

# Η ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΌ ΤΗΝ ΜΕΣΗ ΣΤΗΝ ΑΝΩΤΑΤΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ Η ΠΡΟΣΦΟΡΑ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΗΣ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑΣ

Αναστάσιος Μπούντης , Ομότιμος Καθηγητής  
Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ας σταματήσουμε να βλέπουμε και ας αρχίσουμε  
.....να παρατηρούμε!

«Από την Αρχαία Ελληνική Τεχνολογία στην Επιστήμη και την  
Τεχνολογία του 21ου αιώνα: Ανάπτυξη Δημιουργικότητας-  
Εφευρετικότητας μαθητών στη Σχολική Τάξη» 4ου Μαθητικού Φεστιβάλ  
Ψηφιακής Δημιουργίας, Απρίλιος 2021

# ΟΙ ΚΥΚΛΟΙ ΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΣΤΗ ΧΩΡΑ ΜΑΣ ΚΑΙ ΟΙ ΚΡΙΚΟΙ ΠΟΥ ΤΟΥΣ ΕΝΩΝΟΥΝ



# 1. ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΚΑΙ ΠΑΙΔΕΙΑ

Στην χώρα μας, ένα άκρως αντι-παιδαγωγικό σύστημα εισαγωγής στα Α.Ε.Ι. έχει παραλύσει την Παιδεία στη Μέση Εκπαίδευση.

Οι περισσότεροι πρωτοετείς φοιτητές μας, ως προϊόντα μιας φροντιστηριακής παραπαιδείας, έχουν ξεχάσει πλέον πως να σκέπτονται και να αυτενεργούν.

Εισέρχονται σε ανώτερες σχολές ως «βαρείς τραυματίες» σε...σανατόρια μακράς παραμονής!

Δεν πάει άλλο! Πρέπει να συνεργασθούμε ώστε να υπάρξει αληθινή Παιδεία στη χώρα μας, ξεκινώντας από το Γυμνάσιο, βασισμένη στην εξάσκηση του πνεύματος της επιστήμης και του πολιτισμού.

## Οι βασικές αρχές της Πολυπλοκότητας:

- **Αρχή 1<sup>η</sup>** : Το σύνολο είναι «μεγαλύτερο» από το άθροισμα των μερών του.
- **Αρχή 2<sup>η</sup>** : Η Φύση χρησιμοποιεί αυτο-ομοιότητα υπό αλλαγή κλίμακας για να επιτύχει οικονομία και λειτουργικότητα.
- **Αρχή 3<sup>η</sup>** : Έμβια συστήματα λειτουργούν μέσω συγχρονισμού Πολύπλοκων Δικτύων (Complex Networks).
- **Αρχή 4<sup>η</sup>** : Ντετερμινιστικές διαδικασίες συχνά οδηγούν σε τυχαία συμπεριφορά ( χάος και φράκταλ).

## Το αισιόδοξο μήνυμα της Πολυπλοκότητας:

- Προσφέρει στους νέους έναν ενιαίο τρόπο να μελετούν τη Φύση, τη Ζωή και τις Τέχνες, ενάντια στην υπέρμετρη εξειδίκευση.
- Εξοικειώνει τους μαθητές με τα Μαθηματικά που είναι η κοινή γλώσσα των Επιστημών.
- Διδάσκει την μοντελοποίηση και υπολογιστική προσομοίωση εισάγοντας νέες έννοιες και μεθόδους για την ανάλυση, την πρόβλεψη και τον έλεγχο πολύπλοκων προβλημάτων.
- Προσφέρει στους νέους ένα ευρύ φάσμα επιλογών, ώστε να αξιοποιήσουν τα ταλέντα τους και να ανακαλύψουν τον επαγγελματικό προσανατολισμό που τους ταιριάζει.

# Τι έχουμε επιτύχει στην Ελλάδα για να συζητήσουμε τον 4<sup>ο</sup> με τον 5<sup>ο</sup> Κύκλο Εκπαίδευσης:

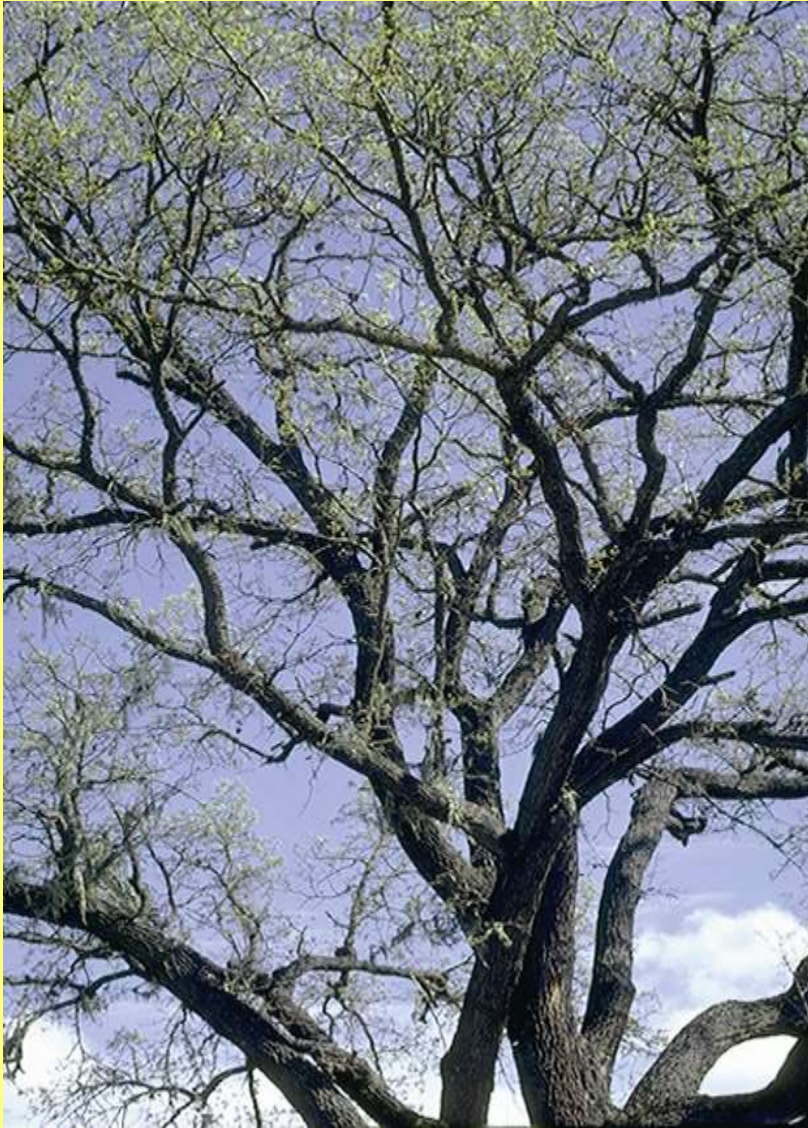
Πολλοί συνάδελφοι οργανώσαμε από το 1987 - 2019 σε  
θέματα Χάους και Πολυπλοκότητας:

- 27 Θερινά Πανελλήνια Σχολεία σε όλη την Ελλάδα  
με τη συμμετοχή εκατοντάδων φοιτητών
- 5 Διεθνή Συνέδρια (1986, 1988, 1991, 2004, 2010)
- 5 Διεθνή Μεταπτυχιακά Σχολεία (2011 - 2015)

και ιδρύσαμε: Κέντρα Μη Γραμμικών Συστημάτων στην  
Πάτρα, την Αθήνα, το Ηράκλειο και τη Θεσσαλονίκη.  
Δεκάδες φοιτητές μας είναι σήμερα Καθηγητές και  
επιστήμονες στην Ελλάδα και όλο τον κόσμο...

Πως όμως θα βοηθήσουμε τους μαθητές μας να διαβούν τον  
«Ρουβίκωνα» από τον 3<sup>ο</sup> στον 4<sup>ο</sup> Κύκλο εκπαίδευσης;

## 2. ΠΑΡΑΤΗΡΩΝΤΑΣ ΤΗ ΦΥΣΗ!



Ας αρχίσουμε με  
ένα παράδειγμα:

Τι είναι αυτό που μας  
εντυπωσιάζει στην  
εικόνα ενός δέντρου;

Πως μπορούμε να  
κατανοήσουμε την  
«πολυπλοκότητά»  
του;



Πώς διακλαδίζονται οι υδροφόρες φλέβες στην επιφάνεια ενός φύλλου; Εντελώς τυχαία ή **σύμφωνα με κάποιο νόμο;**

**Ερώτημα:** Μήπως αυτό γίνεται από τη Φύση μέσω ενός αλγορίθμου που είναι πιο «οικονομικό» να διαθέτει ένας «σπόρος», παρά να περιέχει όλη αυτή την πληροφορία;





Τι νομίζετε ότι  
παριστάνει αυτή η  
εικόνα;

Δεν είναι φωτογραφία  
μιας φτέρης όπως  
νομίσατε.....

