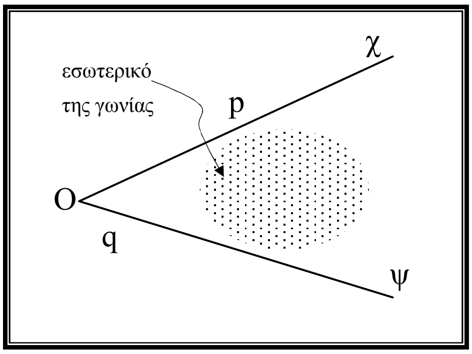
ΓΩΝΙΕΣ...



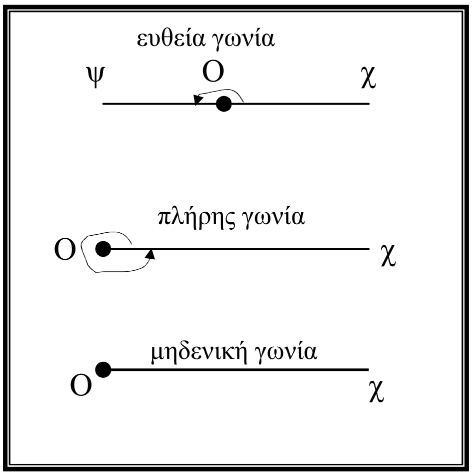
Ορισμός: Έστω Οχ και Οψ δύο ημιευθείες που δεν έχουν κοινό φορέα και έστω p το ημιεπίπεδο που έχει ακμή τον φορέα της Οχ και περιέχει την Οψ και q το ημιεπίπεδο που έχει ακμή τον φορέα της Οψ και περιέχει την Οχ.

Ονομάζουμε (κυρτή) **γωνία** το σύνολο των κοινών σημείων των ημιεπιπέδων p και q.

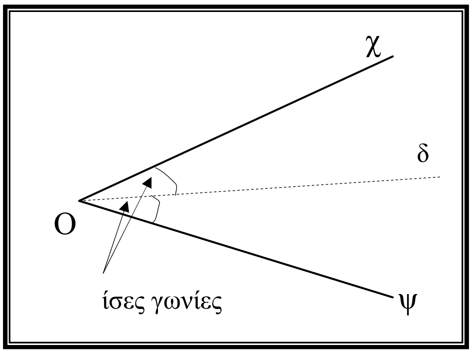
Το σημείο Ο λέγεται **κορυφή** της γωνίας και οι ημιευθείες Οχ, Οψ λέγονται πλευρές της γωνίας.

Τα σημεία μιας γωνίας που δεν ανήκουν στις πλευρές της λέγονται **εσωτερικά**.

Είδη γωνιών:

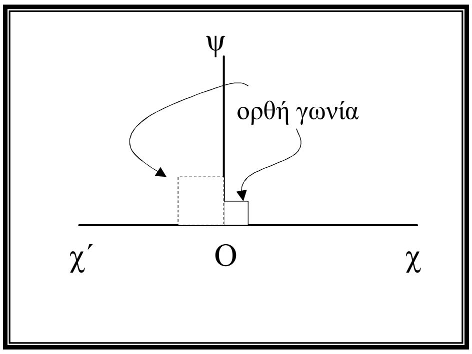


- **Ευθεία** γωνία λέγεται η γωνία της οποίας οι πλευρές Οχ και Οψ είναι αντικείμενες ημιευθείες(δηλ. η μια είναι προέκταση της άλλης)
- **Πλήρης** γωνία λέγεται η γωνία της οποίας τα σημεία είναι όλα τα σημεία του επιπέδου.
- **Μηδενική** γωνία λέγεται η γωνία της οποίας τα σημεία είναι τα σημεία μιας ημιευθείας και μόνο αυτά.



Ορισμός: *Διχοτόμος* μια γωνίας $\chi\hat{O}\psi$ ονομάζεται η ημιευθεία Οδ που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας και η οποία είναι τέτοια ώστε $\chi\hat{O}\delta = \delta\hat{O}\psi$.

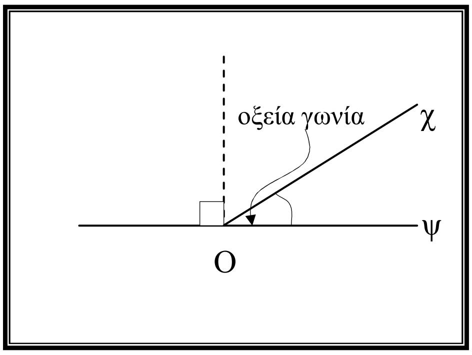
ΚΑΘΕ ΓΩΝΙΑ ΕΧΕΙ ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΔΙΧΟΤΟΜΟ!



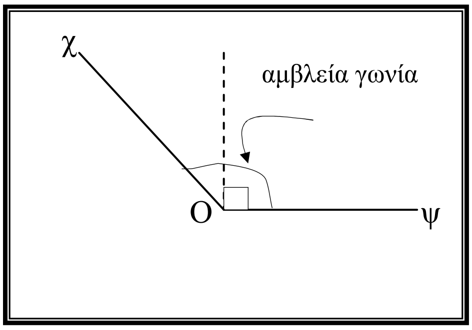
Ορθή ονομάζεται η γωνία η οποία είναι ίση με το μισό μιας ευθείας γωνίας.

(συμβολίζουμε: $\chi\hat{O}\psi = 1^L$)

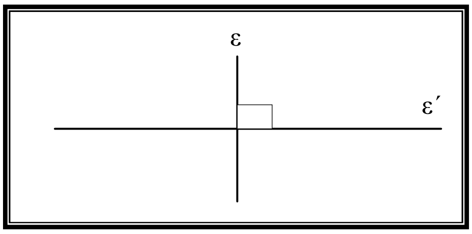
Οξεία ονομάζεται η γωνία που είναι μικρότερη από την ορθή γωνία.
(συμβολίζουμε: $\chi\hat{\mathrm{O}}\psi < 1^{L}$)



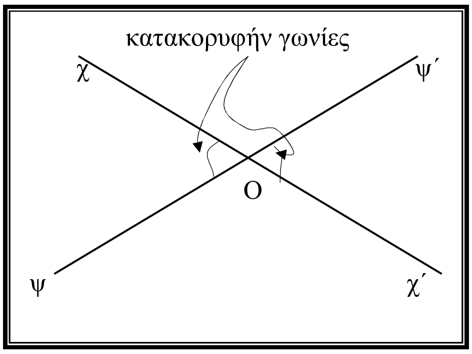
Αμβλεία ονομάζεται η γωνία που είναι μεγαλύτερη από την ορθή γωνία.
(συμβολίζουμε: $\chi\hat{\mathrm{O}}\psi > 1^{L}$)



Δύο τεμνόμενες ευθείες ε και ε΄ ονομάζονται **κάθετες**, όταν σχηματίζουν ορθή γωνία.
Αν ε και ε΄ ευθείες κάθετες, τότε γράφουμε (συμβολίζουμε) $\varepsilon \perp \varepsilon'$.

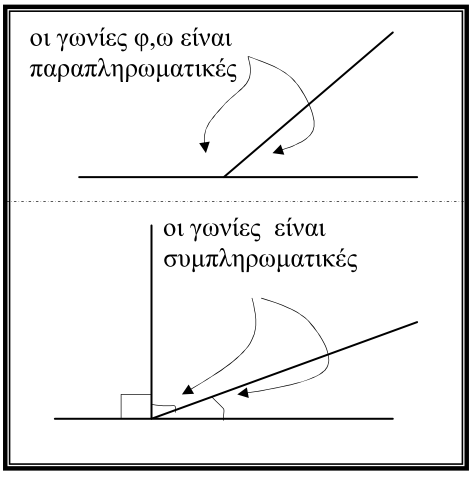


Δύο γωνίες ονομάζονται **κατακορυφήν**, όταν έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές της μίας είναι προεκτάσεις των πλευρών της άλλης. Στο διπλανό σχήμα, αν χχ΄ και ψψ΄ δύο τεμνόμενες ευθείες, τότε οι γωνίες $\chi\hat{\mathrm{O}}\psi, \chi'\hat{\mathrm{O}}\psi'$ είναι κατακορυφήν. Το ίδιο συμβαίνει και για τις γωνίες $\chi\hat{\mathrm{O}}\psi', \chi'\hat{\mathrm{O}}\psi$.

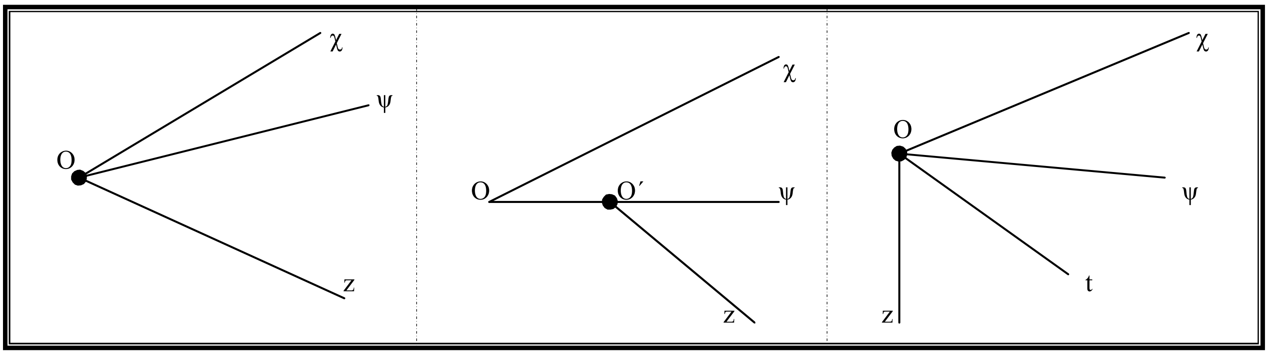


Δύο γωνίες λέγονται **παραπληρωματικές** όταν έχουν άθροισμα μια ευθεία γωνία.
(αν δύο γωνίες είναι παραπληρωματικές τότε λέμε πως η μία είναι παραπλήρωμα της άλλης)

Δύο γωνίες λέγονται **συμπληρωματικές** όταν έχουν άθροισμα ίσο με μια ορθή γωνία.
(αν δύο γωνίες είναι συμπληρωματικές, τότε λέμε πως η μία είναι συμπλήρωμα της άλλης)



Δύο γωνίες λέγονται **εφεξής** ή **διαδοχικές**, όταν
1. έχουν μια κοινή πλευρά,
2. έχουν κοινή κορυφή και
3. δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία.



$\chi \hat{O} \psi, \psi \hat{O} z$ εφεξής γωνίες

$\chi \hat{O} \psi, \psi \hat{O}' z$ **όχι** εφεξής γωνίες

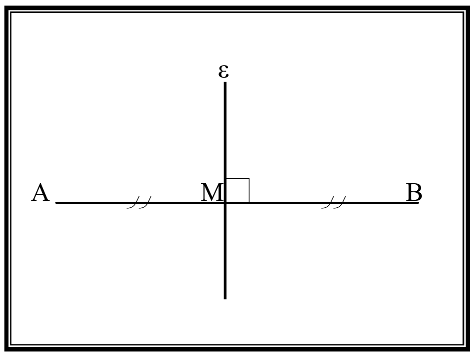
$\chi \hat{O} \psi, t \hat{O} z$ **όχι** εφεξής γωνίες

$\chi \hat{O} t, \psi \hat{O} z$ **όχι** εφεξής γωνίες

- **Δύο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.**
- **Οι διχοτόμοι δύο κατακορυφήν γωνιών είναι αντικείμενες ημιευθείες.**
- **Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες ημιευθείες.**

Μεσοκάθετη ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ονομάζεται η ευθεία ε που είναι κάθετη στο ΑΒ και διέρχεται από το μέσο του Μ.

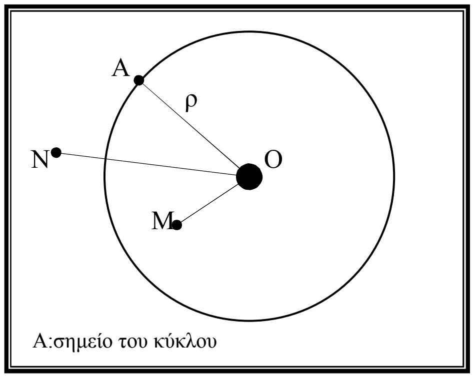
Αν η ευθεία ε είναι μεσοκάθετη του ΑΒ, τότε τα σημεία Α,Β ονομάζονται **συμμετρικά** ως προς την ε.



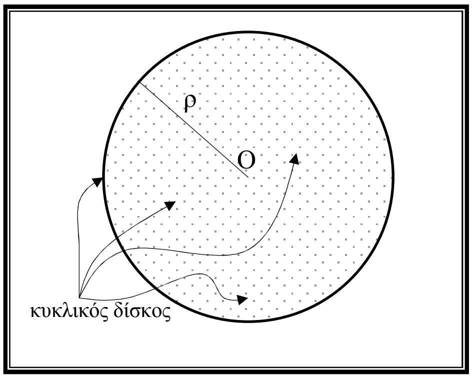
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΥΚΛΟΥ

Κύκλος με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα το ευθύγραμμο τμήμα που έχει μήκος ρ λέγεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου που απέχουν από το Ο απόσταση ρ.

Ο κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ συμβολίζεται με (Ο,ρ). Κάθε σημείο Μ για το οποίο είναι (ΟΜ)<ρ λέγεται **εσωτερικό** σημείο του κύκλου (Ο,ρ), ενώ κάθε σημείο Ν για το οποίο είναι (ΟΝ)>ρ λέγεται **εξωτερικό** σημείο του κύκλου (Ο,ρ).



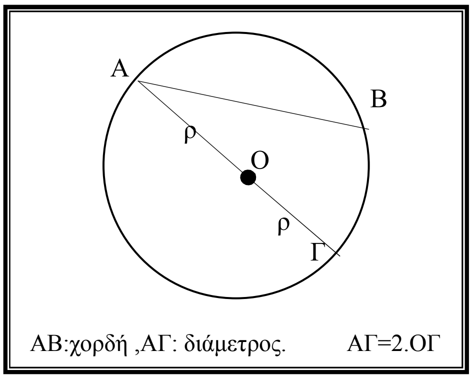
Κυκλικός δίσκος ονομάζεται το σχήμα που αποτελείται από τα σημεία ενός κύκλου (Ο,ρ) και από το σύνολο των εσωτερικών σημείων του.



