Εισαγωγή στην Επίπεδη Πειραματική Γεωμετρία

Με Δυναμικά Γεωμετρικά λογισμικά

Γιάννης Π. Πλατάρος – Μαθηματικός

2025

Εισαγωγή στην Επίπεδη Πειραματική Γεωμετρία

Πρόλογος

Ο κρυφός πειραματικός χαρακτήρας της Γεωμετρίας και η διδακτική του αξιοποίηση μέσω των δυναμικών γεωμετρικών λογισμικών

Η Γεωμετρία, όπως διδάσκεται συχνά στο σχολείο, παρουσιάζεται ως μια σειρά θεωρημάτων και αποδείξεων · μια θετική, στατική δομή. Ωστόσο, πίσω από αυτή την εικόνα υπάρχει ένας πλούσιος πειραματικός πυρήνας: η διερεύνηση, η παρατήρηση, η εικασία, η μεταβολή σχημάτων, και η προβολή δυνατοτήτων που τα στατικά σχήματα δεν αποκαλύπτουν πλήρως.

Τα δυναμικά γεωμετρικά λογισμικά (GeoGebra, Sketchpad κ.ά.) επαναφέρουν αυτήν την πειραματική διάσταση στο προσκήνιο. Με αυτά:

- Τα σχήματα μπορούν να μετακινηθούν, να παραμορφωθούν, να εξερευνηθούν με άπειρους τρόπους, δίνοντας πολλές παρατηρήσεις χωρίς καταστροφή της κατασκευής.
- Ο μαθητής γίνεται ενεργός ερευνητής: κάνει πειράματα, ελέγχει υποθέσεις, διατυπώνει και επαληθεύει πρότυπα, βλέπει ειδικές περιπτώσεις και γενικεύσεις.
- Η μαθηματική μάθηση αποκτά έναν χαρακτήρα διερευνητικό — δεν είναι μόνο «μάθηση των αποδειγμένων», αλλά και «ανακάλυψη του πεδίου των αποδείξιμων».

Οι εργασίες που περιλαμβάνονται εδώ αποδεικνύουν ότι αυτή η διάσταση δεν είναι θεωρητική αλλά εφαρμόσιμη. Μέσα από παραδείγματα από την εκπαιδευτική πράξη, η χρήση δυναμικού λογισμικού αποδεικνύεται ότι μπορεί να ενισχύσει τη μαθηματική κατανόηση, τη δημιουργικότητα, και την ερευνητική ικανότητα των μαθητών.

Αυτό το βιβλιαράκι έχει στόχο να προσφέρει τη θεωρητική βάση, μεθοδολογία και πρακτικές εφαρμογές ώστε οι εκπαιδευτικοί να αξιοποιήσουν συστηματικά αυτές τις δυνατότητες στην τάξη.

Κεφάλαιο Α

1. Τι είναι Πειραματική Γεωμετρία;

Η παραδοσιακή γεωμετρία βασίζεται σε ορισμούς, αξιώματα, θεωρήματα και αποδείξεις. Η πειραματική γεωμετρία εισάγει μια ενδιάμεση διάσταση: παρατήρηση σε δυναμικό περιβάλλον (π.χ. GeoGebra, χαρτί–ψαλίδι), πειραματισμό με μεταβαλλόμενα σχήματα, διατύπωση εικασιών που οδηγούν σε αποδείξεις. Έτσι ο μαθητής γίνεται «μικρός γεωμέτρης» που ανακαλύπτει σχέσεις, όπως ο Αρχιμήδης με την περίφημη «έφοδό» του.

2. Η Στρατηγική των Εμβαδών

Το εμβαδόν είναι ιδανικό σημείο εκκίνησης: έχει διαστατικότητα $[E]=L^2$ και επιτρέπει συνδυασμό παρατήρησης, μέτρησης και πειραματικής ανακάλυψης.

Πίνακας 1: Πειράματα με Εμβαδά

Σχήμα	Μεταβλητές	Εικασία	Τελικός Τύπος
Τρίγωνο	βάση α, ύψος h	E~ah	$E=\frac{1}{2}ah$
Παραλληλόγραμμο	πλευρές a,b, γωνία θ	E~ab	E=ab sinθ
Τετράπλευρο	διαγώνιοι d_1, d_2, γωνία θ	$E \sim d_1 d_2$	$E=\frac{1}{2}d_1 d_2 sin\theta$
Τρίγωνο με εγγεγραμμένο κύκλο	ακτίνα ρ, περίμετρος P	E~ρP	$E=\frac{1}{2}\rho P$
Τρίγωνο με περιγεγραμμένο κύκλο	πλευρές a,b,c, ακτίνα R	$E=\frac{abc}{R}$	$E=\frac{abc}{4R}$
Εγγράψιμο τετράπλευρο	πλευρές a,b,c,d	$E=f(a,b,c,d)$	$E=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

3. Πειράματα Βελτιστοποίησης

Ασχολούνται με μέγιστα και ελάχιστα.

Πίνακας 2: Πειράματα Βελτιστοποίησης

Πρόβλημα	Πειραματικό Ερώτημα	Συμπέρασμα
Σημείο σε κύκλο με διάμετρο ΒΓ	Ποια θέση του Α μεγιστοποιεί το ΑΒ+ΑΓ;	Όταν η ΑΟ είναι διχοτόμος
Τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο	Ποιο έχει μέγιστο εμβαδόν;	Το ισοσκελές με πλευρά διάμετρο
Ορθογώνιο σε τρίγωνο	Ποιο έχει μέγιστο εμβαδόν;	Το συμμετρικό ως προς ύψος
Τετράπλευρο με δεδομένη περίμετρο	Ποιο έχει μέγιστο εμβαδόν;	Το τετράγωνο

4. Μετρικά Πειράματα

Μελετούν ιδιότητες μήκους, αποστάσεων και καμπυλών.

Πίνακας 3: Μετρικά Πειράματα

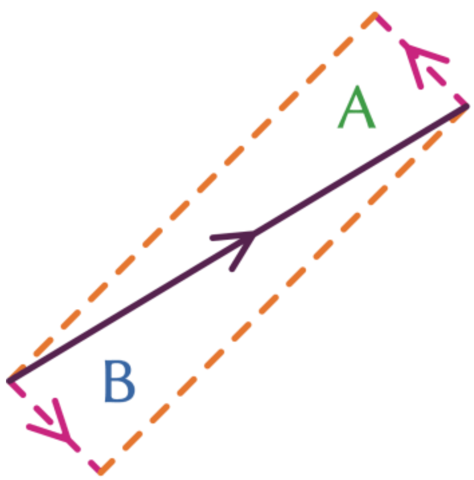
Πείραμα	Περιγραφή	Ανακάλυψη
Καμπύλες ίσου μήκους	Φτιάχνουμε καμπύλες ίσου μήκους (ευθεία, ημικύκλιο, τεθλασμένη)	Διαφορετικά εμβαδά → ισοπεριμετρικό πρόβλημα (πρβλμ. Της Διδούς) (κύκλος=μέγιστο)
Βήμα ίσου μήκους	Περπάτημα με σταθερά διαστήματα σε διάφορες καμπύλες	Η έννοια του μήκους ανεξάρτητα από σχήμα
Ευθεία vs. καμπύλη	Ποια είναι η μικρότερη απόσταση δύο σημείων;	Η ευθεία είναι η γεωδαισιακή

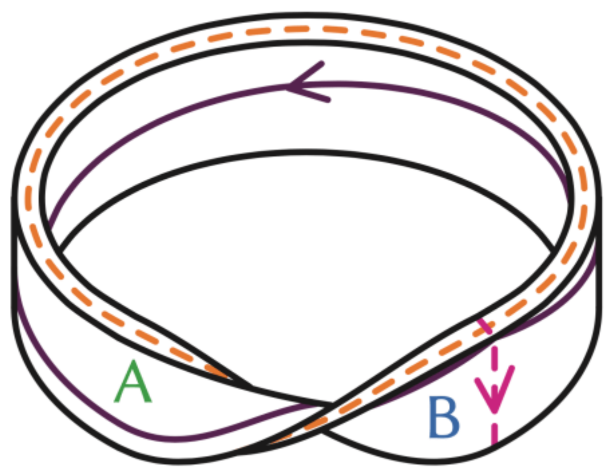
5. Τοπολογικά Πειράματα

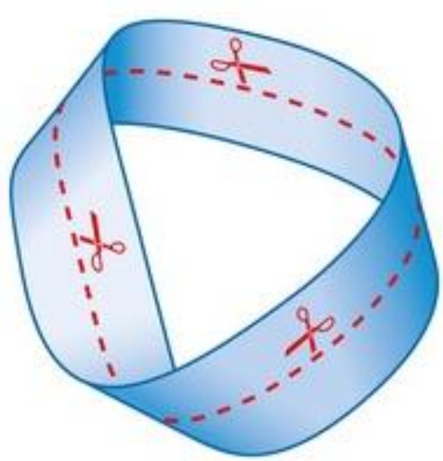
Αφορούν ιδιότητες που μένουν ίδιες υπό παραμόρφωση χωρίς σκίσιμο.

