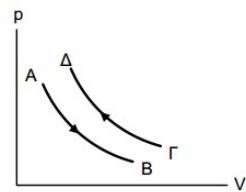
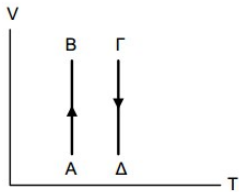
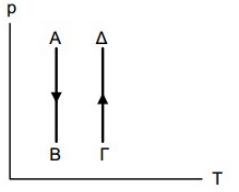
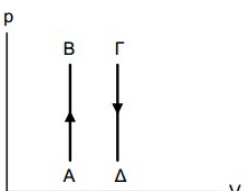
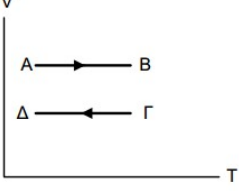
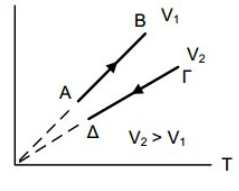
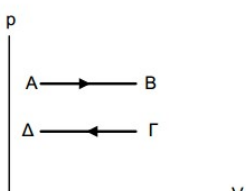
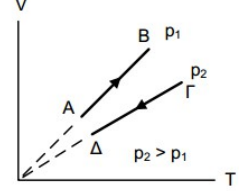
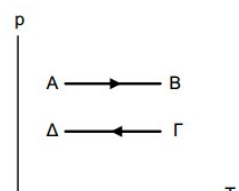


ΝΟΜΟΙ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ - ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Από τον συνδυαστικό νόμο (βλέπε απόδειξη παρακάτω) που ισχύει για οποιαδήποτε μεταβολή, αρκεί η **μάζα του αερίου να παραμένει σταθερή**, προκύπτουν εύκολα οι νόμοι των αερίων:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \begin{cases} T = \text{σταθ.} & p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad (pV = \text{σταθ.} \quad \text{Νόμος Boyle}) \\ V = \text{σταθ.} & \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad \left(\frac{p}{T} = \text{σταθ.} \quad \text{Νόμος Charles}\right) \\ p = \text{σταθ.} & \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad \left(\frac{V}{T} = \text{σταθ.} \quad \text{Νόμος Gay Lussac}\right) \end{cases}$$

	<i>p - V</i>	<i>V - T</i>	<i>p - T</i>
ΙΣΟΘΕΡΜΗ	 <p><i>A</i> → <i>B</i> Εκτόνωση <i>Γ</i> → <i>Δ</i> Συμπίεση</p>	 <p><i>A</i> → <i>B</i> Εκτόνωση <i>Γ</i> → <i>Δ</i> Συμπίεση</p>	 <p><i>A</i> → <i>B</i> Εκτόνωση <i>Γ</i> → <i>Δ</i> Συμπίεση</p>
ΙΣΟΧΩΡΗ	 <p><i>A</i> → <i>B</i> Θέρμανση <i>Γ</i> → <i>Δ</i> Ψύξη</p>	 <p><i>A</i> → <i>B</i> Θέρμανση <i>Γ</i> → <i>Δ</i> Ψύξη</p>	 <p><i>A</i> → <i>B</i> Θέρμανση <i>Γ</i> → <i>Δ</i> Ψύξη</p>
ΙΣΟΒΑΡΗΣ	 <p><i>A</i> → <i>B</i> Εκτόνωση - Θέρμανση <i>Γ</i> → <i>Δ</i> Συμπίεση - Ψύξη</p>	 <p><i>A</i> → <i>B</i> Εκτόνωση - Θέρμανση <i>Γ</i> → <i>Δ</i> Συμπίεση - Ψύξη</p>	 <p><i>A</i> → <i>B</i> Εκτόνωση - Θέρμανση <i>Γ</i> → <i>Δ</i> Συμπίεση - Ψύξη</p>

Κινητική θεωρία των αερίων

➤ Μέση ταχύτητα των μορίων ενός αερίου

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_N}{N}$$

➤ Μέση τιμή των τετραγώνων των ταχυτήτων των μορίων ενός αερίου

$$\bar{K} = \frac{K_1 + K_2 + \dots + K_N}{N} = \frac{1/2mv_1^2 + 1/2mv_2^2 + \dots + 1/2mv_N^2}{N} = \frac{1}{2}m \left(\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}{N} \right) = \frac{1}{2}m\bar{v}^2$$

δηλαδή: $\bar{v}^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}{N}$

➤ Μέση κινητική ενέργεια των μορίων ενός αερίου

- Μια άλλη μορφή της καταστατικής εξίσωσης:

$$pV = nRT \xrightarrow{n = \frac{N}{N_A}} pV = N \frac{R}{N_A} T \xrightarrow{k = \frac{R}{N_A}} \boxed{pV = NkT} \quad (1)$$

- Σχέση θερμοκρασίας και μέσης μεταφορικής κινητικής ενέργειας των μορίων του αερίου:

$$p = \frac{1}{3} \frac{N \cdot m \cdot \bar{v}^2}{V} \rightarrow pV = \frac{2}{3} N \left(\frac{1}{2} m \cdot \bar{v}^2 \right) \xrightarrow{\bar{K} = \frac{1}{2} m \cdot \bar{v}^2} pV = \frac{2}{3} N \bar{K} \quad (2)$$

$$\text{Από (1) και (2) έχουμε: } NkT = \frac{2}{3} N \bar{K} \rightarrow \boxed{T = \frac{2}{3} \frac{1}{k} \cdot \bar{K}} \quad (3)$$

- Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η θερμοκρασία ενός αερίου είναι το μακροσκοπικό αποτέλεσμα της μεταφορικής κίνησης των μορίων του αερίου.
- Μέση μεταφορική κινητική ενέργεια και θερμοκρασία του αερίου:

$$\text{Αν λύσουμε τη σχέση (3) ως προς } \bar{K} \text{ έχουμε: } \boxed{\bar{K} = \frac{3}{2} kT} \quad (4)$$

- Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η μέση κινητική ενέργεια των μορίων ενός αερίου είναι ανάλογη της απόλυτης θερμοκρασίας του.

➤ Ενεργός ταχύτητα

Η ενεργός ταχύτητα των μορίων ενός αερίου μπορεί να πάρει τις παρακάτω εκφράσεις:

$$\begin{aligned}\alpha) P &= \frac{1}{3} \rho \overline{v^2} \Rightarrow \overline{v^2} = \frac{3P}{\rho} \Rightarrow \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}} \Rightarrow \boxed{v_{ev} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}} \\ \beta) \bar{K} &= \frac{1}{2} m \overline{v^2} \Rightarrow \overline{v^2} = \frac{2\bar{K}}{m} \Rightarrow \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{2\bar{K}}{m}} \Rightarrow \boxed{v_{ev} = \sqrt{\frac{2\bar{K}}{m}}} \\ \gamma) \bar{K} &= \frac{1}{2} m \overline{v^2} \Rightarrow \frac{3}{2} kT = \frac{1}{2} m \overline{v^2} \Rightarrow \overline{v^2} = \frac{3kT}{m} \Rightarrow \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \Rightarrow \boxed{v_{ev} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}} \\ \delta) v_{ev} &= \sqrt{\frac{3kT}{m}} \Rightarrow v_{ev} = \sqrt{\frac{3RT}{N_A m}} \Rightarrow \boxed{v_{ev} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}} \quad (5)\end{aligned}$$