Θα μπορούσαμε να την  
κατασκευάσουμε  
χρησιμοποιώντας τον  
Υπολογιστή;

**Βεβαίως!**

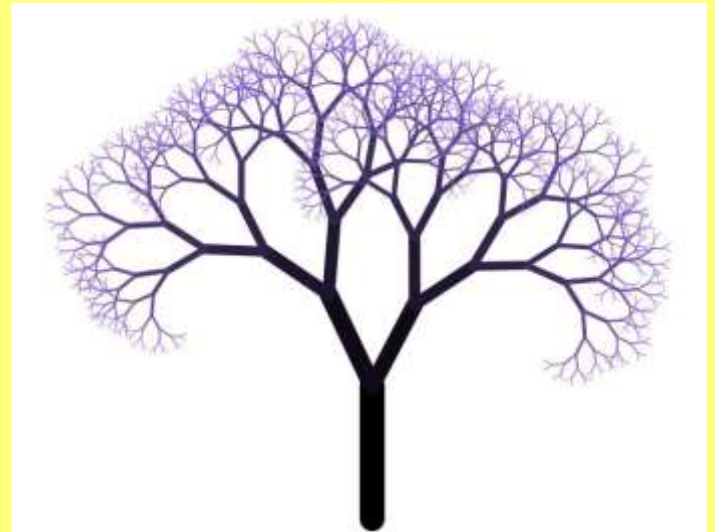
**Τι παρατηρήσατε στα προηγούμενα σχήματα;**

**Είδατε την ομοιότητα μεταξύ του αρχικού σχήματος και των τμημάτων του που επαναλαμβάνεται σε όλο και μικρότερη κλίμακα;**

**Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται «αυτό-ομοιότητα υπό αλλαγή κλίμακας» και είναι το πρώτο «κλειδί» για την αποκρυπτογράφηση της φράκταλ γεωμετρίας της Φύσης....**

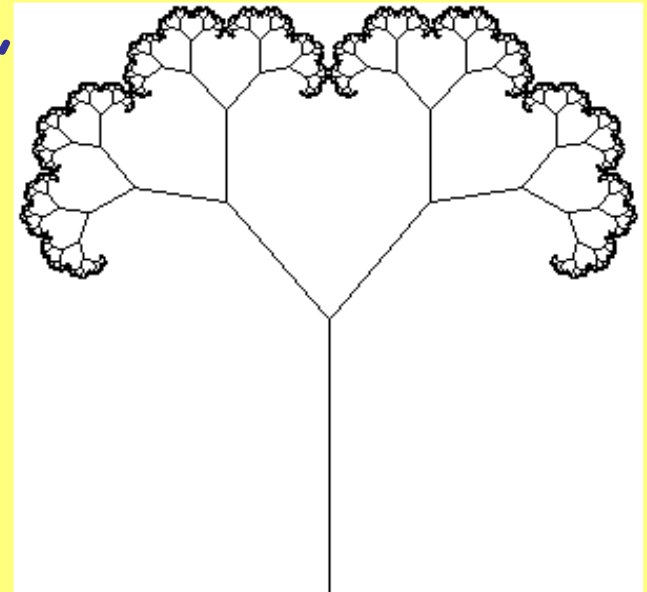
**Πως μπορούμε να την αναπαραγάγουμε με... απλά Μαθηματικά;**

Βλέπετε την αυτο-ομοιότητα στον τρόπο που τα κλαδιά του διακλαδίζονται ώστε να είναι πάντα μικρότερα κατά ένα λόγο κλίμακας?



Τώρα, αν εκτός από την σμίκρυνση μήκους κλαδιών σε κάθε διακλάδωση, επιβάλλουμε και ένα μετασχηματισμό στροφής  $45^\circ$  μετά από πολλές επαναλήψεις της διαδικασίας...

...μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα «δένδρο»!!!



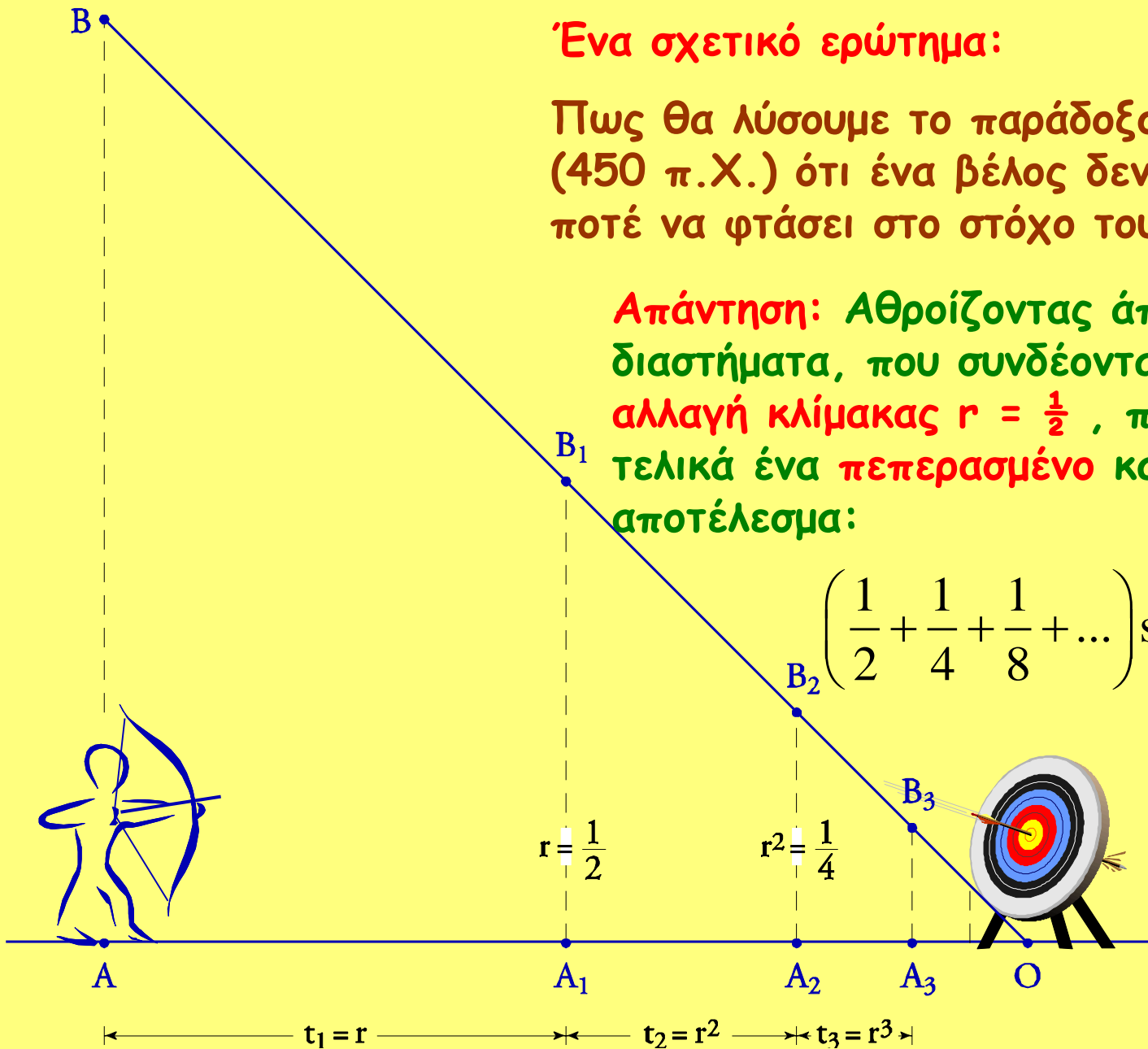
Ερώτημα: Αφού η διαδικασία έχει άπειρα βήματα, γιατί το «δέντρο» δεν είναι απείρως μεγάλο;

Ένα σχετικό ερώτημα:

Πως θα λύσουμε το παράδοξο του Ζήωνα (450 π.Χ.) ότι ένα βέλος δεν πρόκειται ποτέ να φτάσει στο στόχο του;

**Απάντηση:** Αθροίζοντας άπειρα χρονικά διαστήματα, που συνδέονται με μια αλλαγή κλίμακας  $r = \frac{1}{2}$ , παίρνουμε τελικά ένα πεπερασμένο και όχι άπειρο αποτέλεσμα:

$$\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) \text{sec} = 1 \text{sec!}$$



Για να το καταλάβουμε αυτό πρέπει να υπολογίσουμε το άπειρο άθροισμα:

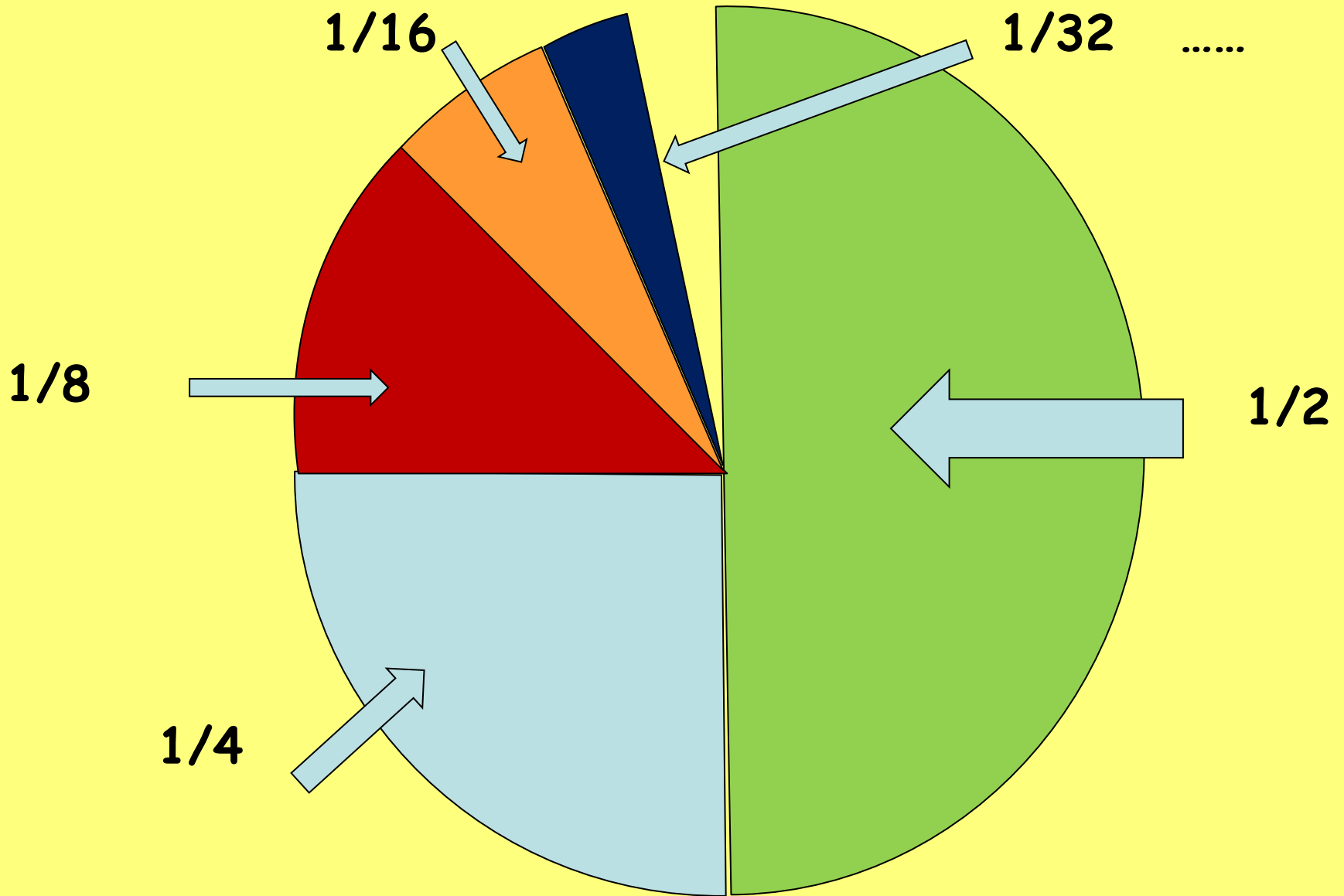
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = ?$$

**Είναι πεπερασμένο ή άπειρο;** Προσέξτε ότι κάθε όρος του είναι ο προηγούμενος πολλαπλασιασμένος με την κλίμακα  $r=1/2$ .