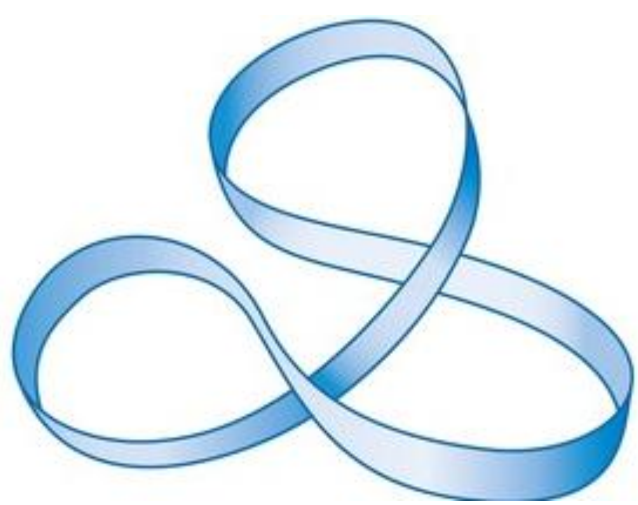
Πίνακας 4: Τοπολογικά Πειράματα

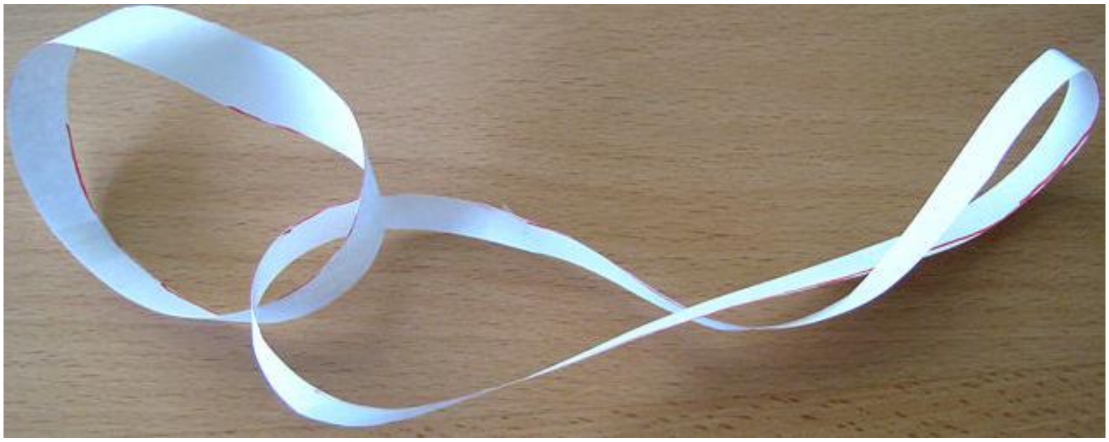
Αντικείμενο	Πείραμα	Ανακάλυψη
Λωρίδα Möbius	Χαρτοταινία με μισή περιστροφή	Μία πλευρά και μία ακμή
Κορδέλα με δύο μισές περιστροφές	Παρόμοιο πείραμα	Διαφορετικό τοπολογικό αντικείμενο
Τόρος vs. Δισκίο	Αναπαράσταση με πλαστελίνη	Διαφορά στον αριθμό τρυπών (τοπολογικό γένος)









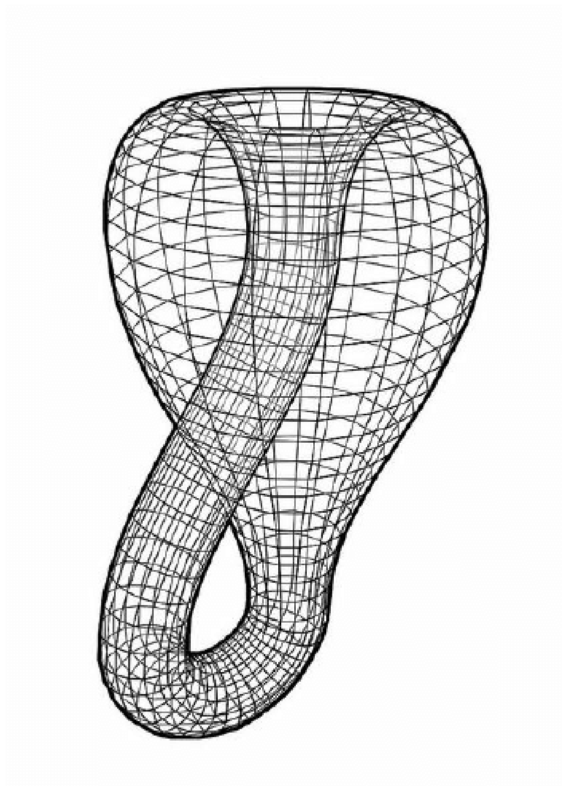


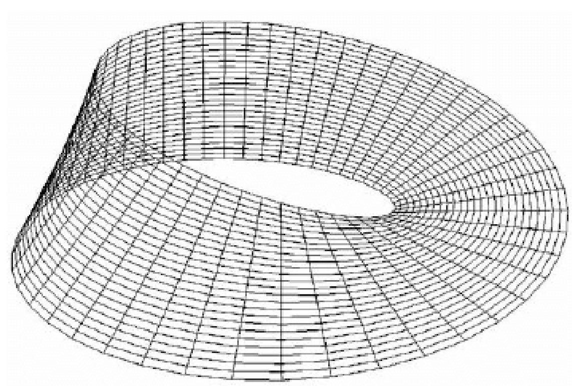
6. Η Βασική Πειραματική Μεθοδολογία σε εμβαδά.

Η πειραματική γεωμετρία δεν είναι απλώς συλλογή παραδειγμάτων, αλλά μια μέθοδος που ακολουθείται βήμα–βήμα για να περάσουμε από την παρατήρηση στην απόδειξη.

Φιάλη Κλάιν: Έχει μία μόνο επιφάνεια.

Βήμα 1. Διατύπωση προβλήματος: Επιλέγουμε σχήμα και θέτουμε ερώτημα (π.χ. υπολογισμός εμβαδού, μέγιστο/ελάχιστο).





Βήμα 2. Επιλογή μεταβλητών: Καθορίζουμε μεγέθη που επηρεάζουν το αποτέλεσμα. Ελέγχουμε διαστατικότητα: $[E] = L^2$.

Βήμα 3. Πειραματισμός με δυναμικό λογισμικό: Μεταβάλλουμε δεδομένα στο GeoGebra, παρατηρούμε αλλαγές, καταγράφουμε αναλογίες.

Βήμα 4. Διατύπωση εικασίας: Αν Ε είναι ανάλογο με δύο ποσότητες, εικάζουμε Ε~γινόμενο αυτών. Αν εμπλέκεται γωνία, δοκιμάζουμε ημίτονο.

Βήμα 5. Έλεγχος με μετρήσεις: Υπολογίζουμε λόγους τύπου E/(ah). Αν βγει σταθερό, αυτός είναι ο αδιάστατος συντελεστής.

Βήμα 6. Απόδειξη: Μετά την εικασία, αναζητούμε αυστηρή μαθηματική απόδειξη.

Βήμα 7. Γενίκευση: Ελέγχουμε αν η μέθοδος ισχύει σε άλλα σχήματα ή συνδέεται με γνωστά θεωρήματα.

