ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

Το σύνολο C των μιγαδικών αριθμών είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου R των πραγματικών αριθμών, στο οποίο:

- Επεκτείνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού έτσι , ώστε να έχουν τις ίδιες ιδιότητες όπως και στο R ,με το μηδέν (0) να είναι το **ουδέτερο** στοιχείο της πρόσθεσης και το ένα (1) το **ουδέτερο** στοιχείο του πολλαπλασιασμού.
- Υπάρχει ένα στοιχείο **i** τέτοιο ώστε $\mathbf{i^2 = -1}$
- Κάθε στοιχείο z του C γράφεται κατά **μοναδικό** τρόπο με τη μορφή **z = α +βi**, $\alpha, \beta \in R$

Το α λέγεται **πραγματικό** μέρος του z και συμβολίζεται με **Re(z)**, ενώ το β λέγεται **φανταστικό** μέρος και συμβολίζεται με **Im(z).**

Ισότητα μιγαδικών αριθμών

Έστω $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ τότε

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$ επίσης $\alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$

Γεωμετρική παράσταση μιγαδικών

Κάθε μιγαδικό z = α +βi μπορούμε να τον αντιστοιχίσουμε στο σημείο Μ(α ,β) ενός καρτεσιανού επιπέδου. Αλλά και **αντίστροφα** κάθε σημείο Μ(α ,β) του καρτεσιανού επιπέδου μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε στο μιγαδικό z = α +βi **.**
Ο άξονας x΄x λέγεται **πραγματικός** άξονας ενώ ο y΄y λέγεται **φανταστικός** άξονας.

Πράξεις στο σύνολο C των μιγαδικών αριθμών

- Για την πρόσθεση των α +βi και γ +δi έχουμε
  $(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i$

“ Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών α +βi και γ +δi είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους”

- Για την αφαίρεση του γ +δi από τον α +βi έχουμε
  $(\alpha + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i$

“ Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών α +βi και γ +δi είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους”

- Για τον πολλαπλασιασμό των μιγαδικών α +βi και γ +δi έχουμε
  $(\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)I$
- Για να εκφράσουμε το πηλίκο $\dfrac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i}$ όπου $\gamma + \delta i \neq 0$ στη μορφή κ +λi πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με τη συζυγή του παρονομαστή.

Δύναμη μιγαδικού

Ορίζουμε **:** $z^1 = z$, $z^0 = 1$, $z^\nu = z^{\nu-1}z$ για κάθε θετικό ακέραιο ν >1 και αν $z \neq 0$

$z^{-\nu} = \dfrac{1}{z^\nu}$ για κάθε θετικό ακέραιο ν**.**

Ιδιαίτερα για τις δυνάμεις του i έχουμε $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ και γενικά

$$i^{\nu} = i^{4\rho+\upsilon} = i^{4\rho} i^{\upsilon} = (i^4)^{\rho} i^{\upsilon} = 1 i^{\upsilon} = \begin{cases} 1, & \text{αν } \upsilon = 0 \\ i, & \text{αν } \upsilon = 1 \\ -1, & \text{αν } \upsilon = 2 \\ -i, & \text{αν } \upsilon = 3 \end{cases}$$

Συζυγείς μιγαδικοί

Ο αριθμός α – βi λέγεται **συζυγής** του α +βi και συμβολίζεται με $\overline{\alpha + \beta i} = \alpha - \beta i$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι **συμμετρικά** ως προς τον πραγματικό άξονα **.**
2. $z + \overline{z} = 2\alpha \quad z - \overline{z} = 2\beta i$
3. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
4. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
5. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
6. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
7. $\overline{z^{\nu}} = \left(\overline{z}\right)^{\nu}$

Μέτρο μιγαδικού αριθμού

Ορίζουμε ως μέτρο του z = x + yi την απόσταση του M(x ,y) από την αρχή των αξόνων O δηλαδή $|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ιδιότητες

- $|z| = |\overline{z}| = |-z|$
- $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{z_1}{z_2}$
- $|z^{\nu}| = |z|^{\nu}$
- $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$
- Γενικά η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, ρ >0 παριστάνει τον **κύκλο** με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ**.**
- Γενικά η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ παριστάνει τη **μεσοκάθετο** του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$**.**

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΠΗΛΙΚΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

Αν $z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$ είναι οι τριγωνομετρικές μορφές δύο μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2, τότε για το γινόμενο τους έχουμε **:**

$$z_1\, z_2 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)\ \rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2) = \rho_1\, \rho_2\, (\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)\, (\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$$

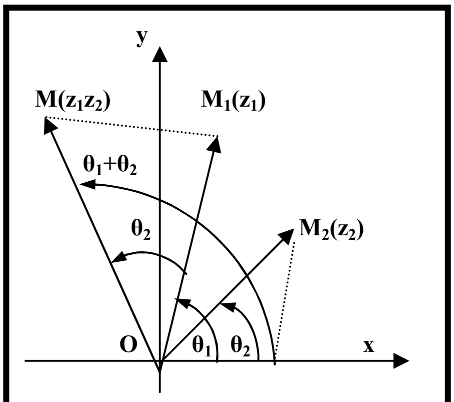
$$= \rho_1\, \rho_2\, [\, (\sigma\upsilon\nu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2 - \eta\mu\theta_1\eta\mu\theta_2) + i(\eta\mu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2 + \sigma\upsilon\nu\theta_1\eta\mu\theta_2)\,] =$$

$$= \rho_1\, \rho_2\, [\, \sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2) + i\eta\mu(\theta_1 + \theta_2)\,]$$

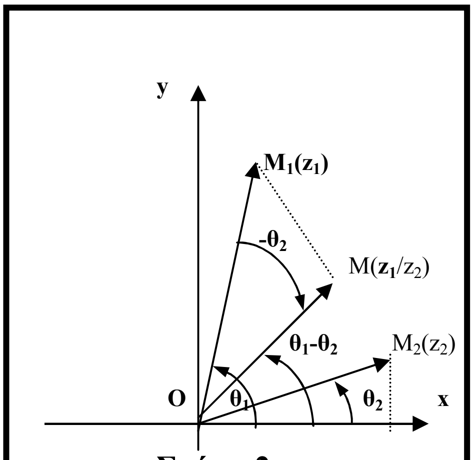
Ομοίως , $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)}{\rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)} = \dfrac{\rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)}{\rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)}\, \dfrac{(\sigma\upsilon\nu\theta_2 - i\eta\mu\theta_2)}{(\sigma\upsilon\nu\theta_2 - i\eta\mu\theta_2)} =$

$$\frac{\rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)}{\rho_2}\, \frac{(\sigma\upsilon\nu(-\theta_2) + i\eta\mu(-\theta_2))}{\sigma\upsilon\nu^2\theta_2 + \eta\mu^2\theta_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\, [\, \sigma\upsilon\nu(\theta_1 - \theta_2) + i\eta\mu(\theta_1 - \theta_2)\,].$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΠΗΛΙΚΟΥ ΔΥΟ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ



Σχήμα 1



Σχήμα 2

► Ο **πολλαπλασιασμός** του μιγαδικού $z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ με το μιγαδικό $z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$ σημαίνει **στροφή** της **διανυσματικής ακτίνας** του z_1 κατά γωνία $\boldsymbol{\theta_2}$ και μετά πολλαπλασιασμό της με ρ_2 (Σχ**.** 1)**.**

► Η **διαίρεση** του μιγαδικού $z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ με το μιγαδικό $z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$ σημαίνει **στροφή** της **διανυσματικής ακτίνας** του z_1 κατά γωνία $\boldsymbol{-\theta_2}$ και μετά πολλαπλασιασμό της με $\dfrac{1}{\rho_2}$ (Σχ**.** 2)**.**

► Ειδικότερα ,ο πολλαπλασιασμός του z με i στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του z κατά γωνία $\dfrac{\pi}{2}$, αφού $i = \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2} + i\eta\mu\dfrac{\pi}{2}$**.**

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω Α ένα υποσύνολο του R. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το Α** μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με **f (x).**

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία f , γράφουμε **:** $f: A \to R$, $x \to f(x)$ ή $y = f(x)$

- Το γράμμα x , που παριστάνει το οποιοδήποτε στοιχείο του Α λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το y που παριστάνει την τιμή της f στο x , λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή.**

- Αν η συνάρτηση δίνεται μόνο με τον τύπο της , πεδίο ορισμού της θα θεωρείται το ευρύτερο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών για τους οποίους η τιμή f(x) να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

- Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα x του Α , λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με f**(A).** Είναι δηλαδή:
  $f(A) = \{y \mid y = f(x)$ για κάποιο $x \in A\}$

- Για να οριστεί μια συνάρτηση f , αρκεί να δοθούν δύο στοιχεία **:**
  το πεδίο ορισμού της Α
  και η τιμή της , f(x) για κάθε $x \in A$

- Μια σχέση που συνδέει δύο μεταβλητά μεγέθη δεν είναι πάντα συνάρτηση. Έτσι από τις παρακάτω σχέσεις $x^2 + y^2 = 4$ (1) , $x^2 + 3y = 1$ (2) μόνο η (2) είναι συνάρτηση $y = \frac{1-x^2}{3} = f(x)$. Η (1) για παράδειγμα δεν είναι αφού για $x = 1$ έχουμε $y = \sqrt{3}$ ή $y = -\sqrt{3}$.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων M(x ,y) για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων M(x,f(x)), $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση της f** και συμβολίζεται με $\mathbf{C_f}$. Η εξίσωση $y = f(x)$ που επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f λέγεται εξίσωση της γραφικής παράστασης της f **.**

Κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα y΄y τέμνει τη γραφική παράσταση της f "το πολύ σ'ένα σημείο", αφού σε κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται ένα μόνο $y \in R$ δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία της C_f με την ίδια τετμημένη**.**

- Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της f που είναι η προβολή της C_f πάνω στον άξονα x΄x **.**

- Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο f(A) των τεταγμένων των σημείων της C_f Δηλαδή είναι η προβολή της C_f πάνω στον άξονα y΄y**.**

- Η τιμή της f στο $x_o \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_o$ και της C_f**.**

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης **–f** είναι συμμετρική, **ως προς τον άξονα x΄x**, της γραφικής παράστασης της **f**.

