Ανισότητες

Πίνακας Περιεχομένων :

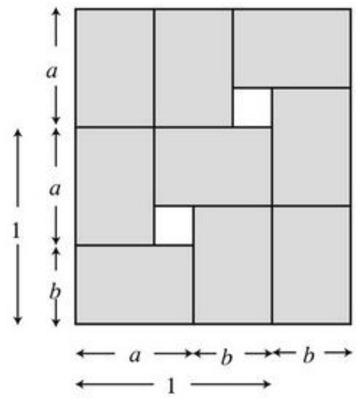
The following problem occurred in a recent Spanish Mathematical Olympiad [1]:

Let a, b be two positive numbers with $a + b = 1$. Prove that

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \geqslant 9.$$

Of course, the problem may be solved in several ways. We give below a proof using a diagram and no words.

Proof: We note that the given inequality may be rewritten as $(1 + a)(1 + b) \geqslant 9ab$. The truth of this inequality is apparent from the following diagram.



1. Εισαγωγή

Οι πραγματικές ανισότητες είναι κεντρικό εργαλείο σε όλη την Ανάλυση, Άλγεβρα και Γεωμετρία. Στο παρόν ενιαίο φυλλάδιο συγκεντρώνονται οι βασικές θεωρίες, οι κλασικές ανισότητες με αποδείξεις, η Hölder και η Minkowski (με απόδειξη από τη Hölder), καθώς και μια μικρή εργαλειοθήκη με μεθόδους όπως Titu, Rearrangement, Chebyshev, και τέλος παραδείγματα-ασκήσεις.

2. Βασικές ιδιότητες

Αν $a,b,c \in \mathbb{R}$ ισχύει:

1. Αν $a<b$, τότε $a+c<b+c$.
2. Αν $a<b$ και $c>0$, τότε $ac<bc \cdot$ αν $c<0$, τότε $ac>bc$.
3. $|a| \geq 0$ και $|ab| = |a||b|$.
4. $(a-b)^2 \geq 0$ για κάθε $a,b \in \mathbb{R}$.

3. Κλασικές Ανισότητες με υποδείξεις για Αποδείξεις

3.1 Ανισότητα Τριγωνική

Για κάθε $a,b \in \mathbb{R}$ ισχύει $|a+b| \le |a|+|b|$.

Απόδειξη: $(|a|+|b|)^2 = a^2+b^2+2|ab| \ge a^2+b^2+2ab = (a+b)^2$. Άρα $|a+b| \le |a|+|b|$.

Ισότητα όταν $ab \ge 0$.

3.2 Ανισότητα Cauchy–Schwarz

Για $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \le (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2).$$

Απόδειξη: Θεωρούμε το πολυώνυμο $Q(t) = \sum (a_i t - b_i)^2 \ge 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
Αναπτύσσοντας: $Q(t) = (\sum a_i^2)t^2 - 2(\sum a_i b_i)t + \sum b_i^2$. Η διακρίνουσα πρέπει να είναι μη θετική:
$(\sum a_i b_i)^2 - (\sum a_i^2)(\sum b_i^2) \le 0.$ Ισότητα όταν $b_i = \lambda a_i$ για κάποιο λ.

3.3 Ανισότητα Minkowski

Για $p \ge 1$ και μη αρνητικούς x_i, y_i ισχύει:
$\left(\sum (x_i+y_i)^p\right)^{1/p} \le \left(\sum x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum y_i^p\right)^{1/p}$.

Απόδειξη: Θέτουμε $X = (\sum x_i^p)^{1/p}$ και $Y = (\sum y_i^p)^{1/p}$. Αν $X=0$ ή $Y=0$, η ανισότητα είναι προφανής. Αλλιώς, θέτουμε $u_i = x_i / X$, $v_i = y_i / Y$. Τότε $\sum u_i^p = \sum v_i^p = 1$. Για κάθε i έχουμε $(u_i+v_i)^p \le (1+1)^{p-1}(u_i^p+v_i^p) = 2^{p-1}(u_i^p+v_i^p)$. Αθροίζοντας:
$\sum (u_i+v_i)^p \le 2^{p-1}(1+1) = 2^p$. Άρα $(\sum (x_i+y_i)^p)^{1/p} \le X+Y$.