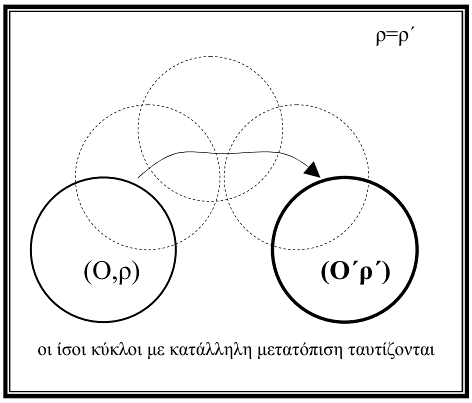
Χορδή ενός κύκλου (Ο,ρ) λέγεται κάθε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που τα άκρα του είναι σημεία του κύκλου.

Διάμετρος ενός κύκλου (Ο,ρ) λέγεται κάθε χορδή του κύκλου που διέρχεται από το κέντρο του.(Αν ΑΓ διάμετρος τότε τα σημεία Α και Γ ονομάζονται **αντιδιαμετρικά**).

Η σχέση που συνδέει μια διάμετρο και την ακτίνα ενός κύκλου είναι: (διάμετρος)=2(ακτίνα).



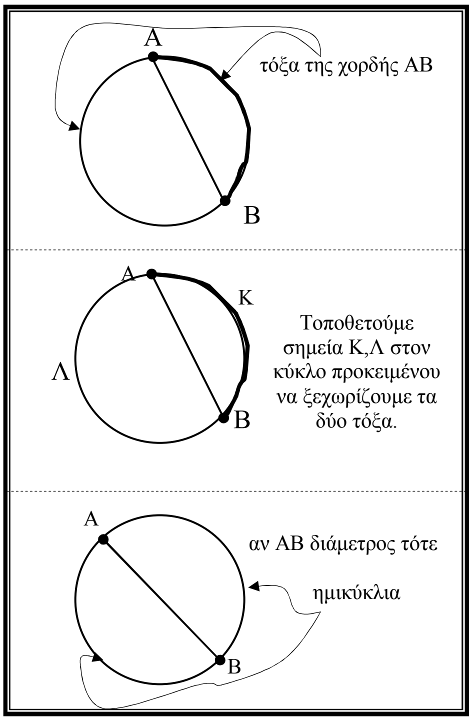
Δύο κύκλοι (Ο,ρ) και (Ο΄,ρ΄) λέγονται **ίσοι** όταν έχουν ίσες ακτίνες, δηλαδή (Ο,ρ)=(Ο΄ρ΄) ⇔ρ=ρ΄.
(ίσοι κύκλοι με την έννοια ότι με κατάλληλη μετατόπιση του ενός κύκλου μπορεί να ταυτιστεί με τον άλλον).



Τόξο ενός κύκλου ονομάζεται το καθένα από τα δύο μέρη στα οποία χωρίζεται ο κύκλος από μια χορδή του.

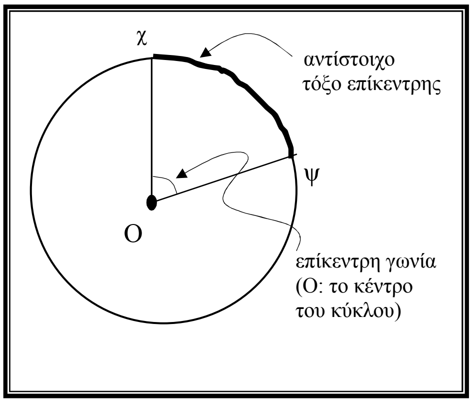
Το τόξο με άκρα τα σημεία Α και Β συμβολίζεται με $\overset{\frown}{AB}$. Για να μπορέσουμε κα περιγράψουμε ποιο από τα δύο τόξα εννοούμε με την γραφή $\overset{\frown}{AB}$, συμβολίζουμε $\overset{\frown}{AKB}$ το ένα από τα δύο τόξα και με $\overset{\frown}{A\Lambda B}$ με το άλλο τόξο, όπου Κ,Λ σημεία του κύκλου.

Αν η χορδή ΑΒ είναι διάμετρος τότε τα δύο τόξα στα οποία χωρίζεται ο κύκλος ονομάζονται **ημικύκλια**.



Επίκεντρη γωνία ονομάζεται κάθε γωνία της οποίας η κορυφή είναι το κέντρο ενός κύκλου.

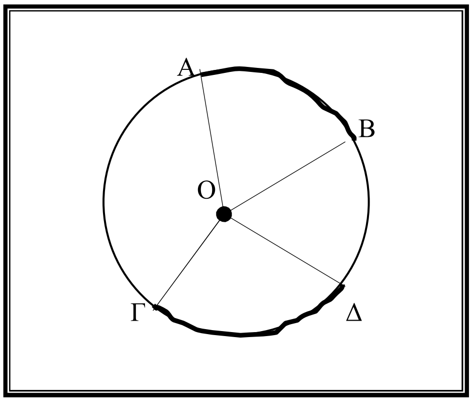
Έτσι η γωνία $\chi\hat{O}\psi$ του σχήματος είναι επίκεντρη και λέμε ότι η επίκεντρη γωνία *βαίνει* στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ ή ότι το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ είναι *αντίστοιχο* της επίκεντρης γωνίας $\chi\hat{O}\psi$.



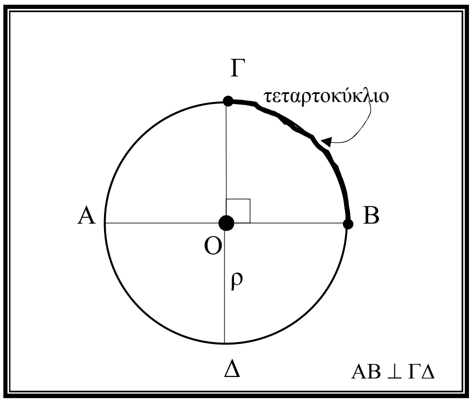
<u>Πρόταση:</u> Σε ένα κύκλο ή σε ίσους κύκλους, ίσες επίκεντρες γωνίες βαίνουν σε ίσα τόξα και αντίστροφα.

Δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία:

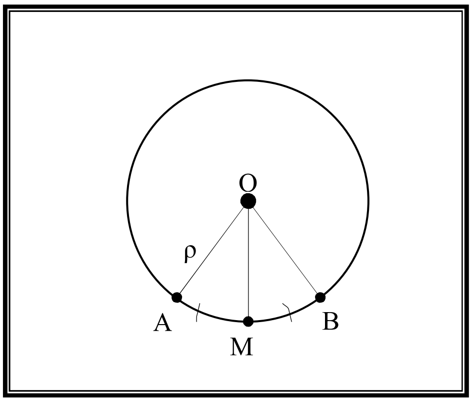
$A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.



<u>Πόρισμα 1:</u> Δύο κάθετοι διάμετροι ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου χωρίζουν τον κύκλο (Ο,ρ) σε τέσσερα ίσα τόξα (που το καθένα ονομάζεται **τεταρτοκύκλιο**).



<u>Πόρισμα 2:</u> Κάθε τόξο ενός κύκλου έχει *μοναδικό* μέσο. Δηλαδή αν $\overset{\frown}{AB}$ ένα τόξο κύκλου (Ο,ρ) τότε υπάρχει μοναδικό σημείο Μ του κύκλου τέτοιο, ώστε $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$.



ΠΡΟΣΟΧΗ:

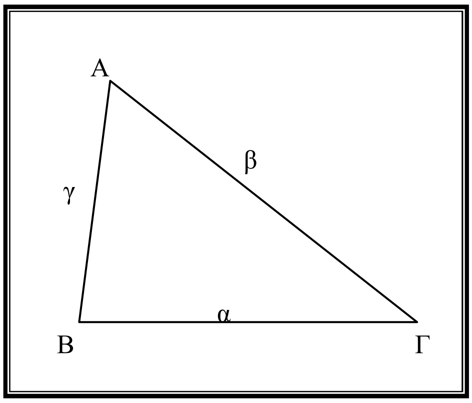
(α) Η σύγκριση και οι πράξεις τόξων ανάγονται στη σύγκριση και τις πράξεις των αντίστοιχων επίκεντρων γωνιών τους.

(β) Τα τόξα άνισων κύκλων **δεν** είναι συγκρίσιμα!

(γ) **Μέτρο** μια γωνίας είναι το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της όταν αυτή καταστεί επίκεντρη.

ΤΡΙΓΩΝΑ...

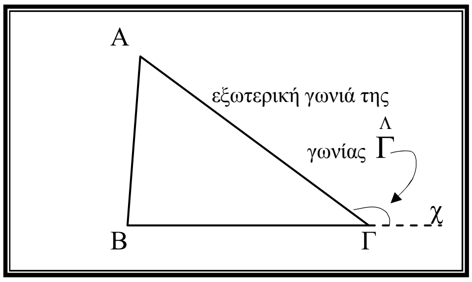
Έστω Α,Β και Γ τρία διαφορετικά μη συνευθειακά σημεία. Το σχήμα που αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ,ΒΓ και ΓΑ λέγεται **τρίγωνο** ΑΒΓ (συμβολίζουμε $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$).



Τα σημεία Α,Β,Γ λέγονται **κορυφές** του τριγώνου, τα τμήματα ΑΒ,ΑΓ και ΒΓ λέγονται **πλευρές** το τριγώνου και οι γωνίες $\Gamma\hat{A}B, A\hat{B}\Gamma, B\hat{\Gamma}A$ λέγονται **γωνίες** του τριγώνου.

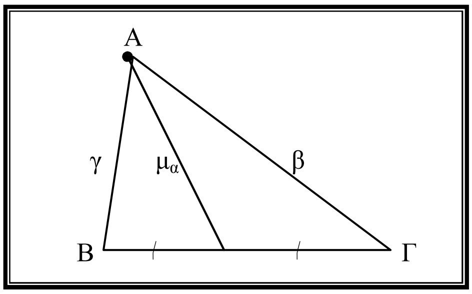
Οι πλευρές ΒΓ,ΓΑ και ΑΒ συμβολίζονται με α,β,γ αντίστοιχα και οι γωνίες $\Gamma\hat{A}B, A\hat{B}\Gamma, B\hat{\Gamma}A$ συμβολίζονται με $\hat{A},\hat{B},\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

Οι *πλευρές* και οι *γωνίες* ενός τριγώνου λέγονται **κύρια** στοιχεία του τριγώνου.



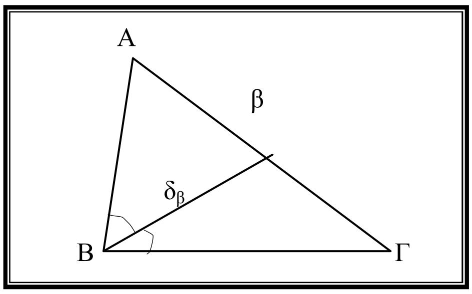
Κάθε γωνία που είναι εφεξής και παραπληρωματική μιας γωνίας του τριγώνου λέγεται **εξωτερική** γωνία του τριγώνου.

Για παράδειγμα η γωνία $A\hat{\Gamma}\chi$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ και την συμβολίζουμε $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$.



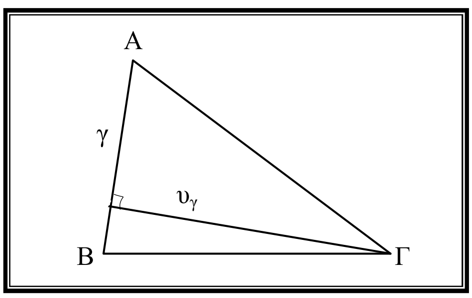
Διάμεσος ενός τριγώνου λέγεται το τμήμα με άκρα μια κορυφή του τριγώνου και το μέσο της απέναντι πλευράς του.

Οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις πλευρές α,β,γ συμβολίζονται με μ_α , μ_β , μ_γ αντίστοιχα.



Εσωτερική διχοτόμος ή απλά **διχοτόμος** μιας γωνίας ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά

Οι διχοτόμοι που αντιστοιχούν στις πλευρές α,β,γ συμβολίζονται με δ_α , δ_β , δ_γ αντίστοιχα.



Ύψος ενός τριγώνου λέγεται το κάθετο τμήμα από μια κορυφή του τριγώνου προς την ευθεία της απέναντι πλευράς του.

Τα ύψη που αντιστοιχούν στις πλευρές α,β,γ συμβολίζονται με υ_α , υ_β , υ_γ αντίστοιχα

Ισοσκελές ονομάζεται το τρίγωνο το οποίο έχει δύο πλευρές ίσες
Ισόπλευρο ονομάζεται το τρίγωνο το οποίο έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
Σκαληνό ονομάζεται το τρίγωνο το οποίο έχει τις πλευρές του άνισες ανά δύο.

διάκριση τριγώνων ως προς τις πλευρές του.

Ορθογώνιο ονομάζεται το τρίγωνο το οποίο έχει μία ορθή γωνία.
Αμβλυγώνιο ονομάζεται το τρίγωνο το οποίο έχει μία αμβλεία γωνία.
Οξυγώνιο ονομάζεται το τρίγωνο το οποίο έχει όλες του τις γωνίες οξείες.

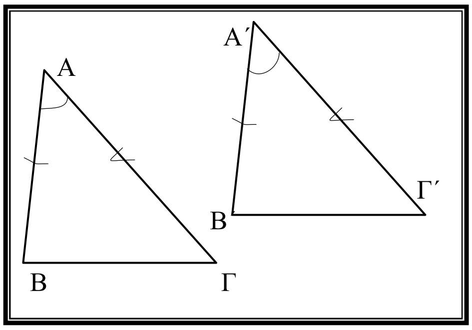
διάκριση τριγώνων ως προς τις γωνίες του.

Ισοτητα Τριγωνων Και Αποτελεσματα

Δύο τρίγωνα λέγονται **ίσα** όταν με κατάλληλη μετατόπιση μπορούν να ταυτιστούν, δηλαδή όταν έχουν τις πλευρές τους ίσες μια προς μια και τις απέναντι των ίσων πλευρών γωνίες όσες.

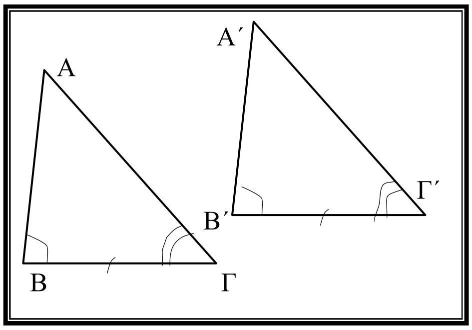
Οι παρακάτω προτάσεις μας επιτρέπουν να διαπιστώσουμε την ισότητα δύο τριγώνων *δίχως* την μετατόπιση αυτών! (για παράδειγμα με διαφανές χαρτί).

