Κατά τον υπολογισμό των ορίων εμφανίζονται αποτελέσματα τα οποία λαμβάνουν τον χαρακτηρισμό «απροσδιόριστες μορφές».

Ακολουθεί η αιτιολόγηση.

- Απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)+(-\infty)$.

> Ομοίως αποδεικνύονται τα $(-\infty)+(+\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$ και $(-\infty)-(-\infty)$.

Απόδειξη: έστω $f(x)=\dfrac{3}{x^2}+a,\quad a\in\Re$ και $g(x)=-\dfrac{3}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^2}+a\right)=+\infty \text{ και } \lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{3}{x^2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^2}+a-\frac{3}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}(a)=a$$

Επειδή το a μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο $\Re$, η πράξη $(+\infty)+(-\infty)$ δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη. [*Πηγή: Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Ανάλυση, σελίδα 75, 1992, Κατσαργύρης Β., Μεντής Κ., Παντελίδης Γ., Σουρλάς Κ.*]

- Απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$.

Απόδειξη: έστω $f(x)=ax-a,\quad a\in\Re$ και $g(x)=x-1$.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(ax-a)=0 \text{ και } \lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}(x-1)=0$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\lim_{x\to 1}\left(\frac{ax-a}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left[\frac{a(x-1)}{(x-1)}\right]=\lim_{x\to 1}(a)=a$$

Επειδή το a μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο $\Re$, η πράξη $\dfrac{0}{0}$ δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη.

- Απροσδιόριστη μορφή $0 \cdot (+\infty)$, ομοίως για το $0 \cdot (-\infty)$.

Απόδειξη: έστω $f(x) = x$ και $g(x) = \frac{a}{x}, \quad a \in \Re^+$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0 \text{ και } \lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{a}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \lim_{x \to 0^+} \left(x \cdot \frac{a}{x} \right) = \lim_{x \to 0^+} (a) = a$$

Για $x \to 0^-$, αποδεικνύεται η περίπτωση $0 \cdot (-\infty)$.

Επειδή το a μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο $\Re^+$, η πράξη $0 \cdot (+\infty)$ δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη.

- Απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$, ομοίως για το $\frac{-\infty}{-\infty}$.

Απόδειξη: έστω $f(x) = \frac{a}{x}, \quad a \in \Re^+$ και $g(x) = \frac{b}{x}, \quad b \in \Re^+$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{a}{x} = +\infty \text{ και } \lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{b}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\frac{a}{x}}{\frac{b}{x}} \right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{a \cdot x}{b \cdot x} \right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{a}{b} \right) = \frac{a}{b}$$

Για $x \to 0^-$, αποδεικνύεται η περίπτωση $\frac{-\infty}{-\infty}$.

Επειδή το $\frac{a}{b}$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο $\Re^+$, η πράξη $\frac{+\infty}{+\infty}$ δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη.

- Για τις απροσδιόριστες μορφές $1^{\pm\infty}, \quad (+\infty)^0, \quad 0^0$, μπορεί να γραφεί η συνάρτηση κάθε φορά ως δύναμη με βάση e και στον εκθέτη εμφανίζεται απροσδιοριστία της μορφής $0 \cdot (\pm\infty)$.

  - *Για παράδειγμα:*

$\underbrace{\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 \pm \frac{3}{x} \right)^{2x}}_{(1^{\pm\infty})} = \underbrace{\lim_{x \to \pm\infty} e^{2x \ln\left(1 \pm \frac{3}{x}\right)}}_{(+\infty) \cdot 0}$	$\underbrace{\lim_{x \to +\infty} (x)^{1/x}}_{(+\infty)^0} = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln(x)}}_{0 \cdot (+\infty)}$

$$\underbrace{\lim_{x \to 0^+} (x)^x}_{0^0} = \underbrace{\lim_{x \to 0^+} e^{x \ln(x)}}_{0 \cdot (-\infty)}$$

❖ *Εναλλακτικά:*

❑ Απροσδιόριστη μορφή $1^{\pm\infty}$.

Απόδειξη: έστω $f(x)=\dfrac{a}{x}, \quad a\in\Re^{+}$ και $g(x)=e^{x}$.

Για $a\in\Re^{-}$, αποδεικνύεται η περίπτωση $1^{-\infty}$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{a}{x}=+\infty \text{ και } \lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[g(x)\right]^{f(x)}=\lim_{x\to 0^+}\left(e^{x}\right)^{\frac{a}{x}}=\lim_{x\to 0^+} e^{\cancel{x}\cdot\frac{a}{\cancel{x}}}=e^{a}$$

Επειδή το e^{a} μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο $\Re^{+}$, η πράξη $1^{+\infty}$ δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη.

❑ Απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)^{0}$.

Απόδειξη: έστω $f(x)=e^{\frac{a}{x}}, \quad a\in\Re^{+}$ και $g(x)=x$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{a}{x}}=+\infty \text{ και } \lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\left(e^{\frac{a}{x}}\right)^{x}=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{a}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}}=e^{a}$$

Επειδή το e^{a} μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο $\Re^{+}$, η πράξη $(+\infty)^{0}$ δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη.

❑ Απροσδιόριστη μορφή 0^{0}.

Απόδειξη: έστω $f(x)=e^{\frac{a}{x}}, \quad a\in\Re^{-}$ και $g(x)=x$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{a}{x}}=0 \text{ και } \lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\left(e^{\frac{a}{x}}\right)^{x}=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{a}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}}=e^{a}$$

Επειδή το e^{a} μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο $\Re^{+}$, η πράξη 0^{0} δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη.