1. Αν οι μη παράλληλες πλευρές ενός τραπεζίου είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των βάσεών του.

2. Να υπολογίσετε το ύψος και τις διαγώνιες ενός ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ=4, ΓΔ=10 και μη παράλληλες πλευρές ίσες με 5.

3. Δίνονται δύο όμοια ορθογώνια τρίγωνα. Αποδείξτε ότι το γινόμενο των υποτεινουσών είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομόλογων κάθετων πλευρών του.

4. Τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου ΑΒΓΔ έχουν λόγο $\sqrt{2}$. Να αποδείξετε ότι οι προβολές των κορυφών Α και Γ στη διαγώνιο ΒΔ διαιρούν τη διαγώνιο αυτή σε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

5. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) διαμέτρου ΑΒ και κύκλος διαμέτρου ΟΑ. Από ένα σημείο Γ της ακτίνας ΟΑ φέρνουμε την κάθετη στην ΑΒ, η οποία τέμνει τον μικρό κύκλο στο Δ και τον μεγάλο κύκλο στο Ε. Δείξτε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΑΕ είναι ασύμμετρα.

6. Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α προεκτείνουμε τη ΒΓ κατά ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ=α. Να υπολογιστεί το μήκος του ΑΔ συναρτήσει του α.

7. Αν α,β,γ γνωστά (κατασκευάσιμα) ευθύγραμμα τμήματα, να κατασκευάσετε τμήμα χ, όταν:

(α) $\chi=\sqrt{3a^2+5\beta^2}$

(β) $\chi=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta}$

(γ) $\chi^4=\alpha^4+\beta^4$.

8. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τον περιγεγραμμένο του κύκλο (Ο,R). Φέρνουμε τη διάμετρο ΑΜ και από το Μ φέρνουμε εφαπτομένη του κύκλου, που τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ,ΑΓ στα σημεία Δ,Ε αντίστοιχα. Τότε:

(α) $AB^2+BM^2+ME^2=AE^2$ και

(β) ΑΒ.ΑΔ=ΑΓ.ΑΕ

9. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}-\hat{\Gamma}=90^o$. Αν R η ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου τότε $\beta^2+\gamma^2=4R^2$.

10. Έστω Δ το σημείο επαφής της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ με τον εγγεγραμμένο κύκλο του. Δείξτε ότι:

$\hat{A}=90^o \Leftrightarrow$ ΒΔ.ΓΔ=βγ/2.

Επιμέλεια: Παύλος Τρύφων

11. Να βρεθεί και να υπολογιστεί η μεγαλύτερη γωνία ενός τριγώνου ΑΒΓ με β=2α και γ=α$\sqrt{7}$.

12. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ=β και $\hat{A}=30^o$, να δειχθεί ότι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

13. Αν στο εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ=α,ΒΓ=β,ΓΔ=γ,ΔΑ=δ ισχύει αβ=γδ, δείξτε ότι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=2A\Gamma^2$.

14. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\upsilon_\alpha=2\sqrt{2(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, τότε 3α=β+γ.

15. (α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ (ως προς τις γωνίες του) του οποίου οι πλευρές γ,β,α είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 4,5,6 αντίστοιχα.
(β) Αν ΑΔ είναι η προβολή της πλευράς γ τριγώνου ΑΒΓ πάνω στη πλευρά β, να δείξετε ότι ΑΔ=(α+β+γ)/30.

16. Σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ να δειχτεί ότι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>8R^2$ (όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ)

17. Να υπολογίσετε το χ έτσι, ώστε οι παραστάσεις $\chi^2+\chi+1$, $2\chi+1$ και χ^2-1 να αποτελούν μήκη πλευρών τριγώνου.
Στη συνέχεια να βρείτε τη γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.

18. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\mu_\alpha^2=\beta\gamma$, να δείξετε ότι $\alpha=|\beta-\gamma|.\sqrt{2}$

19. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει β=4, γ=6 και $\mu_\alpha=4$, να υπολογιστεί η προβολή της διαμέσου μ_α στην πλευρά ΒΓ.

20. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2=5\mu_\alpha^2$, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

21. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι (Ο,R), (Ο,ρ) με R>ρ. Ευθεία (ε) διέρχεται από το κέντρο Ο και τέμνει τους κύκλους κατά σειρά στα σημεία Α,Β,Γ,Δ. Αν Μ είναι σημείο του (Ο,R) και Ν σημείο του (Ο,ρ), τότε $NA^2+N\Delta^2=MB^2+M\Gamma^2$.

22. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\beta^2+\gamma^2=2\alpha^2$, να αποδείξετε ότι για τις διαμέσους του τριγώνου ισχύουν οι ισότητες:
(α) $\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2=2\mu_\alpha^2$ και
(β) $\frac{\mu_\alpha}{\alpha}=\frac{\mu_\beta}{\gamma}=\frac{\mu_\gamma}{\beta}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

23. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με $\hat{\Delta} = 60^o$ και σημείο Μ εκτός του ρόμβου. Δείξτε ότι $ΜΒ^2+ΜΔ^2=ΜΑ^2+ΜΓ^2+ΑΓ^2$.

24. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) φέρνουμε τη διάμεσο ΒΜ. Αν Δ είναι το μέσο της ΒΜ, να δείξετε ότι $ΒΓ^2=4ΑΔ^2+3ΑΜ^2$.

25. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει η σχέση $ΜΒ^2+ΜΓ^2=2ΜΑ^2$.

26. Ένα σημείο Α απέχει απόσταση R/2 από το κέντρο Ο ενός κύκλου (Ο, R). Μια χορδή ΒΓ του κύκλου διέρχεται από το Α και διαιρείται από το Α σε λόγο ¼. Να βρεθεί το μήκος της χορδής αυτής.

27. Η προέκταση της διαμέσου ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του στο σημείο Δ. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΔΜ συναρτήσει των πλευρών του τριγώνου.

28. Δίνεται κύκλος (Ο,ΟΑ) και με διάμετρο την ΟΑ γράφουμε δεύτερο κύκλο. Αν από ένα σημείο Β του μικρού κύκλου φέρουμε μια χορδή ΓΔ του μεγάλου κύκλου, να δείξετε ότι $ΒΓ.ΒΔ=ΑΒ^2$.

29. Αν Η είναι το ορθόκεντρο ενός οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ , να υπολογιστεί το ευθύγραμμο τμήμα ΑΗ συναρτήσει των πλευρών του τριγώνου.

30. Θεωρούμε μια γωνία $\chi\hat{O}\psi$ και δύο σημεία Α,Β της πλευράς Οχ. Να προσδιορίσετε σημεία Γ,Δ της πλευράς Οψ τέτοια, ώστε να ισχύει ΟΑ.ΟΒ=ΟΓ.ΟΔ

31. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν ο κύκλος διαμέτρου ΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ,ΑΓ στα σημεία Δ,Ε αντίστοιχα, τότε $α^2=βΓΕ+γΒΔ$.

32. Να δείξετε ότι το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου του οποίου οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα, είναι ίσο με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.

33. (α) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με εμβαδόν Ε. Τότε: $\hat{A} = 90^o \Leftrightarrow$ Ε=τ(τ-α).

(β) Αν Δ είναι το σημείο επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ με την υποτείνουσα ΒΓ αυτού, τότε (ΑΒΓ)=ΔΒ.ΔΓ

34. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ=6, η διάμεσος ΑΜ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΒ και ίση με αυτή. Δείξτε ότι (ΑΒΓ)=9/2.

35. Να κατασκευάσετε τετράγωνο με εμβαδόν πενταπλάσιο του εμβαδού δεδομένου τετραγώνου.

36. Να υπολογιστεί το εμβαδόν τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $\hat{A}=\hat{\Delta}=90^o$, $\hat{B}=120^o$ και ΒΓ=ΓΔ=α.

(β) ΑΒ=4 , ΓΔ=10 και ΑΔ=ΒΓ=5.

37. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\upsilon_\alpha=3\rho$ (όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ). Να βρεθεί ο λόγος $\frac{\beta+\gamma}{\alpha}$.

38. Να χωρίσετε ένα παραλληλόγραμμο σε τέσσερα ισοδύναμα χωρία με ευθείες που διέρχονται από μια κορυφή του.

39. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εμβαδού Ε και κύκλος (Κ,ρ) που έχει το κέντρο του στην πλευρά α και εφάπτεται στις πλευρές β,γ. Να αποδείξετε ότι $(\beta+\gamma)\rho=2E$.