Ισότητα όταν x_i και y_i είναι ανάλογοι.

3.4 Ανισότητα AM–GM

Για $a_1,\dots,a_n \ge 0$ ισχύει:

$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \ge (a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}$. Απόδειξη (για n=2): Από $(a-b)^2 \ge 0$ παίρνουμε $a^2+b^2 \ge 2ab$. Διαίρεση με 2 δίνει $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$. Η γενική περίπτωση αποδεικνύεται με επαγωγή ή με την κυρτότητα της $\ln$ (Jensen). Ισότητα όταν όλα τα a_i είναι ίσα.

3.5 Ανισότητα Jensen

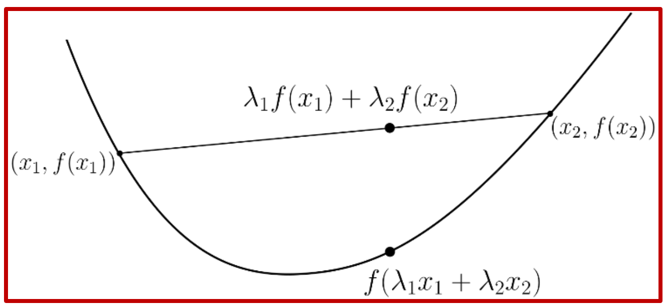
Αν f κυρτή και $w_i \ge 0$ με $\sum w_i = 1$, τότε:

$f(\sum w_i x_i) \le \sum w_i f(x_i)$.

Απόδειξη: Από την κυρτότητα υπάρχει ευθεία $\ell(x)$ με $\ell(x) \le f(x)$ για όλα τα x, και $\ell(x_0) = f(x_0)$ στο σημείο $x_0 = \sum w_i x_i$. Άρα

$f(\sum w_i x_i) = \ell(\sum w_i x_i) = \sum w_i \ell(x_i) \le \sum w_i f(x_i)$. Ισότητα όταν όλα τα x_i ίσα ή f γραμμική.

4. Ανισότητα Hölder



Για $p,q>1$ με $1/p+1/q=1$ και μη αρνητικούς x_i, y_i ισχύει:

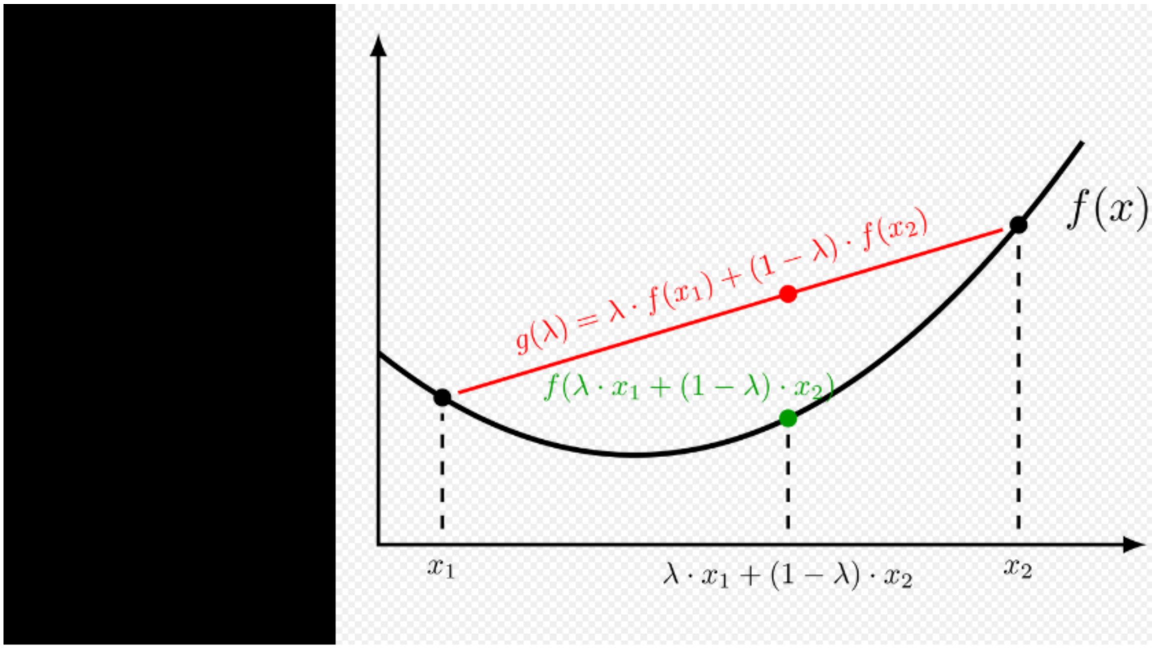
$\sum x_i y_i \le (\sum x_i^p)^{1/p} (\sum y_i^q)^{1/q}$.