Η γενική «συνταγή» της πειραματικής γεωμετρίας είναι:
Πρόβλημα → Μεταβλητές → Πειραματισμός → Εικασία → Έλεγχος → Απόδειξη → Γενίκευση.

. Διδακτικές Επισημάνσεις

• Τα πειράματα προηγούνται της απόδειξης, ώστε η απόδειξη να εμφανιστεί ως απάντηση σε ερώτημα.
• Το δυναμικό λογισμικό (GeoGebra) επιτρέπει άμεση αλλαγή δεδομένων και επαλήθευση υποθέσεων.
• Η εμπλοκή γονέων (π.χ. στο πείραμα Möbius) δείχνει ότι τα μαθηματικά μπορούν να γίνουν «οικογενειακό παιχνίδι».

8. Συμπέρασμα

Η Επίπεδη Πειραματική Γεωμετρία μετατρέπει τη γεωμετρία σε εργαστήριο ιδεών, οδηγεί τον μαθητή από την εμπειρία στην εικασία και την απόδειξη και γεφυρώνει τα Μαθηματικά, τη Φυσική και την καθημερινή ζωή.

Κεφάλαιο Β

Πειραματική Μεθοδολογία για Μέγιστα–Ελάχιστα

1. Στόχος

Να μελετήσουμε γεωμετρικά προβλήματα όπου αναζητούμε μέγιστες ή ελάχιστες τιμές (εμβαδόν, περίμετρο, μήκος), ώστε ο μαθητής να αναπτύξει στρατηγική βελτιστοποίησης.

2. Στρατηγική Βημάτων

Βήμα 1. Διατύπωση προβλήματος: Δίνουμε ένα γεωμετρικό σχήμα με μεταβλητό σημείο ή πλευρά και θέτουμε ερώτημα βελτιστοποίησης.

Βήμα 2. Πειραματισμός στο GeoGebra: Μετακινούμε δυναμικά το σημείο και μετρούμε την ποσότητα στόχο (εμβαδόν, άθροισμα μηκών).

Βήμα 3. Διατύπωση εικασίας: Υποθέτουμε ποια θέση είναι βέλτιστη, παρατηρώντας συμμετρίες ή ιδιότητες.

Βήμα 4. Έλεγχος με μετρήσεις: Συγκρίνουμε διαφορετικές θέσεις και καταγράφουμε πού εμφανίζεται μέγιστο ή ελάχιστο.

Βήμα 5. Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε γεωμετρικά θεωρήματα ή τριγωνομετρία για αυστηρή επιβεβαίωση.

3. Παραδείγματα

• Πείραμα 1: Σημείο Α σε κύκλο με διάμετρο ΒΓ. Ποια θέση του Α μεγιστοποιεί το ΑΒ+ΑΓ;

• Πείραμα 2: Τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο. Ποιο τρίγωνο έχει μέγιστο εμβαδόν;

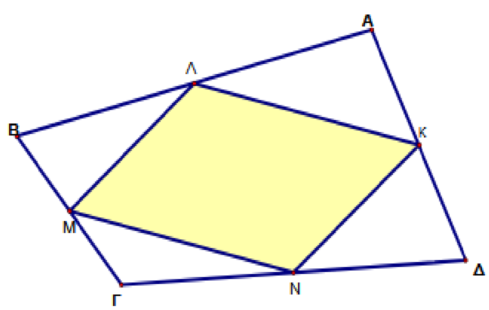
• Πείραμα 3: Ορθογώνιο εγγεγραμμένο σε τρίγωνο. Ποιο έχει μέγιστο εμβαδόν;

• Πείραμα 4: Με σταθερή περίμετρο, ποιο τετράπλευρο έχει μέγιστο εμβαδόν;

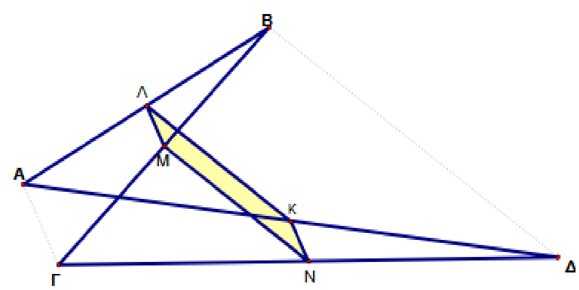
4. Συμπέρασμα

Η μεθοδολογία μεγίστων–ελαχίστων δείχνει στους μαθητές ότι η γεωμετρία συνδέεται με προβλήματα βελτιστοποίησης, ότι το δυναμικό λογισμικό είναι εργαλείο ανακάλυψης και ότι η απόδειξη έρχεται ως τελική επιβεβαίωση.

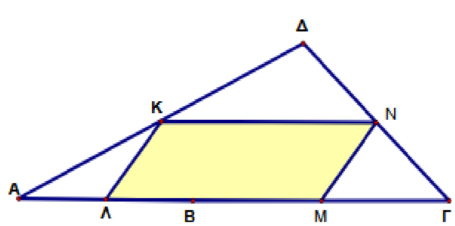
Η απίστευτη διερευνητική ικανότητα δυναμικού λογισμικού(Ι)



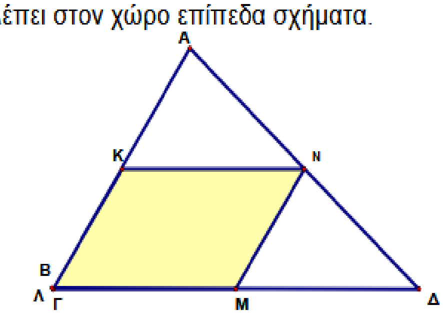
Σχήμα 1: Με την κίνηση των Α,Β,Γ,Δ, η οπτική εντύπωση του ΚΛΜΝ ως παραλληλογράμμου είνια εδραία. Η απόδειξη, είναι η λογική αναγκαότητα του «γιατί παρατηρείται» αυτό.



Σχήμα 2: Μια τέτοια διάταξη, μπορεί να ειδοθεί και ως στρεβλό τετράπλευρο, όπου ισχύει η πρόταση, αν βεβαίως ο μαθητής έχει μάθε να βλέπει στον χώρο επίπεδα σχήματα.

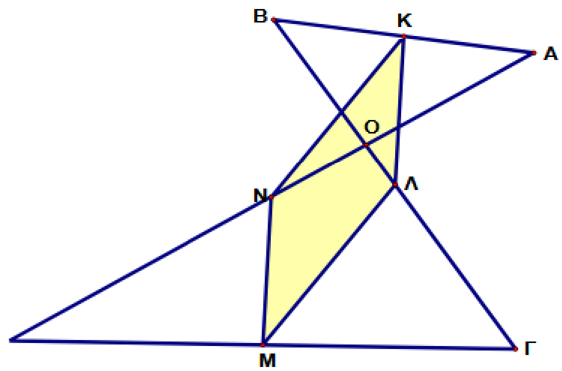


Σχήμα 3: Η ειδική περίπτωση όπου Α,Β, Γ συνευθειακά, δείχνει και εκεί την ισχύ της πρότασης, με επαναδιατύπωση για τρίγωνο.

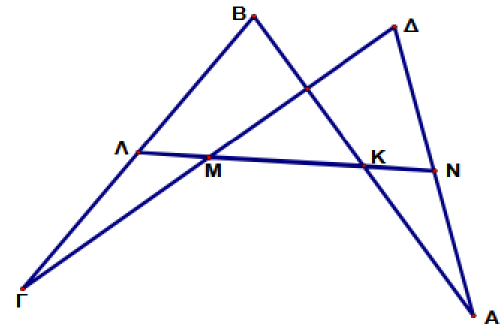


Σχήμα 4 : Η πιο απλή ειδική περίπτωση, επάγει την ιδέα της απόδειξης.

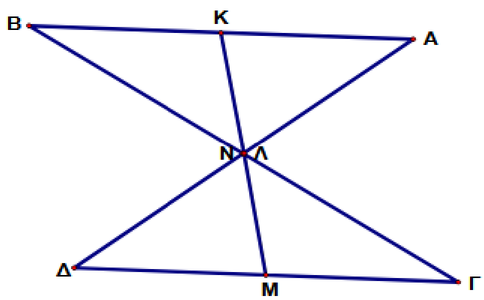
Η απίστευτη διερευνητική ικανότητα δυναμικού λογισμικού(ΙΙ)



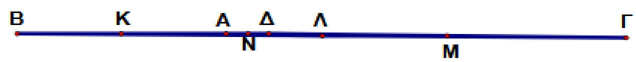
Σχήμα 7: Τα «κατά κορυφήν τρίγωνα» δίνουν μια άλλη πρόταση.