- Παρατηρούμε ότι αν έχουμε δύο ή περισσότερα διαφορετικά αέρια στην ίδια θερμοκρασία θα έχουν και ίδια \bar{K} (σχέση 4), αλλά διαφορετική ενεργό ταχύτητα, αφού αυτή εξαρτάται και από τη γραμμομοριακή μάζα του κάθε αερίου (σχέση 5).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Η μέση τιμή των τετραγώνων των ταχυτήτων των μορίων ενός αερίου και το τετράγωνο της μέσης ταχύτητας έχουν διαφορετικές τιμές:

$$\overline{v^2} \neq (\bar{v})^2 \quad \text{ή} \quad \sqrt{\overline{v^2}} \neq \bar{v} \quad \text{ή} \quad v_{ev} \neq \bar{v}$$

- Προσοχή !!! $v_{ev}^2 = \left(\sqrt{\overline{v^2}}\right)^2 = \overline{v^2}$ δηλαδή η μέση τιμή των τετραγώνων των ταχυτήτων είναι ίση με τη ενεργό ταχύτητα υψωμένη στο τετράγωνο, άρα οι σχέσεις της θεωρίας (σελίδα 4) μπορούν να πάρουν και άλλη μορφή.

$$p = \frac{1}{3} \frac{Nm v_{ev}^2}{V} \quad \text{ή} \quad p = \frac{1}{3} \rho v_{ev}^2 \quad \text{και} \quad \bar{K} = \frac{1}{2} m v_{ev}^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ποσότητα αερίου υδρογόνου βρίσκεται στην ίδια θερμοκρασία με ποσότητα αερίου οξυγόνου (και τα δύο αέρια θεωρούνται ιδανικά).

Δ₁. Ποιος είναι ο λόγος των μέσων μεταφορικών κινητικών ενεργειών των μορίων των δύο αερίων;

Δ₂. Ποιος είναι ο λόγος των ενεργών ταχυτήτων των μορίων των δύο αερίων;

Στη συνέχεια χωρίς να μεταβληθεί η ποσότητα του υδρογόνου, συμπιέζεται ο όγκος του αερίου στο μισό (σε σχέση με τον αρχικό όγκο). Ποιος είναι ο λόγος των ενεργών ταχυτήτων των μορίων του υδρογόνου, πριν και μετά τη μεταβολή του όγκου του όταν αυτή η μεταβολή συντελείται:

Δ₃. υπό σταθερή θερμοκρασία;

Δ₄. υπό σταθερή πίεση;

Δίνεται οι γραμμομοριακές μάζες του υδρογόνου: $M_H = 2 \cdot 10^{-3}$ και του οξυγόνου: $M_O = 32 \cdot 10^{-3} \text{ kg / mol}$.

Λύση

Δ₁. Το πηλίκο των μέσων μεταφορικών κινητικών ενεργειών των μορίων των ιδανικών αερίων οξυγόνου και υδρογόνου, είναι:

(Η μέση μεταφορική κινητική ενέργεια εξαρτάται μόνο από την θερμοκρασία, για συγκεκριμένη ποσότητα αερίου)

$$= = 1 .$$

Δ₂. Ο λόγος των ενεργών ταχυτήτων των μορίων των ιδανικών αερίων είναι:
(Η ενεργός ταχύτητα εξαρτάται από την θερμοκρασία, αλλά και από το είδος του αερίου)

$$()^2 = \Rightarrow ()^2 = \Rightarrow ()^2 = 32 \cdot 10^{-3} / 2 \cdot 10^{-3} \Rightarrow ()^2 = 16 \Rightarrow () = 4 .$$

Δ₃. Η θερμοκρασία δεν αλλάζει $T' = T$ άρα και η ενεργός ταχύτητα για την ίδια ποσότητα αερίου, δεν θα αλλάξει $\Rightarrow = 1$.

Δ₄. Έχουμε ισοβαρής μεταβολή: $= \Rightarrow T' = V' \cdot \Rightarrow T' = \frac{1}{2} T$.

Άρα το πηλίκο των ενεργών ταχυτήτων γίνεται:

$$()^2 = \Rightarrow ()^2 = \Rightarrow ()^2 = 2 \Rightarrow () = \sqrt{2} .$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΟ 1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. Ασκήσεις στους νόμους των αερίων – Καταστατική εξίσωση.
2. Ασκήσεις στη καταστατική εξίσωση – πυκνότητα – Συνδυαστικός νόμος.
3. Ασκήσεις όπου αλλάζει η μάζα του αερίου με κάποιο τρόπο.
4. Ασκήσεις που αναφέρονται σε δοχεία που χωρίζονται με έμβολο. (1.34)
5. Ασκήσεις με αέρια που βρίσκονται σε οριζόντια ή κατακόρυφα δοχεία που κλείνονται με έμβολο. (1.31, 1.32, 1.36)
6. Ασκήσεις που αναφέρονται σε δοχεία που συνδέονται με σωλήνα αμελητέου όγκου ή στρόφιγγα – ανάμιξη αερίων. (1.35)
7. Ασκήσεις στις εξισώσεις της κινητικής θεωρίας.

Παρατηρήσεις - Μεθοδολογία των ασκήσεων

1. Μονάδα μέτρησης του όγκου στο S.I. είναι το 1 m^3 . Άλλες μονάδες μέτρησης του όγκου είναι το λίτρο (L) και το mL. Για τις μετατροπές ισχύουν:

$$1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ L} \quad \text{και} \quad 1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$1 \text{ L} = 10^3 \text{ mL} \quad \text{και} \quad 1 \text{ mL} = 10^{-3} \text{ L}$$

Επίσης να θυμίσουμε ότι: $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$ και $1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3$.

2. Μονάδα μέτρησης της πίεσης στο S.I. είναι το $1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ που προκύπτει από τον ορισμό της¹ και ονομάζεται Pascal (Pa). Άλλη μονάδα μέτρησης της πίεσης είναι η ατμόσφαιρα (atm). Για τις μετατροπές ισχύουν:

$$1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

3. Η θερμοκρασία πρέπει πάντα να μετρείται σε $^{\circ}\text{K}$ (Kelvin). Αν θ η θερμοκρασία σε $^{\circ}\text{C}$ και T η θερμοκρασία σε $^{\circ}\text{K}$ ισχύει ότι:

$$T(^{\circ}\text{K}) = 273 + \theta(^{\circ}\text{C})$$

Η θερμοκρασία **-273^o K** ονομάζεται **απόλυτο μηδέν**.

4. Η καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων έχει τη μορφή

$$PV = nRT$$

Ο αριθμός n των mol εκφράζεται με τους παρακάτω τρόπους:

α) $n = \frac{m}{M}$, όπου m η μάζα και M η γραμμομοριακή μάζα του αερίου.

β) $n = \frac{V}{V_{\text{mol}}}$, όπου V ο όγκος και V_{mol} ο γραμμομοριακός όγκος του αερίου στις ίδιες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας.

γ) $n = \frac{N}{N_A}$, όπου N ο αριθμός των μορίων του αερίου και N_A η σταθερά του

Avogadro ($N_A = \text{o αριθμός των μορίων που περιέχονται σε } 1 \text{ mol οποιοδήποτε αερίου} = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ μόρια/mol}$).

Έτσι η καταστατική εξίσωση των ιδανικών μπορεί να πάρει τις παρακάτω ισοδύναμες μορφές:

$$PV = nRT \quad \text{ή} \quad PV = \frac{m}{M}RT \quad \text{ή} \quad PV = \frac{V}{V_{\text{mol}}}RT \quad \text{ή} \quad PV = \frac{N}{N_A}RT$$

5. Η καταστατική εξίσωση ισχύει για κάθε κατάσταση ισορροπίας ενός ιδανικού αερίου. Έτσι, σε μια μεταβολή από την κατάσταση A(P_1, V_1, T_1) στην κατάσταση B(P_2, V_2, T_2), μπορούμε να εφαρμόσουμε την καταστατική εξίσωση για τις δύο καταστάσεις και να συνδυάσουμε τις σχέσεις που προκύπτουν.

$$\left. \begin{array}{l} P_1 V_1 = nRT_1 \\ P_2 V_2 = nRT_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{P_1 V_1}{T_1} = nR \\ \frac{P_2 V_2}{T_2} = nR \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

☛ Η τελευταία εξίσωση ισχύει για οποιαδήποτε μεταβολή ενός ιδανικού αερίου, αρκεί η **μάζα του να διατηρείται σταθερή**.