Αν όμως θέλαμε να υπολογίσουμε ένα άλλο άθροισμα:

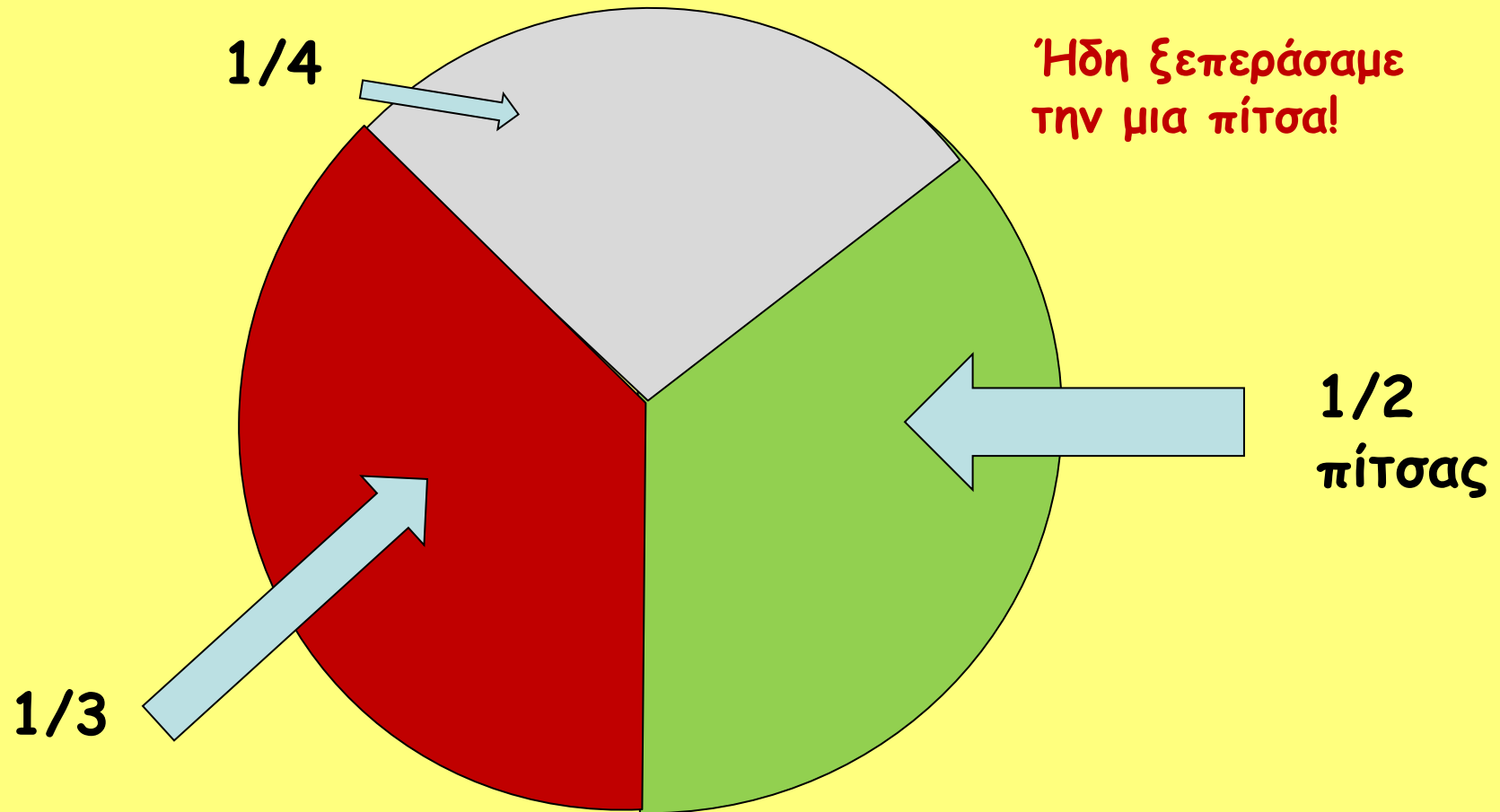
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = ?$$

**Θα βρίσκαμε πάλι το ίδιο αποτέλεσμα;** Πόσο βοηθάει εδώ ένας Υπολογιστής και μια...πίτσα;



Γιατί δεν μπορεί ένας Μαθηματικός με συναδέλφους του να παρουσιάσουν το θέμα αυτό στους μαθητές... **τρώγοντας μια πίτσα;**

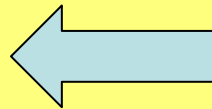
Πάμε τώρα στο επόμενο ερώτημα:



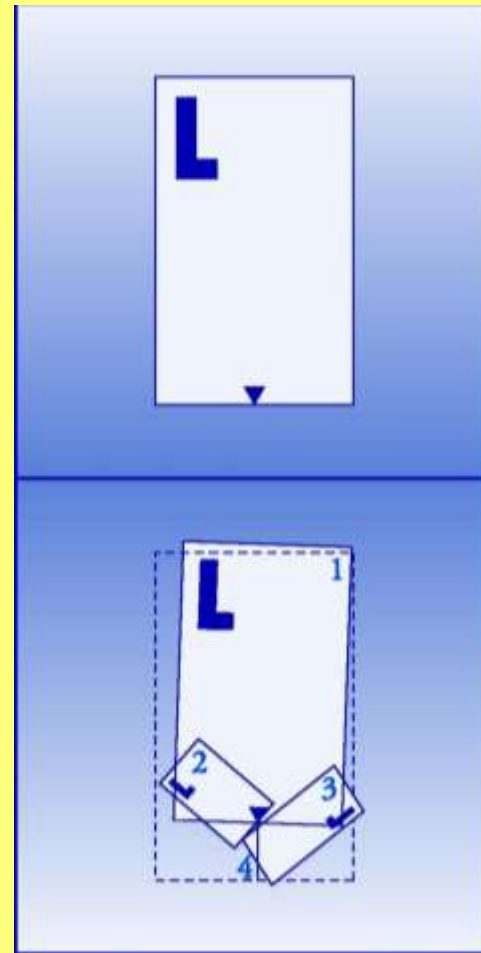
Συνεχίστε,  $+1/5+1/6+\dots$  χρησιμοποιώντας έναν απλό υπολογιστή...

Πόσες πίτσες χρειάζεται να φάμε αν ακολουθήσουμε το  
δεύτερο άθροισμα;

...Άπειρες!!



Μετά από  
πολλές  
επαναλήψεις...

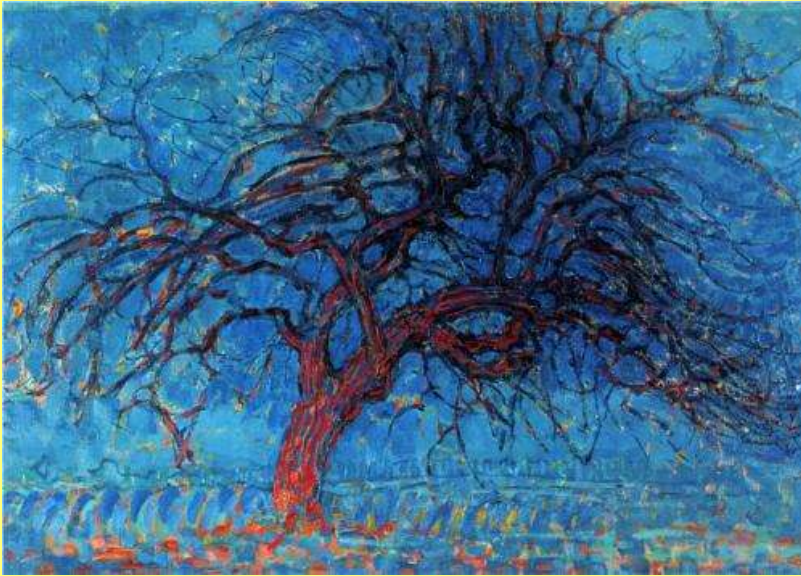


Πάμε τώρα στο θέμα της φτέρης: **Η μαθηματική φτέρη** του Barnsley **κατασκευάζεται με μετασχηματισμούς κλίμακας από ένα παραλληλόγραμμο σε 4 μικρότερα.** Μετά από πολλές επαναλήψεις της διαδικασίας σε κάθε ένα από τα 4 αυτά «υπο-σχήματα» καταλήγουμε στην φτέρη που βλέπουμε αριστερά.