Σχήμα 5: Οριακή περίπτωση εκφυλισμού παραλληλογράαμμου σε ευθ, τμήμα, δίνει γνωστή πρόταση στο τραπέζιο.



Σχήμα 8



Σχήμα 6: Η οριακή περίπτωση συνευθιακών Α,Β,Γ,Δ, δίνει μια ενδιαφέρουσα γνωστή πρόταση στα ευθ. τμήματα.

Archimedes Geom., Quadratura parabolae
Volume 2, page 165, line 25

Ἀναγράψαντες οὖν αὐτοῦ τὰς ἀποδείξιας ἀποστέλλομες πρῶτον μὲν ὡς διὰ τῶν **μηχανικῶν** ἐθεωρήθη, μετὰ ταῦτα δὲ καὶ ὡς διὰ τῶν γεωμετρουμένων ἀποδείκνυται.

Archimedes Geom., Ad Eratosthenem methodus
Volume 3, page 84, line 20

Γράφομεν οὖν πρῶτον τὸ καὶ πρῶτον φανὲν διὰ τῶν μηχανικῶν**, ὅτι πᾶν τμῆμα ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ἐπίτριτόν ἐστιν τριγώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν καὶ ὕψος ἴσον, μετὰ δὲ τοῦτο ἕκαστον τῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου θεωρηθέντων· ἐπὶ τέλει δὲ τοῦ βιβλίου γράφομεν τὰς γεωμετρι<κὰς ἀποδείξεις ἐκείνων τῶν θεωρημάτων, ὧν τὰς προ>τάσεις ἀπεστείλαμέν <σοι πρότερον>.**

Η Ιστορικά, πειραματική Γεωμετρία

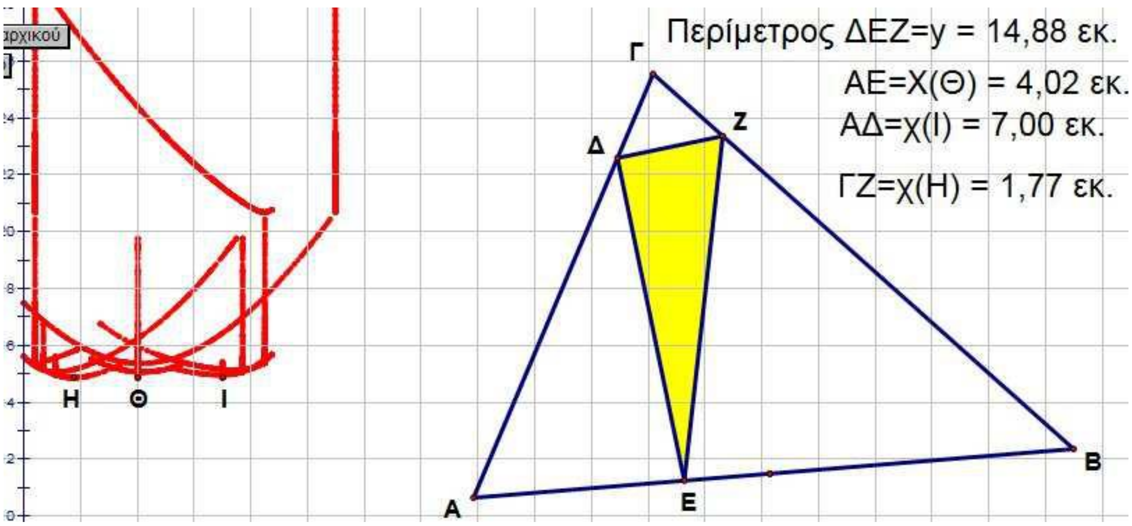
Είναι γνωστό, ότι ο Αρχιμήδης και οι "μηχανικές" του μέθοδοι , οδήγησαν σετεράστια μαθηματική δημιουργία , όπως και του Ευδόξου και του Αρχύτα νωρίτερα,των πρώτων μεγάλων «πειραματικών μαθηματικών» (όπως εννοούμε σήμερα τον όρο «πειραματικά μαθηματικά»). Σε επιστολή προς τον Ερατοσθένη, φημισμένο μαθηματικό και λόγιο που διηύθυνε τότε τη Βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας, αναφέρει ο μέγιστος Έλληνας μαθηματικός : «Πολλές πεποιθήσεις αρχικά μου δημιουργούνται με κάποια μηχανική μέθοδο, έστω και αν αυτές πρέπει να αποδειχτούν με Γεωμετρία στη συνέχεια, καθότι η ανακάλυψή τους με τη μηχανική μέθοδο δε συνιστά μια αποδεκτή απόδειξη. Είναι όμως φυσικά ευκολότερο, όταν έχουμε προηγουμένως συμπεράνει κάποια απάντηση, μ' αυτή τη μέθοδο, στο ερώτημά μας, να παράξουμε την απόδειξη που θέλουμε παρά να πετύχουμε κάτι τέτοιο χωρίς καμιά προηγούμενη ένδειξη και γνώση για την απάντηση. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο, στην περίπτωση των θεωρημάτων ότι - ο όγκος του κώνου και της πυραμίδας είναι το 1/3 του όγκου του κυλίνδρου και του πρίσματος αντίστοιχα που έχουν την ίδια βάση και το ίδιο ύψος - τις αποδείξεις των οποίων πρώτος έκανε ο Εύδοξος όχι μικρό μερίδιο τιμής πρέπει να αποδοθεί και στον Δημόκριτο ο οποίος ήταν ο πρώτος που τα διατύπωσε έστω και χωρίς απόδειξη»

Παράδειγμα 1:

Ένα ανοικτό πρόβλημα

«Να εξεταστεί αν υπάρχει, ποίο είναι και γιατί, το τρίγωνο ελαχίστης περιμέτρου που είναι εγγεγραμμένο σε δοθέν σταθερό τρίγωνο.» Αυτό το πρόβλημα εξετάζει ένα

ενδεχόμενο, χωρίς την παραμικρή ένδειξη ισχύος του και ξεκινά κυριολεκτικά από μηδενική βάση.
Ερώτημα: Μπορεί να διαπραγματευθεί ευχερώς αυτό το πρόβλημα ένας μαθητής ή έστω και καθηγητής μαθηματικών χωρίς νέες τεχνολογίες;
Απάντηση: Από την διδακτική μας εμπειρία, μπορούμε να ισχυριστούμε με κάποιο σημαντικό βαθμό βεβαιότητας, ότι η απάντηση είναι «κατά κανόνα όχι». Η μη γνώση του τριγώνου που έχει αυτή την ιδιότητα, είναι πρωταρχικός, αλλά πιθανόν και αποτρεπτικός παράγων στην έναρξη της διερεύνησης, αφού ο χρόνος διαπραγμάτευσης ενός προβλήματος με τα συνήθως κρατούντα, δεν μπορεί να είναι ιδιαίτερα μεγάλος . Ο πειραματισμός με μολύβι και χαρτί δεν προσφέρεται, καθώς η φύση του προβλήματος απαιτεί πολλές μετρήσεις, μέχρι να σχηματισθεί μια πιθανώς βάσιμη εικασία. Η συνδρομή της βιβλιογραφίας, είναι μια επίσης χρονοβόρα διέξοδος. Ίσως η καταφυγή στο διαδίκτυο να είναι αποτελεσματική μέθοδος, εάν και εφ' όσον είναι γνωστό και λελυμένο το πρόβλημα. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, το πρόβλημα είναι διάσημο και αν θέσει κάποιος στη γνωστή μηχανή αναζήτησης Google τις λέξεις κλειδιά: «τρίγωνο», «ελάχιστη»,



