρήση των λογισμικών μπορεί να βοηθήσει ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν γεωμετρικά πολλές αλγεβρικές ισότητες, εξάλλου στις τάξεις του λυκείου και ιδιαίτερα στην ανάλυση τόσο στον διαφορικό όσο και τον ολοκληρωτικό λογισμό είναι συχνή ακόμα και από τα σχολικά εγχειρίδια η αναφορά στις γεωμετρικές ερμηνείες πολλών θεωρημάτων.