Οι προτάσεις αυτές λέγονται κριτήρια ισότητας τριγώνων:



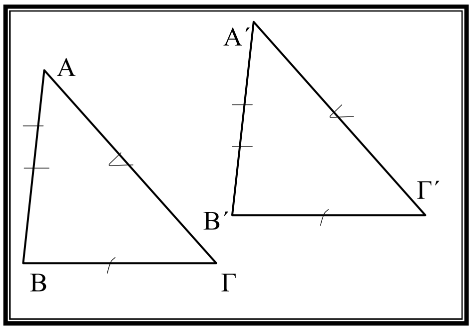
1ο κριτήριο: Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

Δηλαδή αν ΑΒ=Α΄Β΄, ΑΓ=Α΄Γ΄ και $\hat{A}=\hat{A}'$ τότε $\overset{\Delta}{AB\Gamma}=\overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$.



2ο κριτήριο: Αν μια πλευρά ενός τριγώνου είναι ίση με μια πλευρά ενός άλλου τριγώνου και οι προσκείμενες γωνίες των πλευρών αυτών είναι ίσες μια προς μια, τότε είναι ίσα.

Δηλαδή αν ΒΓ=Β΄Γ΄, $\hat{B}=\hat{B}'$ και $\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'$ τότε $\overset{\Delta}{AB\Gamma}=\overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$.



3ο κριτήριο: Αν οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μια προς μια με τις πλευρές ενός άλλου τριγώνου, τότε είναι ίσα.

Δηλαδή αν ΑΒ=Α΄Β΄, ΑΓ=Α΄Γ΄ και ΒΓ=Β΄Γ΄ τότε $\overset{\Delta}{AB\Gamma}=\overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$.

Στην ειδική περίπτωση που έχουμε ορθογώνια τρίγωνα, έχουμε τα εξής

κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων:

1ο κριτήριο: Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους μια προς μια ίσες τότε είναι ίσα.

2ο κριτήριο: Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια κάθετη πλευρά ίση και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίση μια προς μια, τότε είναι ίσα.

3ο κριτήριο: Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μια προς μια, τότε είναι ίσα.

4ο κριτήριο: Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μια προς μια, τότε είναι ίσα.

Συνέπειες...

1. Οι παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

2. Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.

3. Η διχοτόμος που αντιστοιχεί στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ύψος και διάμεσος.

4. Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ύψος και διχοτόμος.

5. Το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι διάμεσος και διχοτόμος.

6. Η κάθετος από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διέρχεται από το μέσο της χορδής και από το μέσο του αντίστοιχου τόξου της.

7. Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος και αντίστροφα: κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.

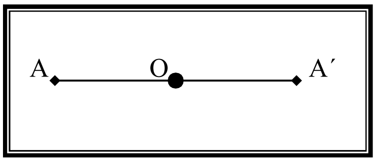
8. Σε ένα κύκλο (ή σε ίσους κύκλους) ισχύει:
   δύο χορδές είναι ίσες $\Leftrightarrow$
   τα αντίστοιχα τόξα είναι ίσα $\Leftrightarrow$
   οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες είναι ίσες$\Leftrightarrow$
   τα αντίστοιχα αποστήματά τους είναι ίσα.

9. Κάθε σημείο της διχοτόμου μια γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα: κάθε σημείο στο εσωτερικό μιας γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές της ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

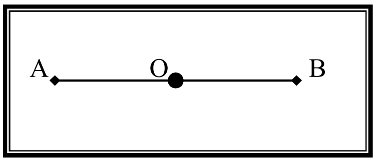
κεντρική συμμετρία

Ορισμός 1: Δύο σημεία Α και Α΄ ονομάζονται συμμετρικά ως προς *κέντρο* συμμετρίας το σημείο Ο, όταν το Ο είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΑ΄.

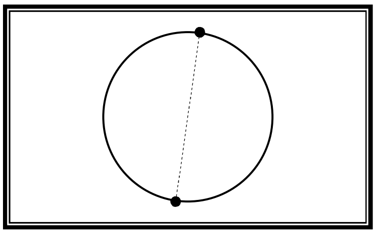


Ορισμός 2: Ένα γεωμετρικό σχήμα του επιπέδου ονομάζεται συμμετρικό ως προς ένα σημείο Ο, όταν για κάθε σημείο Α του σχήματος, το συμμετρικό του Α΄ ως προς το Ο είναι σημείο του σχήματος (τότε το Ο ονομάζεται *κέντρο συμμετρίας* του σχήματος).

Παραδείγματα:



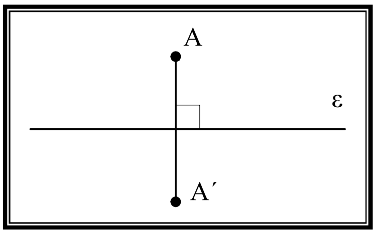
1. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει κέντρο συμμετρίας το μέσο του.
2. Ο κύκλος (Ο,ρ) έχει κέντρο συμμετρίας το κέντρο του Ο



3. Το τρίγωνο δεν έχει κέντρο συμμετρίας.

αξονική συμμετρία

Ορισμός 3: Δύο σημεία Α και Α΄ ονομάζονται συμμετρικά ως προς *άξονα* συμμετρίας την ευθεία ε, όταν η ευθεία ε είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΑ΄.

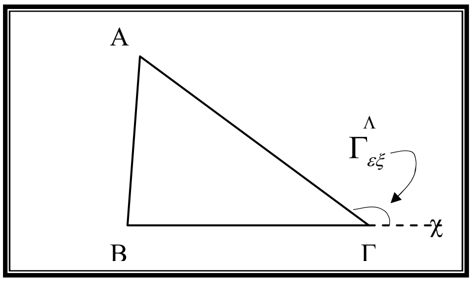


Ορισμός 4: Ένα γεωμετρικό σχήμα του επιπέδου ονομάζεται συμμετρικό ως προς μια ευθεία ε, όταν για κάθε σημείο Α του σχήματος, το συμμετρικό του Α΄ ως προς την ευθεία ε είναι σημείο του σχήματος (τότε η ευθεία ε ονομάζεται *άξονας συμμετρίας* του σχήματος).

Παραδείγματα:

1. Η γωνία έχει άξονα συμμετρίας τον φορέα της διχοτόμου της.
2. ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει ως άξονες συμμετρίας την μεσοκάθετή του και το φορέα του.
3. Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει άξονα συμμετρίας τον φορέα του ύψους που αντιστοιχεί στη βάση του.
4. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει άξονες συμμετρίας τους φορείς των υψών του.
5. Ένας κύκλος έχει άξονα συμμετρίας τον φορές οποιασδήποτε διαμέτρου του.

ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ



Πρόταση: Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη καθεμιάς από τις απέναντι εσωτερικές του γωνίες.

Δηλαδή ισχύει: $A\hat{\Gamma}\chi > \hat{A}$ και $A\hat{\Gamma}\chi > \hat{B}$.

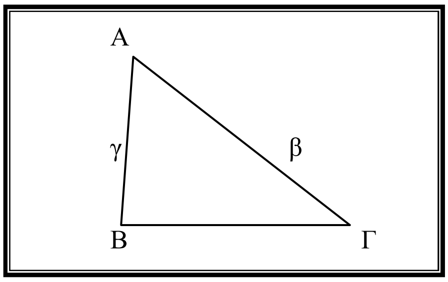
Πόρισμα: Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια ορθή ή μια αμβλεία γωνία.

[πράγματι: έστω ότι ένα τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ έχει δύο ορθές γωνίες $\hat{A}, \hat{B}$. Τότε από την προηγούμενη πρόταση θα έχουμε ότι: $\hat{A}_{\varepsilon\xi} > \hat{B}$ δηλαδή $\hat{A}_{\varepsilon\xi} > 90^o$. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι $\hat{A} + \hat{A}_{\varepsilon\xi} = 180^o$ άρα $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = 90^o$.

Έστω τώρα ότι ένα τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ έχει δύο αμβλείες γωνίες $\hat{A}, \hat{B}$. Αφού η γωνία $\hat{A}$ είναι αμβλεία έπεται ότι η γωνία $\hat{A}_{\varepsilon\xi}$ είναι οξεία γωνία. Από την προηγούμενη πρόταση ισχύει ότι: $\hat{A}_{\varepsilon\xi} > \hat{B}$. Φτάσαμε λοιπόν σε σχέση της μορφής: (οξεία γωνία > αμβλεία γωνία), άτοπο!]

Πρόταση: Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από 180^o.

[πράγματι: ισχύει ότι $\hat{A}_{\varepsilon\xi} > \hat{B}$ καθώς και η σχέση $\hat{A} + \hat{A}_{\varepsilon\xi} = 180^o$,άρα $\hat{A} + \hat{B} < 180^o$]



Πρόταση: Σε ένα τρίγωνο απέναντι από την μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά και αντίστροφα.

Δηλαδή σε τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ισχύει: β>γ ⇔ $\hat{B} > \hat{\Gamma}$.

Συνέπειες...

- Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από αυτές τις γωνίες είναι ίσες.

- Η μεγαλύτερη πλευρά ορθογωνίου (αντίστοιχα αμβλυγώνιου) τριγώνου είναι αυτή που βρίσκεται απέναντι από την ορθή (αντίστοιχα. αμβλεία) γωνία.

Μια από τις σπουδαιότερες ανισοτικές σχέσεις σε ένα τρίγωνο είναι η λεγόμενη **τριγωνική ανισότητα:**

«Κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους».

Δηλαδή σε κάθε τρίγωνο με πλευρές α,β,γ ισχύει: $|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma$

Παρατήρηση!

Τρεις θετικοί αριθμοί α,β,γ αποτελούν πλευρές τριγώνου

$$\Leftrightarrow$$

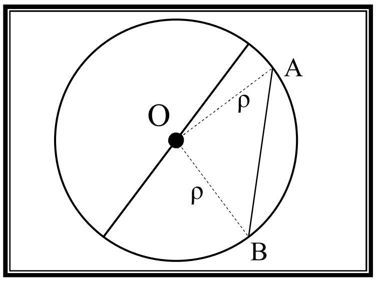
$$|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma$$

$$\Leftrightarrow$$

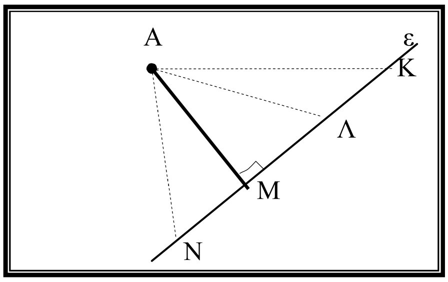
$$\alpha<\beta+\gamma \text{ και } \beta<\alpha+\gamma \text{ και } \gamma<\alpha+\beta$$

<u>Πόρισμα:</u> Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.

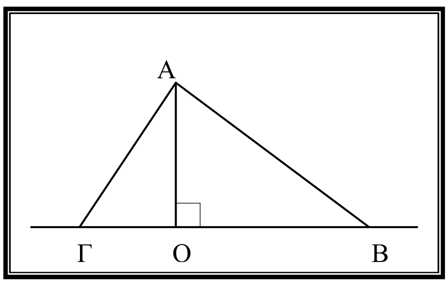
[<u>πράγματι</u>: αν ΑΒ χορδή κύκλου (Ο,ρ) τότε από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $O\hat{A}B$ παίρνουμε: ΑΒ<ρ+ρ=2ρ=διάμετρος. Η ισότητα ισχύει όταν ΑΒ είναι διάμετρος].



<u>Πρόταση:</u> Αν ευθεία ε και σημείο Α εκτός αυτής, τότε το κάθετο τμήμα από το Α προς την ε είναι μικρότερο από κάθε άλλο πλάγιο τμήμα προς την ε που περνά από το σημείο Α.
(δηλαδή η απόσταση του Α από την ε είναι μικρότερη από την απόσταση του Α από τυχόν σημείο της ευθείας).
Έτσι στο διπλανό σχήμα τα έχουμε: ΑΜ<ΑΝ , ΑΜ<ΑΛ , ΑΜ<ΑΚ



<u>Πρόταση:</u> Τα ίχνη δύο άνισων πλάγιων ευθύγραμμων τμημάτων απέχουν ομοίως άνισα από το ίχνος της κάθετης και αντίστροφα.
Έτσι στο διπλανό σχήμα τα έχουμε: ΑΒ>ΑΓ$\Leftrightarrow$ ΟΒ>ΟΓ.

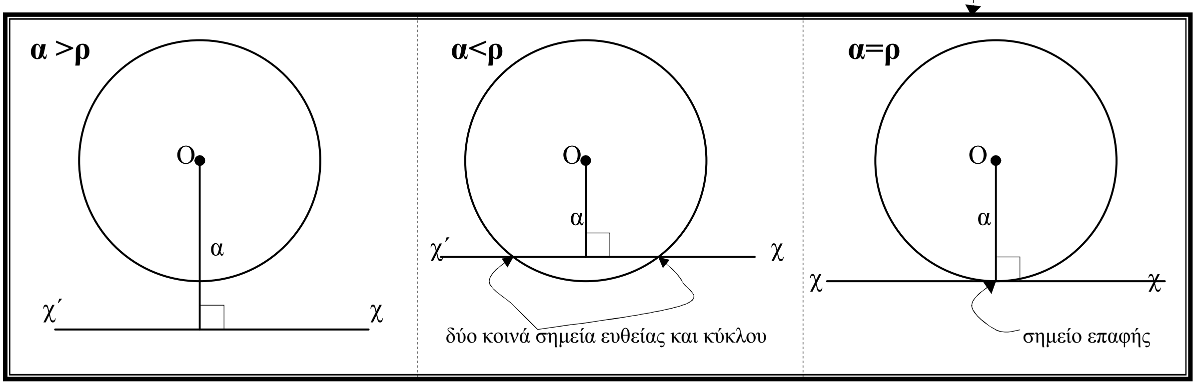


ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ

<u>Πρόταση 1:</u> Αν α η απόσταση του κέντρου Ο ενός κύκλου (Ο,ρ) από μία ευθεία χ΄χ, τότε:

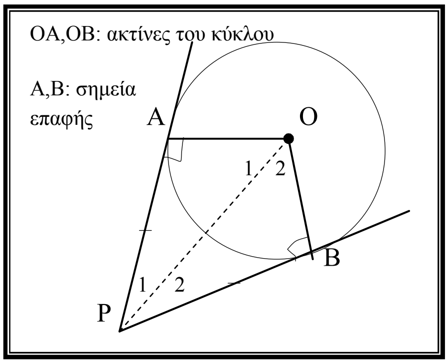
- Η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία ⇔ α>ρ
- Η ευθεία και ο κύκλος έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία ⇔ α<ρ
- Η ευθεία και ο κύκλος έχουν ένα μόνο κοινό σημείο ⇔ α=ρ.

  {σε αυτήν την περίπτωση η ευθεία χ΄χ λέγεται **εφαπτομένη** του κύκλου (Ο,ρ) και όταν υπάρχει είναι μοναδική. Το κοινό σημείο Α ευθείας και κύκλου λέγεται **σημείο επαφής**. *Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη*}.