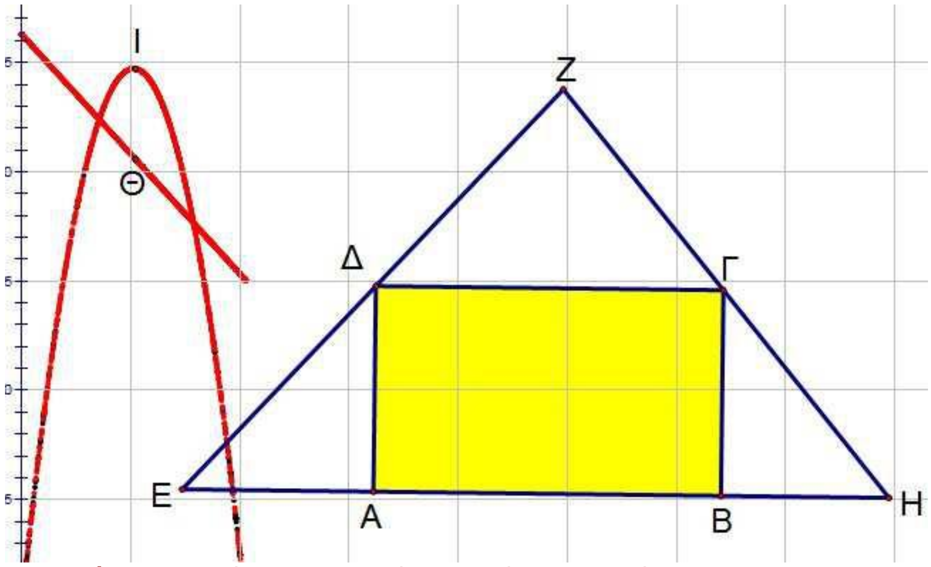
Σχήμα 1: *Το ορθικό τρίγωνο φαίνεται να είναι το ζητούμενο.*

«περίμετρος» θα το βρει ως «πρόβλημα του Fagnano», όπου επιλύεται.

Η προσέγγιση με το sketchpad, συνίσταται στην κατασκευή του σταθερού τριγώνου ΑΒΓ, στην επιλογή τριών τυχαίων σημείων, ανά ένα σε κάθε πλευρά, στην μέτρηση της περιμέτρου και στην προσπάθεια ελαχιστοποίησής της, καθώς τα σημεία μετακινούνται επί των πλευρών. Στην προσπάθεια αυτή θα απεικονιστεί ως εξαρτημένη μεταβλητή y, η περίμετρος και ως ανεξάρτητες τα μήκη των διαδρομών των σημείων επί των πλευρών με αρχή κάποια κορυφή. Το αποτέλεσμα το βλέπουμε στο σχήμα 1:

Μέσω τις παραπάνω διεργασίας αναδεικνύονται διάφορες μαθηματικές πρακτικές, δεξιότητες και διαδικασίες, όπως:

1) Το τρίγωνο ελαχίστης περιμέτρου είναι το ορθικό. Η πειραματική ισχυροποίηση της εικασίας σε ειδικά τρίγωνα όπως ισοσκελές, ισόπλευρο, ορθογώνιο αμβλυγώνιο, οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι η ύπαρξη του τριγώνου ελαχίστης περιμέτρου, έχει νόημα για οξυγώνιο τρίγωνο μόνο, καθώς (οριακά) στο ορθογώνιο και (μη οριακά) στο αμβλυγώνιο, εκφυλίζεται σε ευθεία.
2) Η εικασία για το ορθικό τρίγωνο, βασίζεται στην οπτική αντίληψη του σχήματος. Αν ως πειραματικό οπλοστάσιο έχουμε καθορίσει ένα τρίγωνο στο οποίο έχουμε αποκρύψει τα δευτερεύοντα σημεία του (για να μην είναι πολύπλοκο το σχήμα) και τα εμφανίσουμε σε μια φάση του πειραματισμού, φθάνουμε στην εικασία ευκολότερα.
3) Η προς απόδειξη πρόταση φαίνεται να διαμορφώνεται σε «Να αποδειχθεί, ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο, το εγγεγραμμένο τρίγωνο ελαχίστης περιμέτρου, είναι το ορθικό»
4) Η σκέψη για εκλογή της ανεξάρτητης μεταβλητής, καθώς μπορεί να επιλέγονται όχι μοναδικές κάθε φορά, αλλά πάντως οι κατάλληλες για την διερεύνηση της εικασίας μας.
5) Η ερμηνεία της καμπύλης ή των καμπυλών (λ.χ. γιατί το ένα σημείο διαγράφει κάποια –μάλλον- παραβολή (νέο ερώτημα-εικασία) γιατί τα άλλα σημεία διαγράφουν κατακόρυφη ευθεία.
6) Η ανάδειξη της επιστημονικής μεθοδολογίας, ότι όταν μια εξαρτημένη μεταβλητή εξαρτάται από τρεις άλλες και δεδομένου ότι εργαζόμαστε σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, στη μελέτη ακροτάτων, σταθεροποιούμε τις δύο ανεξάρτητες μεταβλητές και μεταβάλουμε την τρίτη. (Δηλ. μια καθαρά επιστημονική ανακαλυπτική, πειραματική, πρακτική)
7) Η επέκταση της εικασίας για το εάν ισχύει ανάλογη πρόταση για το εμβαδόν (δεν ισχύει)
8) Η διασύνδεση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με την ανάλυση, πράγμα που στα υπάρχοντα διδακτικά εγχειρίδια ουδόλως προβάλλεται και ουδόλως αναδεικνύεται αλλά και που αποτελεί το διδακτικό μέλλον της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.[1]
9) Η αναζήτηση μιας περαιτέρω γενίκευσης, μπορεί να δημιουργήσει ένα ανάλογο πρόβλημα για εγγεγραμμένο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο υπό την έννοια του σχήματος 2, όπου θα αναζητηθεί ελάχιστη περίμετρος ή μέγιστο εμβαδόν

