



Σελίδα 1/3 Κανονική περίοδος 2024

Κανονική περίοδος 2024

Δεύτερη γραπτή δοκιμασία

Υπουργείο Παιδείας και Αξιοκρατίας

A002 – ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ο υποψήφιος να λύσει ένα από τα δύο προβλήματα και να απαντήσει σε 4 ερωτήσεις του ερωτηματολογίου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω $f_{a,b}(x) = \frac{ax^3+b}{x^2}$ με $a, b \in \mathbb{R}$.

A) Να προσδιοριστούν οι τιμές των παραμέτρων έτσι ώστε η ευθεία t , με εξίσωση $7x + y - 12 = 0$, να είναι εφαπτόμενη στο γράφημα της $f_{a,b}(x)$ στο σημείο P με τετμημένη $x = 1$.

Θέτουμε από τώρα και στο εξής, $a = 1$ και $b = 4$.

B) Μελετήστε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$ και σχεδιάστε το γράφημα γ . γράψτε την εξίσωση της επιπλέον εφαπτομένης στην καμπύλη γ που διέρχεται από το P .

C) Με τη μεταβολή της πραγματικής παραμέτρου m , να προσδιοριστεί ο αριθμός των τομών της ευθείας με εξίσωση $y - 5 = m(x - 1)$ και της καμπύλης γ .

D) Έστω $S(k)$, με $k > \frac{3}{2}$, η περιοχή του επιπέδου που περικλείεται από την καμπύλη γ , την πλάγια ασύμπτωτή της, την ευθεία t και την ευθεία με εξίσωση $x = k$. υπολογίστε το όριο $\lim_{k \rightarrow +\infty} S(k)$, παρέχοντας μία γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος.

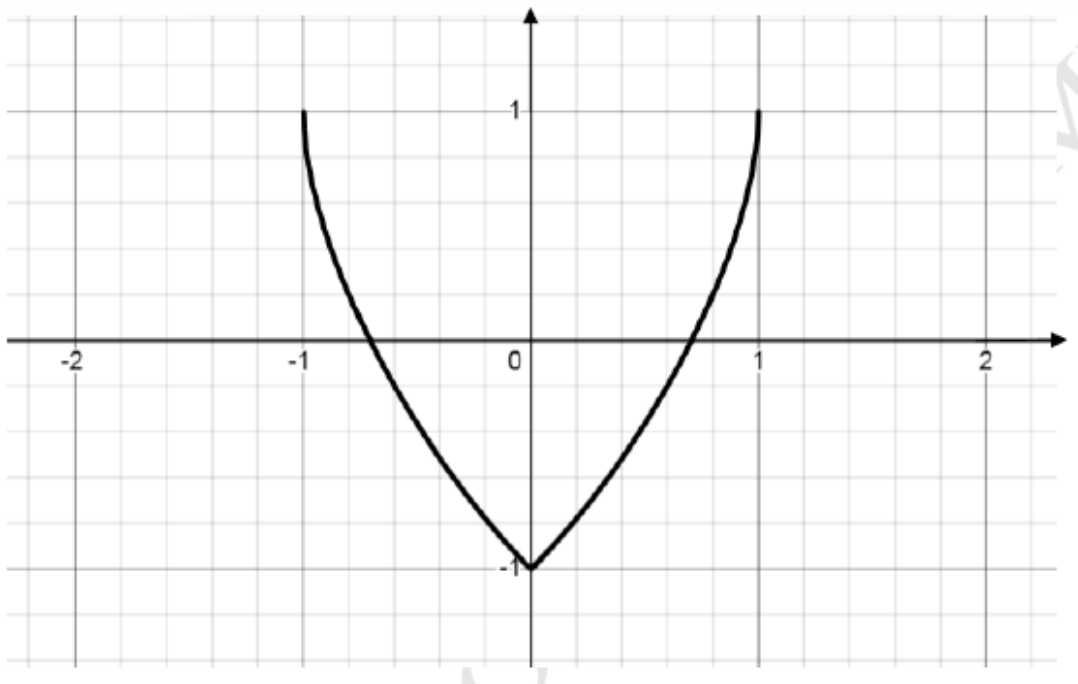
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

«Στην αρχή και στο τέλος, έχουμε το μυστήριο. [...] Σε αυτό το μυστήριο τα μαθηματικά πλησιάζουν, χωρίς όμως να το διαπεράσουν». (E. De Giorgi)

Έστω η οικογένεια συναρτήσεων $f_n(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$, με $n \in \mathbb{N}, n > 1$ και $a, b \in \mathbb{R}, a < 0$.

- A) Επαληθεύστε ότι, ανεξαρτήτως της τιμής του n , η συνάρτηση f_n δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο με τετμημένη $x = 0$. Προσδιορίστε την τιμή του n στην οποία το γράφημα της f_n παρουσιάζει γωνιακό σημείο. Για κατάλληλες τιμές των παραμέτρων a, b , το γράφημα a , στην εικόνα αναπαριστά τη συνάρτηση $f_2 = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$. Προσδιορίστε τις παραμέτρους a, b , λαμβάνοντας υπόψη ότι η f_2 ορίζεται στο $[-1, 1]$ και ότι το γράφημά της είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα των τεταγμένων.

Σελίδα 2/3 Κανονική περίοδος 2024



Θέτουμε, από τώρα και στο εξής, $a = -1$ και $b = 0$.