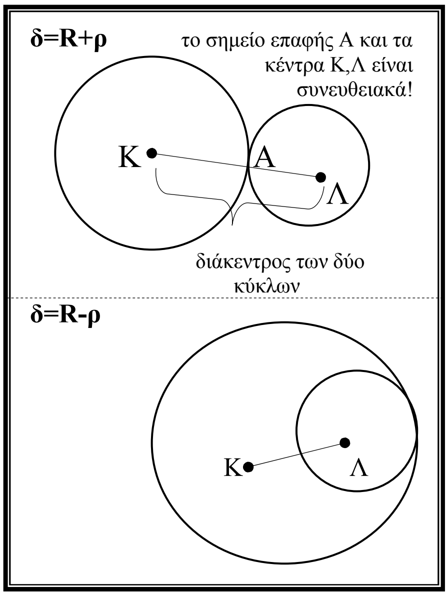
<u>Πρόταση 2:</u> (α) Από σημείο εκτός κύκλου μπορούμε να φέρουμε *ακριβώς δύο* εφαπτόμενες προς τον κύκλο.

(β) Τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ προς κύκλο από σημείο Ρ εκτός αυτού είναι ίσα και η ευθεία ΡΟ διχοτομεί τις γωνίες $\hat{APB}$ και $\hat{AOB}$. Δηλαδή ισχύει: ΡΑ=ΡΒ, $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ και $\hat{P}_1 = \hat{P}_2$.



ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

Ορισμός: Διάκεντρος δύο κύκλων (Κ,R) και (Λ,ρ) ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ με άκρα τα κέντρα των κύκλων. Συμβολίζεται με δ, δηλαδή δ= διάκεντρος=ΚΛ.

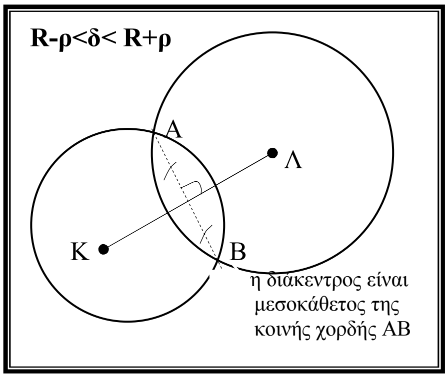


Πρόταση 1: Αν για δύο κύκλους (Κ,R) και (Λ,ρ) με R>ρ ισχύει δ=R+ρ ή δ=R-ρ τότε *οι κύκλοι έχουν μοναδικό κοινό σημείο*, και αντίστροφα.

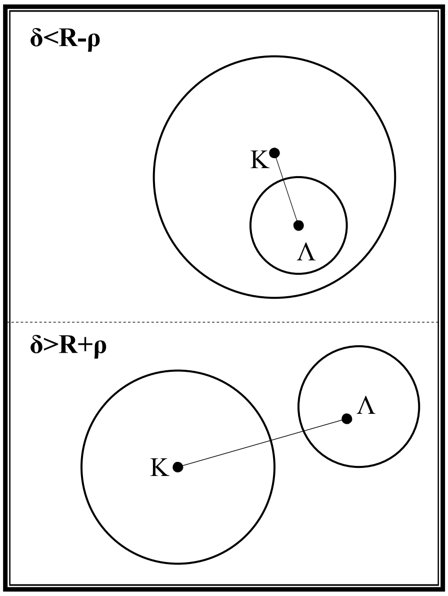
Στην περίπτωση αυτή οι κύκλοι λέγονται εφαπτόμενοι.

Αν ο ένας κύκλος βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου, τότε λέμε ότι οι κύκλοι **εφάπτονται εξωτερικά** και ισχύει δ=R+ρ.

Αν ο ένας κύκλος βρίσκεται στο εσωτερικό του άλλου, τότε λέμε ότι οι κύκλοι **εφάπτονται εσωτερικά** και ισχύει δ=R-ρ.



Πρόταση 2: Αν για δύο κύκλους (Κ,R) και (Λ,ρ) με R>ρ ισχύει R-ρ<δ< R+ρ, τότε *οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία* συμμετρικά ως προς την διάκεντρο, και αντίστροφα.



Πρόταση 3: Αν για δύο κύκλους (Κ,R) και (Λ,ρ) με R>ρ ισχύει R+ρ<δ ή δ< R-ρ τότε *οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία*, και αντίστροφα.

Ο ένας κύκλος βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου⇔ δ>R+ρ.

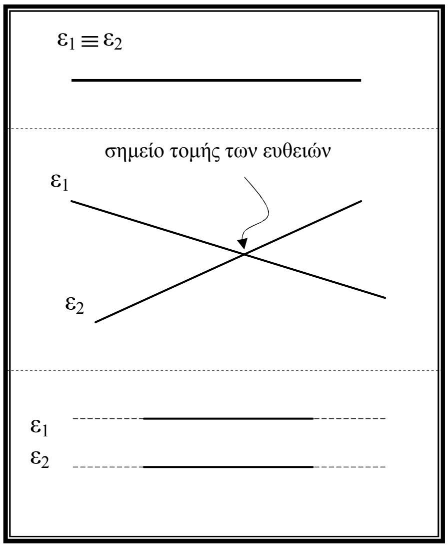
Αν ο ένας κύκλος βρίσκεται στο εσωτερικό του άλλου ⇔δ<R-ρ.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

Τρεις είναι οι δυνατές θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο:

- ή να ταυτίζονται
  (το οποίο συμβαίνει όταν έχουν *δύο* κοινά σημεία)
- ή να τέμνονται
  (το οποίο συμβαίνει όταν έχουν *ένα* κοινό σημείο)
- ή να μην τέμνονται
  (το οποίο συμβαίνει όταν *δεν* έχουν κοινό σημείο)

Δύο ευθείες ε_1 , ε_2 του ίδιου επιπέδου που δεν τέμνονται ονομάζονται **παράλληλες** και συμβολίζουμε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.



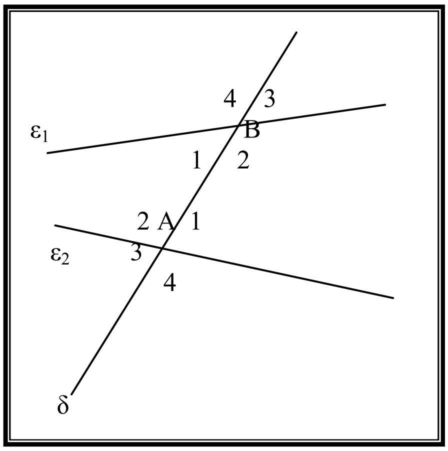
Έστω δύο ευθείες ε_1 , ε_2 και μια ευθεία δ τέμνουσα αυτών. Για να ονομάσουμε ένα ζευγάρι γωνιών που αποτελείται από μια γωνία με κορυφή το Α και από μια γωνία με κορυφή το Β, χρησιμοποιούμε τους εξής όρους:

(α) **«εντός»**, αν και οι δύο γωνίες περιέχονται μεταξύ των ευθειών ε_1 , ε_2

(β) **«εκτός»**, αν και οι δύο γωνίες δεν περιέχονται μεταξύ των ευθειών ε_1 , ε_2

(γ) **«επί τα αυτά»**, αν και οι δύο γωνίες βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας δ

(δ) **«εναλλάξ»**, αν και οι δύο γωνίες βρίσκονται εκατέρωθεν της δ.



Για παράδειγμα, για το ζευγάρι των $\hat{A}_1, \hat{B}_1$ χρησιμοποιούμε την ονομασία «εντός εναλλάξ», για το ζευγάρι των $\hat{A}_1, \hat{B}_3$ χρησιμοποιούμε την ονομασία «εντός, εκτός και επί τα αυτά», ενώ για το ζευγάρι των $\hat{A}_1, \hat{B}_4$ χρησιμοποιούμε την ονομασία «εντός, εκτός εναλλάξ» κ.λ.π.

Η παρακάτω πρόταση δίνει ένα <u>κριτήριο παραλληλίας δύο ευθειών</u>.

<u>Πρόταση:</u> (α) Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από μια τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

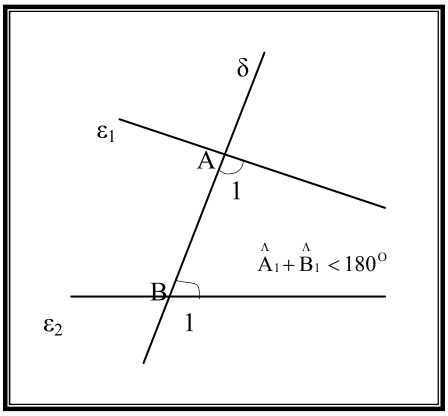
(β) Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από μια τρίτη σχηματίζουν δύο εντός, εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

(γ) Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από μια τρίτη σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.

Αξίωμα παραλληλίας [ή 5^o Αίτημα του Ευκλείδη]:

Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μοναδική παράλληλη προς αυτή.

Συνέπεια 1: (α)Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες προς μια τρίτη ευθεία, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες,
(β) Αν μια ευθεία τέμνει τη μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε θα τέμνει και την άλλη.

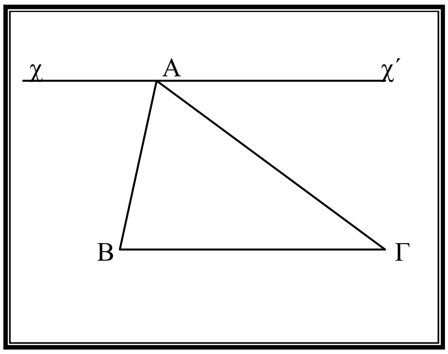


Συνέπεια 2: Αν δύο ευθείες τέμνονται από μια τρίτη και σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 180^o, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες αυτές.

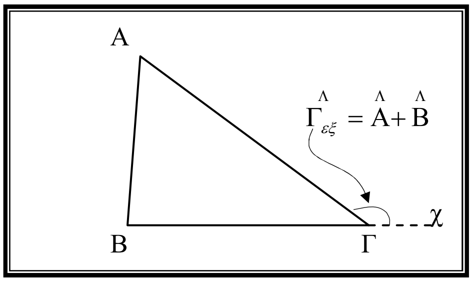
Δηλαδή αν $\hat{A}_1+\hat{B}_1<180^O$ τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται προς το μέρος των γωνιών $\hat{A}_1$ και $\hat{B}_1$.

Συνέπεια 3: Αν δύο γωνίες έχουν παράλληλες τις πλευρές τους τότε:
(α) αν είναι και οι δύο οξείες ή και οι δύο αμβλείες, τότε είναι ίσες,
(β) αν η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία, τότε είναι παραπληρωματικές.

Συνέπεια 4: Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 180^o.



[πράγματι, από μια κορυφή του τριγώνου, π.χ. την Α, φέρνουμε ευθεία χχ΄//ΒΓ. Τότε οι γωνίες $\chi\hat{A}B$ και $\hat{B}$ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ γωνίες των παράλληλων ευθειών χχ΄, ΒΓ με τέμνουσα την ΑΒ. Παρόμοια οι γωνίες $\chi'\hat{A}\Gamma$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες. Οπότε: $\chi\hat{A}B+\hat{A}+\chi'\hat{A}\Gamma=$ ευθεία γωνία$=\hat{B}+\hat{A}+\hat{\Gamma}=\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}$].



Συνέπεια 5: Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

Συνέπεια 6: Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, τότε έχουν όλες τους τις γωνίες ίσες.

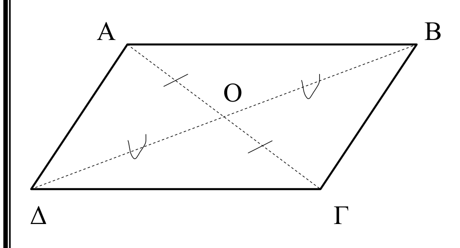
Συνέπεια 7: Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.

Συνέπεια 8: Κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι ίση με 60^o.

Συνέπεια 9: Δύο οξείες (ή δύο αμβλείες) γωνίες με πλευρές κάθετες είναι ίσες.

Συνέπεια 10: Δύο γωνίες με πλευρές κάθετες, αλλά η μια να είναι οξεία και η άλλη αμβλεία, είναι παραπληρωματικές.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ...



σχήμα 1

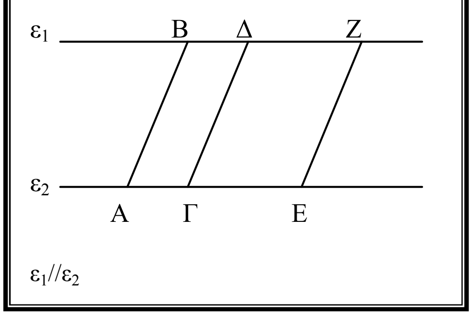
<u>Ορισμός:</u> *Παραλληλόγραμμο* ονομάζεται κάθε τετράπλευρο του οποίου οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.
Δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο ⇔ ΑΒ// ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ

<u>Ιδιότητες παραλληλογράμμου:</u>

Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν:

(α) οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες,
(β) οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες,
(γ) οι διαγώνιοί του διχοτομούνται
(δηλ. έχουν κοινό μέσο Ο).

Έτσι για το παραλληλόγραμμο του διπλανού σχήματος 1 ισχύει αντίστοιχα: ΑΒ=ΓΔ , ΑΔ=ΒΓ , $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, $\hat{B} = \hat{\Delta}$, ΑΟ=ΟΓ και ΔΟ=ΟΒ.



<u>Πόρισμα 1:</u> Παράλληλα τμήματα μεταξύ παραλλήλων είναι ίσα.

(στην περίπτωση που τα παράλληλα τμήματα μεταξύ των παραλλήλων είναι κάθετα στις ε_1 , ε_2 τότε το κοινό μήκος τους λέγεται *απόσταση* των παραλλήλων).

Δηλαδή αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και ΑΒ//ΓΔ//ΕΖ, τότε ΑΒ=ΓΔ=ΕΖ.

[<u>πράγματι</u>: το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο διότι έχει παράλληλες τις πλευρές του. Άρα ΑΒ=ΓΔ. Παρόμοια ισχύει ΓΔ=ΕΖ διότι το τετράπλευρο ΔΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο].

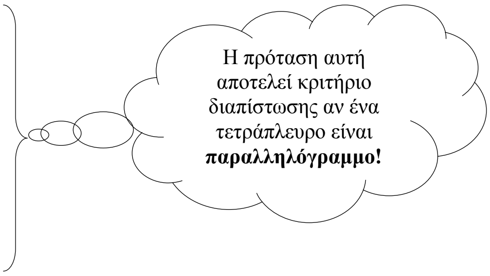
<u>Πόρισμα 2:</u> Το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας του.