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης **|f|** αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x και από τα συμμετρικά , ως προς τον άξονα x΄x, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x **.**

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + K$ προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της C_f κατά K μονάδες προς τα πάνω αν $K > 0$ και $|K|$ μονάδες προς τα κάτω αν $K < 0$.

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x - x_o)$, $x_o > 0$ προκύπτει από την μετατόπιση της C_f κατά x_o μονάδες δεξιά και $g(x) = f(x + x_o)$, $x_o > 0$ προκύπτει από την μετατόπιση της C_f κατά x_o μονάδες αριστερά .

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x - x_o) + K$, $x_o > 0$ είναι συνδυασμός , οριζόντιας μετατόπισης κατά x_o δεξιά και κατακόρυφη μετατόπιση κατά K μονάδες .

ΙΣΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Δύο συναρτήσεις f , g λέγονται **ίσες** όταν **:**

- έχουν το ίδιο πέδιο ορισμού Α και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει f(x) = g(x)**.**

Σχόλιο : Μπορούμε να αναφερόμαστε σε ισότητα συναρτήσεων ακόμα και όταν είναι ίσες μόνο σ'ένα υποσύνολο των πεδίων ορισμού τους (αρκεί να διευκρινίζεται).

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Έχουμε τις συναρτήσεις f ,g με πεδία ορισμού τα Α και Β αντίστοιχα . Ορίζουμε τις ακόλουθες πράξεις (με την προϋπόθεση ότι $A \cap B \neq 0$).

1. **Πρόσθεση** $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A \cap B$
2. **Αφαίρεση** $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A \cap B$
3. **Πολλαπλασιασμός** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A \cap B$
4. **Διαίρεση** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in A \cap B$ και $g(x) \neq 0$.

ΑΡΤΙΑ – ΠΕΡΙΤΤΗ – ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : A \to R$. Αν **x, -x∈A** για κάθε $x \in A$ και **f(-x) = f(x)** για κάθε $x \in A$, τότε η f λέγεται **άρτια** .Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y΄y.Προφανώς ισχύει και το αντίστροφο.

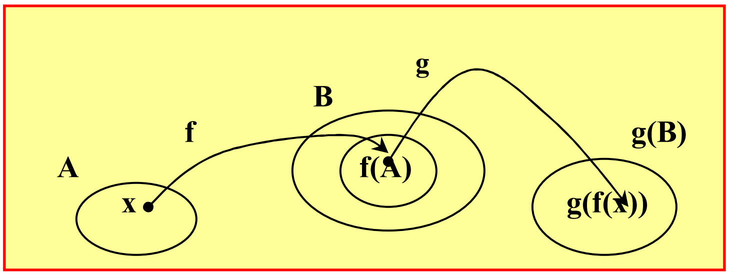
Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : A \to R$. Αν **x, -x∈A** για κάθε $x \in A$ και **f(-x) = - f(x)** για κάθε $x \in A$, τότε η f λέγεται **περιττή**.Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει **κέντρο συμμετρίας** την αρχή των αξόνων.Προφανώς ισχύει και το αντίστροφο.

Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός **T > 0** τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει : **x + T ∈A , x - T ∈A** και **f(x + T) = f(x – T) = f(x).** Ο πραγματικός αριθμός Τ λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f.

ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν f , g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α και Β αντίστοιχα τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g** , και τη συμβολίζουμε με $g\circ f$, τη συνάρτηση με τύπο $(g\circ f)(x) = g(f(x))$.



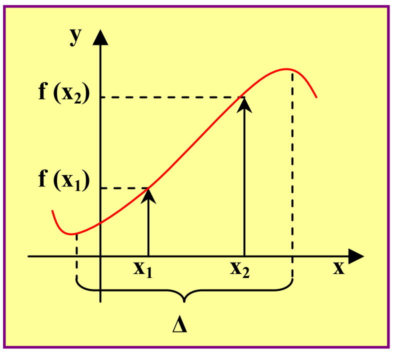
Το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ αποτελείται από όλα τα x του πεδίου ορισμού Α της f για τα οποία το f (x) ανήκει στο πεδίο ορισμού της g.
Δηλαδή είναι :$A_1 = \{x\in A \,/\, f(x) \in B\}$

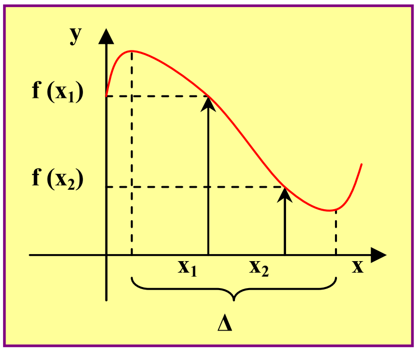
- Αν $A_1 = \varnothing$ τότε η $g\circ f$ δεν ορίζεται .
- Αν f ,g ,φ είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $\varphi\circ(g\circ f)$, τότε ορίζεται και η $(\varphi\circ g)\circ f$ και μάλιστα ισχύει $\varphi\circ(g\circ f) = (\varphi\circ g)\circ f$.
- Γενικά αν f ,g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g\circ f$ και $f\circ g$ τότε αυτές **δεν είναι υποχρεωτικά** ίσες .

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται :

- **γνησίως αύξουσα** σ'ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2\in\Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- **γνησίως φθίνουσα** σ'ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2\in\Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
- **αύξουσα** σ'ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2\in\Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \le f(x_2)$.
- **φθίνουσα** σ'ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2\in\Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \ge f(x_2)$.



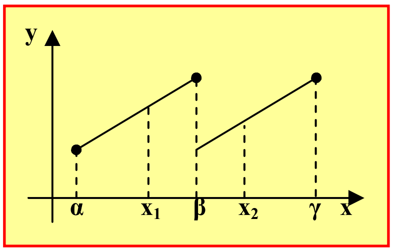


- **Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ, τότε η f έχει το πολύ μια ρίζα στο Δ .**
  Πράγματι αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$, τότε η f δεν θα είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

- Η μονοτονία είναι ιδιότητα της συνάρτησης που αναφέρεται σε διάστημα , γι'αυτό όταν λέμε ότι η f είναι μονότονη **πρέπει να γράφουμε δίπλα και σε ποιό διάστημα** Δεν έχει νόημα να μιλάμε για μονοτονία της f σε σημείο .

- Η μονοτονία είναι μια ποιοτική ιδιότητα της συνάρτησης δηλαδή αν έχουμε μια μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής από την τιμή x_1 στην τιμή x_2 (π.χ. $x_1<x_2$) μας ενδιαφέρει να μάθουμε όχι πόσο μεταβάλλονται οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης αλλά πως μεταβάλλονται, από μικρότερες σε μεγαλύτερες ($f(x_1) < f(x_2)$) ή αντίστροφα ($f(x_1) > f(x_2)$).

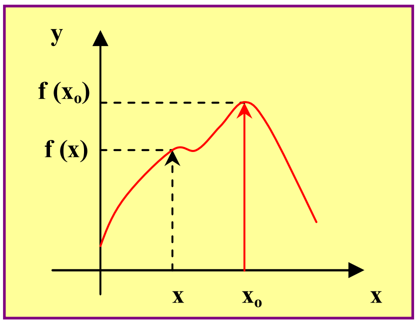
- Αν $\alpha < \beta < \gamma$ και f γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$, f γνησίως αύξουσα στο $(\beta, \gamma]$ τότε στην ένωση των διαστημάτων $[\alpha, \beta]$, $(\beta, \gamma]$ δηκαδή στο $[\alpha, \gamma]$ η f δεν είναι κατ' ανάγκη γνησίως αύξουσα όπως φαίνεται και στο σχήμα όπου $\alpha < x_1 < \beta < x_2 < \gamma$ αλλά $f(x_1) > f(x_2)$.

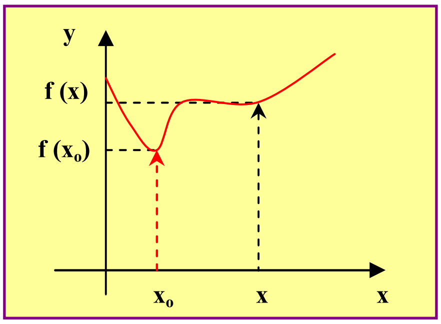


ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι :
- Παρουσιάζει στο $x_o \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_o)$, όταν $f(x) \leq f(x_o)$ για κάθε $x \in A$.
- Παρουσιάζει στο $x_o \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_o)$, όταν $f(x) \geq f(x_o)$ για κάθε $x \in A$.





- Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται (ολικά) **ακρότατα** της f .

- Ένα ολικό ακρότατο μιας συνάρτησης f είναι και τοπικό ακρότατο της f, ενώ το αντίστροφο **δεν** ισχύει πάντα .

- Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

- Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης f δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1 –1

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση $f: A \to R$ λέγεται **συνάρτηση 1-1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή : αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι:
Μια συνάρτηση $f: A \to R$ είναι **συνάρτηση 1-1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή : αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι :
Μια συνάρτηση $f: A \to R$ είναι **συνάρτηση 1-1**, αν και μόνο αν:

- Για κάθε $y \in f(A)$ η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .

- Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη .

- Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: A \to R$ είναι και **συνάρτηση 1-1.**
  Το αντίστροφο **δεν ισχύει** πάντα . Αν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ ή $f(x_1) > f(x_2)$ δηλαδή θα είναι $f(x_1) \neq f(x_2)$.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Έστω μια συνάρτηση $f: A \to R$ για την οποία υποθέτουμε ότι είναι συνάρτηση 1-1. Τότε για κάθε $y \in f(A)$ υπάρχει μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Έτσι ορίζεται μια συνάρτηση $\mathbf{g : f(A) \to R}$ με την οποία κάθε $\mathbf{y \in f(A)}$ αντιστοιχίζεται στο **μοναδικό** $\mathbf{x \in A}$ για το οποίο ισχύει $\mathbf{f(x) = y}$.
Η συνάρτηση g :
Α . έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f
Β. έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f
Γ. ισχύει η ισοδυναμία $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$
Η συνάρτηση g $f(A) \to R$ λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με $\mathbf{f^{-1}}$.
Επομένως έχουμε :

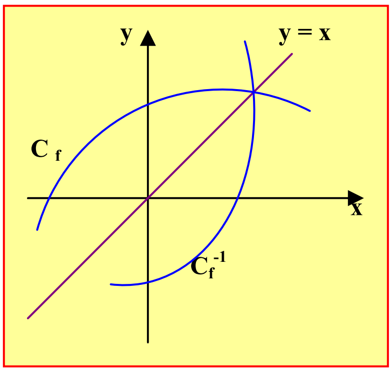
$$\mathbf{f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x}$$

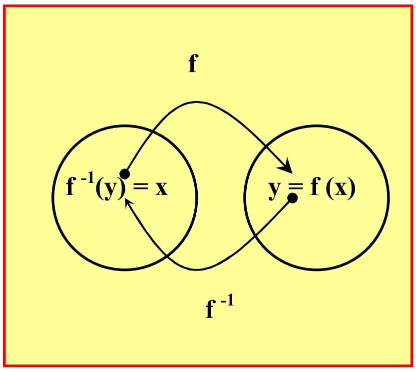
$$\mathbf{f^{-1}(f(x)) = x,\ x \in A \text{ και } f(f^{-1}(y)) = y,\ y \in f(A)}$$

- Αν η συνάρτηση $f: A \to R$ είναι αντιστρέψιμη τότε και f^{-1} είναι αντιστρέψιμη και ισχύει $(f^{-1})^{-1} = f$.

- Αν η συνάρτηση $f: A \to R$ είναι γνησίως μονότονη, τότε και η $f^{-1}: f(A) \to R$ είναι γνησίως μονότονη και μάλιστα με το ίδιο είδος μονοτονίας.

- Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι σχήματα συμμετρικά ως προς την ευθεία $y = x$.





- Αν η συνάρτηση $f: A \to R$ είναι αντιστρέψιμη τότε και f^{-1} είναι αντιστρέψιμη και ισχύει $(f^{-1})^{-1} = f$.

- Αν η συνάρτηση $f: A \to R$ είναι γνησίως μονότονη , τότε και η $f^{-1}: f(A) \to R$ είναι γνησίως μονότονη και μάλιστα με το ίδιο είδος μονοτονίας.

- Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι σχήματα συμμετρικά ως προς την ευθεία $y = x$. Αποτέλεσμα αυτού είναι ότι οι εξισώσεις $f(x) = x$ και $f^{-1}(x) = x$ είναι ισοδύναμες μόνο όταν μία από τις δύο (f ή f^{-1}) είναι γνησίως αύξουσα .Αν γνωρίζουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, μπορούμε να σχεδιάσουμε και τη γραφική παράσταση της αντίστροφης της.

ΑΡΤΙΑ - ΠΕΡΙΤΤΗ - ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $A \subseteq R$ θα λέγεται **άρτια** τότε και μόνο τότε αν γιακάθε $x \in A$ έπεται $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$.

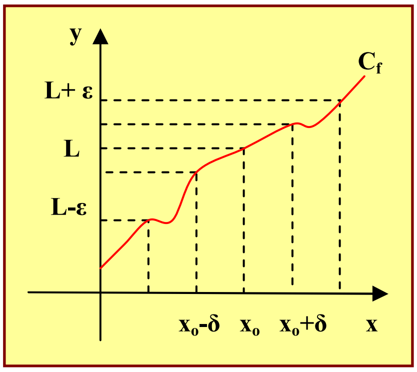
Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $A \subseteq R$ θα λέγεται **περιττή** τότε και μόνο τότε αν για κάθε $x \in A$ έπεται $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$.

Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $A \subseteq R$ θα λέγεται **περιοδική** τότε και μόνο τότε αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T \neq 0$ (μη εξαρτώμενος από το x) έτσι ώστε γιακάθε $x \in A$ να έπεται $x + T \in A$ και $f(x + T) = f(x)$.

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $X_O \in R$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_o) \cup (x_o, \beta)$.
Θα λέμε ότι η f έχει στο x_o **όριο το $L \in R$**, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in (\alpha, x_o) \cup (x_o, \beta)$, με $0 < |x - x_o| < \delta$, να ισχύει $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Γράφουμε τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$



- Όταν αναζητούμε το όριο μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο $x_o \in R$ μπορούμε να περιορίζουμε το x όσο θέλουμε κοντά στο x_o.

- Όταν λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_o όριο το $L \in R$, σημαίνει ότι όταν το x είναι πολύ κοντά στο x_o τότε το f (x) είναι πολύ κοντά στο L.

- Άμεση συνέπεια του ορισμού του ορίου στο x_o είναι οι παρακάτω ισοδυναμίες

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) - L) = 0$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(x_o + h) = L$$

- Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο σύνολο $(\alpha, x_o) \cup (x_o, \beta)$, τότε ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

- Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο σύνολο $(\alpha, x_o) \cup (x_o, \beta)$. Αν ισχύει $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$, τότε λέμε ότι η f **δεν έχει όριο στο x_o**.

- Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_o, β) αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α, x_o) τότε ορίζουμε $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

- Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (α, x_o) αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_o, β) τότε ορίζουμε $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

- Αν μια συνάρτηση f έχει στο $x_o \in R$ όριο, τότε αυτό είναι μοναδικό.

- Με τη βοήθεια του ορισμού του ορίου αποδεικνύεται ότι: $\lim_{x \to x_0} (x) = x_o$ και $\lim_{x \to x_0} (c) = 0$.

ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ

- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_o.
- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_o.
- Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_o και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_o, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$.

ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_o , τότε :

1. $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$

2. $\lim_{x\to x_0} \kappa f(x) = \kappa \lim_{x\to x_0} f(x)$, για κάθε σταθερά $\kappa \in R$

3. $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$

4. $\lim_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

5. $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|$

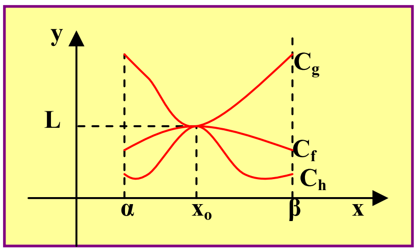
6. $\lim_{x\to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \ge 0$ κοντά στο x_o

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_o και
- $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = L$

τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.



ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

- Για κάθε $x \in R$ ισχύει $|ημx| \le |x|$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$)
- $\lim\limits_{x\to x_0}(ημx) = ημx_o$ και $\lim\limits_{x\to x_0}(συνx) = συνx_o$, $x_o \in R$.
- $\lim\limits_{x\to x_0}(εφx) = εφx_o$, όταν $x_o \neq κπ + \frac{\pi}{2}$, $κ \in Z$.
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ημx}{x} = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-συνx}{x} = 0$

ΟΡΙΟ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))$ στο σημείο x_o , εργαζόμαστε ως εξής:

Θέτουμε $u = g(x)$, υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_o = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $L = \lim\limits_{u\to u_0} f(u)$.