6. Όταν κατά τη διάρκεια της μεταβολής ενός ιδανικού αερίου η **μάζα του μεταβάλλεται**, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πάλι την καταστατική εξίσωση. Έτσι, σε μια μεταβολή από την κατάσταση A(n_1, P_1, V_1, T_1) στην κατάσταση B(n_2, P_2, V_2, T_2) έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} P_1 V_1 = nRT_1 \\ P_2 V_2 = nRT_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = R \\ \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2} = R \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2}$$

7. Η μάζα μιας ποσότητας ιδανικού αερίου μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση $\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V$, όπου V ο όγκος και ρ η πυκνότητα του αερίου στις ίδιες συνθήκες.

Όταν, όμως, δεν δίνεται η πυκνότητα ρ του αερίου, τότε η μάζα του θα υπολογιστεί από την καταστατική εξίσωση. Έχουμε:

$$PV = nRT \Rightarrow PV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow m = \frac{PVM}{RT}$$

8. Με τη βοήθεια της καταστατικής εξίσωσης μπορεί να υπολογιστεί η πυκνότητα ενός ιδανικού αερίου. Έχουμε:

$$PV = nRT \Rightarrow PV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT} \Rightarrow \rho = \frac{PM}{RT}$$

Όταν γνωρίζουμε την πυκνότητα ρ_1 σε πίεση P_1 και θερμοκρασία T_1 , τότε μπορούμε να βρούμε την πυκνότητα ρ_2 σε πίεση P_2 και θερμοκρασία T_2 , εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση:

$$\left. \begin{array}{l} \rho_1 = \frac{P_1 M}{RT_1} \\ \rho_2 = \frac{P_2 M}{RT_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P_2 T_1}{P_1 T_2} \Rightarrow \rho_2 = \rho_1 \frac{P_2 T_1}{P_1 T_2}$$

9. Όταν ένα δοχείο περιέχει n_A mol ενός ιδανικού αερίου A και n_B mol ενός ιδανικού αερίου B, τότε η καταστατική εξίσωση ισχύει και για το μίγμα των αερίων και γράφεται:

$$PV = (n_A + n_B)RT$$

Αν M_A και M_B είναι οι γραμμομοριακές μάζες των δύο αερίων, αντίστοιχα, τότε η γραμμομοριακή μάζα του μίγματος M είναι:

$$M = \frac{m_{\text{ολ}}}{n_{\text{ολ}}} \Rightarrow M = \frac{m_A + m_B}{n_A + n_B} \Rightarrow M = \frac{n_A M_A + n_B M_B}{n_A + n_B}$$

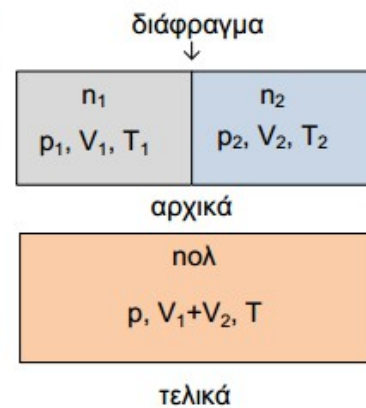
10. Κατά την ανάμειξη δύο διαφορετικών ιδανικών αερίων ή δύο ποσοτήτων του ίδιου ιδανικού αερίου, που βρίσκονται σε διαφορετικές συνθήκες, εφαρμόζουμε την καταστατική για κάθε αέριο χωριστά και για το μίγμα.

$$P_1 V_1 = n_1 R T_1 \quad (1) \quad P_2 V_2 = n_2 R T_2 \quad (2)$$

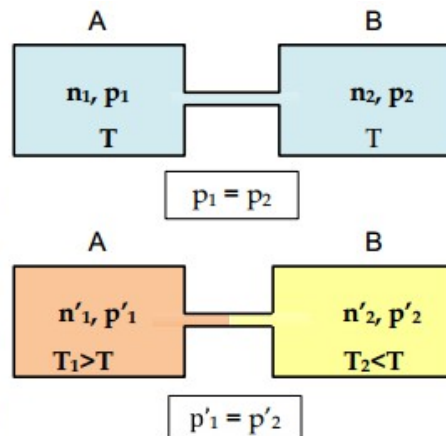
$$P(V_1 + V_2) = n_{\text{ολ}} R T \quad (3)$$

Επειδή σε κάθε ανάμειξη η μάζα διατηρείται, έχουμε:

$$\boxed{n_1 + n_2 = n_{\text{ολ}}} \stackrel{(1),(2),(3)}{\Rightarrow} \frac{P_1 V_1}{T_1} + \frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{P(V_1 + V_2)}{T}$$



11. Όταν δύο δοχεία A και B που περιέχουν ιδανικό αέριο συγκοινωνούν μεταξύ τους με λεπτό σωλήνα αμελητέου όγκου, με ή χωρίς στρόφιγγα, τότε σε κάθε κατάσταση ισορροπίας του συστήματος η πίεση που επικρατεί στο εσωτερικό των δύο δοχείων έχει την ίδια τιμή, δηλαδή ισχύει $P_1 = P_2$. Αν μεταβληθεί η θερμοκρασία του αερίου στο ένα ή και στα δύο δοχεία, τότε θα έχουμε μετακίνηση μορίων από το ένα δοχείο στο



άλλο, ώστε η νέα πίεση στο εσωτερικό των δύο δοχείων να αποκτήσει την ίδια τιμή, κατά κανόνα διαφορετική από την αρχική, δηλαδή ισχύει $P'_1 = P'_2$. Στην περίπτωση αυτή μεταβάλλεται ο αριθμός των mol του αερίου σε κάθε δοχείο, αλλά ο συνολικός αριθμός των mol στα δύο δοχεία παραμένει ο ίδιος. Αν, λοιπόν, n_1 και n_2 είναι τα mol του αερίου στα δύο δοχεία αρχικά και n'_1 και n'_2 τα mol του αερίου στα δύο δοχεία τελικά, θα ισχύει:

$$n_1 + n_2 = n'_1 + n'_2$$

Τα n_1 , n_2 , n'_1 και n'_2 υπολογίζονται από την καταστατική εξίσωση που εδώ πρέπει να εφαρμοστεί τέσσερις φορές: δύο για το αέριο στο δοχείο Α και δύο για το αέριο στο δοχείο Β.

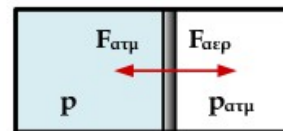
² Αν η θερμοκρασία του αερίου στο δοχείο Α αυξηθεί και ταυτόχρονα η θερμοκρασία του αερίου στο δοχείο Β μειωθεί, τότε θα έχουμε μετακίνηση μορίων από το δοχείο Α στο δοχείο Β, μέχρι να εξισωθούν εκ νέου οι πιέσεις στα δύο δοχεία.