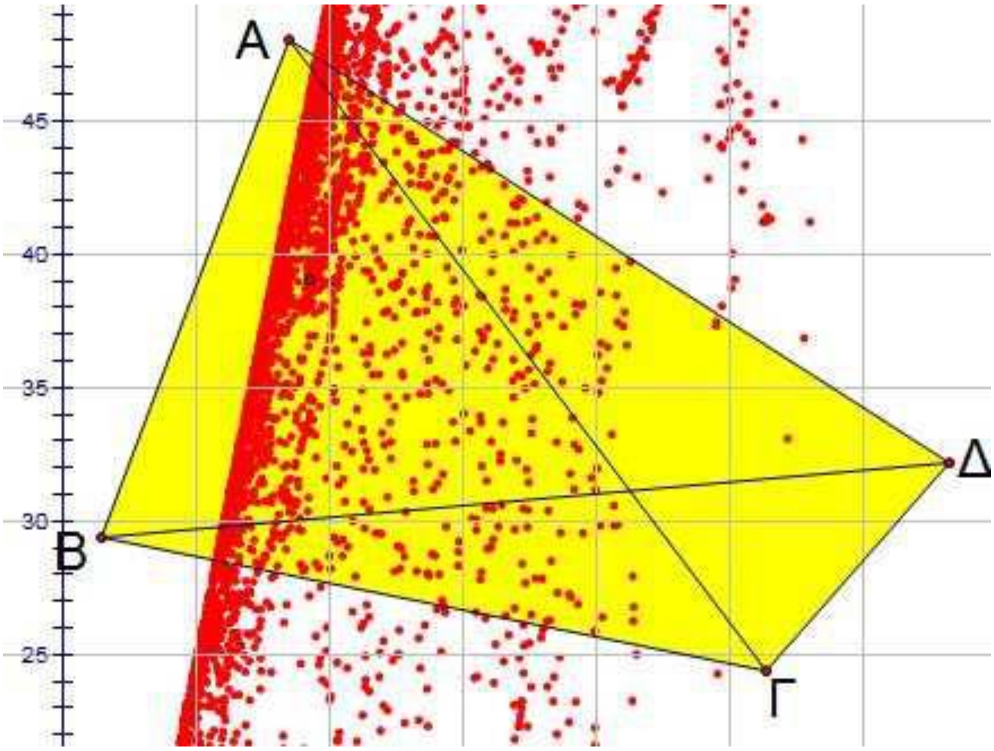


Σχήμα 2: *Το μέγιστο εμβαδόν προκύπτει στο μέσον του ΕΖ*

Είναι προφανές, ότι ως προς το μέγιστο του εμβαδού, μπορούμε να φθάσουμε στην λύση με αλγεβρικό τρόπο (μη αρνητικό πρόσημο διακρίνουσας κτλ) ή με Ανάλυση (ρίζα πρώτης παραγώγου) ωστόσο, η διερεύνηση με το sketchpad, αφού υποδεικνύει ως λύση το Δ στο μέσον του ΕΖ, μπορεί να οδηγήσει και σε καθαρά Ευκλείδεια αντιμετώπιση, όπου κάθε άλλο ορθογώνιο να αποδειχθεί ότι έχει μικρότερο εμβαδόν από το ευρεθέν (κυριολεκτικώς, από το βασίμως εικαζόμενο) . Ως προς το ερώτημα της περιμέτρου, φαίνεται, και από το δυναμικό χειρισμό του σχήματος, ότι έχω μια γραμμική μεταβολή μεταξύ του διπλασίου της πλευράς ΕΖ και του διπλασίου του αντιστοίχου ύψους της. Στη θέση μέγιστου εμβαδού, έχομε θέση μέσης τιμής ελαχίστης και μεγίστης περιμέτρου πράγμα που φαίνεται από το σχήμα του γραφήματος.

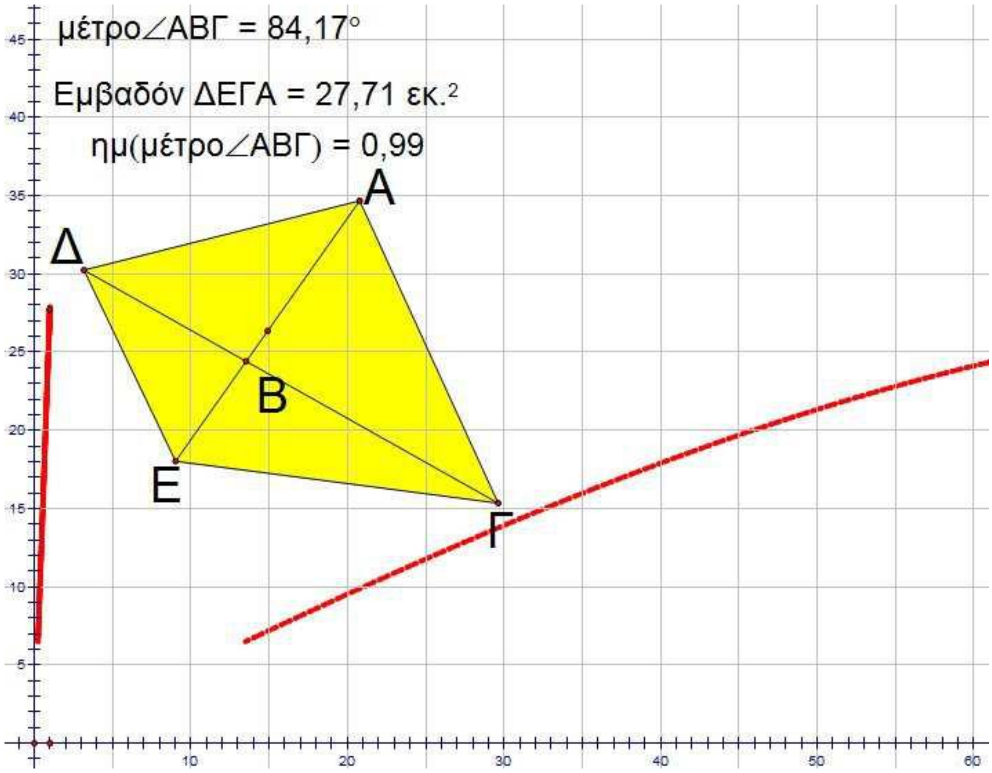
Ένα άλλο, επίσης ενδιαφέρον γνωστό πρόβλημα (χρησιμοποιήθηκε ως υπόδειγμα στην πιστοποίηση β΄ επιπέδου το Νοέμβριο του 2008) μπορεί να εισαχθεί με την
ανοικτή διατύπωση «Να εξετασθεί, πώς το εμβαδόν τετραπλεύρου εξαρτάται από τα μήκη των πλευρών των διαγωνίων του»

Στην διαπραγμάτευσή του, χρησιμοποιώντας ως ανεξάρτητη μεταβλητή το μήκος μιας των διαγωνίων (της ΑΓ) και ως εξαρτημένη το εμβαδόν, έχομε το παρακάτω



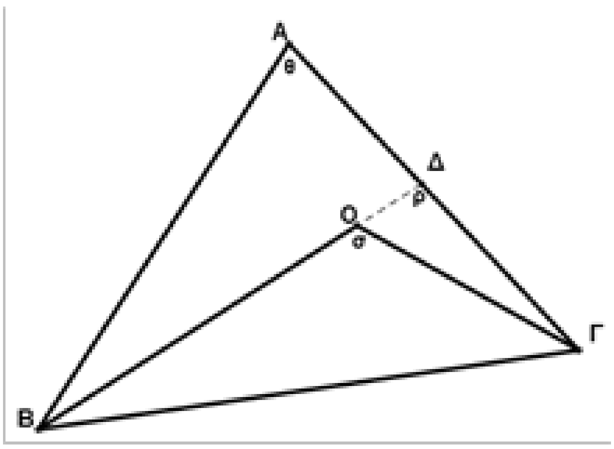
Σχήμα 3: *Το νέφος των σημείων συγκεντρώνεται σε μια γωνία.*

σχήμα 3, όπου καθώς το σημείο Γ διαγράφει το επίπεδο, ενώ όλα τα άλλα παραμένουν σταθερά, το εμβαδόν του σχήματος παίρνει τιμές σε μια γωνία. Η ερμηνεία του αποτελέσματος είναι γόνιμη μαθηματικά, αφού φαίνεται, ότι το εμβαδόν, δεν είναι μονότιμη αντιστοίχιση του μήκους της ΑΓ, αλλά πλειότιμη . Η παρατήρηση ότι οι μέγιστες τιμές επιτυγχάνονται όταν ΑΓ⊥ ΒΔ οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει και μια άλλη μεταβλητή που επειδή δίνει μέγιστο για δεδομένο μήκος της ΑΓ σε κάθετη θέση με την ΒΔ, τότε αυτό είναι η γωνία των διαγωνίων και μάλιστα το ημίτονό της. Με ένα άλλο δυναμικό χειρισμό (σχήμα 4), όπου αυτή τη φορά η ΑΓ μένει σταθερή σε μήκος και περιστρέφεται, παίρνουμε δύο γραφήματα ανάλογα με την μεταβλητή ω (καμπύλη) ή ημω (ευθεία με την μεγάλη κλίση) γύρω από αυτή την διαδικασία μπορούν να αναπτυχθούν ενδιαφέρουσες συζητήσεις-επιχειρήματα για το ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης του εμβαδού (ορθότητα ενός τύπου από άποψη διαστάσεων) γιατί πρέπει ο τύπος να είναι συμμετρικός ως προς τις διαγωνίους, πώς θα παρακαμφθεί το εμπόδιο της απεικόνισης ενός σημείου εκτός επιφάνειας εργασίας (π.χ. διαίρεση της εξαρτημένης μεταβλητής λ.χ. με το 10 ή επιλογή μη κανονικού συστήματος ορθογωνίων αξόνων και αν πρέπει να είναι κανονικό) βεβαίως, με καθοδηγούμενη ανακάλυψη και περιορίζοντας το ανοικτόν του προβλήματος μπορεί κάποιος να



Σχήμα 4: *Τα διάγραμμα με μεταβλητή το ημφ και την φ* φθάσει πιο σύντομα στον τύπο $Ε=δ_1δ_2ημω$

Παράδειγμα 2: (δύσκολο)