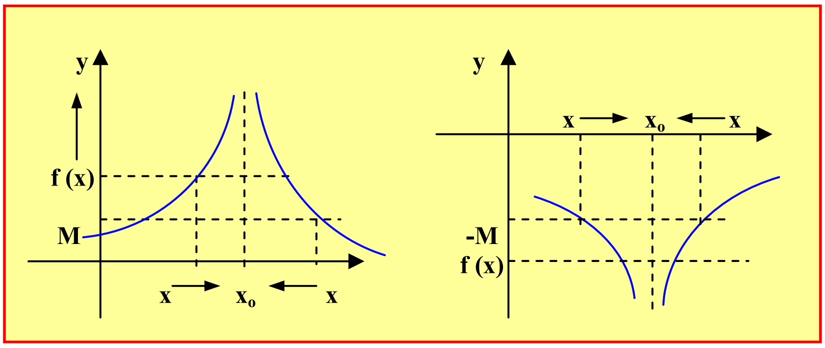
Αποδεικνύεται ότι αν $g(x) \neq u_o$ κοντά στο x_o, τότε ισχύει : $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{u\to u_0} f(u) = L$

ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $X_O \in R$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(α , x_o)\cup(x_o,β)$.
Ορίζουμε :

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $δ > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (α , x_o)\cup(x_o,β)$, με $0 < |x-x_o| < δ$ να ισχύει $f(x) > M$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $δ > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (α , x_o)\cup(x_o,β)$, με $0 < |x-x_o| < δ$ να ισχύει $f(x) < -M$.



Ισχύουν τα παρακάτω:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$

  $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$

- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε f (x)>0 κοντά στο x_o

  Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε f (x)<0 κοντά στο x_o

- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \to x_0} (-f(x)) = -\infty$

  Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \to x_0} (-f(x)) = +\infty$

- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

- $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$

  $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και γενικά $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$, $\nu \in N$

  $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ και γενικά $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty$, $\nu \in N$

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ και f (x) >0 κοντά στο x_o, τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, ενώ αν f (x) <0 κοντά στο x_o, τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, τότε $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$

- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = +\infty$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_0 \in R$						
το όριο της $f(x)$ είναι:	$\alpha \in R$	$\alpha \in R$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι :	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f+g$ είναι :	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)

Αν στο $x_0 \in R$										
το όριο της f είναι:	$\alpha>0$	$\alpha<0$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι :	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f \cdot g$ είναι	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Στους παραπάνω πίνακες , όπου υπάρχει ερωτηματικό, σημαίνει ότι το όριο (αν υπάρχει) εξαρτάται κάθε φορά από τις συναρτήσεις που παίρνουμε . Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε **απροσδιόριστη μορφή .**

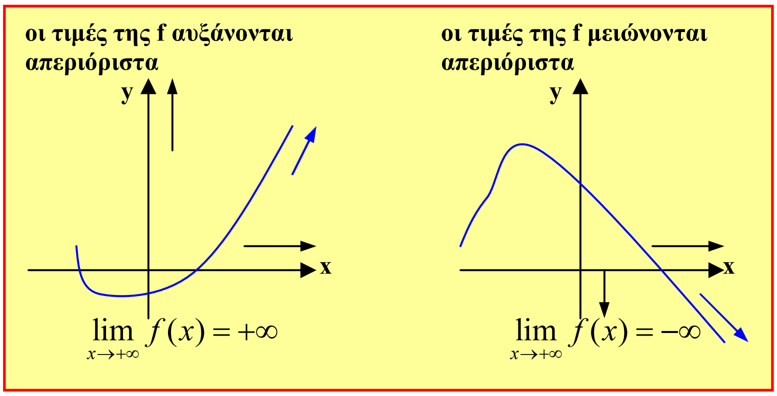
ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$. Αυτό επιτρέπει στο x να γίνει οσοδήποτε μεγάλο.

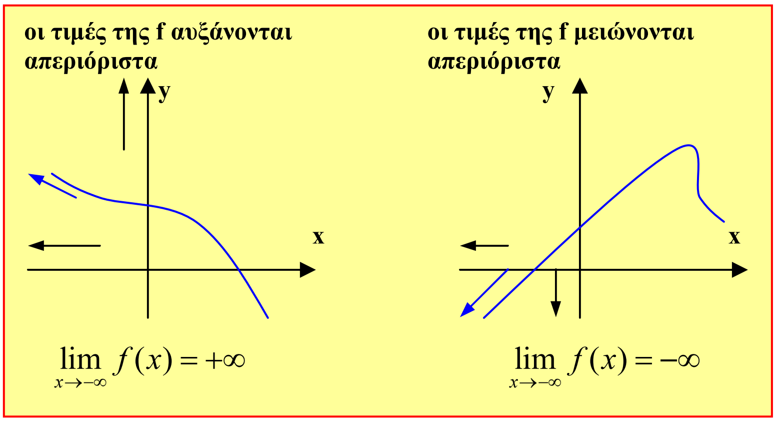
1. Στην περίπτωση που όταν το x αυξάνει απεριόριστα το $f(x)$ πλησιάζει όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό L λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο το L και γράφουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.

2. Στην περίπτωση που όταν το x αυξάνει απεριόριστα το f(x) αυξάνει επίσης απεριόριστα λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο το $+\infty$ και γράφουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. Στην περίπτωση που όταν το x αυξάνει απεριόριστα το $f(x)$ μειώνεται απεριόριστα λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο το $-\infty$ και γράφουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.



Ανάλογα συμπεράσματα μπορούν να διατυπωθούν, όταν το $x\to-\infty$ για μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty,\beta)$.



- $\lim_{x\to+\infty} x^{\nu}=+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\nu}}=0$, $\nu\in N^*$
- $\lim_{x\to-\infty} x^{\nu}=+\infty$, αν ν άρτιος $\lim_{x\to-\infty} x^{\nu}=-\infty$, αν ν περιττός και $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^{\nu}}=0$
- **Αν α >1, τότε ισχύει :**
  $\lim_{x\to+\infty} \alpha^{x}=+\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} \alpha^{x}=0$
  $\lim_{x\to+\infty} \log_{\alpha}x=+\infty$ και $\lim_{x\to0^+} \log_{\alpha}x=-\infty$
- **Αν 0<α <1, τότε ισχύει :**
  $\lim_{x\to+\infty} \alpha^{x}=0$ και $\lim_{x\to-\infty} \alpha^{x}=+\infty$
  $\lim_{x\to+\infty} \log_{\alpha}x=-\infty$ και $\lim_{x\to0^+} \log_{\alpha}x=+\infty$
- **Ειδικά :**
  $\lim_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} e^{x}=0$
  $\lim_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$ και $\lim_{x\to0^+} \ln x=-\infty$
- Αποδεικνύεται ότι οι συναρτήσεις ημx , συνx ,εφx και σφx **δεν** έχουν όριο στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση και x_o ένα σημείο του πεδίου ορισμού της . Θα λέμε ότι η f **είναι συνεχής στο x_o** όταν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_o)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Μια συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της θα λέγεται απλά συνεχής συνάρτηση.
- **Τονίζουμε** ότι η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_o έχει νόημα μόνο αν το x_o είναι σημείο του πεδίου ορισμού της f .
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοιχτό διάστημα (α ,β)**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α ,β).
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής στο κλειστό διάστημα [α ,β]** , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α ,β) και επιπλέον $\lim\limits_{x\to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to \beta^-} f(x) = f(\beta)$.
- Κάθε **πολυωνυμική συνάρτηση** είναι συνεχής στο R .
- Κάθε **ρητή συνάρτηση** είναι συνεχής σε κάθε σημείου του πεδίου ορισμού της .
- Οι συναρτήσεις ημx ,συνx , α^x, $\log_\alpha x$, $0< \alpha \neq 1$ είναι συνεχείς .
- Έστω μια συνάρτηση f και x_o σημείο του πεδίου ορισμού της .Η συνάρτηση f **δεν είναι συνεχής στο x_o** όταν:
  - ∗ Δεν υπάρχει το όριο της f στο x_o
  - ∗ Υπάρχει το όριο της στο x_o αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της f στο x_o.
- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ, τότε η γραφική παράσταση της f είναι γραμμή χωρίς διακοπή.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

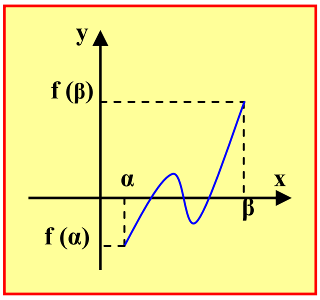
Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_o τότε είναι συνεχείς στο x_o και οι συναρτήσεις $f+g$, $c\cdot f$, $c\in R$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$, $|f|$ και $\sqrt[\kappa]{f}$ με την προυπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_o.

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_o και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_o)$, τότε και η σύνθεση τους $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_o.

ΘΕΩΡΗΜΑ Bolzano

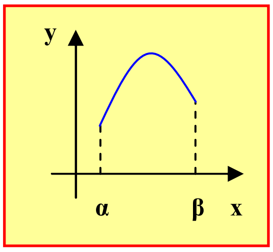
Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α , β]. Αν :
- **η f είναι συνεχής στο [α , β] και**
- **$f(\alpha)f(\beta) < 0$**

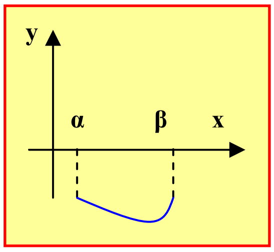
τότε, υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha , \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = 0$.