- B) Μελετήστε τη συνάρτηση $g(x) = |x| - \sqrt{1 - x^2}$, επαληθεύοντας ότι δεν είναι παραγωγίσιμη στα άκρα του πεδίου ορισμού της και στο σημείο με τετμημένη $x = 0$. Υποδείξτε με β το γράφημά της και σχεδιάστε την καμπύλη $\gamma = \alpha \cup \beta$.
- C) Η ευθεία r , με εξίσωση $x = k$, με $-1 < k < 1$, τέμνει τη γ στα σημεία P και Q. Αποδείξτε ότι το μήκος του τμήματος PQ είναι μέγιστο όταν η r είναι άξονας συμμετρίας της γ .
- D) Επαληθεύστε ότι η συνάρτηση $H(x) = \frac{1}{2}(\arcsen(x) + x\sqrt{1 - x^2})$ είναι μία παράγουσα της συνάρτησης $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Με τη μέθοδο που θεωρείτε πιο κατάλληλη, υπολογίστε την περιοχή του επιπέδου που οριοθετείται από την γ .

«Οι μορφές που δημιουργεί ο μαθηματικός, όπως αυτές που δημιουργεί ο ζωγράφος ή ο ποιητής, πρέπει να είναι όμορφες: οι ιδέες, όπως τα χρώματα ή οι λέξεις, πρέπει να συνδέονται αρμονικά. Η ομορφιά είναι η θεμελιώδης απαίτηση: στον κόσμο δεν υπάρχει διαρκής χώρος για άσχημα μαθηματικά». (G. H. Hardy)

Σελίδα 3/3 Κανονική περίοδος 2024

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Έστω ένα τρίγωνο $AB\Gamma$, ορθογώνιο στο B . Αποδείξτε ότι αυτό το τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν το ύψος BH που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το μισό της υποτείνουσας.
2. Ρίχνεται 5 φορές ένα στημένο νόμισμα που δίνει κεφάλι με πιθανότητα p .
 - Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί κεφάλι ακριβώς 2 φορές;
 - Για ποια τιμή του p η πιθανότητα να εμφανιστεί κεφάλι ακριβώς δύο φορές είναι η μέγιστη;
3. Στο χώρο με ορθοκανονικό καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Oxyz$, δίνεται το επίπεδο $\pi: 3x - 2y + 5 = 0$.
 - Προσδιορίστε τις συντεταγμένες του σημείου H , ορθογώνια προβολή του $P(4, 2, 1)$ στο επίπεδο π .
 - Προσδιορίστε την τομή της ευθείας $s: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$ με το επίπεδο π .
4. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^3 + x - \cos(x) = 0$ έχει μία μοναδική θετική λύση.
5. Προσδιορίστε την πολυωνυμική συνάρτηση τετάρτου βαθμού $y = p(x)$ γνωρίζοντας ότι, σε ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων, το γράφημά της ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:
 - Είναι εφαπτόμενη στον άξονα x στην αρχή των αξόνων.
 - Διέρχεται από το σημείο $(1, 0)$.
 - Έχει στάσιμο σημείο στο $(2, -2)$.
6. Έστω η συνάρτηση ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x \frac{\cos(\frac{1}{t})}{t^2} dt$, με $x \geq a$, όπου a είναι μία θετική πραγματική παράμετρος. Προσδιορίστε τη μεγαλύτερη τιμή του a έτσι ώστε $F\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\frac{1}{2}$.

7. Στις 5 Ιουλίου η Γη θα φτάσει στο αφήλιο, το σημείο της τροχιάς της στο οποίο είναι μέγιστη η απόσταση από τον Ήλιο, ίση με περίπου $1,52 \cdot 10^{11} \text{m}$. Το περιήλιο είναι αντίστοιχα το σημείο που βρίσκεται στη μικρότερη απόσταση από τον Ήλιο, ίση με περίπου $1,47 \cdot 10^{11} \text{m}$. Προσδιορίστε, σε ένα κατάλληλο σύστημα αναφοράς, την εξίσωση που αναπαριστά την τροχιά της Γης γύρω από τον Ήλιο.
8. Γράφει ο Carlo Emilio Gadda σε ένα από τα διηγήματά του «Η Adalgisa – Σχέδια του Μιλάνο» «Τα δωμάτια της υπηρεσίας, το μπάνιο, οι διάδρομοι, η αίθουσα αναμονής και ή μία από τις δύο τουαλέτες, ήταν δαπεδοστρωμένα με κόκκινα πλακάκια μικρού μεγέθους: εξαγωνικά [...]. Το απόστημα των πλακιδίων αυτών μέτρησε 5,196 εκατοστάⁱ ενώ η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου έφτασε τα 60 χιλιοστά.»

Εκφράστε τη σχέση μεταξύ της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου και του αποστήματος (δηλαδή της ακτίνας του εγγεγραμμένου κύκλου) για ένα κανονικό εξάγωνο. Επαληθεύστε το αποτέλεσμα υπό το φως των διαστάσεων που αναφέρει ο συγγραφέας. Εξηγήστε γιατί, χρησιμοποιώντας κανονικά εξάγωνα πλακάκια όλα ομοιόμορφα, είναι δυνατό να στρώσετε ένα δάπεδο. Με ποια άλλα κανονικά πολύγωνα, ομοιόμορφα μεταξύ τους, είναι δυνατό να στρώσετε ένα επίπεδο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

i

ⁱ Μέγιστη διάρκεια της δοκιμασίας: 6 ώρες.

Επιτρέπεται η χρήση επιστημονικών ή γραφικών αριθμομηχανών υπό την προϋπόθεση ότι δε διαθέτουν συμβολική αλγεβρική δυνατότητα επεξεργασίας και δεν έχουν δυνατότητα σύνδεσης στο διαδίκτυο.

Επιτρέπεται η χρήση δίγλωσσου λεξικού (ιταλο – γλώσσα της χώρας προέλευσης) για τους υποψηφίους με μητρική γλώσσα διαφορετική της Ιταλικής. Δεν επιτρέπεται η αποχώρηση από το ίδρυμα πριν την παρέλευση 3 ωρών από την παράδοση του θέματος.