12. Ένα έμβολο που είναι αρχικά ακίνητο και μπορεί να κινείται χωρίς τριβές ισορροπεί, όταν οι πιέσεις στις δύο όψεις του εμβόλου είναι ίσες.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow P_1 = P_2$$

α) Όταν ο άξονας του δοχείου είναι οριζόντιος

Όταν μια ποσότητα αερίου περιέχεται σε οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο που είναι ανοιχτό στο ένα άκρο του και κλείνεται αεροστεγώς με ευκίνητο έμβολο εμβαδού διατομής A , τότε η πίεση P του αερίου είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση $P_{ατμ}$. Έχουμε:



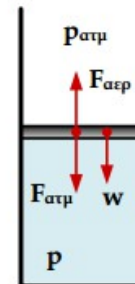
$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{αερ} = F_{ατμ} \Rightarrow \frac{F_{αερ}}{A} = \frac{F_{ατμ}}{A} \Rightarrow \boxed{P = P_{ατμ}}$$

β) Όταν ο άξονας του δοχείου είναι κατακόρυφος

Όταν μια ποσότητα αερίου περιέχεται σε κατακόρυφο κυλινδρικό δοχείο που είναι ανοιχτό στο ένα άκρο του και κλείνεται αεροστεγώς με ευκίνητο έμβολο βάρους \bar{w} και εμβαδού διατομής A , τότε:

- Αν το δοχείο είναι ανοιχτό στο πάνω άκρο του, η πίεση P του αερίου είναι ίση με το άθροισμα της ατμοσφαιρικής πίεσης $P_{ατμ}$ και της πίεσης που ασκεί στο αέριο το έμβολο με το βάρος του. Έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{αερ} = F_{ατμ} + w \Rightarrow \frac{F_{αερ}}{A} = \frac{F_{ατμ}}{A} + \frac{w}{A} \Rightarrow$$

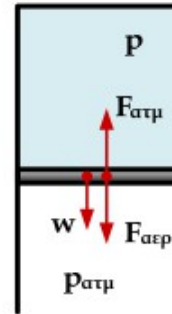


$$\boxed{P = P_{ατμ} + \frac{w}{A}}$$

- Αν το δοχείο είναι ανοικτό στο κάτω άκρο του, η πίεση P του αερίου είναι ίση με τη διαφορά της ατμοσφαιρικής πίεσης $P_{\text{ατμ.}}$ και της πίεσης που ασκεί στο αέριο το έμβολο με το βάρος του. Δηλαδή:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\text{αερ.}} + w = F_{\text{ατμ.}} \Rightarrow \frac{F_{\text{αερ.}}}{A} + \frac{w}{A} = \frac{F_{\text{ατμ.}}}{A} \Rightarrow$$

$$\frac{F_{\text{αερ.}}}{A} = \frac{F_{\text{ατμ.}}}{A} - \frac{w}{A} \Rightarrow \boxed{P = P_{\text{ατμ.}} - \frac{w}{A}}$$



γ) Όταν υπάρχει αέριο και από τις δύο πλευρές τον εμβόλου

Όταν ένα κυλινδρικό δοχείο χωρίζεται με ευκίνητο έμβολο σε δύο μέρη που περιέχουν το ίδιο ή δύο διαφορετικά αέρια και το έμβολο **ισορροπεί**, τότε:



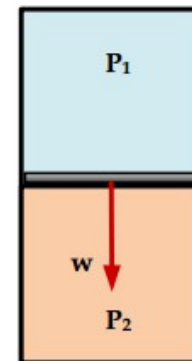
- Αν το δοχείο είναι οριζόντιο, οι πιέσεις των αερίων στα δύο μέρη του δοχείου είναι ίσες. Δηλαδή:

$$\boxed{P_1 = P_2}$$

- Αν το δοχείο είναι κατακόρυφο, η πίεση του αερίου που βρίσκεται κάτω από το έμβολο είναι ίση με το άθροισμα της πίεσης του αερίου που βρίσκεται πάνω από το έμβολο και της πίεσης που ασκεί το έμβολο με το βάρος του. Έτσι, στο παράδειγμα του σχήματος, ισχύει:

$$\boxed{P_2 = P_1 + \frac{w}{A}}$$

όπου \bar{w} το βάρος και A το εμβαδό διατομής του εμβόλου.



- Τα ίδια ακριβώς συμβαίνουν και όταν ένας λεπτός σωλήνας χωρίζεται σε δύο μέρη με μια μικρή σταγόνα υδραργύρου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ιδανικό μονοατομικό αέριο ποσότητας $1 / R$ mol (το R είναι αριθμητικά ίσο με τη σταθερά των ιδανικών αερίων εκφρασμένη σε joule / mol·K) και

θερμοκρασίας $27\text{ }^{\circ}\text{C}$ βρίσκεται σε κυλινδρικό δοχείο η πάνω επιφάνεια του οποίου φράσσεται από έμβολο μάζας $m = 300\text{ kg}$ και επιφάνειας, εμβαδού $A = 100\text{ cm}^2$. Το έμβολο μπορεί να μετακινείται χωρίς τριβές και αρχικά ισορροπεί.

Δ_1 . Να υπολογίσετε την αρχική πίεση του αερίου.

Στη συνέχεια το αέριο θερμαίνεται αντιστρεπτά έως τη θερμοκρασία των $127\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Δ_2 . Να υπολογίσετε τον τελικό όγκο του αερίου.

Δ_3 . Πόσο ανυψώθηκε το έμβολο ;

Δ_4 . Το έμβολο ακινητοποιείται (ασφαλίζεται) στη νέα αυτή θέση και το αέριο ψύχεται στην αρχική του θερμοκρασία. Να υπολογίσετε πόση θερμότητα ανταλλάσσεται μεταξύ αερίου και περιβάλλοντος.

Δίνεται η ατμοσφαιρική πίεση στην περιοχή που βρίσκεται το δοχείο $p_{\text{atm}} = 10^5\text{ N / m}^2$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{ m / s}^2$ και $C_v = 3 R / 2$.

Λύση

Οι θερμοκρασίες πρέπει να μετατραπούν στη κλίμακα Kelvin:

$$T = \theta + 273 \Rightarrow T = 27 + 273 = 300\text{ K}$$

$$T' = \theta' + 273 \Rightarrow T' = 127 + 273 = 400\text{ K} .$$

Δ_1 . Η πίεση από το έμβολο στο αέριο δίνεται:

$$P = P_{\text{atm}} + \Rightarrow P = 1 \cdot 10^5 + (300 \cdot 10) / 10^{-2} \Rightarrow P = 4 \cdot 10^5\text{ N / m}^2.$$

Από την καταστατική εξίσωση για την αρχική κατάσταση ισορροπίας:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T \Rightarrow V = \Rightarrow V = 300 / (4 \cdot 10^5) \Rightarrow V = \cdot 10^{-3}\text{ m}^3 .$$

Δ_2 . Η πίεση από το έμβολο είναι σταθερή, η μεταβολή είναι ισοβαρής θέρμανση (ή εκτόνωση):

$$\Rightarrow V' = V \Rightarrow V' = 10^{-3} \Rightarrow V' = 1 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3$$

Δ_3 . Ο όγκος ενός κυλίνδρου:

$$V = A \cdot h \Rightarrow h = V / A$$

$$V' = A \cdot h' \Rightarrow h' = V' / A ,$$

$$\text{άρα } \Delta h = h' - h = (V' - V) / A \Rightarrow \Delta h = (1 - \cdot) \cdot 10^{-3} / 10^{-2} \Rightarrow \Delta h = \cdot 10^{-1}\text{ m}.$$

Δ_4 . Το αέριο αφού ασφαλίζεται σε αυτή την θέση έχει $P =$ σταθερό και $V =$ σταθερό, άρα η ανταλλαγή θερμότητας προέρχεται από την μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου:

$$\Delta U = n \cdot C_v \cdot \Delta T \Rightarrow \Delta U = (3 / 2) \cdot (300 - 400) = -150\text{ joule}.$$