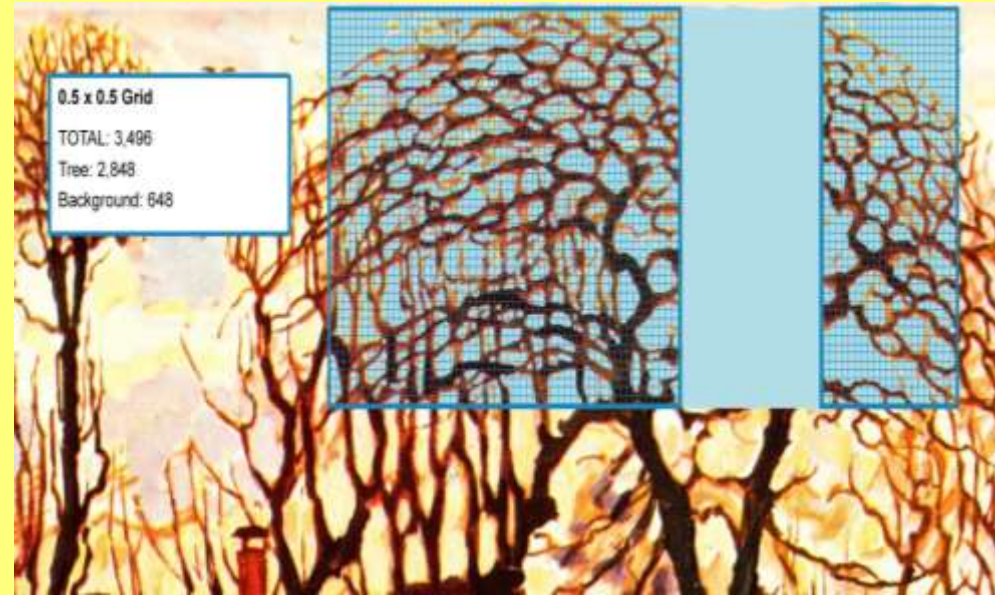
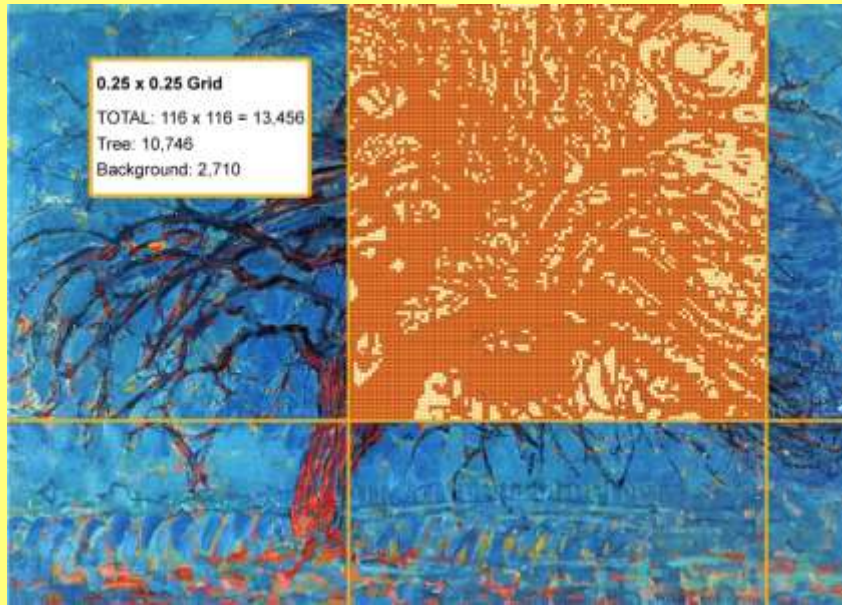


### 3. ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΖΩΓΡΑΦΙΚΗ

Μήπως αυτή η γεωμετρική πολυπλοκότητα έχει αισθητική αξία που μπορεί να εμπνεύσει το έργο μεγάλων καλλιτεχνών;



Οι πίνακες **The Red Tree** (αριστερά, 1910) και **The Farm near Duivendrecht** (δεξιά, 1916) του διάσημου ζωγράφου Piet Mondrian. Τι λέτε; Υπάρχει αυτό-ομοιότητα στις διακλαδώσεις των δέντρων τους;

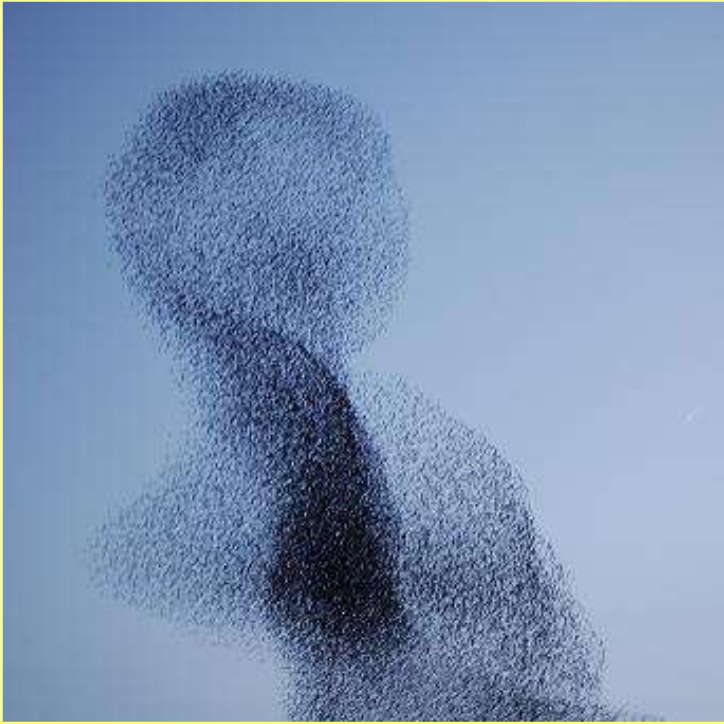


**Φαίνεται πως υπάρχει!** Μετά από μαθηματική ανάλυση με μεθόδους της φράκταλ γεωμετρίας (με τους κ.κ. Α. Φωκά και Ε. Ψαράκη, 2017) ανακαλύψαμε ότι και οι δύο πίνακες χαρακτηρίζονται από **αυτό-όμοια δομή σε μικρότερες κλίμακες και μάλιστα με φράκταλ διάσταση  $D \approx 1.7!$**

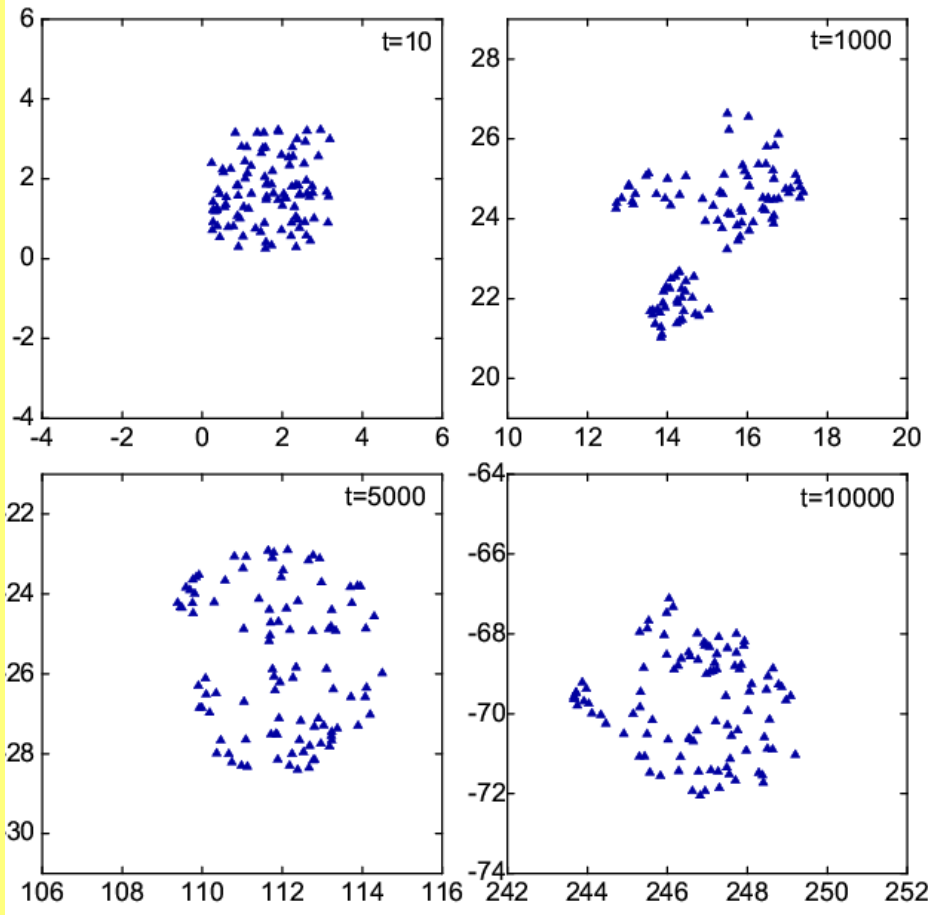
**Λέτε να είναι... «όμορφη» η πολυπλοκότητα;**

## 4. ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΕΡΕΥΝΑ

- Πρέπει γνωρίζουμε πολύ καλά Μη Γραμμική Δυναμική και Στατιστική Φυσική συστημάτων μεγάλου αριθμού μεταβλητών.
- Η αναγωγική διαδικασία δεν αρκεί, χρειάζεται «ολιστική θεώρηση»!
- «Το όλον δεν ισούται με το άθροισμα των μερών του!»
- Όσα και αν μάθουμε για ένα ψάρι ή ένα πουλί... δεν θα μπορέσουμε ποτέ να κατανοήσουμε την αυτό-οργάνωση των ομαδικών τους κινήσεων!



Πως μπορούμε να μοντελοποιήσουμε την κίνηση πουλιών ή ψαριών για να κατανοήσουμε τους πολύπλοκους σχηματισμούς και την θεαματική τους αυτό-οργάνωση;