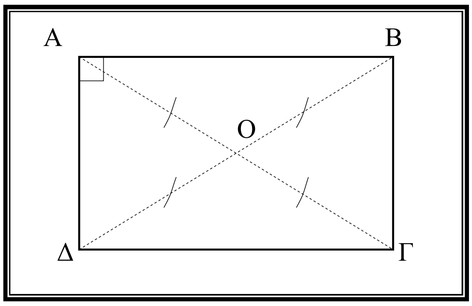
[<u>πράγματι</u>: Στο σχήμα 1 παραπάνω έχουμε ότι: (το Α είναι συμμετρικό του Γ ως προς το Ο) και (το Β είναι συμμετρικό του Δ ως προς το Ο). Άρα από την εφαρμογή σελ. 51 του σχολικού βιβλίου, το συμμετρικό του ΑΔ ως προς το Ο είναι το ΒΓ. Παρόμοια δείχνουμε ότι το συμμετρικό του ΑΒ ως προς το Ο είναι το ΓΔ].

<u>Πρόταση:</u> Αν ένα τετράπλευρο έχει *κάποια* από τις ιδιότητες:

- *οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες,*
- *δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες + παράλληλες,*
- *οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες,*
- *οι διαγώνιοί του διχοτομούνται,*

τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.





Ορισμός: Ένα τετράπλευρο ονομάζεται *ορθογώνιο* όταν είναι παραλληλόγραμμο και έχει μια ορθή γωνία.

Πρόταση: Οι διαγώνιες ενός ορθογωνίου είναι ίσες.

[πράγματι: τα τρίγωνα $A\overset{\Delta}{B}\Delta, A\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma$ και είναι ίσα, διότι έχουν $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^{o}$, ΑΔ-κοινή και ΑΒ=ΔΓ ,οπότε ΑΓ=ΒΔ].

Ιδιότητες ορθογωνίου:

Σε κάθε ορθογώνιο ισχύουν:

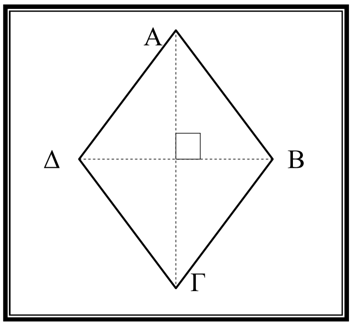
(α) οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες,
(β) κάθε γωνία του είναι ορθή,
(γ) οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και είναι ίσες (=> ΑΟ=ΟΓ=ΟΒ=ΟΔ).

Πρόταση: Αν ένα τετράπλευρο έχει *κάποια* από τις ιδιότητες:

- *είναι παραλληλόγραμμο+έχει μια ορθή γωνία,*
- *είναι παραλληλόγραμμο+και οι διαγώνιοί του είναι ίσες,*
- *έχει τρεις ορθές γωνίες,*
- *όλες του οι γωνίες είναι ίσες,*

τότε το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.

Η πρόταση αυτή αποτελεί κριτήριο διαπίστωσης αν ένα τετράπλευρο είναι **ορθογώνιο!**



Ορισμός: Ένα τετράπλευρο ονομάζεται *ρόμβος* όταν είναι παραλληλόγραμμο και έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

Ιδιότητες ρόμβου:

Σε κάθε ρόμβο ισχύουν:

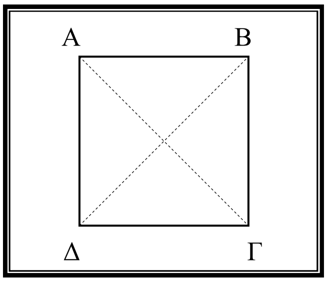
(α) όλες οι ιδιότητες του παραλληλογράμμου…
(β) όλες οι πλευρές του είναι ίσες,
(γ) οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.

Πρόταση: Αν ένα τετράπλευρο έχει *κάποια* από τις ιδιότητες:

- *όλες οι πλευρές του είναι ίσες,*
- *είναι παραλ/μμο+δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες,*
- *είναι παραλ/μμο+οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα,*
- *είναι παραλ/μμο+μια διαγώνιός του διχοτομεί μια γωνία του,*

τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος.

Η πρόταση αυτή αποτελεί κριτήριο διαπίστωσης αν ένα τετράπλευρο είναι **ρόμβος!**



Ορισμός: Ένα τετράπλευρο ονομάζεται *τετράγωνο* όταν είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

Κατά συνέπεια ένα τετράγωνο έχει ΌΛΕΣ τις ιδιότητες του ορθογωνίου και του ρόμβου!

Κάνοντας συνδυασμό των ιδιοτήτων του ορθογωνίου και του ρόμβου, προκύπτει άμεσα η παρακάτω:

Πρόταση: Αν ένα τετράπλευρο έχει *κάποια* από τις ιδιότητες:

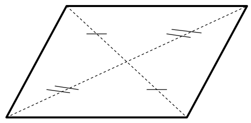
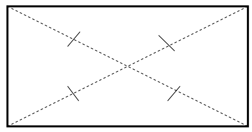
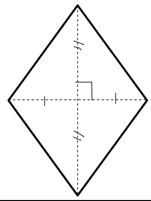
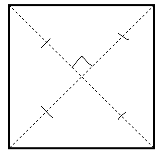
- *είναι παραλληλόγραμμο+έχει μια ορθή γωνία+δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες,*
- *είναι παραλληλόγραμμο+έχει μια ορθή γωνία +μια διαγώνιός του διχοτομεί μια γωνία του,*
- *είναι παραλληλόγραμμο+έχει μια ορθή γωνία + οι διαγώνιοί του είναι κάθετες,*
- *είναι παραλληλόγραμμο+ και έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες+οι διαγώνιοί του είναι επίσης ίσες,*
- *είναι παραλληλόγραμμο+ οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες,*
- *είναι παραλληλόγραμμο+ οι διαγώνιοί του είναι ίσες+ η μια διχοτομεί μια γωνία του,*
- *έχει τρεις ορθές γωνίες+ όλες οι πλευρές του είναι ίσες,*
- *έχει τρεις ορθές γωνίες+ δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες,*
- *έχει τρεις ορθές γωνίες+ οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα,*
- *έχει τρεις ορθές γωνίες+μια διαγώνιός του διχοτομεί μια γωνία του,*

Η πρόταση αυτή αποτελεί κριτήριο διαπίστωσης αν ένα τετράπλευρο είναι **τετράγωνο!**

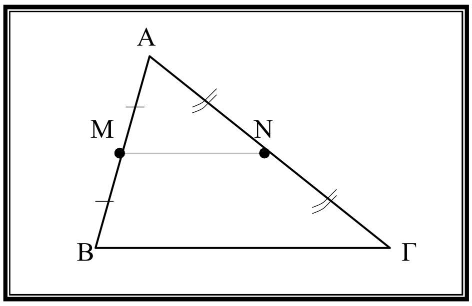
τότε το τετράπλευρο είναι τετράγωνο.

Συγκεντρωτικός πίνακας ιδιοτήτων παραλληλογράμμων και κριτηρίων για παραλληλόγραμμα

Επιμέλεια: Π. Τρύφων

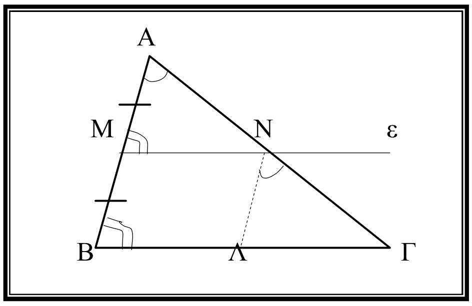
	Παραλληλόγραμμο	**Ορθογώνιο**	**Ρόμβος**	**Τετράγωνο**
Σχήμα				
Ορισμός	Είναι το τετράπλευρο του οποίου οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.	Είναι το παραλληλόγραμμο με μια ορθή γωνία.	Είναι το παραλληλόγραμμο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.	Είναι το τετράπλευρο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.
Ιδιότητες για Πλευρές	Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.	Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.	Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και όλες ίσες.	Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και όλες ίσες
Ιδιότητες για Γωνίες	Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες. Οι διαδοχικές του γωνίες είναι παραπληρωματικές.	Όλες οι γωνίες του είναι ορθές. Οι διαδοχικές του γωνίες είναι παραπληρωματικές.	Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες. Οι διαδοχικές του γωνίες είναι παραπληρωματικές.	Όλες οι γωνίες του είναι ορθές.
Ιδιότητες για Διαγώνιους	Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.	Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και είναι ίσες.	Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, διχοτομούν τις γωνίες του και τέμνονται κάθετα	Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, είναι ίσες, διχοτομούν τις γωνίες του και τέμνονται κάθετα.
Κριτήρια	1. Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες 2. Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες 3. Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες 4. Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες 5. Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.	Για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο πρέπει πρώτα να αποδείξουμε ότι είναι παραλληλόγραμμο και μετά ότι ισχύει ένα από τα: 1. Μια γωνία του είναι ορθή. 2. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες , ή χωρίς να αποδείξουμε ότι είναι παραλληλόγραμμο, αρκεί να αποδείξουμε ότι: 1. Έχει τρεις ορθές γωνίες. 2. Όλες οι γωνίες του είναι ίσες.	Για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος πρώτα αποδεικνύουμε ότι είναι παραλληλόγραμμο και μετά ότι ισχύει ένα από τα: 1. Δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες. 2. Οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα. 3. Μια διαγώνιός του διχοτομεί μια γωνία του, ή χωρίς να αποδείξουμε ότι είναι παραλληλόγραμμο, αρκεί να αποδείξουμε ότι έχεις όλες τις πλευρές του ίσες.	Για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο πρέπει να αποδείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ



1η εφαρμογή: Σε ένα τρίγωνο, το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

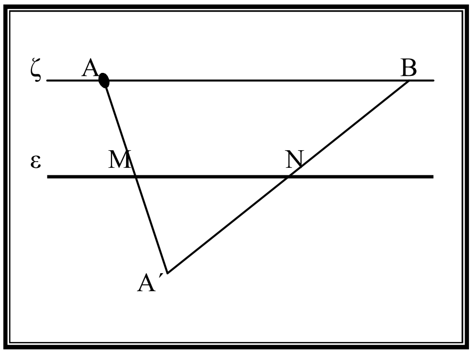
Δηλαδή αν Μ,Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα του τριγώνου $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Gamma$, τότε ΜΝ//ΒΓ και $\mathrm{MN} = \dfrac{\mathrm{B}\Gamma}{2}$.



2η εφαρμογή: Σε ένα τρίγωνο, αν από το μέσο μια πλευράς φέρουμε παράλληλη προς μια άλλη πλευρά, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του τριγώνου.

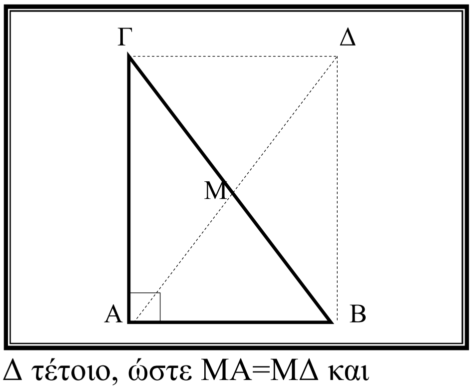
Δηλαδή αν ΑΜ=ΜΒ και ε//ΒΓ τότε ΑΝ=ΝΓ.

[πράγματι:θεωρούμε ΝΛ//ΑΒ, οπότε το τετράπλευρο ΜΒΛΝ είναι παραλληλόγραμμο διότι έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Άρα ΝΛ=ΜΒ=ΑΜ. Τώρα τα τρίγωνα $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{M}}\mathrm{N}$ και $\mathrm{N}\overset{\Delta}{\Lambda}\Gamma$ είναι ίσα (διότι έχουν ΑΜ=ΝΛ , $\mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{N}(=\hat{\mathrm{B}}) = \mathrm{N}\hat{\Lambda}\Gamma$ και $\mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{N} = \Lambda\hat{\mathrm{N}}\Gamma$). Άρα ΑΝ=ΝΓ].



3η εφαρμογή: Δίνεται ευθεία ε και σημείο Α εκτός αυτής. Να κατασκευασθεί ευθεία ζ η οποία να διέρχεται από το σημείο Α και να είναι παράλληλη προς την ε.

[Λύση: Θεωρούμε το συμμετρικό Α΄ του Α ως προς τυχαίο σημείο Μ της ευθείας ε και κατόπιν το συμμετρικό Β του Α΄ ως προς τυχαίο σημείο Ν της ε, διαφορετικό του Μ.
Η ευθεία ζ που ορίζεται από τα σημεία Α και Β είναι η ζητούμενη, διότι από το τρίγωνο $\mathrm{A}'\overset{\Delta}{\mathrm{A}}\mathrm{B}$ και την 1η εφαρμογή παραπάνω προκύπτει ότι ΜΝ//ΑΒ, δηλαδή ζ//ε].

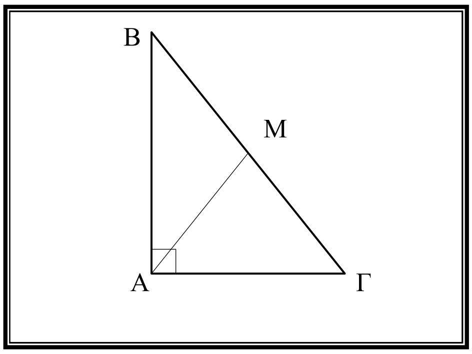


4η εφαρμογή: Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

Δηλαδή , αν $\hat{\mathrm{A}} = 90^o$, και ΑΜ-διάμεσος, τότε $\mathrm{AM} = \dfrac{\mathrm{B}\Gamma}{2}$.

Αντίστροφα: αν ΑΜ-διάμεσος και ισχύει $\mathrm{AM} = \dfrac{\mathrm{B}\Gamma}{2}$, τότε $\hat{\mathrm{A}} = 90^o$.

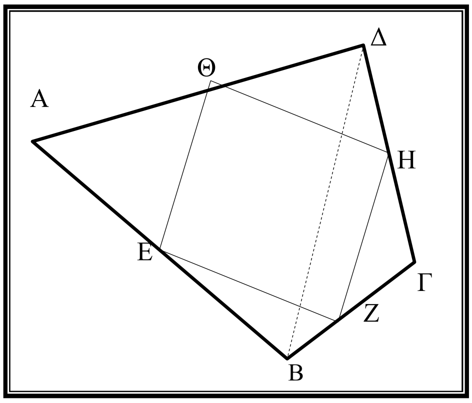
[πράγματι: Θεωρούμε στην προέκταση της ΑΜ προς το Μ σημείο Δ τέτοιο, ώστε ΜΑ=ΜΔ και το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από το ορθογώνιο ΑΒΔΓ].