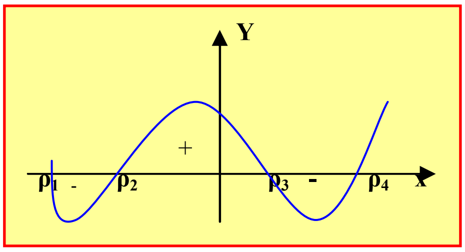
Από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι**:**

- Αν μια συνάρτηση f είναι **συνεχής** σε ένα διάστημα Δ και **δεν μηδενίζεται** σ’αυτό τότε είναι f (x) >0 για κάθε $x \in \Delta$ ή f (x) <0 για κάθε $x \in \Delta$ **.** Δηλαδή η f **έχει σταθερό πρόσημο στο Δ .**





- Έστω f μια συνεχής συνάρτηση , τότε η f **διατηρεί πρόσημο** σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.



- Το θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας της εξίσωσης f(x) = 0. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να υπάρχουν και περισσότερες.

- Όταν δεν ικανοποιούνται και οι δύο προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει λύση της f(x) = 0.

- Το θεώρημα Bolzano εξασφαλίζει την ύπαρξη ρίζας της f(x) αλλά δεν την προσδιορίζει .

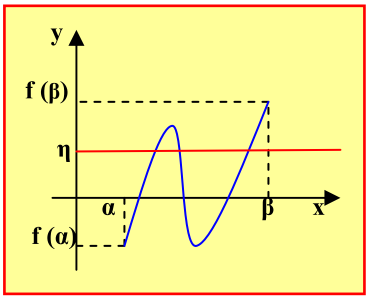
- Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_o μεταξύ των α και β.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α , β].
Αν :

- **η f είναι συνεχής στο [α , β] και**
- **$f(\alpha) \neq f(\beta)$**

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας , τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$.Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$.Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο [α ,β] και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$,

αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.
Επομένως , σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $g(x_o) = f(x_o) - \eta = 0$, οπότε $f(x_o) = \eta$.

Από το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών προκύπτει ότι :

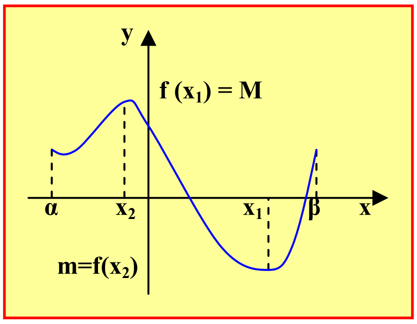
- η εικόνα f (Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα .Στην περίπτωση που η f είναι σταθερή το f(Δ) είναι μονοσύνολο.

- Η ευθεία y = η όπου η μεταξύ των f(α) , f(β) τέμνει τη γραφική παράσταση της f τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη μεταξύ των α και β.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο [α ,β] τότε η f παίρνει στο [α ,β]μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha ,\beta]$ τέτοια ώστε αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$ να ισχύει **:**
$m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in [\alpha ,\beta]$ **.**



- Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα [α ,β] είναι το κλειστό διάστημα [m, M] όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της **.**

- Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σ'ένα ανοιχτό διάστημα (α ,β), τότε το **σύνολο τιμών** της στο διάστημα αυτό είναι το(**A** ,**B**), όπου
$A = \lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x)$**.**

- Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** σ'ένα ανοιχτό διάστημα (α ,β), τότε το **σύνολο τιμών** της στο διάστημα αυτό είναι το (**B** ,**A**)**.**

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ'ένα σημείο x_o** του πεδίου ορισμού της αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός **.**
Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_o** και συμβολίζεται με **$f'(x_o)$.**

- Αν θέσουμε $x-x_o = h\neq 0$, τότε $x = x_o+h$ και $x\to x_o \Leftrightarrow h\to 0$ **.**
  Επομένως $f'(x_o)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ **.**

- Αν το σημείο x_o είναι **εσωτερικό** σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f τότε η f είναι **παραγωγίσιμη** στο x_o αν και μόνο αν υπάρχουν στο R τα όρια **:**

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι **ίσα .**

- Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $[x_o,\beta)$ ενώ δεν ορίζεται στο διάστημα (α ,x_o) τότε ορίζουμε **:** $f'(x_o)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in R$ **.**

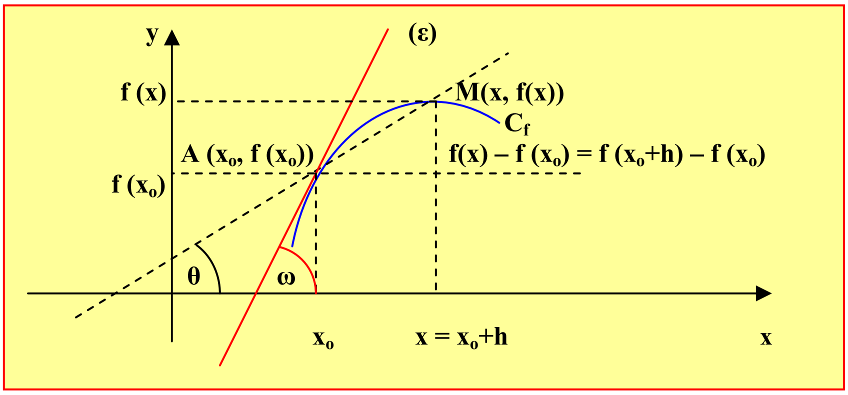
  Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $(\alpha ,x_o]$ ενώ δεν ορίζεται στο διάστημα (x_o,β) τότε ορίζουμε **:** $f'(x_o)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\in R$ **.**

- Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού , κατά τη χρονική στιγμή t_o , είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = s(t)$ τη χρονική στιγμή t_o.Δηλαδή είναι **u (t) = S΄ (t)**.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Έστω μια συνάρτηση f και $A(x_o, f(x_o))$ ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α, την ευθεία (ε) που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Επομένως **ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης (ε) της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, στο σημείο της $A(x_o, f(x_o))$ είναι η παράγωγος της f στο x_o.** Δηλαδή $\lambda = f'(x_o)$.



Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) είναι η: $\boxed{y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o).}$

Η κλίση $\lambda = f'(x_o)$ της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$ θα τη λέμε **κλίση της C_f στο Α ή κλίση της f στο x_o.**

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_o$ έχουμε $f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$, οπότε

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right] = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}(x-x_0) =$$

$= f'(x_0)\cdot 0 = 0$, αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

* Μια συνάρτηση f μπορεί να είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 χωρίς να είναι παραγωγίσιμη στο x_0. $f(x)=|x|$ και x_0=0.
* Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α.Θα λέμε ότι :

- Η f είναι **παραγωγίσιμη** στο Α ή απλά παραγωγίσιμη όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_o \in A$.

- Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_o \in (\alpha, \beta)$.

- Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_o \in (\alpha, \beta)$ και επιπλέον ισχύει
  $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in R$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in R$.

- Αν υποθέσουμε ότι το A_1 είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων , τότε η παράγωγος της f ΄, αν υπάρχει , λέγεται **δεύτερη παράγωγος της f** και συμβολίζεται με f ΄΄.
  Επαγωγικά ορίζεται η νιοστή παράγωγος της f , με $\nu \geq 3$, και συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$. Δηλαδή $\mathbf{f^{(\nu)} = [f^{(\nu-1)}]'}$ **,** $\boldsymbol{\nu \geq 3}$**.**

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

f (x) = c , c∈R , (c)΄ = 1

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=0$.

Αν $x_0 \in R$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει **:** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{c-c}{x-x_0}=0$, δηλαδή

$(c)'=0$.

f (x) = x , (x)΄ = 1

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=1$.

Αν $x_0 \in R$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει **:** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x-x_0}{x-x_0}=1$, δηλαδή

$(x)'=1$.

f (x) = x^ν , $\nu \in$N / {0,1}, $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$.

Αν $x_0 \in R$, τότε για x $\neq x_0$ ισχύει : $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^\nu - x_0^\nu}{x-x_0} =$

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+...+x_0^{\nu-1})}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} (x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+...+x_0^{n-1}) = \nu x_0^{\nu-1}$,δηλαδή $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$.

f (x) = $\sqrt{x}$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Αν $x_0 \in (0,+\infty)$, τότε για x $\neq x_0$ ισχύει : $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} =$

$\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)} = \dfrac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}$ οπότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$, δηλαδή $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

f (x) = ημx , (ημx)΄ = συνx

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

Αν $x_0 \in R$, τότε για h $\neq$ 0 ισχύει : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h} =$

$\dfrac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu h-\eta\mu x}{h} = \eta\mu x\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}+\sigma\upsilon\nu x\cdot\dfrac{\eta\mu h}{h}$. Επειδή $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\eta\mu h}{h} = 1$

και $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h} = 0$ έχουμε και $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ =ημx·0 + συνx·1=συνx ,δηλαδή $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$.

f (x) = συνx , (συνx)΄ = ημx

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = -\eta\mu x$.