Απόδειξη: Από την ανισότητα Young:

$ab \le a^p/p + b^q/q$. Θέτουμε $a = x_i/X$, $b = y_i/Y$ με $X = (\sum x_i^p)^{1/p}$, $Y = (\sum y_i^q)^{1/q}$. Αθροίζοντας καταλήγουμε στο αποτέλεσμα. Ισότητα όταν $x_i^p = \lambda y_i^q$.

5. Minkowski από Hölder

Θέτουμε $S = (\sum (x_i+y_i)^p)^{1/p}$. Εφαρμόζουμε Hölder σε $\sum (x_i+y_i)(x_i+y_i)^{p-1}$. Με κατάλληλη αναδιάταξη παίρνουμε $S^p \le (X+Y)S^{p-1}$, άρα $S \le X+Y$. Ισότητα όταν τα x_i, y_i είναι ανάλογα.



Η ανισότητα Γένσεν για την κυρτή συνάρτηση για δύο μεταβλητές , δίνει ότι για κάθε το κόκκινο σημείο είναι άνω του πράσινου.

6. Εργαλειοθήκη Ανισοτήτων

6.1 Titu/Engel

$\sum \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{(\sum a_i)^2}{\sum b_i}$. Απόδειξη: Cauchy–Schwarz σε $(a_i / \sqrt{b_i})$ και $(\sqrt{b_i})$.

6.2 Επαναταξινόμηση [1]

Αν $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ και $y_1 \leq \cdots \leq y_n$, τότε:

$$\sum x_i y_i \geq \sum x_i y_{\sigma(i)} \geq \sum x_i y_{n+1-i}.$$

[1] **Ορισμός – Ταξινομημένα Ομόρροπα:** Λέμε ότι οι δύο ακολουθίες $x_1, x_2, \ldots, x_n$ και $y_1, y_2, \ldots, y_n$ είναι **ταξινομημένες ομόρροπα** αν ισχύει:

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \quad \kappa\alpha\iota \quad y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n,$$

ή και οι δύο είναι φθίνουσες:

Απόδειξη: Γίνεται με επαγωγή στο n, μεταφέροντας ζεύγη όρων και συγκρίνοντας. Μέγιστο όταν ακολουθίες ομόρροπες, ελάχιστο όταν αντίρροπες.

6.3 Chebyshev

Αν x_i, y_i ομόρροπα, τότε:

$$\frac{1}{n}\sum x_i y_i \ge \left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum y_i\right).$$

Απόδειξη: Προκύπτει από Rearrangement αφού το μέσο άθροισμα είναι μεγιστοποιημένο.

7. Τριγωνομετρικές Ανισότητες

Για $0 < x < \pi/2$ ισχύει $\sin x < x < \tan x$. Απόδειξη: Σύγκριση εμβαδών στον μοναδιαίο κύκλο (τρίγωνο, κυκλικός τομέας, εξωτερικό τρίγωνο).

$x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \quad \kappa\alpha\iota \quad y_1 \ge y_2 \ge \cdots \ge y_n$. Αντίθετα, είναι **αντίρροπα ταξινομημένες** αν η μία είναι αύξουσα και η άλλη φθίνουσα.