$5^η$ εφαρμογή: Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μία οξεία γωνία του είναι 30^o, τότε η απέναντι από αυτή πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, και αντίστροφα.

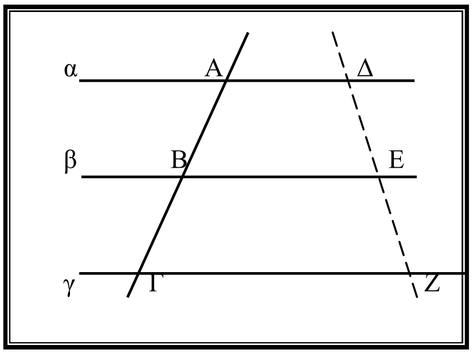
Δηλαδή αν $\hat{A} = 90^o$ τότε: $A\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow \hat{B} = 30^O$.

[πράγματι: θεωρούμε την διάμεσο ΑΜ του τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα και χρησιμοποιούμε την $4^η$ εφαρμογή και το γεγονός ότι σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο οι γωνιές του είναι ίσες με 60^o η καθεμία].



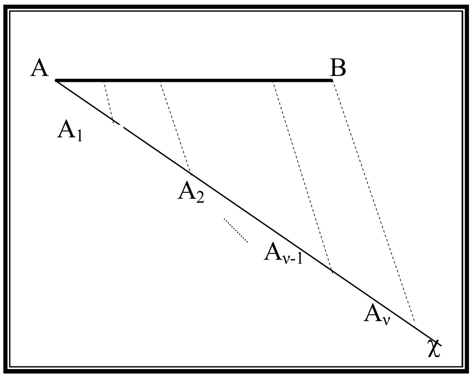
$6^η$ εφαρμογή: Τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

[πράγματι:Θεωρούμε τη διαγώνιο ΒΔ του τετραπλεύρου. Παρατηρούμε ότι στα τρίγωνα $B\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma$ και $A\overset{\Delta}{\Delta}B$ λόγω της $1^{ης}$ εφαρμογής ισχύει: ΖΗ=//$\dfrac{B\Delta}{2}$ και ΕΘ=//$\dfrac{B\Delta}{2}$ αντίστοιχα. Άρα ΖΗ=//ΕΘ, δηλαδή το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο].



$7^η$ εφαρμογή: Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μια τέμνουσα ευθεία ίσα ευθύγραμμα τμήματα, τότε θα ορίζουν και σε κάθε άλλη τέμνουσα ευθεία ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

Δηλαδή αν α//β//γ και ΑΒ=ΒΓ, τότε ΔΕ=ΕΖ.



$8^η$ εφαρμογή: Να χωριστεί ένα δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα σε ν ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

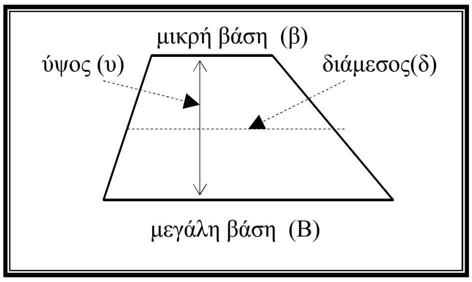
[Λύση:Θεωρούμε ημιευθεία Αχ και σε αυτήν τα ν ίσα ευθύγραμμα τμήματα $AA_1=A_1A_2=\ldots=A_{ν-1}A_ν$. Κατόπιν φέρνουμε (κατασκευάζουμε) παράλληλες από τα σημεία $A_1, A_2, \ldots A_{ν-1}$ προς την ευθεία $BA_ν$. Οι παράλληλες αυτές ορίζουν ίσα ευθύγραμμα τμήματα στην τέμνουσα ΑΒ, διότι ορίζουν ίσα τμήματα στην τέμνουσα Αχ από την κατασκευή τους ($7^η$ εφαρμογή)].

Παρατηρήσεις...

Πως δείχνουμε ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι ίσο με το μισό ενός άλλου;

- *Με διάμεσο ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα…*
- *Με γωνία 30^o ορθογωνίου τριγώνου…*
- *Το ευθύγραμμο τμήμα να έχει τα άκρα του στα μέσα πλευρών τριγώνου.*

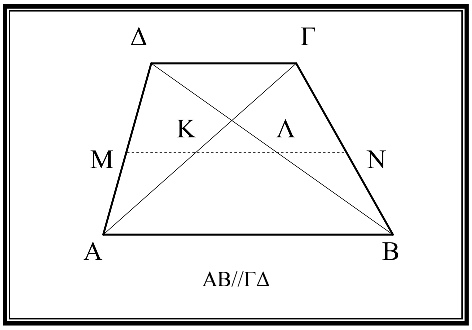
ΤΡΑΠΕΖΙΑ



<u>Ορισμός:</u> Ένα τετράπλευρο ονομάζεται *τραπέζιο* όταν έχει δύο μόνο απέναντι πλευρές παράλληλες.

Οι παράλληλες πλευρές ενός τραπεζίου ονομάζονται *βάσεις*, ενώ η απόστασή τους ονομάζεται *ύψος* του τραπεζίου.

Διάμεσος του τραπεζίου, ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του.



<u>Πρόταση:</u> Η διάμεσος ενός τραπεζίου έχει τις εξής ιδιότητες:

(α) είναι παράλληλη προς τις βάσεις του τραπεζίου και ίση με το ημιάθροισμά τους

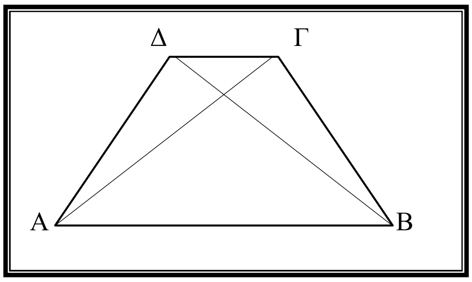
(β) διέρχεται από τα μέσα Κ , Λ των διαγωνίων του, το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο προς τις βάσεις και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεων.

Δηλαδή ΜΝ//ΑΒ , ΓΔ και $MN = \dfrac{AB + \Gamma\Delta}{2}$

Επίσης αν Κ,Λ τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, τότε ΚΛ//ΑΒ , ΓΔ και $K\Lambda = \dfrac{|AB - \Gamma\Delta|}{2}$.

ισοσκελές τραπέζιο

<u>Ορισμός:</u> Ένα τετράπλευρο ονομάζεται ισοσκελές *τραπέζιο* όταν είναι τραπέζιο και οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες.



<u>Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου:</u>

Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο ισχύουν:

(α) οι παρά τις βάσεις γωνίες είναι ίσες,

(β) οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

Δηλαδή, αν το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο με ΑΒ//ΓΔ και ΒΓ=ΑΔ, τότε: $\hat{A} = \hat{B}, \hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$ και ΑΓ=ΒΔ.

<u>Πρόταση:</u> Αν ένα τετράπλευρο έχει κάποια από τις ιδιότητες:

(α) είναι τραπέζιο +οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες,

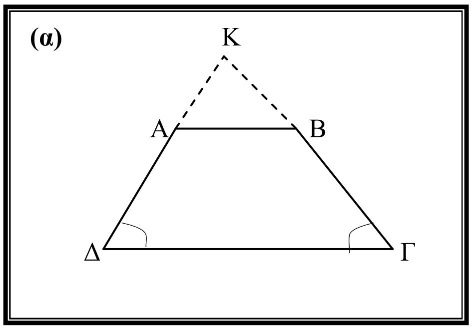
(β) είναι τραπέζιο+ οι διαγώνιοί του είναι ίσες,

τότε το τετράπλευρο είναι ισοσκελές τραπέζιο.

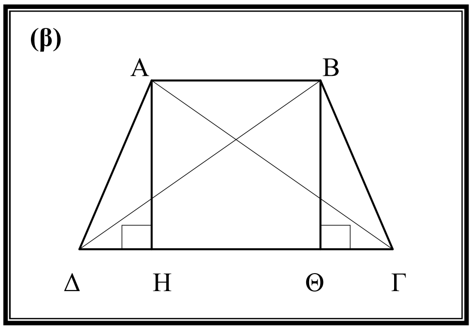
Η πρόταση αυτή αποτελεί κριτήριο διαπίστωσης αν ένα τετράπλευρο είναι **ισοσκελές τραπέζιο!**

[πράγματι:

(α) Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{\Gamma}=\hat{\Delta}$. Επειδή ΑΔ όχι παράλληλη με την ΒΓ => $\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}\neq 180^o$. Δίχως βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}<180^o$. Τότε από γνωστή πρόταση, οι ΔΑ, ΓΒ τέμνονται σε κάποιο σημείο, έστω Κ. Τότε το τρίγωνο $K\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma$ είναι ισοσκελές, διότι $\hat{\Gamma}=\hat{\Delta}$. Άρα ΚΔ=ΚΓ (1). Όμως ισχύει: $B\hat{A}K=\hat{\Delta}$ και $A\hat{B}K=\hat{\Gamma}$ (ως εντός, εκτός και επί τα αυτά γωνίες). Άρα το τρίγωνο $A\overset{\Delta}{K}B$ είναι ισοσκελές => ΚΑ=ΚΒ (2). Τελικά, λόγω των σχέσεων (1) και (2) παίρνουμε ότι ΑΔ=ΒΓ.



(β) Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΓ=ΒΔ. Φέρνουμε τα ύψη ΑΗ,ΒΘ$\perp$ΓΔ. Τότε από το ορθογώνιο ΑΒΘΗ έχουμε ότι ΑΗ=ΒΘ. Τα τρίγωνα $A\overset{\Delta}{H}\Gamma, B\overset{\Delta}{\Theta}\Delta$ είναι ίσα (διότι είναι ορθογώνια, ΑΗ=ΒΘ και ΑΓ=ΒΔ). Άρα $B\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma=A\overset{\Delta}{\Gamma}H$. Τώρα εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα τρίγωνα $A\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma, B\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma$ είναι ίσα, απ΄ όπου προκύπτει και η ζητούμενη σχέση ΑΔ=ΒΓ].



ΚΕΝΤΡΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Οι τρεις **μεσοκάθετοι** ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο (**περίκεντρο** του τριγώνου) το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται και από τις τρεις κορυφές του τριγώνου (περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου).

Οι τρεις **εσωτερικές διχοτόμοι** ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο (**έγκεντρο** του τριγώνου) το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου (εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου).

Οι διχοτόμοι **δύο εξωτερικών γωνιών και η εσωτερική διχοτόμος της τρίτης γωνίας** ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο (**παράκεντρο**) το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται στη μια πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των άλλων δύο (παρεγγεγραμμένος κύκλος).

Κάθε τρίγωνο έχει τρία παράκεντρα και κατά συνέπεια τρεις παρεγγεγραμμένους κύκλους.

Οι **διάμεσοι** ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο (**βαρύκεντρο** του τριγώνου) του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα 2/3 του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

Οι φορείς (:οι προεκτάσεις) των **υψών** ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο (**ορθόκεντρο** του τριγώνου).

Παρατηρήσεις...

Πως δείχνουμε ότι τρεις ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο;

- *Τρεις συντρέχουσες ευθείες είναι δυνατόν να είναι:*

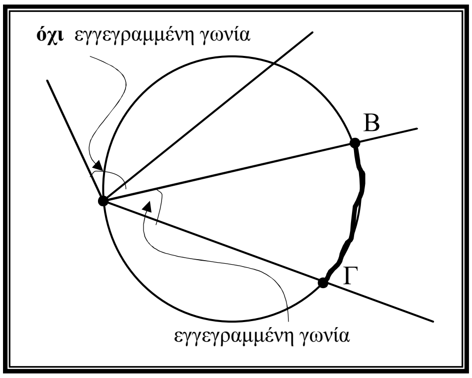
  - *οι φορείς των υψών ενός τριγώνου,*
  - *οι φορείς των διχοτόμων ενός τριγώνου,*
  - *οι φορείς των διαμέσων ενός τριγώνου,*
  - *οι φορείς των μεσοκαθέτων των πλευρών ενός τριγώνου.*

- *Θεωρούμε το κοινό σημείο των δύο από τις τρεις ευθείες και αποδεικνύουμε ότι άλλη περνάει από αυτό το σημείο.*

ΓΩΝΙΕΣ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

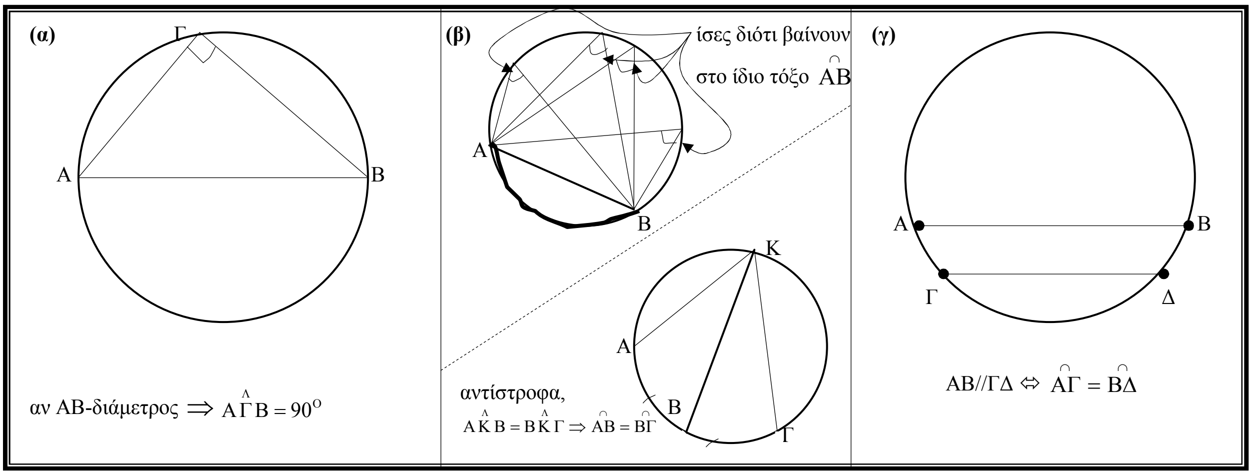
Κάθε γωνία που έχει την κορυφή της πάνω σε έναν κύκλο και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο λέγεται **εγγεγραμμένη** γωνία του κύκλου.

Το τόξο του κύκλου που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται **αντίστοιχο** τόξο ή λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία **βαίνει** στο τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$.