1ος θερμοδυναμικός νόμος $Q = \Delta U + W$, με $W = 0$ άρα

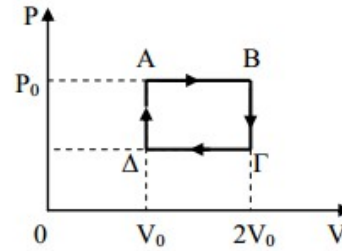
$$Q = \Delta U = -150\text{ joule}.$$

**ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

1. Η καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων ισχύει για κάθε κατάσταση ισορροπίας του αερίου (αρκεί να μη μεταβάλλεται η μάζα του).
2. Όταν ένα αέριο υποβάλλεται σε μια σειρά διεργασιών ή σε μια κυκλική μεταβολή, τότε μπορεί να φανεί χρήσιμη η κατασκευή ενός πίνακα, όπου θα συμπληρώνουμε τις τιμές των P, V, T που δίνονται από την εκφώνηση και έτσι θα γνωρίζουμε τις άγνωστες τιμές των P, V, T που πρέπει να υπολογίσουμε, με τη χρήση της ΚΕΙΑ και των νόμων των μεταβολών.

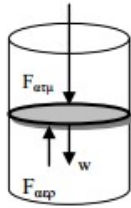
π.χ.

	P	V	T
Κατάσταση Α	P_0	V_0	T_0
Κατάσταση Β		$2V_0$	
Κατάσταση Γ		$2V_0$	
Κατάσταση Δ	$P_0/2$		



3. Όταν ένα έμβολο **ισορροπεί**, η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό είναι ίση με μηδέν.

Στη θέση ισορροπίας έχω: $\Sigma F=0$, $F_{ατμ} + W = F_{αερ}$



$$\text{άρα } \frac{F_{ατμ}}{A} + \frac{W}{A} = \frac{F_{αερ}}{A} \rightarrow P_{ατμ} + \frac{W}{A} = P_{αερ}$$

4. Έργο

Ο υπολογισμός του έργου σε μια μεταβολή μπορεί να γίνει:

- α) Αν είναι γνωστή μεταβολή, μέσω της σχέσης που δίνει το έργο στη μεταβολή αυτή.
- β) Αν είναι τυχαία μεταβολή, από το εμβαδόν της γραφικής παράστασης σε διάγραμμα P-V.

Ο υπολογισμός του έργου σε μία κυκλική μεταβολή μπορεί να γίνει:

- α) Με άθροισμα των επιμέρους έργων αν οι μεταβολές που αποτελούν την κυκλική μεταβολή είναι γνωστές.
- β) Από το εμβαδόν που περικλείεται από την κυκλική μεταβολή σε διάγραμμα P-V, αν αυτό είναι γνωστό γεωμετρικό σχήμα. π.χ. για το παραπάνω σχήμα $W_{ολ} = E_{ΑΒΓΔ} = E_{\text{παραλληλογράμιου}}$

5. Εσωτερική ενέργεια

Για οποιαδήποτε μεταβολή του αερίου θα χρησιμοποιούμε τη σχέση: $\Delta U = nC_V\Delta T$

Σε μια κυκλική μεταβολή, έχω $\Delta U_{ολ}=0$ οπότε και το άθροισμα των επιμέρους ΔU_i είναι ίσο με μηδέν. π.χ. στην μεταβολή ΑΒΓΔΑ, έχω: $\Delta U_{ολ} = 0 \rightarrow \Delta U_{ΑΒ} + \Delta U_{ΒΓ} + \Delta U_{ΓΔ} + \Delta U_{ΔΑ} = 0$

6. Θερμότητα

Ο υπολογισμός της θερμότητας μπορεί να γίνει:

- α) Αν είναι γνωστή μεταβολή, μέσω της σχέσης υπολογισμού της.
- β) Αν είναι τυχαία μεταβολή, μέσω του A!Θ.Νόμου, για τη μεταβολή αυτή.

Ο υπολογισμός της θερμότητας σε μια κυκλική μεταβολή μπορεί να γίνει:

α) Με άθροισμα των επιμέρους θερμοτήτων,

β) Από τον Α!Θ.Νόμο για την κυκλική μεταβολή ($Q_{ολ}=W_{ολ}$, αφού $\Delta U_{ολ}=0$).

7. Όταν δίνεται η γραφική παράσταση μιας μεταβολής σε διάγραμμα P-T, ή V-T, αφού αναγνωρίσουμε τις μεταβολές τις μεταφέρουμε σε διάγραμμα P- V και στη συνέχεια προχωράμε στην επίλυση της άσκησης.
8. Αν το αέριο μεταβαίνει από μία αρχική σε μία τελική κατάσταση **μη αντιστρεπτά**, τότε **δεν μπορούμε** να χρησιμοποιούμε τους νόμους των μεταβολών ή την εξίσωση των αερίων που ισχύουν μόνο για αντιστρεπτές μεταβολές. Μπορούμε να χρησιμοποιούμε όμως τον Α! θερμοδυναμικό νόμο.
9. Η μονάδα που χρησιμοποιείται για το έργο, τη θερμότητα και την εσωτερική ενέργεια είναι το **Joule (J)**.

10. Ιδιότητες λογαρίθμων.

- $\ln e = 1$
- $\ln 1 = 0$
- $\ln x^y = y \ln x$
- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln \frac{y}{x} = \ln y - \ln x$
- $e^{\ln x} = x$

11. Πρέπει να έχουμε υπόψη τα εξής:

α) Ένα κινητό έμβολο ισορροπεί όταν οι πιέσεις που δέχεται είναι ίσες.

ισορροπία εμβόλου \longrightarrow **εξίσωση πιέσεων**

β) Αέρια που χωρίζονται από θερμικά αγωγίμο διάφραγμα αποκτούν τελικά ίσες θερμοκρασίες.

θερμικά αγωγίμο διάφραγμα \longrightarrow **εξίσωση θερμοκρασιών**

Στις περιπτώσεις αυτές εργαζόμαστε ως εξής:

- Γράφουμε την ΚΕΙΑ για κάθε αέριο στην αρχική του και τελική του κατάσταση,
- Προσπαθούμε να αναγνωρίσουμε από τα δεδομένα το είδος της μεταβολής που υφίσταται κάθε αέριο.
- Εφαρμόζουμε τον Α! Θ.Νόμο για κάθε αέριο χωριστά ή για το σύστημά τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μία ποσότητα $n = 2 / R$ mol (το R είναι αριθμητικά ίσο με τη σταθερά των ιδανικών αερίων εκφρασμένη σε $\text{joule} / (\text{mol} \cdot \text{K})$) ιδανικού αερίου βρίσκεται στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Α όπου $P_A = 2 \cdot 10^5 \text{ N} / \text{m}^2$ και $T_A = 300 \text{ K}$. Στο αέριο γίνονται οι εξής αντιστρεπτές μεταβολές:

A \rightarrow B: ισοβαρής εκτόνωση μέχρι $V_B = 2 \cdot V_A$

B \rightarrow Γ: ισόχωρη ψύξη μέχρι $T = T_A$

Γ \rightarrow A: ισόθερμη συμπίεση

Δ₁. Να βρεθούν οι όγκοι, οι θερμοκρασίες και οι πιέσεις του αερίου στις καταστάσεις Α, Β και Γ.

Δ₂. Να γίνουν τα διαγράμματα (σε βαθμολογημένους άξονες) $P - V$ και $P - T$ για τις παραπάνω μεταβολές.

Δίνεται ότι $\ln 2 = 0,7$.