Αν $x_0 \in R$, τότε για $h \neq 0$ ισχύει : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu(x+h)-\sigma\upsilon\nu x}{h} =$

$\dfrac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu h-\eta\mu x\cdot\eta\mu h-\sigma\upsilon\nu x}{h} = \sigma\upsilon\nu x\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}-\eta\mu x\cdot\dfrac{\eta\mu h}{h}$ οπότε

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ = συνx·0 - ημx·1= - ημx , δηλαδή

$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$.

f (x) = εφx , (εφx)΄ = $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1 = R\setminus\{x\,|\,\sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Αν $x \in R_1$ έχουμε :

$$(\varepsilon\phi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\,\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

f(x) = σφx , (σφx)΄ = - $\dfrac{1}{\eta\mu^2(x)}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $R_2 = R\setminus\{x\,|\,\eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\dfrac{1}{\eta\mu^2(x)}$

Αν $x \in R_2$ έχουμε :

$$(\sigma\phi x)' = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)' = \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'\,\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x)'}{\eta\mu^2 x} = -\frac{(\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x)}{\eta\mu^2 x} = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}.$$

$f(x) = x^{-\nu}$, $(x^{-\nu})' = -\nu x^{\nu-1}$, $\nu \in N^*$, $x \in R^*$

Αν x $\in R^*$ έχουμε :

$$\left(x^{-\nu}\right)' = \left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)' = \frac{(1)'x^{\nu} - 1(x^{\nu})'}{\left(x^{\nu}\right)^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{\nu-1}$$

$f(x) = x^{\kappa}$, $(x^{\kappa})' = -\kappa x^{\kappa-1}$, $\kappa \in Z - \{0,1\}$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f + g είναι
είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει :

$$\left(f+g\right)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για x $\neq x_0$ ισχύει : $\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} =$

$= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$. Επειδή οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε : $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} =$

$= f'(x_0) + g'(x_0)$.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει :

$$\left(f \bullet g\right)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΠΗΛΙΚΟΥ

Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$ τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}$$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει :

$$\left(f \circ g\right)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

- Έστω η συνάρτηση h(x) = f(g(x)) με την g(x) να είναι παραγωγίσιμη στο A και την f(x) παραγωγίσιμη στο g(A). Η h = f o g είναι παραγωγίσιμη στο A με $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ ή $\frac{dh}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ όπου u = g(x). (**Κανόνας αλυσίδας**)

- Η συνάρτηση $f(x) = x^a, a \in R - Z$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = ax^{a-1}$.

Αν $y = x^a = e^{a\ln x}$ και θέσουμε u = αlnx , τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως $y' = \left(e^u\right)' = e^u \cdot u' = e^{a\ln x} \alpha \frac{1}{x} = x^a \frac{a}{x} = ax^{a-1}$.

- Η συνάρτηση $f(x) = a^x, a > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = a^x \ln a$.

Αν $y = \alpha^x = e^{x\ln a}$ και θέσουμε u = xlnα , τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως $y' = \left(e^u\right)' = e^u \cdot u' = e^{x\ln a} \ln\alpha = \alpha^x \ln\alpha$.

- Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|, x \in R^*$ είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x}$.

– αν x > 0 , τότε $\left(\ln|x|\right)' = \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$, ενώ

– αν x < 0 , τότε ln|x| = ln(-x), οπότε αν θέσουμε y = ln(-x) και u = -x έχουμε y = lnu .

Επομένως $y' = (\ln u)' = \frac{1}{u}u' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

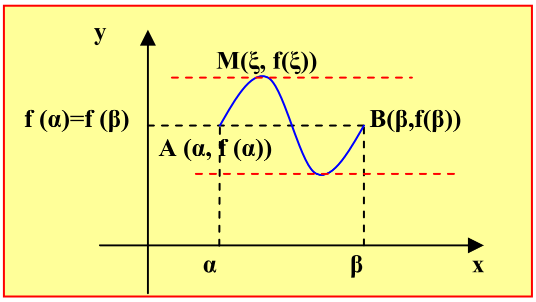
ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

Αν μια συνάρτηση f είναι

- **συνεχής στο [α ,β]**
- **παραγωγίσιμη στο ανοιχτό (α ,β) και**
- **f (α) = f(β)**

τότε υπάρχει ένα , τουλάχιστον ξ∈(α ,β) τέτοιος ώστε f ΄(ξ) = 0.

Γεωμετρικά το θεώρημα Rolle σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(α ,β) τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο M(ξ,f (ξ)) να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x **.**



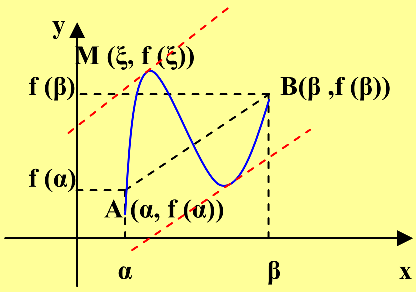
ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Αν μια συνάρτηση f είναι

- **συνεχής στο [α ,β]**
- **παραγωγίσιμη στο ανοιχτό (α ,β)**

τότε υπάρχει ένα ,τουλάχιστον ξ∈(α ,β) τέτοιος ώστε f ΄(ξ)= $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Γεωμετρικά το θεώρημα μέσης τιμής σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(α ,β) τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο M(ξ,f (ξ)) να είναι παράλληλη στην AB**.**



Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- **η f είναι συνεχής στο Δ και**
- **f΄(x) = 0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,**

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.

- αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής . Επομένως , υπάρχει ξ $\in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$f'(x) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1) . Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε λόγω της (1) είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_1 > x_2$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

- **f , g είναι συνεχείς στο Δ και**
- **f΄(x) = g΄(x) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,**

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε x$\in$ Δ να ισχύει :
f(x) = g(x) + c

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση f – g είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει (f – g)΄(x) = f΄(x) – g΄(x) = 0. Επομένως η συνάρτηση f – g είναι σταθερή στο Δ . Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε x $\in$ Δ να ισχύει f(x) – g(x) = c οπότε f(x) = g(x) + c.

ΠΡΟΣΟΧΗ ! Τα παραπάνω θεωρήματα εφαρμόζονται σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων .

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .
● Αν f΄(x) > 0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
● Αν f΄(x) < 0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι f΄(x) > 0.
Εστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως , υπάρχει ξ $\in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$ και επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$ έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$ άρα $f(x_1) < f(x_2)$.

∗ Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει .** f(x) = x^3**.**

ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού Α , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_o \in A$ **τοπικό μέγιστο** , όταν υπάρχει δ > 0, τέτοιο ώστε f (x) ≤ f (x_o) για κάθε $x \in A \cap (x_o - \delta, x_o + \delta)$.Το x_o λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το f(x_o) **τοπικό μέγιστο της f** .

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού Α , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_o \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει δ > 0, τέτοιο ώστε f (x) ≥ f (x_o) για κάθε $x \in A \cap (x_o - \delta, x_o + \delta)$.Το x_o λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το f(x_o) **τοπικό ελάχιστο της f** .

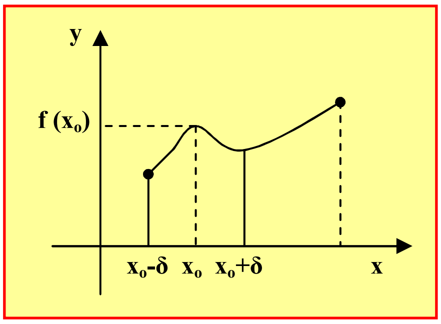
ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΠΙΚΩΝ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό , τότε $f'(x_0) = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε $(x_0 - \delta , x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και $f(x) \leq f(x_0)$ για καθε $x \in (x_0 - \delta , x_0 + \delta)$ (1).



Επειδή, επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Επομένως

– αν $x \in (x_0 - \delta , x_0)$, τότε , λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2).$$

– αν $x \in (x_0 , x_0 + \delta)$, τότε , λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad (3).$$

Έτσι από τις (2) , (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Αν μια συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη** σ’ένα **εσωτερικό σημείο** ενός διαστήματος Δ στο οποίο είναι ορισμένη και **$f'(x_o) = 0$**, τότε αυτό **δεν** σημαίνει ότι το x_o είναι θέση τοπικού ακρότατου της f. π.χ. $f(x) = x^3$, $x_o = 0$.

- Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σ’ένα διάστημα Δ και σ’ένα **εσωτερικό σημείο x_o του Δ** παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε **δεν** είναι υποχρεωτικό η f να είναι και **παραγωγίσιμη στο x_o με $f'(x_o) = 0$.**

- Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σ’ένα διάστημα Δ και σ’ένα **εσωτερικό σημείο x_o του Δ** παρουσιάζει τοπικό ακρότατο,τότε θα είναι
  $f'(x_o) = 0$ ή
  η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o.

- Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ’ένα διάστημα Δ, τότε τα **εσωτερικά σημεία $x \in \Delta$** στα οποία είναι **$f'(x) \neq 0$ δεν** είναι θέσεις τοπικών ακρότατων.

- Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ’ένα διάστημα Δ και συνεχής στο διάστημα αυτό.Τότε οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακρότατων της συνάρτησης f στο διάστημα Δ είναι:
  ► Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
  ► Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
  ► Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού).

- Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ’ένα διάστημα Δ και **συνεχής** στο διάστημα αυτό.Τα **εσωτερικά** σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγος είναι ίση με το 0 λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο Δ .

ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΤΙΜΩΝ ΜΙΑΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα Δ =[α ,β], τότε η f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο στο διάστημα Δ . Για να βρούμε το μέγιστο και το ελάχιστο της f στο διάστημα Δ εργαζόμαστε ως εξής :

1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f.
2. Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα κρίσιμα σημεία και στα άκρα α και β του Δ .
3. Από αυτές τις τιμές της f η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο M της f και η μικρότερη είναι το ελάχιστο m της f στο Δ .
4. Το πεδίο τιμών της f είναι το διάστημα f(Δ) = [m , M] .