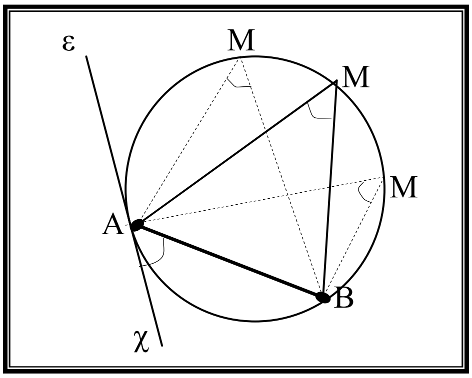
Πρόταση: Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο με αυτήν τόξο.

Πόρισμα: (α) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή
(β) Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίδια τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες, και αντίστροφα
(γ) τα τόξα που περιέχονται μεταξύ παράλληλων χορδών ενός κύκλου είναι ίσα και αντίστροφα.



Πρόταση: (γωνία χορδής + εφαπτομένης)

Η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή ΑΒ ενός κύκλου και την εφαπτομένη ε στο ένα άκρο της χορδής ισούται με κάθε εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου που βαίνει στο τόξο της χορδής.



Δηλαδή, $\chi\hat{A}B = \hat{M}\ (= \frac{\overset{\frown}{AB}}{2})$.

Εγγεγραμμενα Τετραπλευρα Σε Κυκλο

Γνωρίζουμε ότι για κάθε τρία διαφορετικά μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου υπάρχει (μοναδικός) κύκλος που διέρχεται **και** από τα τρία αυτά σημεία.
(Ο κύκλος αυτός είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου με κορυφές τα σημεία αυτά).

Αυτό όμως δεν συμβαίνει πάντα και για τέσσερα σημεία του επιπέδου.

Ορισμός 1: Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγράψιμο** σε κύκλο όταν υπάρχει κύκλος που να διέρχεται **και** από τις τέσσερις κορυφές του.

Ορισμός 2: Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγεγραμμένο** σε κύκλο όταν οι κορυφές του είναι σημεία ενός κύκλου..

Πρόταση 1: Ένα τετράπλευρο που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει τις ιδιότητες:

1. Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές,
2. Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες,
3. Κάθε εξωτερική γωνία του ισούται με την απέναντι εσωτερική του γωνία.

Πρόταση 2: Ένα τετράπλευρο είναι **εγγράψιμο** σε κύκλο, όταν ισχύει ένα από τα παρακάτω:

1. *Δύο* απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές,
2. *Μία* πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες
3. *Μία* εξωτερική γωνία του ισούται με την απέναντι εσωτερική του γωνία.

Παρατηρήσεις...

- *Τέσσερα σημεία είναι ομοκυκλικά όταν είναι κορυφές εγγράψιμου τετραπλεύρου*
- *Για να δείξουμε ότι <u>τρεις κύκλοι διέρχονται από το ίδιο σημείο</u>, θεωρούμε το σημείο τομής Α των δύο κύκλων και προσπαθούμε να δείξουμε ότι το τετράπλευρο με κορυφές το Α και τρία σημεία του τρίτου κύκλου είναι εγγράψιμο σε κύκλο.*
- *Για να δείξουμε ότι <u>5 σημεία είναι ομοκυκλικά</u>, αρκεί να δείξουμε ότι 4 από αυτά είναι ομοκυκλικά και ότι το 5^o με 3 από τα προηγούμενα 4 είναι επίσης ομοκυκλικά.*

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ…

Με τον όρο «**γεωμετρικός τόπος**» εννοούμε το σύνολο των σημείων του επιπέδου που έχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα.
Για παράδειγμα ο κύκλος είναι ένας γεωμετρικός τόπος διότι τα σημεία του έχουν την (κοινή) ιδιότητα να ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο

Για να βρούμε έναν γεωμετρικό τόπο ακολουθούμε την εξής πορεία:

ΒΗΜΑ 1. θεωρούμε ένα σημείο που έχει την ιδιότητα του γεωμετρικού τόπου και «ανακαλύπτουμε» το σχήμα στο οποίο ανήκει,
ΒΗΜΑ 2. θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου που βρήκαμε στο πρώτο βήμα και αποδεικνύουμε ότι αυτό έχει την ιδιότητα του τόπο.

ΒΑΣΙΚΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

(δηλ. γεωμετρικοί τόποι στους οποίους ανάγονται συνήθως τα προβλήματα των γεωμετρικών τόπων)

1. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που απέχουν σταθερή απόσταση ρ από σταθερό σημείο Ο είναι κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας ρ.

2. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από δύο δοθέντα σημεία Α,Β είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

3. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που βρίσκονται εντός γωνίας $\chi\hat{O}\psi$ και ισαπέχουν από τις πλευρές αυτής είναι η διχοτόμος της $\chi\hat{O}\psi$

4. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που απέχουν απόσταση λ από γνωστή ευθεία (ε), είναι δύο παράλληλες προς την (ε) ευθείες, που απέχουν απόσταση λ από την (ε).

5. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν δύο γνωστών παραλλήλων ευθειών είναι η μεσοπαράλληλος αυτών.

6. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που βλέπουν σταθερό ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ υπό γνωστή γωνία φ, είναι δύο τόξα συμμετρικά προς την ΑΒ, που έχουν χορδή την ΑΒ και δέχονται εγγεγραμμένη γωνία ίση με την φ.

7. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων των οποίων οι αποστάσεις από δύο δεδομένα σημεία Α,Β έχουν γνωστό λόγο $\frac{\mu}{\nu} \neq 1$, είναι κύκλος διαμέτρου ΓΔ, όπου τα Γ,Δ διαιρούν τα Α,Β εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$. (Απολλώνιος κύκλος)

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

Με τον όρο ΄΄γεωμετρική κατασκευή΄΄ εννοούμε τις διαδοχικές εργασίες που κάνουμε για να σχεδιάσουμε ένα γεωμετρικό σχήμα από ορισμένα στοιχεία του ή από ορισμένες ιδιότητές του. Στις γεωμετρικές κατασκευές χρησιμοποιούμε αποκλειστικά τον κανόνα (:μη βαθμολογημένος χάρακας) και τον διαβήτη.

Σε μια γεωμετρική κατασκευή ελέγχουμε επίσης συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε το πρόβλημα να έχει λύση (δηλαδή να είναι εφικτή η κατασκευή) καθώς και το πλήθος των λύσεων του προβλήματος).

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

(δηλ. γεωμετρικές κατασκευές στις οποίες ανάγονται συνήθως τα προβλήματα των γεωμετρικών κατασκευών)

1. Να κατασκευασθεί η μεσοκάθετος - να βρεθεί το μέσο γνωστού ευθύγραμμου τμήματος.

2. Από σημείο Α να αχθεί κάθετος σε γνωστή ευθεία (ε) (δύο περιπτώσεις).

3. Να διχοτομηθεί γνωστή γωνία.

4. Να κατασκευασθεί γωνία ίση προς γνωστή γωνία φ.

5. Από σημείο Α εκτός ευθείας (ε) να αχθεί παράλληλη ευθεία προς την (ε).

6. Να διαιρεθεί γνωστό ευθύγραμμο τμήμα σε ν ίσα μέρη.

7. Από γνωστό σημείο Α εκτός γνωστού κύκλου να αχθούν οι εφαπτόμενες προς τον κύκλο.

8. Να κατασκευασθεί τόξο κύκλου με χορδή γνωστό ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που να δέχεται γνωστή γωνία ω.

9. Να κατασκευασθεί τρίγωνο όταν δίνονται οι τρεις πλευρές του ή δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία σε αυτές ή μία πλευρά και οι προσκείμενες γωνίες σε αυτή.

10. Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο όταν δίνονται οι δύο κάθετες πλευρές ή μια κάθετη πλευρά και η υποτείνουσά του.

11. Να κατασκευασθεί κύκλος όταν δίνονται τρία σημεία του.

12. Να κατασκευασθούν (αν υπάρχουν) οι κοινές εσωτερικές / εξωτερικές εφαπτόμενες δύο γνωστών κύκλων

13. Κατασκευή τέταρτης αναλόγου.

14. Να διαιρεθεί ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ εσωτερικά και εξωτερικά, σε δεδομένο λόγο $\frac{\mu}{\nu} \neq 1$.

ασκήσεις . . .

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και στις προεκτάσεις της πλευράς του ΒΓ τα σημεία Ε,Ζ τέτοια, ώστε ΒΕ=ΓΖ. Δείξτε ότι:
(α) το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές
(β) τα τρίγωνα ΑΒΖ , ΑΓΕ είναι ίσα.

2. Στο εσωτερικό ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) θεωρούμε σημείο Μ τέτοιο, ώστε $M\hat{B}A = M\hat{\Gamma}A$. Δείξτε ότι το σημείο Μ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$.

3. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες διάμεσες ίσες, τότε είναι ίσα.

4. Δύο αμβλυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ (με $\hat{\Gamma}, \hat{Z}$ αμβλείες) έχουν ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ και $\hat{B} = \hat{E}$. Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ είναι ίσα.

5. Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) τέμνονται σε σημείο Μ, δείξτε ότι η ευθεία ΑΜ είναι μεσοκάθετος των ευθύγραμμων τμημάτων ΔΕ και ΒΓ.

6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και τα σημεία Δ,Ε της ευθείας ΒΓ που βρίσκονται εκτός των Β,Γ τέτοια, ώστε ΒΔ=ΓΕ. Αν $\Delta B' \perp AB$ και $E\Gamma' \perp A\Gamma$. Δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒ'Γ' είναι ισοσκελές.

7. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ, $M\Delta \perp AB$ και $ME \perp A\Gamma$.
Αν ΜΕ=ΜΔ, δείξτε ότι ΑΒ=ΑΓ.

8. Αν δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' έχουν $\hat{A} = \hat{A}'$, $\upsilon_\alpha = \upsilon_\alpha'$ και $\delta_\alpha = \delta_\alpha'$,να αποδείξετε ότι είναι ίσα.

9. (α) Αν δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' έχουν β=β' , γ=γ' και $\hat{B} + \hat{B}' = 180^o$, να αποδειχθεί ότι $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$

(β) Αν δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' έχουν β=β', $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ και $\hat{B} + \hat{B}' = 180^o$, να αποδειχθεί ότι γ=γ'.

10. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από δύο δεδομένες τεμνόμενες ευθείες.

11. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων οι οποίοι ορίζουν ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ σε δύο δεδομένες τεμνόμενες ευθείες (ε) και (ε'). αντίστοιχα.

12. Θεωρούμε κύκλο (Ο,ρ) και σταθερό σημείο Μ εκτός αυτού. Αν Α μεταβλητό σημείο του κύκλου, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των συμμετρικών του σημείου Α ως προς το σημείο Μ.

13. Θεωρούμε δύο σταθερά σημεία Α και Β του επιπέδου. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των συμμετρικών του σημείου Β ως προς τις ευθείες που διέρχονται από το Α.

14. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και στις πλευρές του ΒΓ,ΑΓ,ΑΒ αντίστοιχα τα σημεία:Δ,Ε,Ζ. Δείξτε ότι ΔΕ+ΕΖ+ΖΔ<ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ.

15. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των υψών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από την περίμετρο του τριγώνου.

16. Δείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν:

(α) $\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$ (β) $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} < \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma$.

17. Μπορεί ένα σκαληνό τρίγωνο να διαιρεθεί με μία ευθεία σε δύο ίσα τρίγωνα ή όχι;

18. Ποιο σημείο δεδομένης ευθείας (ε) έχει ελάχιστο άθροισμα αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία Α και Β;

19. Αν α,β,γ είναι πλευρές τριγώνου ΑΒΓ, δείξτε ότι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2<2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$.

20. Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ η ΑΒ είναι η μεγαλύτερη και η ΓΔ είναι η μικρότερη πλευρά του. Δείξτε ότι $\hat{A} < \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} < \hat{\Delta}$.

21. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} > 90^o$ και τα σημεία Δ,Ε των πλευρών του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι: ΒΔ+ΓΕ>ΒΕ+ΕΔ+ΓΔ.

22. Σε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ημιπερίμετρο τ, να αποδείξετε ότι:

(α) $\upsilon_\alpha > \dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$ (β) $\upsilon_\alpha+\upsilon_\beta+\upsilon_\gamma>\tau$.

23. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων οι οποίοι εφάπτονται σε δύο τεμνόμενες ευθείες.

24. Θεωρούμε κύκλο (Ο,ρ). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων Μ των κύκλων (Μ,λ) , όπου λ>0 γνωστό, οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά του κύκλου (Ο,ρ).

25. Δίνονται δύο κύκλοι (Ο,ρ) και (Ο',ρ) , μια εξωτερική εφαπτομένη τους ΑΒ και μια εσωτερική εφαπτομένη τους ΓΔ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ι. Να αποδειχθεί ότι η γωνία ΟΙΟ' είναι ορθή.

26. Θεωρούμε κύκλο (Ο,ρ) και τις εφαπτόμενες του ΑΔ, ΑΕ από ένα σημείο Α εκτός αυτού. Έστω ένα ¨κινητό¨ σημείο Μ του τόξου ΔΕ. Αν η εφαπτομένη στο Μ τέμνει τα τμήματα ΑΔ , ΑΕ στα σημεία Β,Γ αντίστοιχα, δείξτε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι σταθερή. (δηλ. ανεξάρτητη από τη θέση του σημείου Μ)

27. Δύο κύκλοι (Κ,ρ) και (Λ,ρ') εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Έστω ΒΓ η κοινή εξωτερική εφαπτομένη αυτών. Δείξτε ότι:

(α) Ο κύκλος διαμέτρου ΒΓ εφάπτεται της ΚΛ στο σημείο Α,

(β) Ο κύκλος διαμέτρου ΚΛ εφάπτεται του ΒΓ.

28. Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,ρ) και (Λ,ρ). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα: αν φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ,ΜΑ' προς τον κύκλο (Κ,ρ) και τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΒ,ΜΒ' προς τον κύκλο (Λ,ρ) , τότε να ισχύει $\mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{A}' = \mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B}'$.

29. Δύο κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Μία χορδή ΒΓ του κύκλου (Κ,R) εφάπτεται του κύκλου (Λ,ρ) στο σημείο Δ. Φέρνουμε την ΑΔ που τέμνει τον κύκλο (Κ,R) στο σημείο Μ. Αν ΜΕ⊥ΒΓ, δείξτε ότι $\Delta\mathrm{E} = \dfrac{\mathrm{B}\Delta+\Gamma\Delta}{2}$.

30. Να κατασκευασθεί τρίγωνο ΑΒΓ αν είναι γνωστά (κατασκευάσιμα) τα στοιχεία του ΒΓ=α, ΑΔ=υ_α και ΑΜ=μ_α.

31. Να κατασκευασθεί ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) αν είναι γνωστά (κατασκευάσιμα) τα στοιχεία του ΑΒ=γ και η γωνία $\hat{\Gamma}$.

