Παναγιώτης Μάντζαρης
Μαθηματικός MSc – Εκπαιδευτικός

Πανελλαδικές Εξετάσεις

Ημερησίων – Εσπερινών Επαγγελματικών Λυκείων

Σάββατο 1 Ιουνίου 2024

Εξεταζόμενο Μάθημα:

Μαθηματικά (Άλγεβρα)

Ενδεικτικές Λύσεις με Προτεινόμενη Κατανομή Μονάδων

ΘΕΜΑ Α

Α1. (σελίδα 31 στο «Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής» - Βιβλίο Μαθητή) **Μονάδες 10**

Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$. Έχουμε — 1 μονάδα

$$F(x+h) - F(x) = \big(f(x+h) + g(x+h)\big) - \big(f(x) + g(x)\big)$$ 2 μονάδες

$$= \big(f(x+h) - f(x)\big) + (g(x+h) - g(x))$$ 1 μονάδα

Και για $h \neq 0$, — 1 μονάδα

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$ 2 μονάδες

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$ 1 μονάδα

$$= f'(x) + g'(x)$$ 1 μονάδα

Άρα $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ — 1 μονάδα

Α2. **Μονάδες 7**

(α) (σελίδα 65 στο «Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής» - Βιβλίο Μαθητή) ***Μονάδες 3***

Συχνότητα ν_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i, $i = 1, 2, \ldots, \kappa$ ονομάζεται ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων.

(β) (σελίδα 87 στο «Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής» - Βιβλίο Μαθητή) ***Μονάδες 4***

$$\bar{x} = \frac{x_1w_1 + x_2w_2 + \cdots + x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + \cdots + w_\nu} \text{ ή } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}$$

Παρατήρηση: οι υποψήφιοι/υποψήφιες μπορούν να δώσουν ως απάντηση όποιο τύπο επιθυμούν

Α3. **Μονάδες 8**

α) Λ – β) Λ – γ) Σ – δ) Σ — Μονάδες 2Χ4

ΘΕΜΑ Β

Β1. **Μονάδες 4**

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + \frac{1}{3}\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' - 3(x^2)' + 5(x)' + \left(\frac{1}{3}\right)' =$$

Μονάδα 1

$$= \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x + 5 \cdot 1 + 0 =$$

Μονάδες 2

$$= x^2 - 6x + 5$$

Μονάδα 1

Β2. **Μονάδες 10**

Θέτουμε $f'(x) = 0$ Μονάδα 1

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \begin{array}{l} \to x_1 = 1 \\ \to x_2 = 5 \end{array}$$

Μονάδα 1

x	-oo		1		5	+oo
f'		+	0	-	0	+
f		↗		↘		↗
			Τ.Μ.		Τ.Ε.	

Μονάδα 1

Μονάδα 1

Μονάδα 1

Μονοτονία: η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο (-oo, 1] και στο [5, +oo) Μονάδες 2

η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο [1, 5] Μονάδα 1

Ακρότατα: για x = 1 η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο f(1) = 8/3 Μονάδα 1

για x = 5 η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο f(5) = -8 Μονάδα 1

Β3. **Μονάδες 7**

Η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι της μορφής: y = αx + β Μονάδα 1

α = f΄(0) = 5 Μονάδες 2

οπότε y = 5x + β Μονάδα 1

για x = 0: y = f(0) = 1/3 Μονάδα 1

επομένως: 1/3 = 5·0 + β, άρα β = 1/3 Μονάδα 1

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι: y = 5x + 1/3 Μονάδα 1

Β4. **Μονάδες 4**

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1) =$$

Μονάδες 2

$$= (-1)^2 - 6(-1) + 5 =$$

Μονάδα 1

$$= 12$$

Μονάδα 1

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. **Μονάδες 6**

$$s = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{2x-2} \underset{=}{\left(\frac{0}{0}\right)}$$ Μονάδες 2

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+7)}{2(x-1)} =$$ Μονάδες 2

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x+7)}{2} =$$ Μονάδα 1

$$= \frac{8}{2} = 4$$ Μονάδα 1

Γ2. **Μονάδες 4**

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \Longrightarrow \frac{20}{100} = \frac{4}{|\bar{x}|} \Longrightarrow 20|\bar{x}| = 400 \Longrightarrow |\bar{x}| = 20 \Longrightarrow \bar{x} = \pm 20$$ Μονάδες 2