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ

Έστω μια συνάρτηση f **παραγωγίσιμη** στο σύνολο $(\alpha, x_o) \cup (x_o, \beta)$ και **συνεχής** στο σημείο x_o.

► Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_o) και $f'(x) < 0$ στο (x_o, β), τότε το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

► Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_o) και $f'(x) > 0$ στο (x_o, β), τότε το $f(x_o)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

► Αν $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_o) \cup (x_o, \beta)$ τότε το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α ,β).

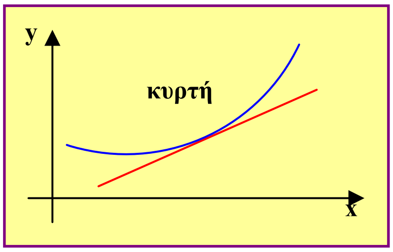
ΚΟΙΛΑ – ΚΥΡΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

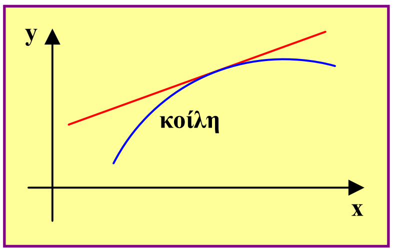
Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι **συνεχής** σ'ένα διάστημα Δ και **παραγωγίσιμη στο εσωτερικό** του Δ.
Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.
Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Αν μια συνάρτηση f είναι **κυρτή** σ'ένα διάστημα Δ, τότε σε κάθε σημείο του Δ η εφαπτομένη της C_f βρίσκεται **"κάτω"** από τη γραφική παράσταση της f, με εξαίρεση το σημείο επαφής.



- Αν μια συνάρτηση f είναι **κοίλη** σ'ένα διάστημα Δ, τότε σε κάθε σημείο του Δ η εφαπτομένη της C_f βρίσκεται **"πάνω"** από τη γραφική παράσταση της f, με εξαίρεση το σημείο επαφής.



ΘΕΩΡΗΜΑ

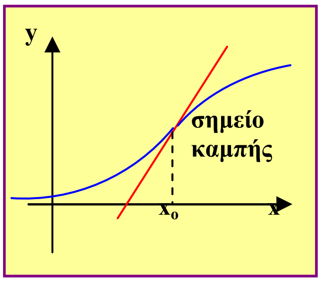
Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι **συνεχής** σ'ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο **εσωτερικό** του Δ.
●Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι **κυρτή** στο Δ.
●Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι **κοίλη** στο Δ.
Το αντίστροφο του θεωρήματος **δεν** ισχύει .

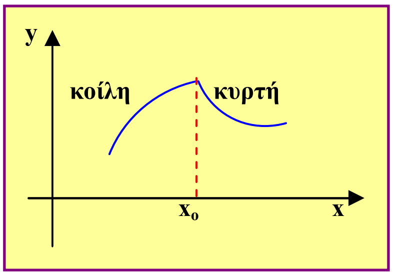
ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα (α ,β) και **παραγωγίσιμη** στο σύνολο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$**.** Αν **:**

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντίστροφα και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f**.**





ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Όταν το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f τότε λέμε ότι η f **παρουσιάζει στο x_0 καμπή** και το x_0 λέγεται θέση σημείου καμπής**.** Στο σημείο αυτό η εφαπτομένη **"διαπερνά"** την καμπύλη της f**.**

2. Αποδεικνύεται ότι **:**
Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ'ένα διάστημα Δ.
Τα εσωτερικά σημεία x του Δ στα οποία είναι $f''(x) \neq 0$ δεν είναι θέσεις σημείων καμπής **.**

4. Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ'ένα διάστημα Δ είναι
- τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται και
- τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' **.**

5. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ'ένα διάστημα (α ,β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$**.** Αν
- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
- ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής **.**

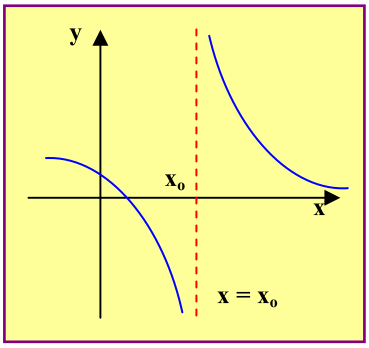
ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

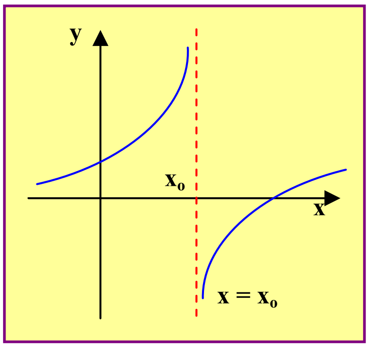
1. Κατακόρυφη ασύμπτωτη

Η ευθεία **$x = x_o$** λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης μιας

συνάρτησης f , αν ένα τουλάχιστον από τα όρια **:** $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$

ή $-\infty$**.**





ΠΡΟΣΟΧΗ

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_o, τότε ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) =$ f(x)$\in R$ και

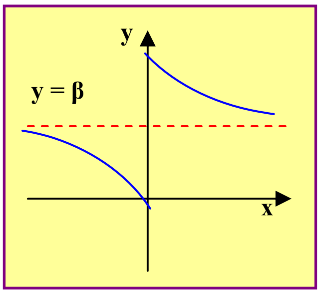
Η ευθεία $x = x_o$ δεν μπορεί να είναι ασύμπτωτη της C_f**.**

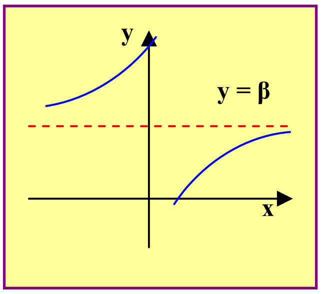
2. Οριζόντια ασύμπτωτη

Η ευθεία με εξίσωση **y = β** λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$), όταν $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \beta$

(αντιστοίχως

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \beta$).





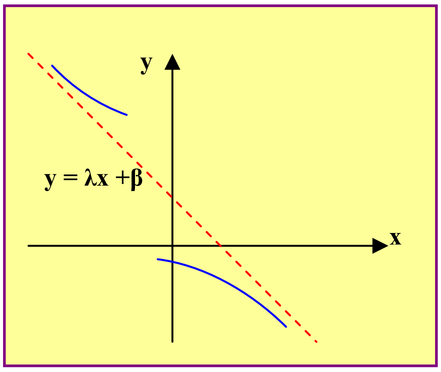
Παρατηρήσεις

Αν $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ ή $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$ τότε η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ ή $-\infty$, αντίστοιχα .

Είναι δυνατόν μια συνάρτηση να έχει οριζόντια ασύμπτωτη μόνο στο $+\infty$ ή μόνο στο $-\infty$ ή να έχει την ίδια ευθεία ως ασύμπτωτη στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Πλάγια ασύμπτωτη

Η ευθεία με εξίσωση **y = λx + β** λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$), αν **:** $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$ αντιστοίχως $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$**.**



Για τον προσδιορισμό των ασύμπτωτων μιας συνάρτησης μας διευκολύνει το παρακάτω θεώρημα **:**

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η ευθεία **y = λx + β** είναι **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$), αν και μόνο αν :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in R \;\text{ και }\; \lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\beta\in R$$

αντιστοίχως **:**

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in R \;\text{ και }\; \lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x)=\beta\in R$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η ασύμπτωτη y = λx + β είναι **οριζόντια** αν λ = 0 , ενώ αν λ ≠ 0 λέγεται **πλάγια ασύμπτωτη .**
2. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες **.**
3. Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$ με βαθμό P(x) μεγαλύτερου κατά 2 του βαθμού του Q(x), δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες **.**

Ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε **:**

- στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία δεν ορίζεται **.**
- στα σημεία του πεδίου ορισμού της , στα οποία η f δεν είναι συνεχής **.**
- στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής (α ,+ ∞) ή (-∞,β)**.**

ΚΑΝΟΝΕΣ De L’ Hospital

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0 \in R\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο) τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0 \in R\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο) τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Το θεώρημα ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$.

2. Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προυποθέσεις τους.

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . **Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ** , ονομάζεται κάθε συνάρτηση **F** που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει **F΄(x) = f(x)**, για κάθε x $\in \Delta$ **.**

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε
• όλες οι συναρτήσεις της μορφής G(x) = F(x) + c , c $\in R$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
• κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή G(x) = F(x) + c , c $\in R$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Κάθε συνάρτηση της μορφής G(x) = F(x) + c , c $\in \Re$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού G΄(x) = (F(x) + c)΄ = F΄(x) = f(x), για κάθε x $\in \Delta$ **.**
- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ **.** Τότε για κάθε x $\in \Delta$ ισχύουν F΄(x) = f(x) και G΄(x) = f(x), οπότε G΄(x) = F΄(x), για κάθε x $\in \Delta$**.**
  Επομένως υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε G(x) = F(x) + c για κάθε x $\in \Delta$ **.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η έννοια της αρχικής συνάρτησης ορίζεται σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων**.**

2. Αποδεικνύεται ότι κάθε **συνεχής** συνάρτηση σε διάστημα Δ **έχει παράγουσα** στο διάστημα αυτό**.**

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ'ένα διάστημα Δ**.**Αν F είναι μια αρχική της f στο Δ τότε το σύνολο όλων των αρχικών της f στο Δ ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ και το συμβολίζουμε με $\int f(x)dx$ **.** Δηλαδή $\int f(x)dx =$ F(x) + c , c$\in R$ **.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1 Για κάθε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ ισχύει **:**
$\int f'(x)dx = \mathrm{f(x) + c,\ c} \in R$.