32. Να κατασκευασθεί τρίγωνο ΑΒΓ αν είναι γνωστά (κατασκευάσιμα) τα στοιχεία του $\hat{A} = \hat{\omega}$, ΑΒ=γ και η διχοτόμος του δ_α.

33. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών δεδομένου κύκλου (Ο,ρ) που έχουν γνωστό μήκος λ.

34. Να κατασκευασθεί τρίγωνο ΑΒΓ αν είναι γνωστά (κατασκευάσιμα) τα στοιχεία του υ_α, α και ισχύει η σχέση α=2β.

35. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να βρεθεί σημείο Μ του ΑΒ τέτοιο, ώστε ΜΑ-ΜΒ=λ, όπου λ δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα.

36. Δίνεται γωνία $\chi\hat{O}\psi$ και σημείο Α εκτός αυτής. Να κατασκευασθεί ευθεία η οποία να διέρχεται από το σημεία Α και να σχηματίζει με τις Οχ,Οψ ισοσκελές τρίγωνο με κορυφή το σημείο Ο.

37. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ), σημείο του Α και σημείο Β εκτός αυτού. Να κατασκευασθεί κύκλος ο οποίος διέρχεται από τα σημεία Α,Β και εφάπτεται του κύκλου (Ο,ρ) στο σημείο Α.

38. (α) Να κατασκευασθεί κύκλος όταν γνωρίζουμε την ακτίνα του και ότι διέρχεται από δύο δεδομένα σημεία Α,Β
(β) Να κατασκευασθεί κύκλος όταν γνωρίζουμε την ακτίνα του και ότι εφάπτεται μιας ευθείας (ε) σε δεδομένο σημείο Α αυτής.

39. Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά (ή εσωτερικά) σε σημείο Α. Μια ευθεία (ε) διέρχεται από το Α και τέμνει τους κύκλους στα σημεία Β και Γ. Δείξτε ότι οι εφαπτόμενες των κύκλων στα σημεία Β,Γ είναι παράλληλες.

40. Να κατασκευασθεί τρίγωνο ΑΒΓ αν είναι γνωστά (κατασκευάσιμα) τα στοιχεία του $\hat{B}, \hat{\Gamma}, \upsilon_\alpha$.

41. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{B} = 60^o$ και α=2γ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

42. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), σημείο Δ της πλευράς ΑΓ και σημείο Ε της ημιευθείας ΒΑ τέτοιο, ώστε ΑΕ=ΑΔ. Δείξτε ότι $ΔΕ \perp ΒΓ$.

43. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει κυρτό πολύγωνο με περισσότερες από τρεις οξείες γωνίες.

44. Αν μια γωνία κυρτού πολυγώνου είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των υπολοίπων γωνιών του, τότε το πολύγωνο έχει τρεις κορυφές.

45. Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^{o}$) αν είναι γνωστή (κατασκευάσιμη) η γωνία $\hat{B}$ και ισχύει η σχέση α+γ=λ (όπου λ γνωστό ευθύγραμμο τμήμα).

46. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και το σημείο Μ στην προέκταση της βάσης ΒΓ προς το μέρος του Β. Από το Μ φέρνουμε παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ,ΑΓ οι οποίες τέμνουν τις ημιευθείες ΓΑ,ΑΒ στα σημεία Δ,Ε αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι:

(α) το τρίγωνο ΜΒΕ είναι ισοσκελές,

(β) ΜΔ-ΜΕ=ΑΒ.

47. Έστω σημείο Δ της βάσης ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ. Φέρνουμε τις παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ,ΑΓ οι οποίες τέμνουν τις ΑΓ,ΑΒ στα σημεία Ε,Ζ αντίστοιχα. Δείξτε ότι η περίμετρος του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι σταθερή (δηλ. ανεξάρτητη από τη θέση του σημείου Δ πάνω στη ΒΓ).

48. Θεωρούμε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ, το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ εντός του τετραγώνου και το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΖ εκτός του τετραγώνου. Να αποδειχτεί ότι τα σημεία Δ,Ε,Ζ είναι συνευθειακά.

49. Δύο ίσοι κύκλοι με κέντρα Ο και Κ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Θεωρούμε ένα σημείο Β του ενός κύκλου και ένα σημείο Γ του άλλου κύκλου τέτοια, ώστε $B\hat{A}Γ = 90^{o}$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΟΒΓΚ είναι παραλληλόγραμμο.

50. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και εκτός αυτού τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

(α) Η ευθεία ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΕΗ,

(β) Οι ευθείες ΒΖ και ΓΔ τέμνονται σε σημείο της ΑΜ.

51. Έστω Δ,Ε οι προβολές της κορυφής Β ενός τριγώνου ΑΒΓ στις διχοτόμους της γωνίας $\hat{A}$. Να αποδειχθεί ότι:

(α) το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Α,Δ,Β,Ε είναι ορθογώνιο και

(β) η ευθεία ΔΕ διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΑΒ και είναι παράλληλη προς την πλευρά ΑΓ του τριγώνου.

52. Από εσωτερικό σημείο Ο ενός ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ πλευράς α, φέρνουμε τις παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ,ΒΓ και ΓΑ οι οποίες τέμνουν τις ΑΓ,ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα στα σημεία Δ,Ε και Ζ. Να αποδείξετε ότι ΟΔ+ΟΕ+ΟΖ=α.

53. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ , ΒΓ , ΓΔ και ΔΑ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατά τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΕ=ΑΒ , ΓΖ=ΒΓ , ΔΗ=ΓΔ και ΑΘ=ΑΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο και έχει το ίδιο κέντρο με το ΑΒΓΔ.

54. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Εξωτερικά από αυτό κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ , ΒΓΖ , ΓΔΗ και ΔΑΘ. Δείξτε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ρόμβος και έχει το ίδιο κέντρο με το ΑΒΓΔ.

55. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=60^o$ θεωρούμε την εσωτερική διχοτόμο ΑΔ, την προβολή Ε του σημείου Δ στην ΑΒ και την προβολή Ζ του σημείου Ε στην ΑΔ. Δείξτε ότι 3.ΕΔ=2.ΖΔ+ΑΔ.

56. Αν τα ύψη ΑΔ , ΒΕ και ΓΖ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο σημείο Η και Ρ,Μ είναι τα μέσα των ΗΑ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΡΜ είναι μεσοκάθετος της ΕΖ.

57. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι κορυφές τετραγώνου αν και μόνο αν το ΑΒΓΔ έχει ίσες και κάθετες διαγωνίους.

58. Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ ονομάζουμε Ε,Ζ,Η,Θ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. Αν Κ,Λ τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ,ΒΔ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

(α) τα τετράπλευρα ΕΚΗΛ και ΖΚΘΛ είναι παραλληλόγραμμα και

(β) οι ευθείες ΕΗ,ΖΘ,ΛΚ συντρέχουν.

59. Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$) αν είναι γνωστή (κατασκευάσιμη) η πλευρά του ΑΒ=γ και η διάμεσός του μ_α.

60. Έστω ΑΒ μια τέμνουσα δύο παράλληλων ευθειών (ε) , (ε'). Να δειχθεί ότι οι διχοτόμοι των γωνιών που έχουν κορυφές τα σημεία Α,Β σχηματίζουν ορθογώνιο, του οποίου η μια διαγώνιος είναι παράλληλη προς τις ευθείες (ε) , (ε').

61. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΒΜ και έστω Ν το μέσο της. Φέρνουμε στη συνέχεια την ΑΝ που τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ζ. Να δεχτεί ότι:
(α) ΖΓ=2.ΒΖ (β) ΝΖ=ΑΖ/4.

62. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) είναι $\hat{A}=120^o$. Αν Δ,Ε είναι σημεία της πλευράς ΒΓ τέτοια, ώστε ΒΔ=ΔΕ=ΕΓ, να δειχτεί ότι $\Delta\hat{A}\Gamma = 90^o$.

63. Αν το ύψος ΑΔ και η διάμεσος ΑΜ ενός τριγώνου ΑΒΓ τριχοτομούν τη γωνία $\hat{A}$, να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

64. Δίνεται τρίγωνο ΔΕΖ με $\hat{\Delta} = 90^o$ και $\hat{Z} = 30^o$. Έστω Κ,Λ τυχαία σημεία των ΔΖ,ΔΕ αντίστοιχα τέτοια, ώστε ΚΛ//ΖΕ. Αν Α,Β είναι τα μέσα των ΛΖ,ΚΕ αντίστοιχα, δείξτε ότι ΑΒ=ΛΕ.

65. Σε ένα σκαληνό και μη ορθογώνιο τρίγωνο να αποδειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών του και το ίχνος ενός ύψους του είναι κορυφές ισοσκελούς τραπεζίου.

66. Αν σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ θεωρήσουμε το συμμετρικό Ε της κορυφής Α ως προς τη διαγώνιο ΒΔ, δείξτε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

67. Αν σε τραπέζιο ΑΒΓΔ ισχύει ΑΔ=ΑΒ+ΓΔ και $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^o$, δείξτε ότι:
(α) ο κύκλος διαμέτρου ΑΔ εφάπτεται της πλευράς ΒΓ και
(β) ο κύκλος διαμέτρου ΒΓ εφάπτεται της πλευράς ΑΔ.

68. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ<ΓΔ. Έστω Κ,Λ,Η,Θ τα μέσα αντίστοιχα των ευθύγραμμων τμημάτων ΒΔ,ΑΓ,ΚΔ,ΛΓ. Δείξτε ότι ΑΒ+4ΗΘ=3ΓΔ.

69. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΓΔ=ΑΒ+ΒΔ και έστω Μ το μέσο της πλευράς ΑΓ. Δείξτε ότι $B\hat{M}\Delta = 90^o$.

70. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΔ=ΑΒ+ΓΔ και έστω Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Η ευθεία ΑΜ τέμνει τη ΓΔ στο σημείο Ε και η ευθεία ΔΜ τέμνει τη ΑΒ στο σημείο Ζ. Δείξτε ότι το τετράπλευρο ΑΔΕΖ είναι ρόμβος.

71. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$, ΓΔ=2ΑΒ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε το κάθετο τμήμα ΒΕ προς την ΓΔ το οποίο τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο σημείο Μ. Φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει την ΒΔ στο σημείο Ν. Δείξτε ότι:

(α) $AE \perp B\Delta$ (β) $MN = \frac{1}{4}\Gamma\Delta$.

72. Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$) είναι ίση με $\varrho = \dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$.

73. Το άθροισμα των διαμέσων ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο από τα ¾ της περιμέτρου του τριγώνου.

74. Οι εφαπτόμενες στα άκρα Α,Β χορδής κύκλου τέμνονται στο σημείο Μ. Αν Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΜΑΒ να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΗΑΟΒ είναι ρόμβος.

75. Να δείξετε ότι αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες μια προς μια τις διαμέσους τους, τότε είναι ίσα.

76. Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = \hat{\Delta} = 90^o$, θεωρούμε A_1,A_2 τα συμμετρικά σημεία του Α ως προς τα Β,Δ αντίστοιχα και Μ το μέσο του A_1A_2. Να δειχθεί ότι $M\Gamma \perp B\Delta$.

77. (α) Ίσα τρίγωνα έχουν ίσους εγγεγραμμένους κύκλους,

(β) Ίσα τρίγωνα έχουν ίσους περιγεγραμμένους κύκλους.

78. Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

(α) $\upsilon_\alpha=\upsilon_\beta=\upsilon_\gamma=3\varrho$,

(β) $\varrho=R/2$,

(γ) $\varrho_\alpha=\varrho_\beta=\varrho_\gamma=3R/2$,

όπου ϱ: η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ,

R: η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ,

ϱ_α, ϱ_β, ϱ_γ: οι ακτίνες των παραγεγραμμένων κύκλων του τριγώνου ΑΒΓ.

79. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει β>γ τότε $\mu_\beta<\mu_\gamma$.

80. Αν Η είναι το ορθόκεντρο τριγώνου ΑΒΓ με $\hat{B}-\hat{\Gamma}=90^o$, τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΗΒΓ είναι ίσα.

81. Οι κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ με $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$ είναι σημεία ενός κύκλου. Έστω (ε) η εφαπτομένη του κύκλου αυτού στο σημείο Α.

(α) Δείξτε ότι οι ευθείες (ε),ΒΓ τέμνονται,

(β) Αν Δ το σημείο τομής των (ε),ΒΓ δείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ισοσκελή.

82. Στον περιγεγραμμένο κύκλο τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε τις χορδές ΒΔ και ΓΕ παράλληλες στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Δείξτε ότι η χορδή ΔΕ είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α.

83. Από σημείο Γ εκτός κύκλου κέντρου Ο γράφουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΓΑ,ΓΒ. Φέρνουμε τη διάμετρο ΑΔ και στην προέκταση του ΑΓ προς το μέρος του Γ παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΓΕ=ΑΓ. Δείξτε ότι τα σημεία Δ,Β,Ε είναι συνευθειακά.

84. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^{\text{o}}$). Με διάμετρο την ΑΒ γράφουμε κύκλο κέντρου Ο, ο οποίος τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ. Δείξτε ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Δ διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΑΓ.

85. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο, Ι το έγκεντρό του και Μ το μέσο του τόξου ΒΓ. Δείξτε ότι το τρίγωνο ΙΜΓ είναι ισοσκελές.

86. Δίνονται δύο παράλληλες χορδές ΑΒ,ΓΔ ενός κύκλου (Ο,ρ). Αν οι ΑΓ, ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ι, δείξτε ότι το τετράπλευρο ΑΟΔΙ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

87. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε το ύψος ΑΔ , $\text{ΔΕ}\perp\text{ΑΒ}$ και $\text{ΔΖ}\perp\text{ΑΓ}$. Δείξτε ότι το τετράπλευρο ΒΕΖΓ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

88. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Ρ της βάσης ΒΓ. Αν $\text{ΡΕ}\perp\text{ΑΒ}$, $\text{ΡΔ}\perp\text{ΑΓ}$ και Μ το μέσο της ΒΓ, δείξτε ότι το τετράπλευρο ΕΡΜΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

89. Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τα ύψη ΒΔ,ΓΕ αυτού και τις $ΕΖ \perp ΑΓ$, $ΔΗ \perp ΑΒ$. Δείξτε ότι ΗΖ//ΒΓ.

90. Σε τρίγωνο ΑΒΓ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{Β},\hat{Γ}$ τέμνονται στο σημείο Ι, ενώ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{Β}_{εξ},\hat{Γ}_{εξ}$ τέμνονται στο σημείο $Ι_α$. Δείξτε ότι το τετράπλευρο $ΒΙΓΙ_α$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο και να βρείτε το κέντρο αυτού του κύκλου.