Λύση

Δ₁. Στα δεδομένα μας δίνεται η σταθερά των ιδανικών αερίων R , η πίεση και η θερμοκρασία στην κατάσταση ισορροπίας Α. Η καταστατική εξίσωση θα μας δώσει τον όγκο στην κατάσταση Α:

$$P_A \cdot V_A = n \cdot R \cdot T_A \Rightarrow V_A = \frac{n \cdot R \cdot T_A}{P_A} \Rightarrow V_A = \frac{2 \cdot R \cdot 300}{2 \cdot 10^5} \Rightarrow V_A = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Σε κατηγορία ασκήσεων στη θερμοδυναμική δίνονται δύο από τα τρία καταστατικά μεγέθη P_A, V_A, T_A και ο αριθμός των mol (η ποσότητα) του αερίου. Σε αυτή την περίπτωση η καταστατική εξίσωση δίνει το τρίτο καταστατικό μέγεθος.

Στη πλειοψηφία των ασκήσεων δίνονται μεταβολές (θα προτείναμε τρεις) άρα σειρά έχουν οι νόμοι των αερίων.

$$A \rightarrow B \text{ ισοβαρής εκτόνωση } (P_A = P_B) : P_A \cdot V_A = P_B \cdot V_B \Rightarrow T_B = V_B \cdot \frac{P_A}{P_B} \Rightarrow$$

$$T_B = 2 \cdot V_A \cdot \frac{P_A}{P_A} \Rightarrow T_B = 2 \cdot T_A \Rightarrow T_B = 2 \cdot 300 = 600 \text{ K}.$$

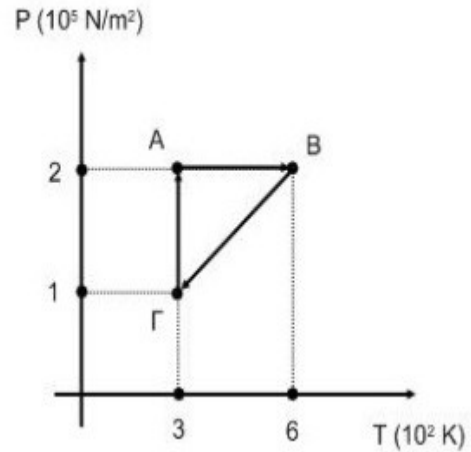
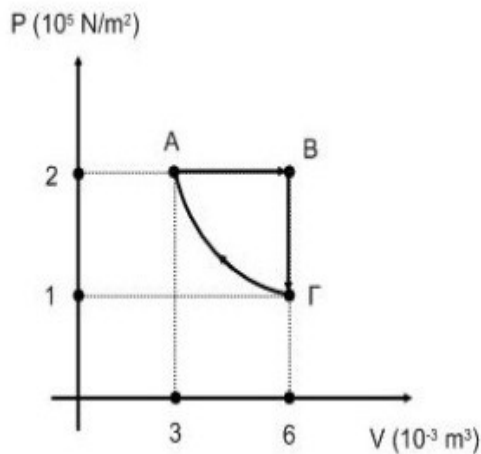
$$B \rightarrow \Gamma \text{ ισόχωρη ψύξη } (V_B = V_\Gamma) : P_B \cdot V_B = P_\Gamma \cdot V_\Gamma \Rightarrow P_\Gamma = P_B \cdot \frac{V_B}{V_\Gamma} \Rightarrow P_\Gamma = 10^5 \Rightarrow P_\Gamma = 10^5 \text{ N} / \text{m}^2.$$

$$\Gamma \rightarrow A \text{ ισόθερμη συμπίεση } (T_\Gamma = T_A) : P_\Gamma \cdot V_\Gamma = P_A \cdot V_A.$$

Καλό είναι όλα τα αποτελέσματα να μπουν σε ένα πίνακα, χρήσιμο μιας και συνήθως μας ζητάνε διαγράμματα (όπου αρκεί το $P - V$)

	A	B	Γ
P	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^5$
V	$3 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-3}$
T	300	600	300

Δ₂. Τα ζητούμενα διαγράμματα



ΚΑΙ ΟΛΟΙ ΟΙ ΤΥΠΟΙ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ – ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

	ΤΥΠΟΣ	ΜΟΝΑΔΕΣ
ΠΙΕΣΗ	$P = \frac{F}{A}$	N/m^2 , atm
ΟΓΚΟΣ	$V = A \cdot L$	m^3 ,L
ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ	$T = 273 + \theta^\circ C$	K
Καταστατική εξίσωση ιδανικών αερίων	$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$	
Πυκνότητα	$\rho = m/V$	Kg/m^3
Αριθμός moles	$n = m/M_r$	
Αριθμός moles	$n = N/N_A$	
Καταστατική εξίσωση – πυκνότητα	$P \cdot M_r = \rho \cdot R \cdot T$	
Καταστατική εξίσωση – μόρια	$P \cdot V = N \cdot k \cdot T$	
1ος νόμος της Θερμοδυναμικής	$Q = \Delta U + W$	J
ΙΣΟΘΕΡΜΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ	$T_A = T_B$ (Νόμος του Boyle) $P_A V_A = P_B \cdot V_B$ $W = n \cdot R \cdot T \ln(V_f/V_i)$ $Q = W$, $\Delta U = 0$ P P V T V T	

<p>ΙΣΟΧΩΡΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ</p>	<p> $V_A = V_B$ (Νόμος του Charles) $\frac{P_A}{T_A} = \frac{P_B}{T_B}$ $W = 0,$ $\Delta U = Q = n C_v \Delta T = \frac{3}{2} n R (T_B - T_A)$ </p> <p> P P V T </p> <p> V T </p>	
<p>ΙΣΟΒΑΡΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗ</p>	<p> $P_A = P_B$ (Νόμος των Gay -Lussac) $\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B}$ </p> <ul style="list-style-type: none"> • $W = p \cdot \Delta V = n \cdot R \cdot \Delta T$ • $Q = n C_p \cdot \Delta T = \frac{5}{2} n \cdot R \cdot \Delta T$ • $\Delta U = \frac{3}{2} n \cdot R \cdot \Delta T$ <p> P P V T </p> <p> V T </p>	

Εσωτερική ενέργεια	$U = \frac{3}{2} n.R.\Delta T$	J
ΚΥΚΛΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ	<ul style="list-style-type: none"> $\Delta U = 0$ $W_{ολ} = Q_{ολ}$ 	
ΑΔΙΑΒΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ	<p>(Νόμος του Poisson)</p> <ul style="list-style-type: none"> $P_A \cdot V_A^\gamma = P_B \cdot V_B^\gamma$ ή $P_A^{1-\gamma} \cdot V_A^\gamma = P_B^{1-\gamma} \cdot V_B^\gamma$ $T_A \cdot V_A^{\gamma-1} = T_B \cdot V_B^{\gamma-1}$ $W = \frac{(P_B V_B - P_A V_A)}{(1-\gamma)}$ <p>$\Delta U = -W, Q=0$</p> <p>P</p> <p>V</p>	
ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΑΚΗ ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑ ΥΠΟ ΣΤΑΘΕΡΟ ΟΓΚΟ	$C_v = \frac{3}{2} R$	
ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΑΚΗ ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑ ΥΠΟ ΣΤΑΘΕΡΗ ΠΙΕΣΗ	$C_p = \frac{5}{2} R$	
ΣΧΕΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΑΚΩΝ ΕΙΔΙΚΩΝ ΘΕΡΜΟΤΗΤΩΝ	<ul style="list-style-type: none"> $C_p - C_v = R$ $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ 	
Απόδοση θερμικής μηχανής	$e = \frac{W}{Q_h} = 1 - \frac{Q_c}{Q_h}$	
ΑΠΟΔΟΣΗ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ CARNOT	$e = 1 - \frac{T_c}{T_h}$	
ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ Πίεση ιδανικού αερίου	$p = m \cdot N \cdot v^2 / 3 = m N v_{rms}^2 / 3 = d \cdot v_{rms}^2 / 3 = 2N \cdot E_k / 3V$ $E_k = \frac{3}{2} k T$	

Μέση κινητική ενέργεια αερίου	$v_{rms}^2 = \frac{3RT}{M}$	
Ενεργός ταχύτητα μορίων ιδανικού αερίου		

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ποσότητα ιδανικού αερίου $n = 1 / R$ mol (όπου το R είναι αριθμητικά ίσο με τη σταθερά των ιδανικών αερίων σε μονάδες του S.I.) καταλαμβάνει όγκο $V_A = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ σε πίεση $P_A = 10^5 \text{ N / m}^2$. Το αέριο πραγματοποιεί την κυκλική μεταβολή ΑΒΓΔΑ που αποτελείται από τις παρακάτω διαδοχικές αντιστρεπτές μεταβολές.