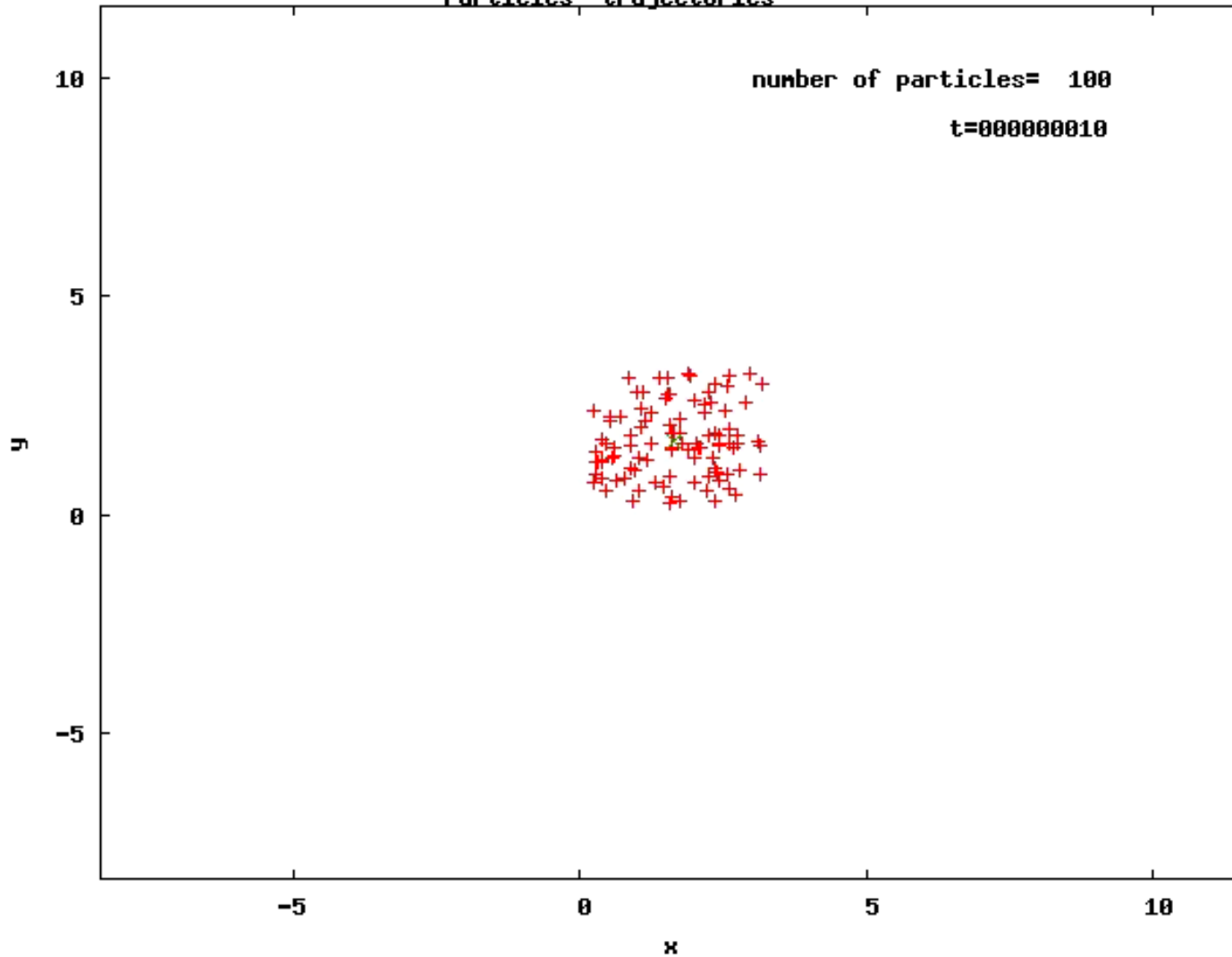


Σε πρόσφατη εργασία μας (2014) θεωρήσαμε ότι η «**συνοχή**» στην **ομαδική κίνηση πουλιών** οφείλεται μόνο σε **αλλαγές της γωνίας κίνησης** κάθε πουλιού σύμφωνα με τον μέσο όρο **6 - 7 «γειτόνων»** του που είναι μέσα στο οπτικό του πεδίο!

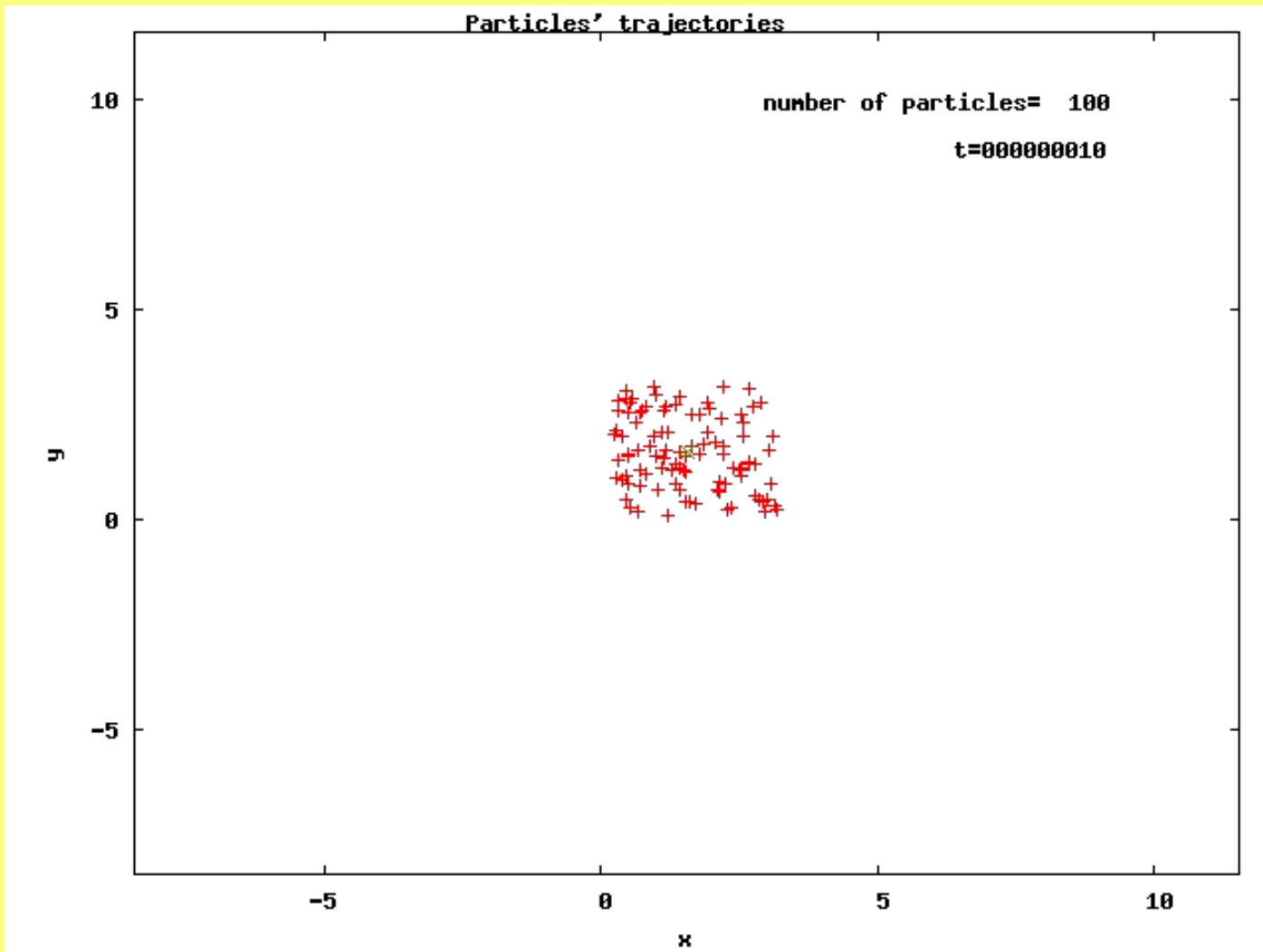
Μάλιστα, η συνοχή αυτή δεν καταστρέφεται ακόμα και με την **εισαγωγή (μικρού) τυχαίου θορύβου!**

**Αριστερά:** Ομαδοποίηση πουλιών που εξελίσσεται στο χρόνο σύμφωνα με το δικό μας μαθηματικό μοντέλο.

### Particles' trajectories



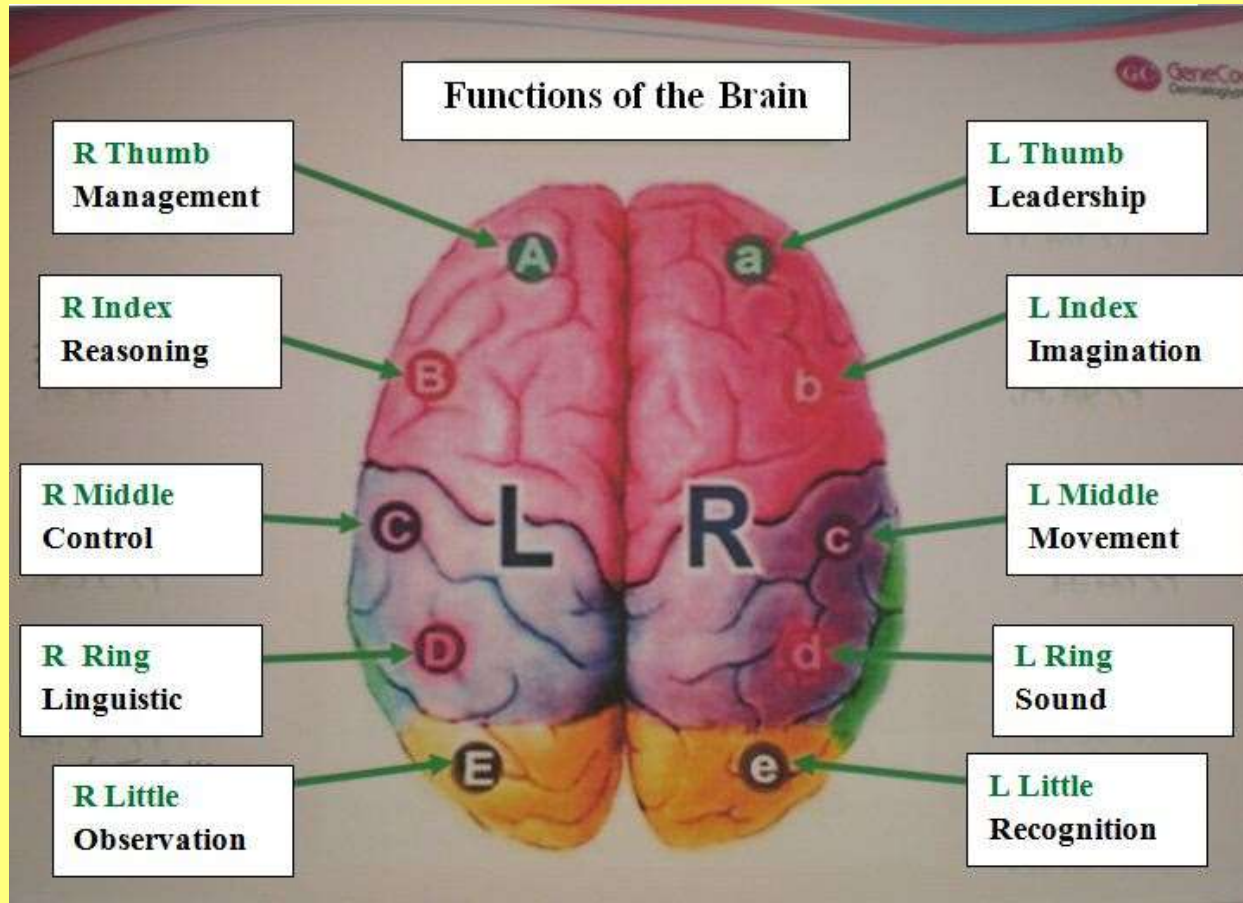
Παρουσία  
μικρού  
θορύβου



Παρουσία  
μεγαλύτερου  
θορύβου!