40. Δίνεται ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2α και κέντρου Ο. Κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο ΟΕΖΗ με πλευρά β, όπου β>2α. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του κοινού χωρίου των δύο τετραγώνων.

41. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\hat{A}=90^o \Leftrightarrow (\rho_\beta-\rho_\alpha)(\rho_\gamma-\rho_\alpha)=2\rho_\beta\rho_\gamma$.

42. Σε τρίγωνο ΑΒΓ να δειχθεί ότι: $\rho_\alpha\rho_\beta+\rho_\beta\rho_\gamma+\rho_\alpha\rho_\gamma=\tau^2$.

43. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει εμβαδόν ίσο με $\frac{A\Gamma^2}{4}$, όπου ΑΓ η μια διαγώνιός του. Να αποδείξετε ότι η οξεία γωνία των διαγωνίων του είναι 30^o.

44. Θεωρούμε τρεις ίσες διαδοχικές γωνίες $\chi\hat{O}\psi, \psi\hat{O}z, z\hat{O}\chi$ και επί των πλευρών Οχ,Οψ,Οz τα σημεία Α,Β,Γ αντίστοιχα τέτοια, ώστε ΟΑ=1,ΟΒ=4,ΟΓ=8. Δείξτε ότι (ΑΒΓ)=$11\sqrt{3}$.

45. Αν Ι το έγκεντρο ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$) να δειχτεί ότι ΙΒ.ΙΓ=ΙΑ.ΒΓ

46. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από ένα σημείο Ο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε κάθετες στις πλευρές ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ και πάνω σε αυτές παίρνουμε τμήματα ΟΔ=ΑΒ,ΟΕ=ΒΓ,ΟΖ=ΓΑ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

(α) (ΔΟΕ)=(ΑΒΓ) (β) (ΔΕΖ)=3.(ΑΒΓ)

47. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$). Κατασκευάζουμε επί των τριών πλευρών του και εκτός αυτού τετράγωνα ΒΓΔΕ,ΓΑΘΙ,ΑΒΚΛ. Να υπολογισθούν:
(α) τα εμβαδά (ΚΒΕ),(ΔΓΙ),(ΛΑΘ)
(β) το εμβαδόν (ΔΕΚΛΘΙ) συναρτήσει των πλευρών α,β,γ του τριγώνου ΑΒΓ.

48. Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και σημείο Ε της πλευράς επίσης ΒΓ διαφορετικό από τα Δ,Β,Γ. Από το Δ η παράλληλη ευθεία προς την ΑΕ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ζ. Να δείξετε ότι (ΖΒΕ)=(ΑΒΓ)/2.

49. Να αποδείξετε ότι από οποιοδήποτε σημείο μιας πλευράς ενός τριγώνου διέρχεται ευθεία που χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα χωρία.

50. Αν είναι ΑΔ,ΒΕ,ΓΖ τα ύψη οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ και Η το ορθόκεντρό του, να δείξετε ότι $\frac{H\Delta}{\upsilon_\alpha} + \frac{HE}{\upsilon_\beta} + \frac{HZ}{\upsilon_\gamma} = 1.$

51. Σε τρίγωνο ΑΒΓ οι διχοτόμοι του ΑΔ και ΓΕ τέμνονται στο σημείο Ι. Αν (β+γ).(ΑΕΙ)=α.(ΑΙΓ) να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

52. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το έγκεντρό του Ι. Αν ισχύει (2β+γ)(ΙΒΓ)=β.(ΑΒΓ), να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

53. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΔ και τη διάμεσο ΓΕ. Αν ισχύει η σχέση 4γ.(ΒΔΕ)=β.(ΑΒΓ) να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

54. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι διχοτόμοι του ΒΔ,ΓΕ. Αν ισχύει η σχέση $(AB\Gamma) = \frac{(A\Delta E)}{(1+\frac{\alpha}{\beta})^2}$, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

55. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ προς το μέρος του Α κατά τμήμα ΑΕ=2ΑΒ.Να αποδείξετε ότι (ΒΔΕ)=3(ΑΔΓ).

56. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με β=2γ. Αν ΑΔ η εσωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ και ΒΜ=μ_β, δείξτε ότι:
(α) 2.(ΒΜΔ)=(ΔΜΓ) (β) 3.(ΜΔΓ)=(ΑΒΓ).