ΑΒ: ισοβαρής θέρμανση μέχρι τη θερμοκρασία 600 K.

ΒΓ: ισόχωρη ψύξη μέχρι τη θερμοκρασία 400 K.

ΓΔ: ισοβαρής ψύξη και

ΔΑ: ισόθερμη συμπίεση

Δ₁. Να αναπαραστήσετε τις μεταβολές σε διάγραμμα $P - V$.

Δ₂. Να υπολογισθούν οι θερμότητες που ανταλλάσσει το αέριο με το περιβάλλον σε κάθε μεταβολή.

Δ₃. Να υπολογισθεί ο συντελεστής απόδοσης της κυκλικής μεταβολής (ο συντελεστής απόδοσης να εκφραστεί ως κλάσμα).

Δ₄. Να υπολογισθεί πόσο θα διέφερε ο συντελεστής απόδοσης μιας θερμικής μηχανής Carnot που θα λειτουργούσε μεταξύ των ίδιων ακραίων θερμοκρασιών, από το συντελεστή απόδοσης μιας μηχανής, το αέριο της οποίας λειτουργεί με βάση τον κύκλο ΑΒΓΔΑ.

Δίνεται $C_v = 3 \cdot R / 2$, $\ln 2 = 0,69$ και $\ln 3 = 1,09$.

Λύση

Δ₁.

Καταστατική εξίσωση στην κατάσταση Α :

$$P_A \cdot V_A = n \cdot R \cdot T_A \Rightarrow T_A = \Rightarrow T_A = \Rightarrow T_A = 300 \text{ K} .$$

Α → Β ισοβαρής θέρμανση ($P_A = P_B$) :

$$\Rightarrow V_B = V_A \cdot \Rightarrow V_B = V_A \cdot () \Rightarrow V_B = 2 \cdot V_A \Rightarrow V_B = 2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \Rightarrow V_B = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 .$$

Β → Γ ισόχωρη ψύξη ($V_B = V_\Gamma$) :

$$\Rightarrow P_\Gamma = P_B \cdot \Rightarrow P_\Gamma = 10^5 \cdot () \Rightarrow P_\Gamma = \cdot 10^5 \text{ N / m}^2 .$$

Γ → Δ ισοβαρής ψύξη ($P_\Gamma = P_\Delta$) :

$$\Rightarrow V_\Delta = V_\Gamma \cdot () \Rightarrow V_\Delta = V_\Gamma \cdot () \Rightarrow V_\Delta = V_\Gamma \Rightarrow$$

$$V_\Delta = 6 \cdot 10^{-3} \Rightarrow V_\Delta = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 .$$

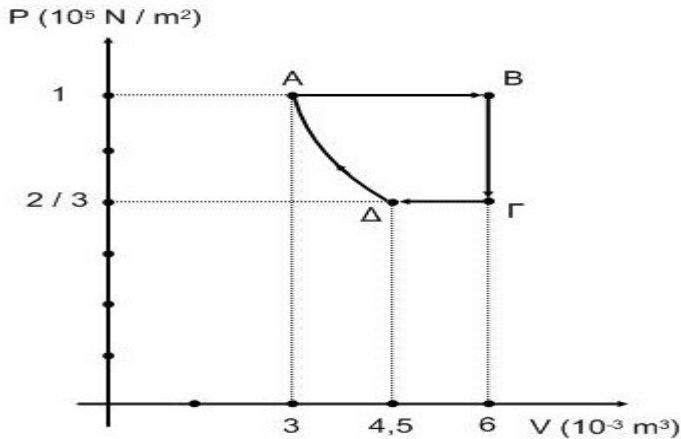
Δ → Α ισόθερμη συμπίεση ($T_\Delta = T_A$) :

$$P_\Delta \cdot V_\Delta = P_A \cdot V_A .$$

Από τις παραπάνω τιμές συμπληρώνουμε τον πίνακα :

	A	B	Γ	Δ
P (10^5 N / m^2)	1	1	2 / 3	2 / 3
V (10^{-3} m^3)	3	6	6	4,5
T (K)	300	600	400	300

Με τις τιμές του πίνακα σχεδιάζουμε το διάγραμμα πίεσης $P -$ όγκου V :



Δ₂.

Η θερμότητα στην AB ισοβαρή θέρμανση :

$$Q_{AB} = n \cdot C_p \cdot \Delta T_{AB} \Rightarrow Q_{AB} = n \cdot R \cdot (T_B - T_A) \Rightarrow$$

$$Q_{AB} = R \cdot (600 - 300) \Rightarrow Q_{AB} = 750 \text{ joule} .$$

Η θερμότητα στην BΓ ισοβαρή θέρμανση :

$$Q_{B\Gamma} = n \cdot C_v \cdot \Delta T_{B\Gamma} \Rightarrow Q_{B\Gamma} = n \cdot (R) \cdot (T_\Gamma - T_B) \Rightarrow$$

$$Q_{B\Gamma} = (R) \cdot (400 - 600) \Rightarrow Q_{B\Gamma} = - 300 \text{ joule} .$$

Η θερμότητα στην ΓΔ ισοβαρή ψύξη :

$$Q_{\Gamma\Delta} = n \cdot C_p \cdot \Delta T_{\Gamma\Delta} \Rightarrow Q_{\Gamma\Delta} = n \cdot R \cdot (T_\Delta - T_\Gamma) \Rightarrow$$

$$Q_{\Gamma\Delta} = R \cdot (300 - 400) \Rightarrow Q_{\Gamma\Delta} = - 250 \text{ joule} .$$

Η θερμότητα στην ΔΑ ισόθερμη συμπίεση :

$$Q_{\Delta A} = n \cdot R \cdot T_A \cdot \ln () \Rightarrow Q_{\Delta A} = R \cdot 300 \cdot \ln () \Rightarrow$$

$$Q_{\Delta A} = 300 \cdot (\ln 2 - \ln 3) \Rightarrow Q_{\Delta A} = - 120 \text{ joule} .$$

Δ₃.

Η ολική θερμότητα στην κυκλική μεταβολή ABΓΔΑ :

$$Q_{ολ} = Q_{AB} + Q_{B\Gamma} + Q_{\Gamma\Delta} + Q_{\Delta A} \Rightarrow Q_{ολ} = 750 - 300 - 250 - 120 \Rightarrow Q_{ολ} = 80 \text{ joule} .$$

1ος θερμοδυναμικός νόμος στην κυκλική μεταβολή ABΓΔΑ :

$$Q_{ολ} = W + \Delta U_{ολ} \Rightarrow$$

(σε μια κυκλική μεταβολή $\Delta U_{ολ} = 0$)

$$W = Q_{ολ} \Rightarrow W = 80 \text{ joule} .$$

Η θερμότητα της θερμής δεξαμενής Q_h :

$$Q_h = Q_{AB} \Rightarrow Q_h = 750 \text{ joule} .$$

Ορισμός του συντελεστή απόδοσης της θερμικής μηχανής :

$$e = \Rightarrow e = \Rightarrow e = 8 / 75 .$$

Δ₄.