Ανισότητα Αναδιάταξης (Rearrangement) Αν $x_1 \le \cdots \le x_n$ και $y_1 \le \cdots \le y_n$, τότε για κάθε αναδιάταξη σ των δεικτών ισχύει: $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i ;;\ge;; \sum_{i=1}^{n} x_i y_{\sigma(i)} ;;\ge;; \sum_{i=1}^{n} x_i y_{n+1-i}$. Δηλαδή:

- το μέγιστο άθροισμα εμφανίζεται όταν οι ακολουθίες είναι **ομόρροπα** ταξινομημένες,
- το ελάχιστο άθροισμα εμφανίζεται όταν είναι **αντίρροπα** ταξινομημένες.

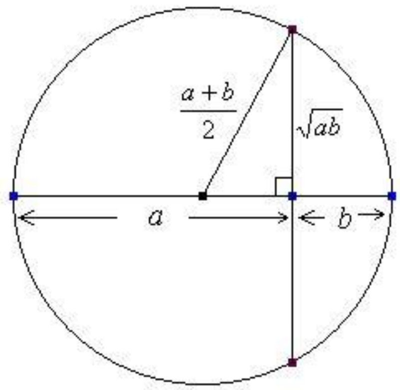
Παράδειγμα: Έστω $x = (1,3,5)$ και $y = (2,4,6)$.

- Ομόρροπα:
  $1\cdot 2 + 3\cdot 4 + 5\cdot 6 = 44(\mu\acute{\varepsilon}\gamma\iota\sigma\tau o)$.
- Αντίρροπα:
  $1\cdot 6 + 3\cdot 4 + 5\cdot 2 = 28(\varepsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o)$.

8. Παραδείγματα

Παράδειγμα (Nesbitt): Για $a,b,c>0$ δείξε ότι:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$



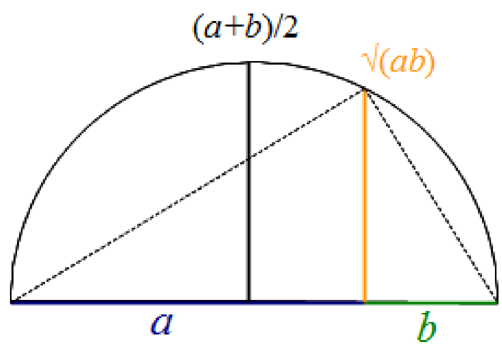
Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε Titu:

$$\sum\frac{a^2}{ab+ac}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\geq\frac{3}{2}.$$

Παράδειγμα 1: AM–GM–HM: $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\geq\frac{2ab}{a+b}$.

Παράδειγμα 2: Titu: $\sum\frac{x_i^2}{y_i}\geq(\sum x_i)^2/\sum y_i$.

9. Ασκήσεις



1. Απόδειξε Hölder.
2. Παράγαγε Minkowski από Hölder.
3. Δείξε ότι $\ln(1+x)<x$ για $0<x<1$.
4. Δείξε ότι $(a+b+c)^2\geq3(ab+bc+ca)$.
5. Δείξε ότι $x+1/x\geq2$ για $x>0$.

10. Δικτυογραφία

https://www.slideshare.net/slideshow/ss-115232361/115232361

https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&opi=89978449&url=https://www.askisopolis.gr/upload/842_5089%25CE%25B2%25CE%25B1%25CF%2583%25CE%25B9%25CE%25BA%25CE%25AD%25CF%2582%2520%25CE%25B1%25CE%25BD%25CE%25B9%25CF%2583%25CF%258C%25CF%2584%25CE%25B7%25CF%2584%25CE%25B5%25CF%2582.pdf

https://www.slideshare.net/slideshow/ss-123377664/123377664

https://docs.google.com/file/d/0B1CxOzLbCSlyR3VkVU5xZ19nTTQ/edit?resourcekey=0-SU-F0w9PPZC4QFniwI2wkQ