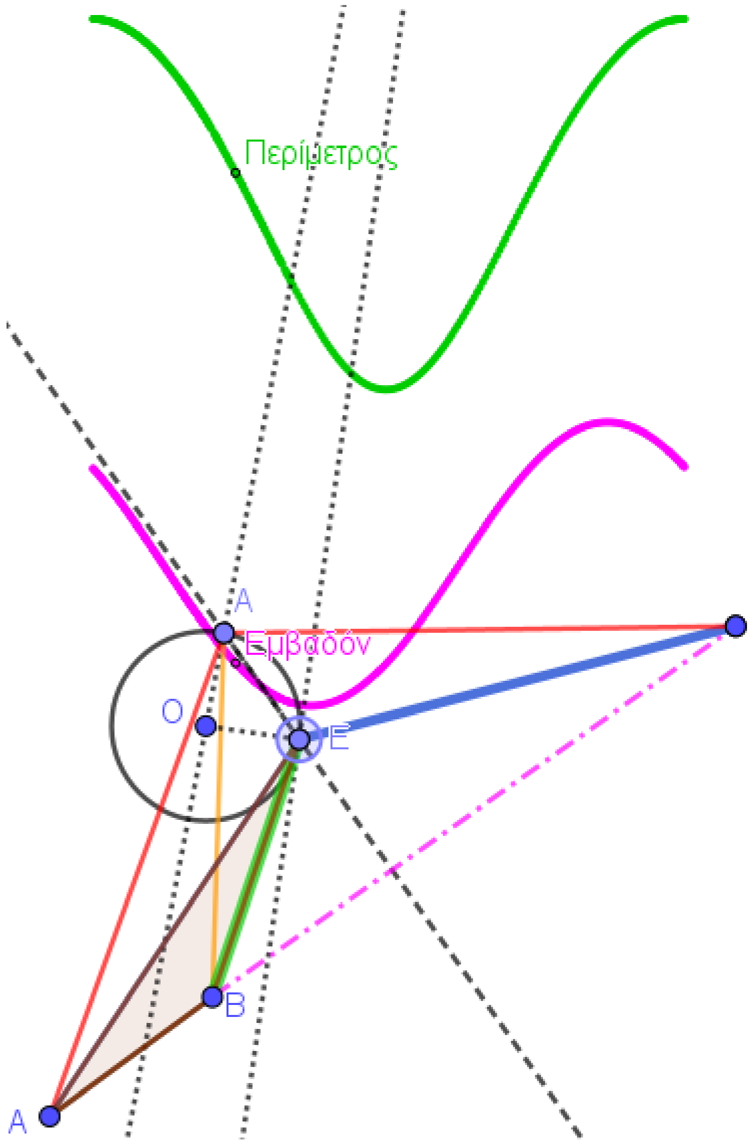
Αντιμετωπίζουμε το εξής πρόβλημα: «*Τρία σημεία Α, Β, Γ, κινούνται επί τριών κύκλων. Ποίες είναι οι θέσεις των τριών σημείων, για να έχουμε μέγιστο και ελάχιστο εμβαδόν ή περίμετρο*» Η διατύπωση, που δεν είναι κλειστού τύπου, επάγει σε ένα ανοικτό πρόβλημα, του οποίου η όλη διερεύνηση καθίσταται ιδανική με ένα δυναμικό Γεωμετρικό λογισμικό (το Sketchpad εδώ) μέσω ανακαλυπτικών διαδικασιών μάθησης. Η ειδική περίπτωση με έναν κύκλο είναι το βασικό πρόβλημα.

Η απόδειξη θα βασιστεί σε μια γνωστή βοηθητική πρόταση που λέει, ότι αν σε τρίγωνο ΑΒΓ, (σχήμα) λάβω εντός του τριγώνου τυχαίο σημείο Ο, τότε

ΑΒ+ΑΓ>ΟΒ+ΟΓ . Από τριγωνική ανισότητα στο τρ.ΑΒΔ, έχω ΑΒ+ΑΔ>ΒΟ+ΟΔ (1)

και επίσης από τριγωνική ανισότητα στο τρ. ΔΟΓ έχω ότι ΟΓ>ΔΓ-ΟΔ (2) Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη λαμβάνω το ζητούμενο. Επίσης χρειάζεται η σχέση $\widehat{\sigma} > \hat{\rho} > \hat{\theta}$ (απόδειξη;) Η μεγιστοποιούσα θέση για περίμετρο , είναι όταν η διχοτόμος τη; γωνίας Α, διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.

Το Δυναμικό σχήμα εδώ:



https://www.geogebra.org/m/nvd2t3yd

Το πρόβλημα έχει μη τετριμμένη κατασκευή που το ολοκληρώνει, όπως και διερεύνηση, που μπορεί να γίνει πολύ καλύτερα για κάθε Γεωμετρικό πρόβλημα που την απαιτεί, μέσω του δυναμικού λογισμικού. Για παράδειγμα, όταν οι κύκλοι είναι ομόκεντροι (μία γενίκευση) έχω άπειρες λύσεις (θέσεις) με το ίδια μέγιστη περίμετρο, οι οποίες προκύπτουν από την περιστροφή μιας λύσης γύρω από το κοινό κέντρο. Όταν έχω δύο ομόκεντρους κύκλους, έχω δύο λύσεις με την ίδια περίμετρο, που προκύπτουν από τα συμμετρικά των δύο κορυφών μιας λύσης ως προς άξονα την διχοτόμο που δεν διέρχεται από το κοινό κέντρο. Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για το εμβαδόν.

Κάποια συμπεράσματα:

Με την βοήθεια των δυναμικών Γεωμετρικών λογισμικών, το μάθημα της Γεωμετρίας, μπορεί να διδαχθεί ριζικά διαφορετικά. Συγκεκριμένα:

Η γνώση, μπορεί να ανακαλυφθεί από τον μαθητή , καθώς το πνεύμα και ο χαρακτήρας σχεδίασης των δυναμικών λογισμικών, είναι προσαρμοσμένα πλήρως στην κοντρουκτιβιστική προσέγγιση της διδασκαλίας. Εδώ αντιμετωπίζουμε ένα ανοικτό πρόβλημα , ανακαλύπτουμε την διατύπωσή του και μετά το λύνουμε, κάτι που σπανιότατα γίνεται στην παραδοσιακή διδασκαλία. Αυτό ήταν έναυσμα γόνιμης συζήτησης με τους καθηγητές για την ποιοτικά διαφορετική προσέγγιση που κάνει το δυναμικό λογισμικό στην ίδια την Γεωμετρία.

Εκτός από τις εντυπωσιακές δυνατότητες των δυναμικών γεωμετρικών λογισμικών στα προβλήματα γεωμετρικών τόπων, αυτά διαθέτουν και δυνατότητα διερεύνησης προβλημάτων μεγίστου και ελαχίστου. Το συγκεκριμένο πρόβλημα που αντιμετωπίσαμε, δεν είναι από τα πιο εύκολα (λ.χ. κανείς μαθητής δεν μπόρεσε να σκεφθεί να βρει το συμμετρικό τμήματος στην απόδειξη) όμως η βοήθεια του λογισμικού , τελικά δεν περιορίζεται στην εύρεση της ορθής εικασίας για την διατύπωση, αλλά ουσιαστικά βοηθά και στην απόδειξη, έπειτα βεβαίως και από σοβαρές ευρετικές νύξεις. Είναι γνωστό, πως παρόμοια προβλήματα με ακρότατα σε περιμέτρους ευθυγράμμων σχημάτων διαπραγματεύονται με την τεχνική της «ευθειοποίησης»

- Αναγκαστικά, καθώς υπάρχει κίνηση και δυναμική μεταβολή των μεγεθών, ο μαθητής εμπλέκεται σε απειροστικές λογικές, ενώ το ίδιο το λογισμικό εκ σχεδιασής του, μπορεί να συνδέει στενότερα την κλασική Ευκλείδεια με τον Απειροστικό λογισμό. Αυτή η ιδιότητα, κατά τον Στυλιανό Νεγρεπόντη, αποτελεί την εκ των ων ουκ άνευ προϋπόθεση για την επιβίωση της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως Λυκειακού μαθήματος, με όσα θετικά αυτό συνεπάγεται και στα οποία μάλλον συμφωνεί η πλειονότητα της μαθηματικής κοινότητας.