Τι παρατηρήσατε σε σχέση με την προηγούμενη ομαδική κίνηση;

Ποιο είναι το πιο πολύπλοκο αντικείμενο που γνωρίζουμε;



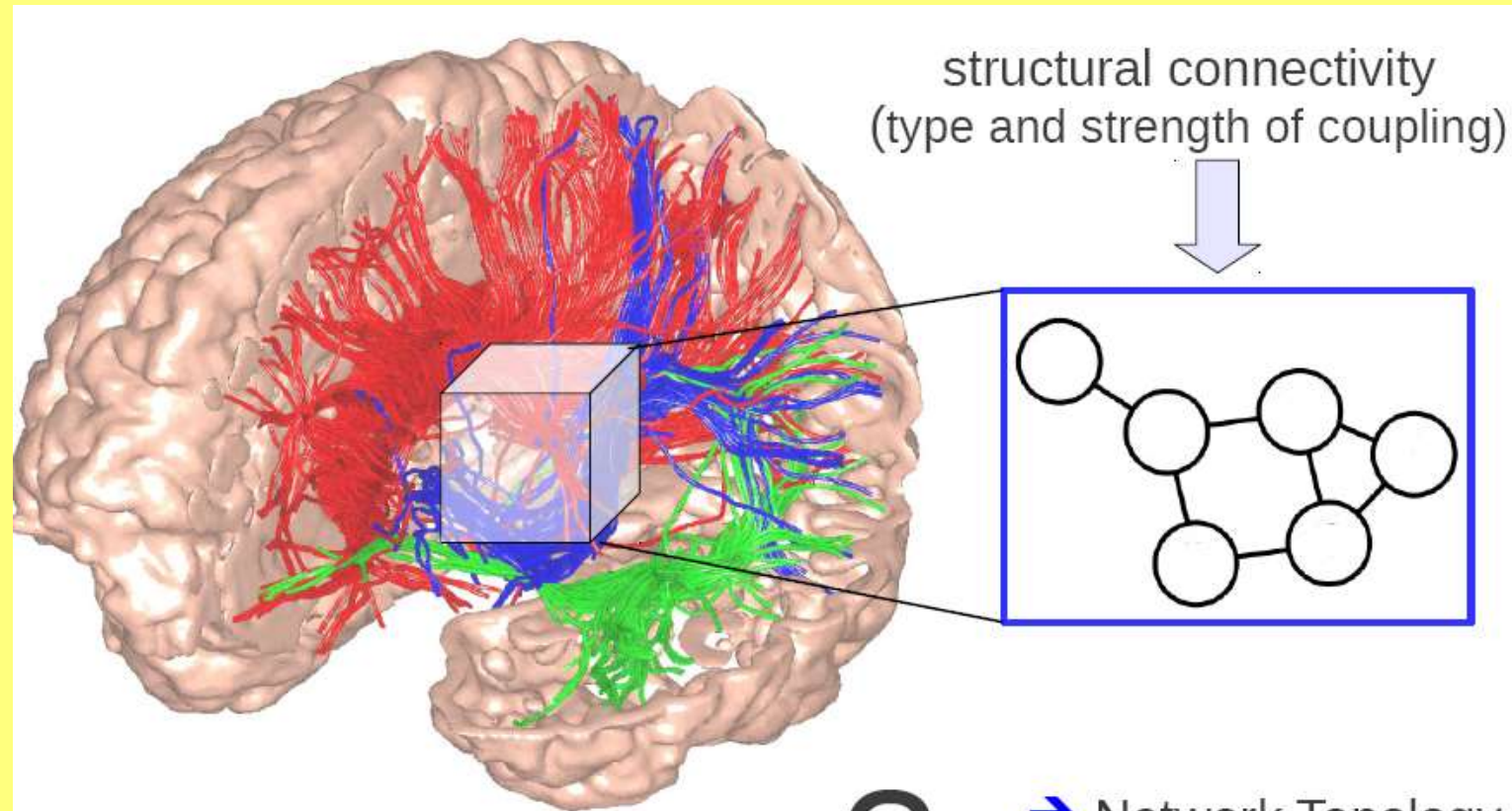
Ο ανθρώπινος εγκέφαλος! Οι διάφορες «περιοχές» του επικοινωνούν μεταξύ τους μέσω συγχρονισμού των αντίστοιχων «νευρωνικών δικτύων»!





**Τι είναι ο συγχρονισμός;**

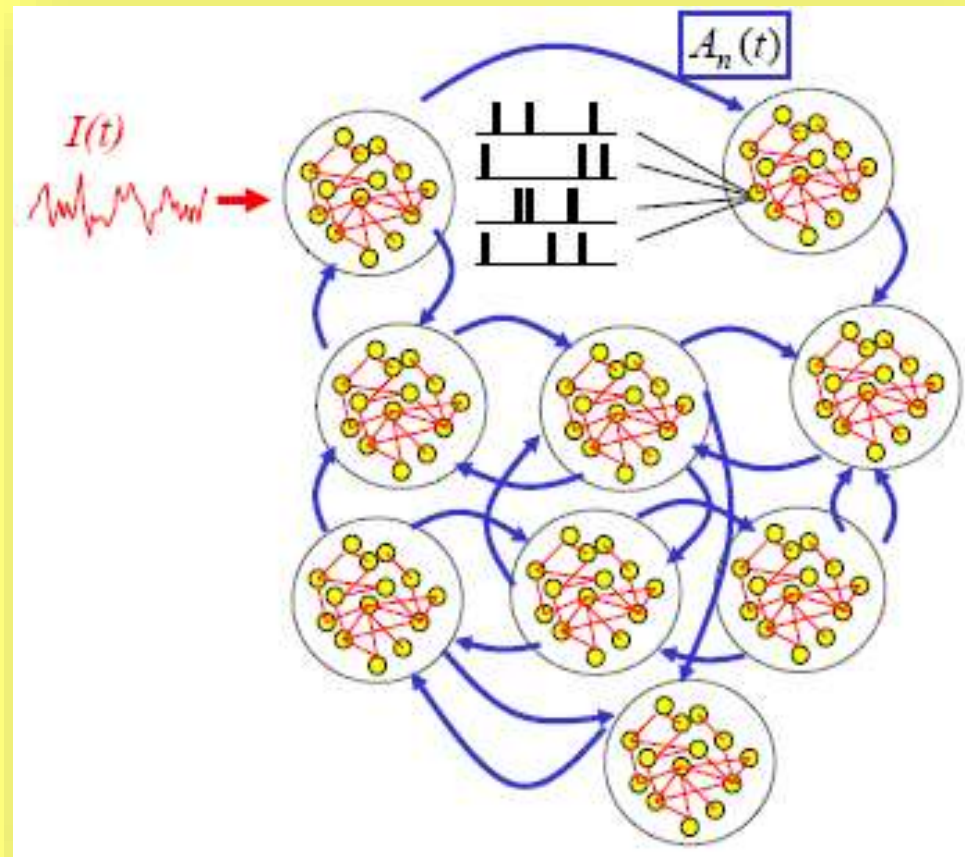
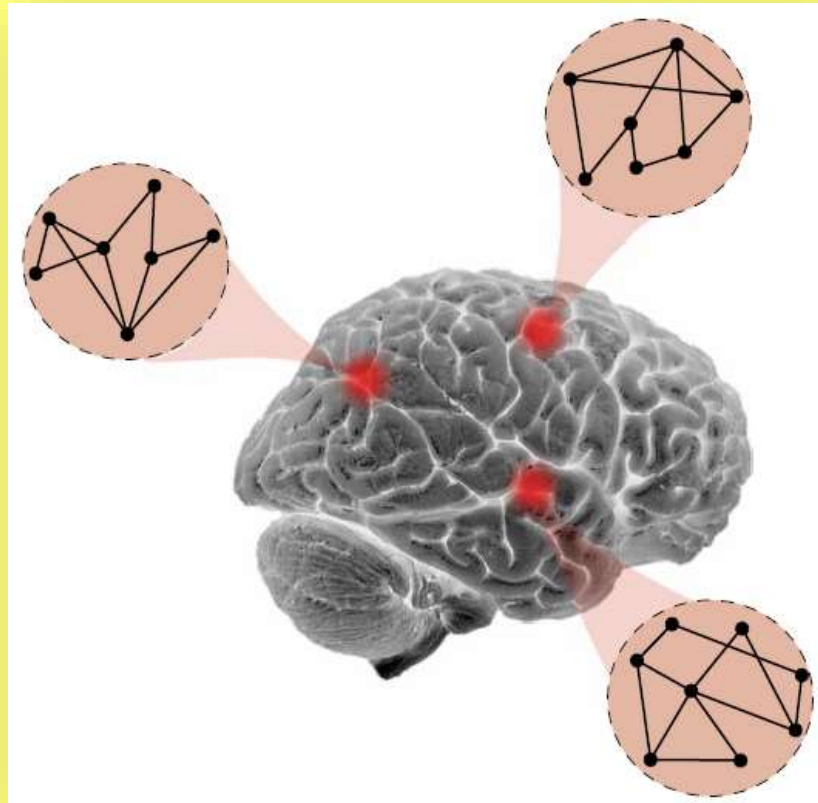
# Μοντελοποίηση Εγκεφάλου Μέσω Νευρωνικών Δικτύων



Εντοπίζουμε πρώτα τα «υπο-δίκτυα»  
νευρώνων που «επικοινωνούν» όταν  
πραγματοποιούμε κάποια ενέργεια ή  
σκέψη!

- Network Topology
- Model for nodes

Κατόπιν αναλύουμε τα μεταξύ τους σήματα  
και εξετάζουμε αν υπάρχει συγχρονισμός!



## Ερωτήματα της σύγχρονης έρευνας:

- Πως **επικοινωνούν ομάδες νευρώνων** του εγκεφάλου για να **επιτελέσουμε** κάποιο έργο;
- Ποιες ομάδες **συγχρονίζονται** και ποιες παραμένουν **ασυγχρόνιστες**;
- Γνωρίζετε ότι ορισμένα θηλαστικά (όπως το δελφίνι) **κοιμούνται με το ένα μάτι ανοικτό**;
- Αυτό ασφαλώς απαιτεί ένα **συγχρονισμένο μέρος του εγκεφάλου** να **επικοινωνεί με ένα ασυγχρόνιστο!**



## Chimera (mythology)

The **Chimera** (also **Chimaera** or **Chimæra**) (pron.: /kiˈmɪərə/ or /kaɪˈmɪərə/; Greek: Χίμαιρα, *Chimaira*, from χίμαρος, *chimaros*, "she-goat") was, according to Greek mythology, a monstrous fire-breathing female creature of Lycia in Asia Minor, composed of the parts of three animals — a lion, a serpent and a goat. Usually depicted as a lion, with the head of a goat arising from its back, and a tail that ended in a snake's head,<sup>[1]</sup> the Chimera was one of the offspring of Typhon and Echidna and a sibling of such monsters as Cerberus and the Lernaean Hydra.

