Θέμα 1ο

Α) Δίνεται μία συνάρτηση $f: R \to R$ συνεχής στο R και τέτοια ώστε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Να αποδείξετε ότι η f είναι «επί», δηλαδή ότι για κάθε $y \in R$ υπάρχει $x \in R$, τέτοιο ώστε $f(x) = y$.

Λύση: έστω $y \in R$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, υπάρχει $x_1 \in R$ τέτοιο ώστε $f(x_1) > y$. Επιπλέον, επειδή $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, υπάρχει $x_2 \in R$ τέτοιο ώστε $f(x_2) < y$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι $x_2 < x_1$. Τότε, η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_2, x_1]$, από την υπόθεση, και επιπλέον ισχύει: $f(x_2) < y < f(x_1)$. Επομένως, από το ΘΕΤ, υπάρχει $x \in (x_2, x_1)$, τέτοιο ώστε $f(x) = y$, άρα η f είναι «επί».

Β) Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + 2f(x) = x$, για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R.

Λύση: έστω g(x) = x. Τότε η δοσμένη σχέση γράφεται $f^3(x) + 2f(x) = g(x)$. Έστω επίσης η συνάρτηση $h(x) = x^3 + 2x$. Η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο R (χρειάζεται να αποδειχθεί) και επομένως «1 – 1», άρα αντιστρέφεται. Κατά συνέπεια η αρχική σχέση γίνεται:

$$f^3(x) + 2f(x) = g(x) \Rightarrow h\big(f(x)\big) = g(x) \Rightarrow h^{-1}\Big(h\big(f(x)\big)\Big) = h^{-1}\big(g(x)\big)$$
$$\Rightarrow f(x) = h^{-1}(g(x))$$

Η συνάρτηση g(x) είναι συνεχής

Η συνάρτηση h(x) είναι συνεχής ως πολυωνυμική και επειδή είναι αντιστρέψιμη, θα είναι και η αντίστροφή της συνεχής (σημείωση: η αντίστροφη μίας συνεχούς, γνησίως μονότονης και «1 – 1» συνάρτησης είναι επίσης συνεχής)

Επομένως η συνάρτηση f(x) θα είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

Θέμα 2ο

Α) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\eta\mu x}-\sqrt{1-\eta\mu x}}{x}$

Λύση: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\eta\mu x}-\sqrt{1-\eta\mu x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+\eta\mu x}-\sqrt{1-\eta\mu x})(\sqrt{1+\eta\mu x}+\sqrt{1-\eta\mu x})}{x(\sqrt{1+\eta\mu x}+\sqrt{1-\eta\mu x})}=$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\eta\mu x}{x(\sqrt{1+\eta\mu x}+\sqrt{1-\eta\mu x})}=\frac{2}{1+1}=1$

Β) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)^{\sqrt{x}}$

Λύση: έστω x > 0 και ότι:

$$y=\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)^{\sqrt{x}}\Rightarrow \ln y=\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\Rightarrow \ln y$$
$$=\sqrt{x}\ln\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}\Rightarrow \ln y$$
$$=\sqrt{x}\ln\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}\Rightarrow \ln y=\sqrt{x}\ln\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}$$

$$\Rightarrow \ln y=\sqrt{x}\ln\frac{1}{1\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}\Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\ln y=\lim_{x\to +\infty}\left[\sqrt{x}\ln\frac{1}{1\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\ln y=+\infty\ln\frac{1}{2}=-\infty$$

Επομένως: $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)^{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}y=\lim\limits_{x\to +\infty}e^{\ln y}=0$

Θέμα 3ο:

Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5 + x - 1 = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

Λύση: θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^5 + x - 1$. Έστω το διάστημα [0, 1]. Η g είναι συνεχής στο [0, 1] ως πολυωνυμική, ενώ επιπλέον: $g(0) = -1 < 0$ και $g(1) = 1 > 0$. Επομένως, από το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της συνάρτησης στο $(0,1) \subseteq R$. Η μοναδικότητα της ρίζας αποδεικνύεται από τη μονοτονία.

Β) Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f: [0, 1] \to [0, 1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in [0, 1]$, τέτοιο ώστε $f(x_o) = x_o$ (σταθερό σημείο).

Λύση: θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$. Η h είναι συνεχής στο [0,1] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

- Αν $f(0) = 0$, τότε το $x_o = 0$ είναι το ζητούμενο σταθερό σημείο
- Αν $f(1) = 1$, τότε το $x_o = 1$ είναι το ζητούμενο σταθερό σημείο
- Αν $f(0) \neq 0$ και $f(1) \neq 1$, τότε επειδή $f: [0,1] \to [0,1]$, πρέπει $0 < f(0) \leq 1$ και $0 \leq f(1) < 1$

Επομένως, $h(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0$ και $h(1) = f(1) - 1 < 0$

Κατά συνέπεια, από το θεώρημα Bolzano (επειδή η h είναι συνεχής στο [0,1] και επιπλέον $h(0)h(1) < 0$), υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in [0,1]$, τέτοιο ώστε $h(x_o) = 0 \Rightarrow f(x_o) - x_o = 0 \Rightarrow f(x_o) = x_o$

Παρατήρηση: Τα παραπάνω θέματα στα Όρια και τη Συνέχεια Συνάρτησης για τη Γ' Λυκείου δημιουργήθηκαν κατόπιν συνεργασίας με ένα γλωσσικό μοντέλο τεχνητής νοημοσύνης, κατόπιν αιτήματος για δημιουργία διαγωνίσματος. Η διαδικασία περιλάμβανε τον καθορισμό της ύλης και των επιθυμητών χαρακτηριστικών του διαγωνίσματος, βάσει των οποίων το γλωσσικό μοντέλο παρήγαγε τα θέματα. Αναγνωρίζεται ότι ορισμένα επιμέρους ερωτήματα ενδέχεται να παρουσιάζουν ομοιότητες με ασκήσεις που συναντώνται σε σχολικά βιβλία ή βοηθήματα, καθώς βασίζονται σε κοινές μαθηματικές έννοιες και τεχνικές. Ωστόσο, έγινε προσπάθεια για τη δημιουργία πρωτότυπων συνδυασμών και σύνθετων θεμάτων. Εάν εντοπίσετε κάποιο θέμα που θεωρείτε ότι αποτελεί ακριβή αντιγραφή υπάρχουσας πηγής, παρακαλούμε να μας ενημερώσετε.