57. Αν Μ,Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ,ΓΔ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι (ΑΜΝ)=$\frac{3}{8}$(ΑΒΓΔ).

58. Στις πλευρές γ,α,β τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ,Ε,Ζ τέτοια, ώστε ΑΔ=λγ , ΒΕ=λα και ΓΖ=λβ (0<λ<1). Να υπολογισθεί ο λόγος $\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)}$ συναρτήσει του λ και να βρεθεί η τιμή του λ ώστε το τρίγωνο ΔΕΖ να έχει το ελάχιστο δυνατό εμβαδό.

59. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $\beta=1+\sqrt{2}$, γ=2 και εμβαδόν $E=\frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4}$. Να υπολογίσετε την πλευρά α.

60. Έστω ΑΔ ύψος και Η το ορθόκεντρο οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι $\frac{\beta\gamma}{HB.H\Gamma}=\frac{A\Delta}{H\Delta}$.

61. Σε κάθε κανονικό ν-γωνο να δειχτεί ότι κάθε μια από τις εξωτερικές του γωνίες είναι ίση με την κεντρική γωνία του.

62. Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ. Έστω Κ τομή των διαγωνίων ΑΕ,ΓΖ και Λ η τομή των ευθειών ΒΚ,ΕΖ. Τότε:

(α) $KZ=\frac{1}{4}\Gamma Z$ (β) $\frac{\Lambda Z}{\Lambda E}=\frac{1}{2}$.

63. Να δειχτεί ότι τα σημεία που τριχοτομούν (χωρίζουν σε τρία ίσα μέρη) τις πλευρές ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ πλευράς α, είναι κορυφές κανονικού εξαγώνου και να βρεθεί το εμβαδόν του συναρτήσει του α.

64. Σε κάθε κανονικό ν-γωνο πλευράς λ_ν ,αποστήματος α_ν και κεντρικής γωνίας ω_ν , να δειχθεί:

(α) $\lambda_\nu=2R\eta\mu(\frac{\omega_\nu}{2})$ (β) $\alpha_\nu=R\sigma\upsilon\nu(\frac{\omega_\nu}{2})$.

65. Σε ένα κανονικό ν-γωνο $A_1A_2\ldots A_\nu$, αν $A_1\Delta$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $A_3\hat{A}_1A_2$ και ισχύει $A_\nu\hat{A}_1\Delta=135^O$, να δειχτεί ότι ν=10.

66. Σε κύκλο (Ο,R) θεωρούμε τα τόξα $\hat{AB}=60^o$ και $\hat{A\Gamma}=90^o$ (το Α ανήκει στο «μικρό» τόξο ΒΓ). Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

67. Σε κύκλο (Ο,R) είναι εγγεγραμμένο κανονικό ν-γωνο με εμβαδόν Ε και περιγεγραμμένο κανονικό ν-γωνο με εμβαδόν Ε΄ έτσι, ώστε να ισχύει $\frac{E}{E'}=\frac{3}{4}$. Να δείξετε ότι ν=6.

68. Δείξτε ότι το εμβαδόν τετραγώνου εγγεγραμμένο σε ημικύκλιο ακτίνας R είναι τα $\frac{2}{5}$ του εμβαδού του εγγεγραμμένου τετραγώνου σε κύκλο ακτίνας R.

69. Ένα κανονικό εξάγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Έξω από το εξάγωνο κατασκευάζουμε τετράγωνα με πλευρές τις πλευρές του εξαγώνου.
- (α) αποδείξτε ότι οι κορυφές των τετραγώνων, που δεν είναι κορυφές του εξαγώνου, σχηματίζουν κανονικό 12-γωνο και
- (β) να βρεθεί το εμβαδόν του παραπάνω 12-γώνου συναρτήσει του R.

70. Ένα κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R Αν οι προεκτάσεις των ΑΒ και ΔΓ τέμνονται στο σημείο Μ, να βρεθούν συναρτήσει του R τα εμβαδά των τριγώνων ΜΒΓ και ΜΕΖ.

71. Να υπολογισθεί το μήκος του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου
- (α) ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές 3cm και 4cm
- (β) ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α.