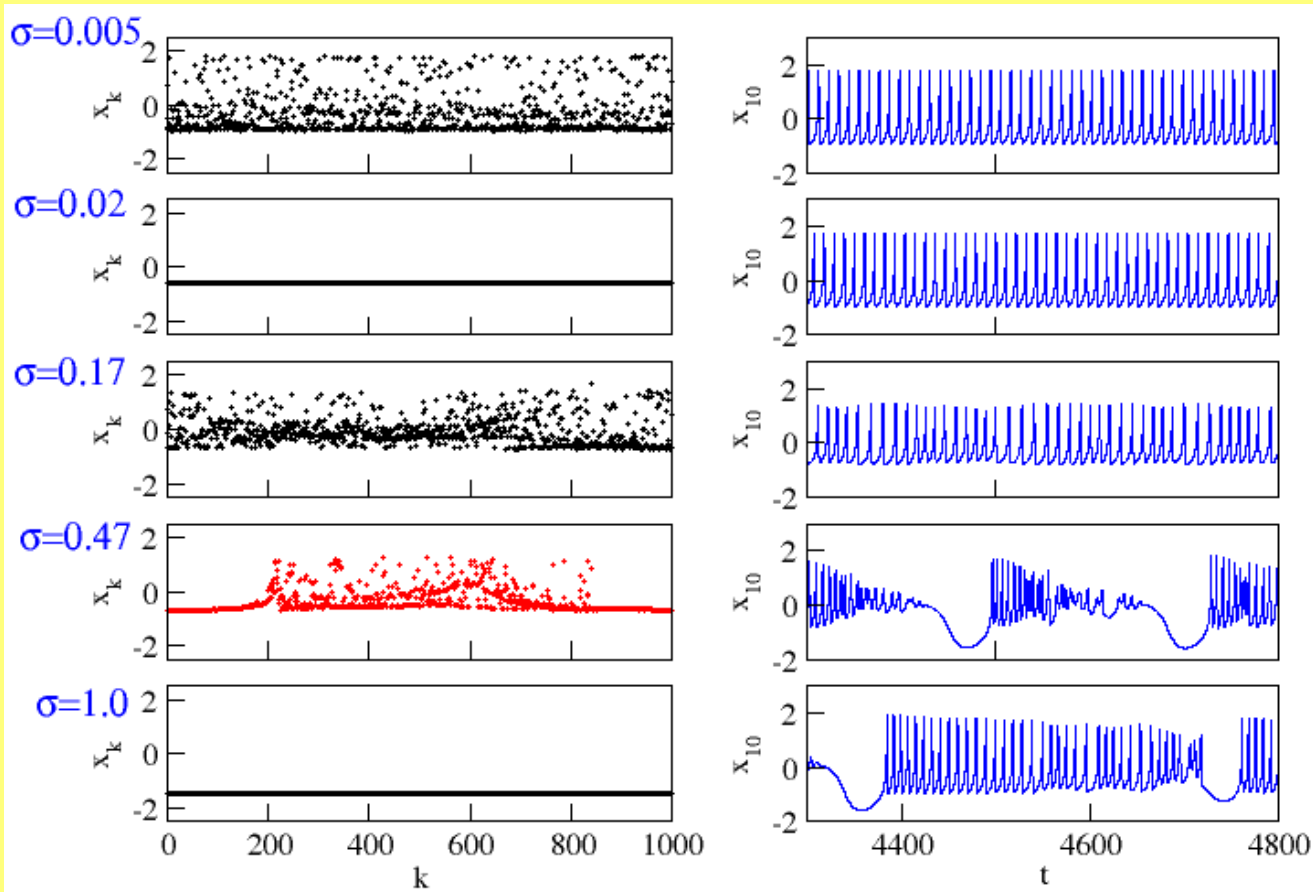
The term chimera has come to describe any mythical or fictional animal with parts taken from various animals, or to describe concepts perceived as wildly imaginative or implausible.



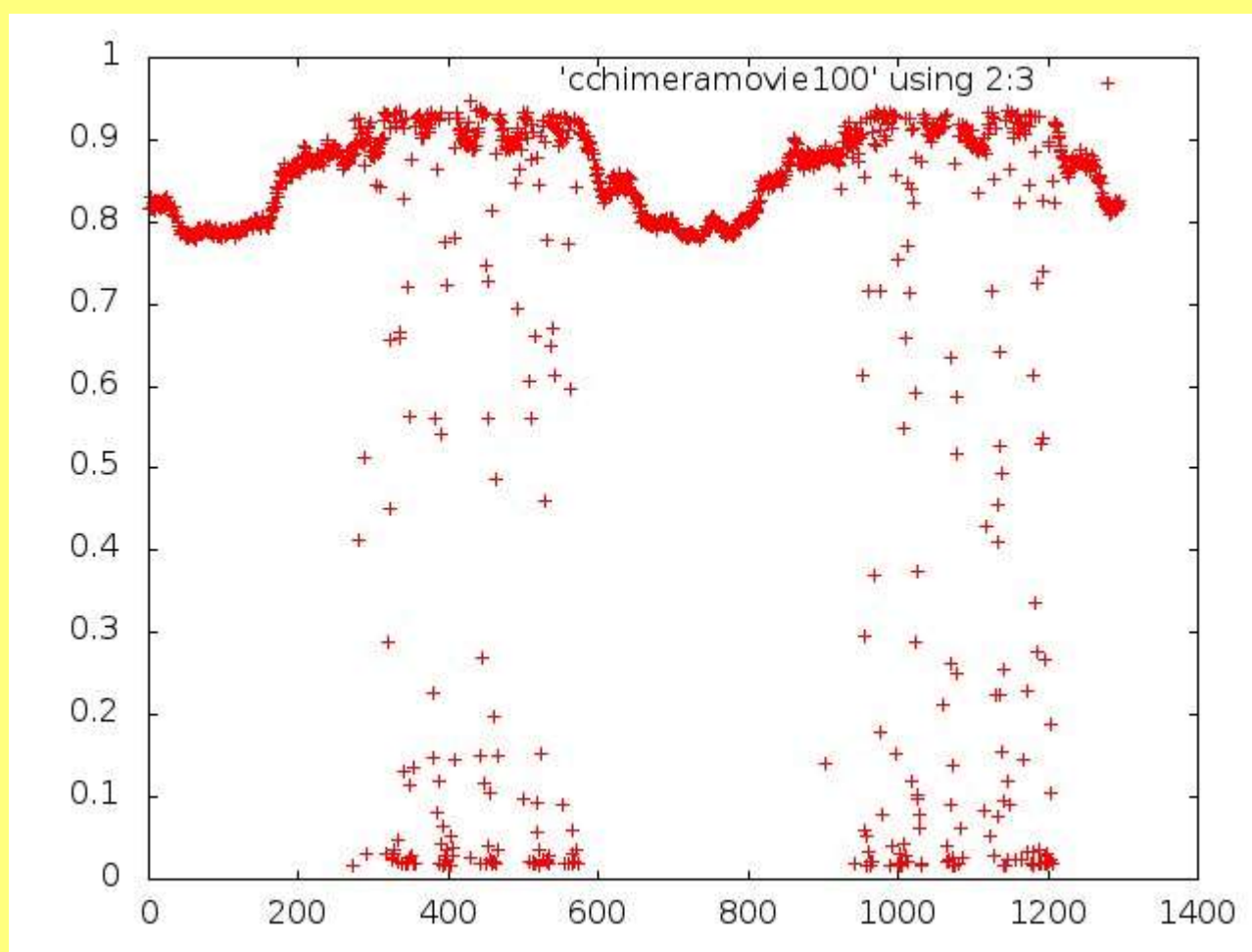
The Chimera on a red-figure Apulian plate, c. 350–340 BC (Musée du Louvre)

Το 2002, η συνύπαρξη **συγχρονισμένων ταλαντώσεων στο ένα εγκεφαλικό ημισφαίριο και ασυγχρόνιστων στο άλλο θηλαστικών** όπως το δελφίνι, ονομάστηκε **κατάσταση «χίμαιρας»** (βλ. μυθολογικό ζώο δεξιά).

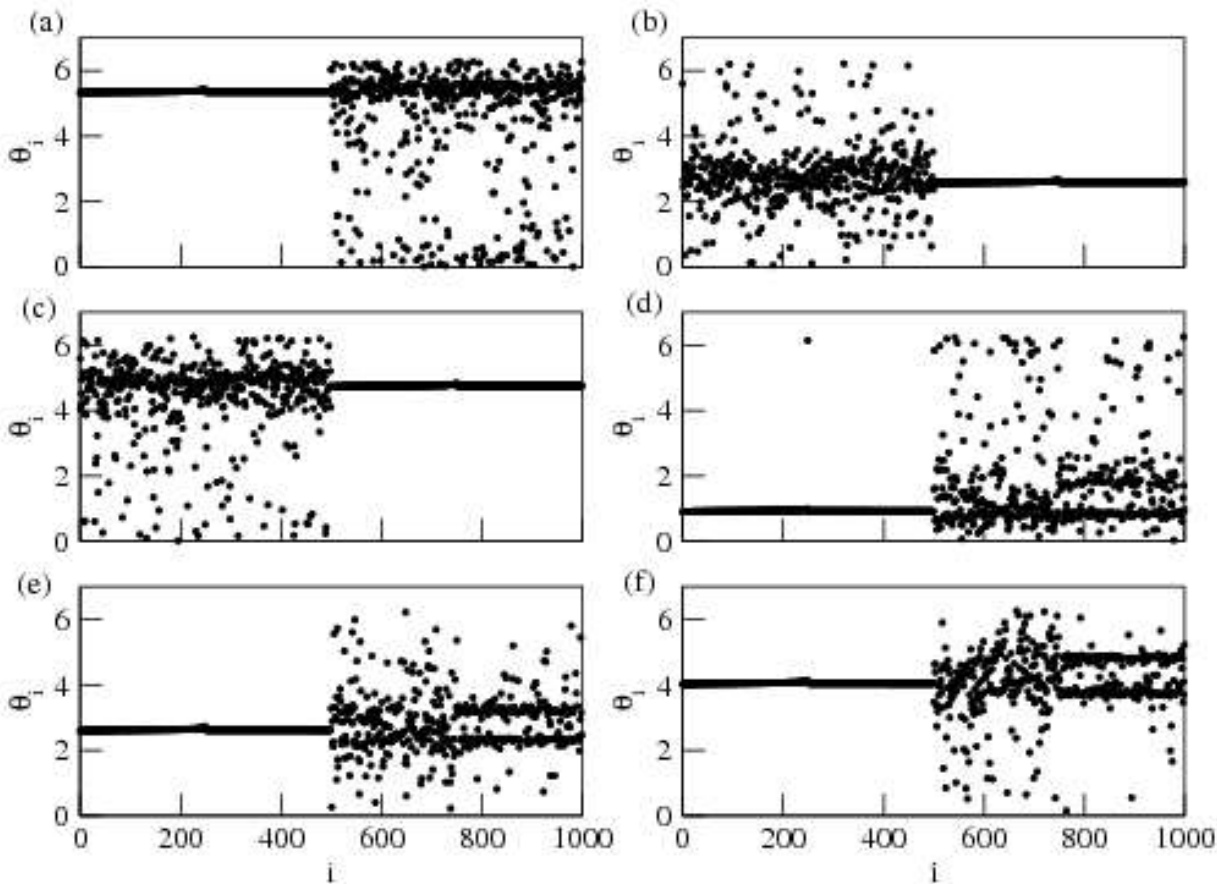
Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε θεωρητικά το φαινόμενο αυτό σε **μαθηματικά μοντέλα πολύπλοκων δικτύων εγκεφαλικών νευρώνων;**