- Εφαρμογές όπως η διαπραγματευθείσα, αναδεικνύουν και τον επιμελώς αποκρυπτόμενο πειραματικό χαρακτήρα της Γεωμετρίας ο οποίος πάντα υπήρχε από την εποχή του Αρχιμήδη και έχει αποτυπωθεί στην επιστολή του ιδίου προς τον Ερατοσθένη . Στην σύγχρονη εποχή, όπου μέσω των νέων παιδαγωγικών θεωριών (Ανακαλυπτική μάθηση, κονστρουκτιβισμός) η μαθηματική ανακάλυψη έρχεται -όσο είναι δυνατόν- κοντά στον μαθητή , η αξία των δυναμικών υπερ- εργαλείων Γεωμετρίας είναι καταλυτική και δίνει στον μαθητή μια πρώτη μύηση στην έρευνα και την μαθηματική ανακάλυψη, η οποία για να παγιωθεί, περνά μέσα από αμφισβήτηση, εικασίες, διαψεύσεις από αντιπαραδείγματα, ανασκευές, επαναδιατυπώσεις κλπ. όπως είναι το υπόδειγμα της μαθηματικής ανακάλυψης .

- Είναι βέβαιον, ότι ο χαρακτήρας των δυναμικών λογισμικών Γεωμετρίας, διαφοροποιείται αρκετά και ως προς το παιδαγωγικό και ως προς το διδακτικό σκέλος από την κρατούσα πραγματικότητα των Λυκείων, η οποία σε συνδυασμό με το γνωστό έωλο επιχείρημα «αφού δεν εξετάζεται γιατί να το διδάξω;» δημιουργούν το γνωστό κλίμα απαξίωσης των ΤΠΕ.

Κεφάλαιο Γ

Τεχνικές με Ίχνος Σημείου (χ,ψ)

1. Ιδέα της μεθόδου

Η τεχνική με ίχνος σημείου επιτρέπει να μελετήσουμε πειραματικά τη σχέση μεταξύ δύο μεγεθών (ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής). Με το GeoGebra μπορούμε να κατασκευάσουμε σημείο (x, y), να ενεργοποιήσουμε το ίχνος του και να το αφήσουμε να σχηματίσει την καμπύλη εξάρτησης καθώς μεταβάλλεται το x.

2. Βήματα μεθοδολογίας

Βήμα 1. Επιλογή μεταβλητών: Ορίζουμε ανεξάρτητη μεταβλητή x (π.χ. γωνία, μήκος) και εξαρτημένη y (π.χ. εμβαδόν, περίμετρος).

Βήμα 2. Κατασκευή σημείου (x, y): Δημιουργούμε στο GeoGebra σημείο με συντεταγμένες (x, y).

Βήμα 3. Ενεργοποίηση ίχνους: Κάνουμε δεξί κλικ → «Ίχνος ενεργό» για το σημείο (x, y).

Βήμα 4. Θέση σε κίνηση: Θέτουμε σε κίνηση το στοιχείο που καθορίζει το x.

Βήμα 5. Παρατήρηση: Παρατηρούμε το σχήμα της καμπύλης (γραμμική, τετραγωνική, ημιτονοειδής).

3. Προσοχή

Ο δυναμικός τρόπος κατασκευής του σχήματος καθορίζει τι κινείται και τι όχι. Αν το σημείο έχει οριστεί πάνω σε κύκλο, κινείται στον κύκλο. Αν το σημείο εξαρτάται από άλλη κατασκευή, μπορεί να μην μεταβάλλεται όπως επιθυμούμε. Η σωστή παραμετροποίηση είναι κλειδί.

4. Παράδειγμα

Πρόβλημα: Να μελετηθεί η σχέση Ε(θ) = εμβαδόν τετραπλεύρου σε συνάρτηση της γωνίας θ των διαγωνίων.

1. Ορίζουμε x=θ και y=E.
2. Φτιάχνουμε το σημείο (x,y).
3. Ενεργοποιούμε το ίχνος.
4. Θέτουμε σε κίνηση τη γωνία θ.
5. Παρατηρούμε ότι η καμπύλη είναι της μορφής y ~ sinθ.

5. Συμπέρασμα

Η τεχνική με ίχνος σημείου λειτουργεί ως γέφυρα με την Αναλυτική Γεωμετρία και τις Φυσικές Επιστήμες: οι μαθητές δημιουργούν πειραματικές γραφικές παραστάσεις, που οδηγούν σε αναγνώριση τύπων και στη συνέχεια σε μαθηματική απόδειξη.

Κεφάλαιο Δ

Ασκήσεις – Πειράματα

1. Εμβαδά

1. Σχεδίασε τρίγωνο με βάση και ύψος.
   - Μέτρησε το εμβαδόν.
   - Διπλασίασε τη βάση. Τι παρατηρείς;
   - Διατύπωσε εικασία για τον τύπο.

2. Σχεδίασε παραλληλόγραμμο με πλευρές a, b και γωνία θ.
   - Μέτρησε το εμβαδόν για διάφορες τιμές της θ.
   - Τι συμβαίνει όταν $\theta=0°$ και όταν $\theta=90°$;

3. Σε τετράπλευρο μέτρα τις διαγώνιες και τη γωνία τους.
   - Υπολόγισε το γινόμενο $d1 \cdot d2$.
   - Σύγκρινε με το εμβαδόν.

2. Βελτιστοποίηση

1. Σχεδίασε κύκλο με διάμετρο ΒΓ και σημείο Α στον κύκλο.
   - Μέτρησε το ΑΒ+ΑΓ.
   - Βρες σε ποια θέση το άθροισμα είναι μέγιστο.

2. Σχεδίασε τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο.
   - Βρες ποιο τρίγωνο έχει μέγιστο εμβαδόν.

3. Σχεδίασε τετράπλευρο με σταθερή περίμετρο.
   - Διερεύνησε ποιο έχει μέγιστο εμβαδόν.

3. Μετρικά

1. Φτιάξε τρεις καμπύλες ίσου μήκους: ευθεία, ημικύκλιο, τεθλασμένη.
   - Μέτρησε το εμβαδόν που περικλείουν.
   - Ποια περικλείει το μεγαλύτερο;

2. Επίλεξε δύο σημεία στο επίπεδο.
   - Δοκίμασε να τα ενώσεις με διάφορες καμπύλες.
   - Ποιο μονοπάτι έχει το μικρότερο μήκος;

4. Τοπολογικά

1. Κατασκεύασε λωρίδα Möbius με χαρτί.
   - Χάραξε μια γραμμή στη μέση. Τι παρατηρείς;
   - Κόψε κατά μήκος της γραμμής. Τι σχηματίζεται;

2. Φτιάξε κορδέλα με δύο μισές περιστροφές.
- Πώς διαφέρει από τη λωρίδα Möbius;

5. Ίχνος Σημείου (x, y)

1. Ορίστε x=θ, y=E σε τετράπλευρο με διαγώνιες.
- Φτιάξτε το σημείο (x, y).
- Ενεργοποιήστε το ίχνος.
- Παρατηρήστε τη γραφική παράσταση.

2. Ορίστε x = μήκος βάσης τριγώνου, y = εμβαδόν.
- Κινήστε τη βάση.
- Ποια είναι η μορφή της καμπύλης;

Βιβλιογραφία

Δικές μου εργασίες

- Πλατάρος, Ιωάννης (2017). *Ο νέος τρόπος διδασκαλίας της Γεωμετρίας, και τα δυναμικά γεωμετρικά λογισμικά*. [PDF] (Academia)
- Πλατάρος, Ιωάννης. *Ο κρυφός πειραματικός χαρακτήρας της Γεωμετρίας και η διδακτική του αξιοποίηση μέσω των δυναμικών γεωμετρικών λογισμικών*. [PDF] (Academia)
- Πλατάρος Γιάννης «Μια Γεωμετρική εφαρμογή Μεγίστου κι Ελάχιστου με χρόνο, μέσω Δυναμικού Λογισμικού, ως Διδακτική Πρόταση» 2ο Πανελλήνιο Εκπαιδευτικό Συνέδριο Ημαθίας . «Ψηφιακές και Διαδικτυακές εφαρμογές στην Εκπαίδευση

Άλλη διεθνής-θεωρητική

- Hearsh, R. (1997). *What is Mathematics Really?*
- Borwein, J., Bailey, D. & άλλοι — *Experimental Mathematics* (βιβλίο/πρακτικά)
- Hoyles, C., Noss, R. — εργασίες για ανακαλυπτική μάθηση και μαθηματική εκπαίδευση μέσω τεχνολογίας