2 Η διαδικασία της εύρεσης του αόριστου ολοκληρώματος είναι η αντίστροφη πορεία της παραγώγισης και λέγεται ολοκλήρωση**.** Η σταθερά c λέγεται σταθερά ολοκλήρωσης**.**

3. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν αρχική συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ τότε
$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx, \lambda \in R^*$
$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΟΡΙΣΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

1.	$\int 0dx = c$	6.	$\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$
2.	$\int 1dx = x + c$	7.	$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \varepsilon\phi x + \mathrm{c}$
3.	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + c$	8.	$\int \frac{1}{\eta\mu^2 x}dx = -\sigma\phi x + c$
4.	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$	9.	$\int e^x dx = e^x + c$
5.	$\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + c$	10.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln\alpha} + c$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du, \mathrm{u = g(x)\ και\ du = g'(u)dx}$$

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: A \to R$ με $A = [\alpha, \beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα που το καθένα έχει μήκος $\Delta x = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$.Σε κάθε υποδιάστημα που σχηματίζεται π.χ. στο $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, $\kappa = 1,2,\ldots,\nu$ θεωρούμε τυχαίο σημείο ξ_κ (μπορεί να είναι και ένα από τα άκρα) και σχηματίζουμε το άθροισμα : $S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \ldots + f(\xi_\nu)\Delta x = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$ το οποίο ονομάζουμε **άθροισμα Riemann της f** στο $[\alpha, \beta]$. Το σύνολο των άκρων $x_o = \alpha < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$ των διαστημάτων ονομάζουμε διαμέριση P_ν του $[\alpha, \beta]$ και τα $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ **ενδιάμεσα σημεία** της διαμέρισης .Το προηγούμενο άθροισμα έχει σαν όριο όταν $\nu \to +\infty$ το οποίο ονομάζουμε **ολοκλήρωμα Riemann** της f στο $[\alpha, \beta]$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ της διαμέρισης P_ν και το συμβολίζουμε $\int_a^\beta f(x)dx$.

Έτσι έχουμε : $\int_a^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$. Τα α ,β ονομάζονται **όρια της ολοκλήρωσης** . Αν ως ξ_κ επιλέξουμε τα δεξιά άκρα των διαστημάτων τότε $\xi_\kappa = \alpha + \kappa\Delta x = \alpha + \kappa \frac{\beta-\alpha}{\nu}$ και ο προηγούμενος τύπος γίνεται :

$$\int_a^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty} \left[\frac{\beta-\alpha}{\nu} \sum_{\kappa=1}^{\nu} f\left(a + \kappa \frac{\beta-\alpha}{\nu} \right) \right].$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

1. $\int_a^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$ και $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε $\int_a^\beta f(x)dx \geq 0$

3. Αν f ,g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε

$$\int_a^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

4. Έστω f και g συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε

$$\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)dx, \lambda \in R$$

$$\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)$$

$$\int_\alpha^\beta [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)dx + \mu \int_\alpha^\beta g(x), \lambda, \mu \in R$$

5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και α ,β,γ $\in$ Δ τότε ισχύει
$\int_{a}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$

6. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α ,β]. Αν f (x) ≥ 0 για κάθε x $\in$ [α ,β] και η συνάρτηση f **δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα [α , β]** τότε
$\int_{a}^{\beta} f(x)dx > 0$

7. Αν f συνεχής στο [α ,β] με m , M ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο της f , αντίστοιχα στο [α ,β] τότε m(β-α) $\leq \int_{a}^{\beta} f(x)dx \leq$ M(β-α)

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ F(x) = $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν f είναι μια **συνεχής** συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ τότε η συνάρτηση F(x) = $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, x $\in$ Δ είναι μια παράγουσα της f στο Δ.

Δηλαδή F΄(x) = $\left[\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right]' = f(x)$, x $\in$ Δ.

- Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει ως εξής :
F(x + h) – F(x) = $\int_{x}^{x+h} f(t)dt$ = Εμβαδόν του χωρίου Ω $\approx$ f(x) ·h, για μικρά h > 0.
Άρα , για μικρά h > 0 είναι $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \approx f(x)$ οπότε
$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$

- Από το θεώρημα προκύπτει ότι $\left[\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt\right]' = f(g(x))\cdot g'(x)$ με την πρυπόθεση ότι τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε έχουν νόημα .

ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκηρωτικού λογισμού)

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σ' ένα διάστημα [α , β] . Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α , β] , τότε

$$\int_{a}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση F(x) = $\int_{a}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο [α , β] **.** Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], θα υπάρχει **c** $\in \Re$ τέτοιο ώστε G(x) =F(x) + c(1)
Από την (1) , για x = α , έχουμε G(α) = F(α) + c = $\int_{a}^{a} f(t)dt$ + c = c , οπότε c = G(α)**.**
Επομένως G(x) =F(x) + G(α) **.**
Από την (1) , για x = β , έχουμε G(β) = F(β) + G(α) = $\int_{a}^{\beta} f(t)dt$ + G(α) και άρα
$\int_{a}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$**.**

ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

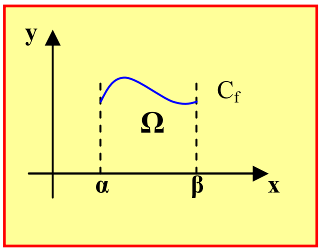
1. Ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για το ορισμένο ολοκλήρωμα παίρνει την μορφή $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$ όπου f΄, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α ,β]**.**

2. Ο τύπος ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής για το ορισμένο ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$ όπου f΄, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις , u = g(x), du = g΄(x), u_1= g(α) και u_2= g(β)**.**

ΕΜΒΑΔΟΝ

1. Αν μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο [α ,β] και $f(x) \geq 0$ τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από την C_f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = α , x = β

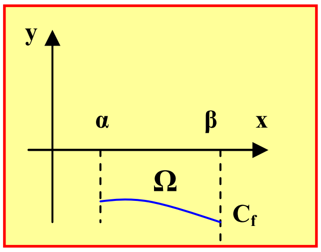
είναι $\boxed{E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}$



Το χωρίο Ω ορίζεται και ως το σύνολο των σημείων M(x ,y) για τα οποία ισχύουν $\alpha \leq x \leq \beta$ και $0 \leq y \leq f(x)$.

2. Αν μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο [α ,β] και $f(x) \leq 0$ τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από την C_f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = α , x = β

είναι $\boxed{E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} [-f(x)]dx}$

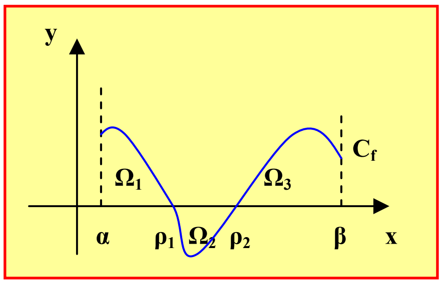


Το χωρίο Ω ορίζεται και ως το σύνολο των σημείων M(x ,y) για τα οποία ισχύουν $\alpha \leq x \leq \beta$ και $f(x) \leq y \leq 0$.

3. Αν μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο [α ,β] δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από την C_f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = α , x = β είναι

$$\boxed{E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx}$$

Στο παράδειγμα του σχήματος είναι :
$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3) =$
$\int_{\alpha}^{\rho_1} f(x)dx + \int_{\rho_1}^{\rho_2} (-f(x))dx + \int_{\rho_2}^{\beta} f(x)dx$.



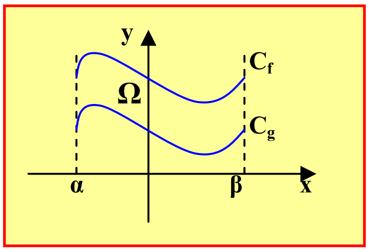
4. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο συνεχών συναρτήσεων f ,g στο [α ,β] και από τις ευθείες x = α , x = β είναι

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)|\,dx$$

Ειδικότερα :

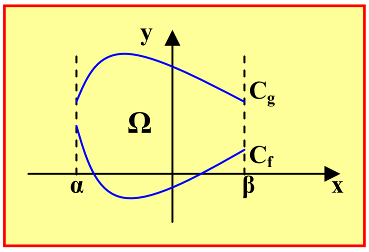
α) Αν $f(x) \geq g(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ τότε :

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)]\,dx$$



β) Αν $f(x) \leq g(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ τότε :

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} [g(x) - f(x)]\,dx$$



5. Αν η διαφορά f(x) – g(x) δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο τότε

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)|\,dx .$$

Στο παράδειγμα του σχήματος είναι : $E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3) =$

$$\int_{\alpha}^{\rho_1} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx + \int_{\rho_1}^{\rho_2} (g(x) - f(x))\,dx + \int_{\rho_2}^{\beta} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx .$$