**Βεβαίως!** Σε πρόσφατη εργασία μας (2014) παρατηρήσαμε το φαινόμενο "χίμαιρας" (αριστερα) όταν οι νευρώνες (δεξιά) παρουσιάζουν ταλαντώσεις τύπου "bursting" και "spiking" συγκεκριμένων περιόδων!



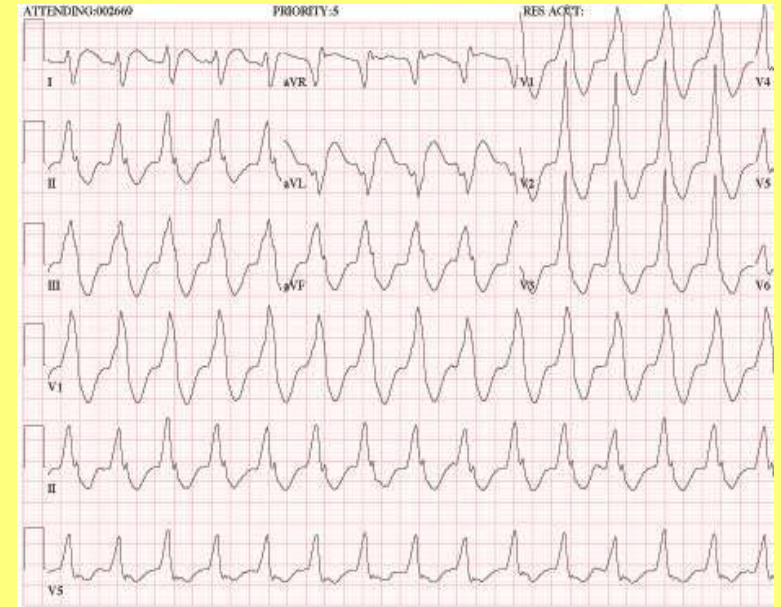
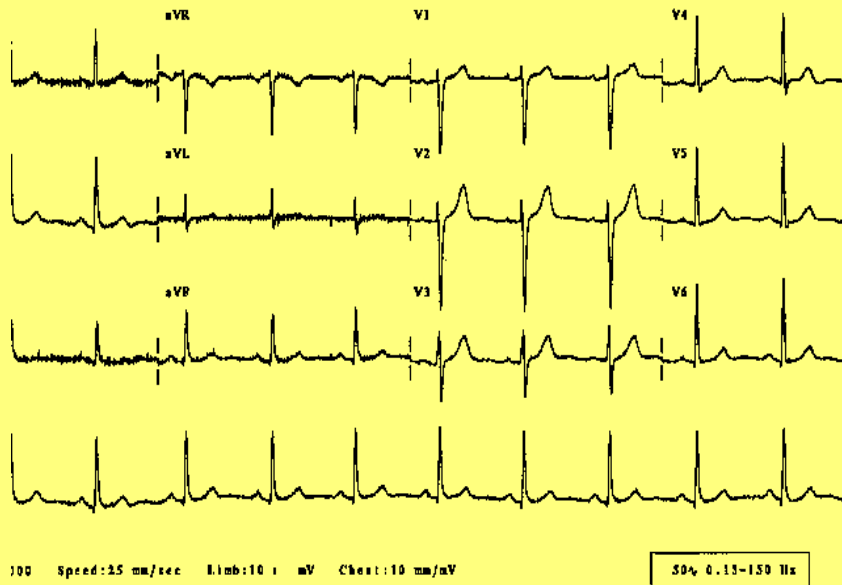
Χίμαιρα που παρατηρήθηκε σε εργασία ομάδας της Κας Προβατά (Δημόκριτος, 2015) σε  $N$  συζευγμένους ταλαντωτές FitzHugh -Nagumo που μοντελοποιούν  $N$  συζευγμένους νευρώνες ( $N=1300$ ).



Σε άλλη πρόσφατη εργασία μας (2014) παρατηρήσαμε το φαινόμενο "χίμαιρας" σε δύο συζευγμένες ομάδες μηχανικών ταλαντωτών οι 500 των οποίων είναι συγχρονισμένοι ενώ οι άλλοι 500 ασυγχρόνιστοι.



**Είναι πάντα επιθυμητός ο συγχρονισμός;  
Είναι υγιές να υπάρχει λίγο «χάος» στην καρδιά μας;**



**Ποιο από τα 2 αυτά καρδιογραφήματα θα... θέλατε να έχετε;**

**Αριστερά:** Κερδίσατε! Το καρδιογράφημα (ECG) ενός υγιούς παρουσιάζει περιοδικότητα αλλά και μια μικρή δόση χάους.

**Δεξιά:** Χάσατε! Το ECG ανήκει σε ασθενή με κοιλιακή ταχυκαρδία εμφανίζοντας πολύ μεγάλη περιοδικότητα και καθόλου χάους!

## 5. ΕΠΙΛΟΓΟΣ

- Ζούμε σε έναν **πολύπλοκο κόσμο**, γεμάτο αντιφάσεις, αντικρουόμενες πληροφορίες και αστάθεια.
- Η **Επιστήμη της Πολυπλοκότητας** όμως μας διδάσκει ότι η **αστάθεια** αυτή μπορεί να ειπωθεί ως **κατάσταση δυναμικής ισορροπίας**, ώστε τελικά η **πολυμορφία να είναι ευσταθής και η στασιμότητα ασταθής!**
- Ελπίζω με την ομιλία αυτή να σας «ενέπνευσα» λιγάκι, ώστε, ως **πραγματικοί εκπαιδευτές**, να «ζωντανέψετε» κάποιες από τις υποδείξεις μου στους μαθητές σας!
- Έτσι θα αντιμετωπίσουμε **τον πλέον αδύναμο κρίκο** μεταξύ του 3<sup>ου</sup> και 4<sup>ου</sup> Κύκλου!
- Από εμένα θα έχετε όποια στήριξη θέλετε.

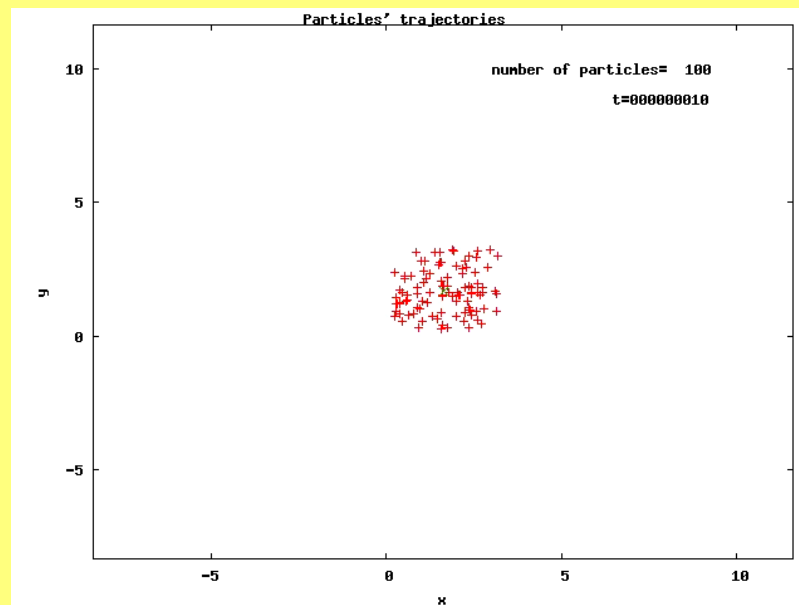
Βέβαια θα μπορούσε εδώ να μας πει ο Άμλετ:

«Υπάρχουν πολύ περισσότερα ανάμεσα στη Γη και τον Ουρανό, Οράτιε, από όσα ονειρεύεται η Φιλοσοφία σου....»

Όμως η Επιστήμη της Πολυπλοκότητας και η μαθηματική της μοντελοποίηση άνοιξαν ένα «παράθυρο» επικοινωνίας με τη φύση, μέσω του οποίου αρχίσαμε να κατανοούμε «αυτόν τον κόσμο τον Απλό, τον Πολύπλοκο» που μας περιβάλλει.....

Ευχαριστώ πολύ για την προσοχή  
σας! Και...

Ελάτε να πετάξουμε μαζί!



# ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ ΣΤΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- G. Nicolis & I. Prigogine, “Exploring Complexity”  
Freeman, New York (1989)
- Α. Μπούντης, “Δυναμικά Συστήματα και Χάος”,  
Παπασωτηρίου, Αθήνα (1995).
- Α. Μπούντης, “Ο Θαυμαστός Κόσμος των Φράκταλ”,  
Leader Books, Αθήνα (2004).
- Α. Μπούντης (και Τ. Μιχαηλίδης), «Μιλώντας στην  
Αθηνά για το Χάος και την Πολυπλοκότητα», Εκδ.  
Πατάκη, Αθήνα, )2019)
- G. Nicolis and C. Nicolis, “Foundations of Complex  
Systems”, World Scientific, Singapore, 2007
- T. Bountis and H. Skokos, “Complex Hamiltonian  
Dynamics”, Synergetic Series, Springer (2012).