Ο συντελεστής της θερμικής μηχανής Carnot :

$$e_c = 1 - () \Rightarrow e_c = 1 - () \Rightarrow e_c = 1 - 1/2 \Rightarrow e_c = 1/2 .$$

Η διαφορά των συντελεστών απόδοσης :

$$\Delta e = e_c - e \Rightarrow \Delta e = () - () \Rightarrow \Delta e = 59 / 150 .$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΕ ΑΔΙΑΒΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ

Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου υφίσταται τις παρακάτω αντιστρεπτές μεταβολές:

A → B: αδιαβατική εκτόνωση από την κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας A όγκου $V_A = 10^{-3} \text{ m}^3$ στην κατάσταση ισορροπίας B όγκου $V_B = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ και πίεσης $P_B = 3 \cdot 10^5 \text{ N / m}^2$.

B → Γ: ισόχωρη ψύξη, μέχρι την κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Γ για την οποία $P_\Gamma = 10^5 \text{ N / m}^2$.

Γ → Δ: αδιαβατική συμπίεση, μέχρι την κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Δ η οποία έχει όγκο ίσο με V_A .

Δ → A: ισόχωρη θέρμανση μέχρι την αρχική κατάσταση A.

Δ₁. Να υπολογίσετε την πίεση του αερίου στις καταστάσεις θερμοδυναμικής ισορροπίας A και Δ.

Δ₂. Να βρείτε το έργο που παράγει το αέριο σε κάθε αδιαβατική μεταβολή.

Δ₃. Να βρείτε την απόδοση μιας μηχανής που θα λειτουργούσε με το συγκεκριμένο κύκλο.

Δ₄. Να βρείτε την απόδοση μιας μηχανής Carnot που θα λειτουργούσε μεταξύ των ίδιων ακραίων θερμοκρασιών, όπως η μηχανή του προηγούμενου ερωτήματος.

Δίνονται: Για το ιδανικό αέριο η γραμμομοριακή ειδική θερμότητα υπό σταθερό όγκο $C_V = 3 \cdot R / 2$ και ότι: $2^{5/3} = 3,2$.

Λύση

Δ₁. Από το C_V υπολογίζουμε το $C_p = C_V + R = 5 \cdot R / 2$

και τελικά το $\gamma = C_p / C_V = 5 / 3$.

Οι μεταβολές:

A → B αδιαβατική εκτόνωση ($Q_{AB} = 0$):

$$P_A \cdot V_A^\gamma = P_B \cdot V_B^\gamma \Rightarrow P_A = P_B \cdot (V_B / V_A)^\gamma \Rightarrow P_A = 3 \cdot 10^5 \cdot (2 \cdot 10^{-3} / 10^{-3})^{5/3} \Rightarrow P_A = 9,6 \cdot 10^5 \text{ N / m}^2$$

B → Γ ισόχωρη ψύξη ($V_B = V_\Gamma$):

$$\Rightarrow T_\Gamma = T_B \Rightarrow T_\Gamma = T_B \Rightarrow T_\Gamma = T_B$$

Γ → Δ αδιαβατική συμπίεση ($Q_{\Gamma\Delta} = 0$):

$$P_\Gamma \cdot V_\Gamma^\gamma = P_\Delta \cdot V_\Delta^\gamma \Rightarrow P_\Delta = P_\Gamma \cdot (V_\Gamma / V_\Delta)^\gamma \Rightarrow$$

$$P_\Delta = 10^5 \cdot (10^{-3} / 10^{-3})^{5/3} \Rightarrow P_\Delta = 10^5 \cdot (3,2) \Rightarrow P_\Delta = 3,2 \cdot 10^5 \text{ N / m}^2$$

Δ → A ισόχωρη θέρμανση ($V_\Delta = V_A$):

$$\Rightarrow T_\Delta = T_A \Rightarrow T_\Delta = T_A \Rightarrow T_\Delta = T_A$$

Δ₂. Το έργο στην AB μεταβολή:

$$W_{AB} = \Rightarrow W_{AB} = \Rightarrow W_{AB} = 5,4 \cdot 10^2 \Rightarrow W_{AB} = 540 \text{ joule}$$

Το έργο στην ΓΔ μεταβολή:

$$W_{\Gamma\Delta} = \Rightarrow W_{\Gamma\Delta} = \Rightarrow W_{AB} = -1,8 \cdot 10^2 \Rightarrow W_{AB} = -180 \text{ joule}$$

Δ₃. Οι θερμότητες Q_c και Q_h δίνονται:

$$Q_c = Q_{B\Gamma} \text{ και } Q_h = Q_{\Delta A},$$

ισχύει:

$$W_{B\Gamma} = 0 \text{ και } W_{\Delta A} = 0,$$

1ος θερμοδυναμικός νόμος στην BΓ:

$$Q_{B\Gamma} = W_{B\Gamma} + \Delta U_{B\Gamma} \Rightarrow Q_{B\Gamma} = \Delta U_{B\Gamma} \Rightarrow Q_{B\Gamma} = n \cdot C_V \cdot \Delta T_{B\Gamma} \Rightarrow$$

$$Q_{B\Gamma} = n \cdot (R) \cdot (T_\Gamma - T_B) \Rightarrow Q_{B\Gamma} = (n \cdot R \cdot T_\Gamma - n \cdot R \cdot T_B) \Rightarrow$$

$$Q_{B\Gamma} = (P_\Gamma \cdot V_\Gamma - P_B \cdot V_B) \Rightarrow Q_{B\Gamma} = (10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow$$

$$Q_{B\Gamma} = -600 \text{ joule}$$

1ος θερμοδυναμικός νόμος στην ΔΑ:

$$Q_{\Delta A} = W_{\Delta A} + \Delta U_{\Delta A} \Rightarrow Q_{\Delta A} = \Delta U_{\Delta A} \Rightarrow Q_{\Delta A} = n \cdot C_V \cdot \Delta T_{\Delta A} \Rightarrow$$

$$Q_{\Delta A} = n \cdot (R) \cdot (T_A - T_\Delta) \Rightarrow Q_{\Delta A} = (n \cdot R \cdot T_A - n \cdot R \cdot T_\Delta) \Rightarrow$$

$$Q_{\Delta A} = (P_A \cdot V_A - P_\Delta \cdot V_\Delta) \Rightarrow Q_{\Delta A} = (9,6 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} - 3,2 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow$$

$$Q_{\Delta A} = 960 \text{ joule .}$$

Η απόδοση θερμικής μηχανής:

$$e = 1 - () \Rightarrow e = 1 - () \Rightarrow e = 1 - 0,625 \Rightarrow e = 0,375 .$$

Δ.4

Καταστατική στις καταστάσεις ισορροπίας Γ και Α :

$$P_{\Gamma} \cdot V_{\Gamma} = n \cdot R \cdot T_{\Gamma} \dots (1)$$

$$P_A \cdot V_A = n \cdot R \cdot T_A \dots (2)$$

διαιρούμε τις (1) , (2) κατά μέλη :

$$= \Rightarrow () = \Rightarrow =$$

$$e = 1 - 1 - 2/9,6 = 0,79$$

Η απόδοση ενός κύκλου Carnot:

$$e_c = 1 - () \Rightarrow e_c = 1 - () \Rightarrow e_c = 1 - () \Rightarrow e_c = 0,79 .$$