Έστω οι θερμοκρασίες 22, 18, θ = 20 + κ, 14, 16

Αν $\bar{x} = +20$, τότε θ = 30

Αν $\bar{x} = -20$, τότε θ = -170

Κατά συνέπεια η αρνητική λύση απορρίπτεται, αφού δεν μπορεί να έχει καταγραφεί θερμοκρασία το πρωί μίας ημέρας σε Ελληνική πόλη ίση με -170 ^{o}C Μονάδα 1

Άρα $\bar{x} = +20$ Μονάδα 1

Γ3. **Μονάδες 9**

Δεδομένου ότι $\bar{x} = +20 \Longrightarrow \frac{\sum x_i}{\nu} = 20 \Longrightarrow$ Μονάδες 2

$$\Longrightarrow 20 = \frac{22+18+20+\kappa+14+16}{5} \Longrightarrow 100 = 90+\kappa \Longrightarrow \kappa = 10$$ Μονάδες 4

Οι τιμές θερμοκρασίας σε αύξουσα σειρά: 14, 16, 18, 22, 30 Μονάδες 2

Άρα διάμεσος δ = 18 Μονάδα 1

Γ4. **Μονάδες 6**

Η αύξηση των τιμών κατά 10% εκφράζεται από τη σχέση: $y_i = 1{,}1 \cdot x_i$ Μονάδες 2

Επομένως, $\bar{y} = 1{,}1\cdot\bar{x} = 1{,}1\cdot 20 = 22$ Μονάδα 1

$S_y = 1{,}1 S_x = 1{,}1 \cdot 4 = 4{,}4$ Μονάδα 1

Άρα, $CV_y = \frac{S_y}{|\bar{y}|} = \frac{4{,}4}{22} = 0{,}2$ ή 20% Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. **Μονάδες 7**

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ, έχουμε ότι: $x^2 + y^2 = 10^2 \Rightarrow y^2 = 100 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{100 - x^2}$ Μονάδες 3

Δεδομένου ότι η μεταβλητή y εκφράζει μήκος, η αρνητική λύση απορρίπτεται

Άρα, $y = f(x) = \sqrt{100 - x^2}$

Πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

Η μεταβλητή x εκφράζει το μήκος κάθετης πλευράς ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα ΒΑ = 10, επομένως η μεταβλητή x θα πρέπει να είναι x > 0 και x < 10, αφού η κάθετη πλευρά πρέπει να είναι μικρότερη από την υποτείνουσα

Συνεπώς, το πεδίο ορισμού θα είναι Α = (0, 10) Μονάδες 4

Παρατήρηση: οι υποψήφιοι/υποψήφιες μπορούν να υπολογίσουν το πεδίο ορισμού, μελετώντας τη συνάρτηση f(x) και λαμβάνοντας τους σχετικούς περιορισμούς

Δ2. **Μονάδες 6**

$$f'(x) = \left(\sqrt{100 - x^2}\right)' = \frac{(100 - x^2)'}{2\sqrt{100 - x^2}} = -\frac{2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{100 - x^2}}$$ Μονάδες 4

Για x = 8:

$$f'(8) = -\frac{8}{\sqrt{100 - 8^2}} = -\frac{8}{\sqrt{36}} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$ Μονάδες 2

Δ3. **Μονάδες 6**

$$\lim_{x\to 6}\frac{f(x) - 8}{x - 6} = \lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{100 - x^2} - 8}{x - 6} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt{100 - x^2} - 8\right)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)}{(x - 6)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)}$$ Μονάδες 2

$$= \lim_{x\to 6}\frac{100 - x^2 - 64}{(x - 6)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} = \lim_{x\to 6}\frac{36 - x^2}{(x - 6)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)}$$ Μονάδα 1

$$= \lim_{x\to 6}\frac{-(x - 6)(x + 6)}{(x - 6)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} = \lim_{x\to 6}\frac{-(x + 6)}{\sqrt{100 - x^2} + 8} = -\frac{12}{16}$$ Μονάδες 2

$$= -\frac{3}{4}$$ Μονάδα 1

Δ4. **Μονάδες 6**

Για κάθε $x \in (0,10)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό* Μονάδες 4

Ισχύει ότι: $2{,}3 < 2{,}8 < 3{,}5 \Rightarrow x_1 < x_3 < x_2 \overset{f\downarrow}{\Longrightarrow} f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$ Μονάδες 2

***Παρατήρηση:** στο σημείο αυτό απαιτείται η απόδειξη της μονοτονίας της συνάρτησης f