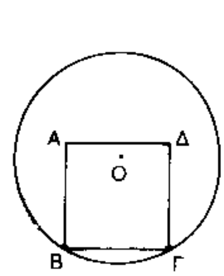
72. Δύο κύκλοι με ακτίνες R και 3R εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Αν ΒΓ είναι μια κοινή εξωτερική εφαπτομένη των κύκλων, να υπολογισθεί η περίμετρος του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση της ακτίνας R.

73. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι (Ο,R) , (Ο,2R) και μια χορδή ΑΒ του (Ο,2R) που εφάπτεται στον(Ο,R). Να βρεθεί το μήκος του «μικρού» τόξου $\overset{\frown}{AB}$ του κύκλου(Ο,2R).

74. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,ρ). Θεωρούμε τους τρεις κύκλους που εφάπτονται του (Ο,ρ) και δύο πλευρών του τριγώνου. Να δειχτεί ότι το άθροισμα των μηκών αυτών των τριών κύκλων ισούται με το μήκος του κύκλου (Ο,ρ).

75. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και δύο παράλληλες χορδές του ΑΒ=λ_3 και ΓΔ=λ_6 ώστε το Ο να μην είναι μεταξύ αυτών. Να βρεθεί η περίμετρος του μεικτόγραμμου τραπεζίου που έχει κορυφές τα σημεία Α,Β,Γ,Δ.

76. Δίνεται κύκλος (Ο,R=1) και ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 1,τοποθετημένο όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Στρέφουμε το τετράγωνο περί το Γ και κατά τη φορά στροφής των δεικτών του ρολογιού, μέχρι το Δ να γίνει σημείο του κύκλου. Να βρεθεί το μήκος του τόξου που διαγράφεται από το σημείο Α.



77. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και δύο κάθετες διάμετροι αυτού ΑΒ και ΓΔ. Γράφουμε το τόξο του κύκλου (Α,ΑΓ) που έχει άκρα τα Γ,Δ και τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε. Να βρεθεί το εμβαδόν του μηνίσκου ΓΕΔΒΓ.

78. Με κέντρα τις κορυφές τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α και ακτίνας α/2 γράφουμε τεταρτοκύκλια εντός του τετραγώνου. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σταυρού που σχηματίζεται.

79. Με κέντρα τις κορυφές Α,Γ τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α και με την ίδια ακτίνα α, γράφουμε κυκλικά τόξα στο εσωτερικό του τετραγώνου. Να βρεθεί το εμβαδόν του «φύλλου» που σχηματίζεται μεταξύ των δύο αυτών τόξων.

80. Να βρεθεί ο λόγος των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων στα οποία διαιρείται ένας κύκλος (Ο,R) από μια πλευρά εγγεγραμμένου σ' αυτόν κανονικού εξαγώνου.

81. Να βρεθεί ο λόγος των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων στα οποία διαιρείται ένας κύκλος (Ο,R) από μια χορδή που είναι μεσοκάθετη μιας ακτίνας του.

82. Να δειχθεί ότι το εμβαδό ενός κύκλου που είναι εγγεγραμμένος σε τεταρτοκύκλιο ακτίνας R είναι ίσο με $\pi R^2(3-2\sqrt{2})$.
(Υπόδ.: υπολογίστε πρώτα την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου)

83. Δύο κύκλοι με ακτίνες (Ο,R) και (Κ,3R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Αν ΜΝ είναι μια κοινή εξωτερική εφαπτομένη των κύκλων, να υπολογισθεί το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΜΝ ως συνάρτηση της ακτίνας R.

84. Δίνεται τεταρτοκύκλιο $\hat{ΟΒΓ}$ ακτίνας R. Δείξτε ότι η χορδή ΒΓ <u>δε</u> χωρίζει το τεταρτοκύκλιο σε δύο ισοδύναμα χωρία.

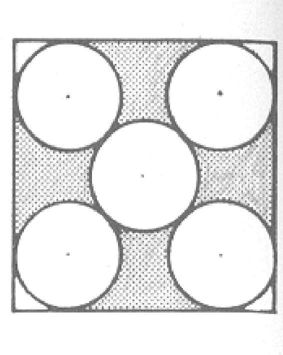
85. Να αποδείξετε ότι αν ένα κανονικό πολύγωνο έχει δύο κάθετες διαγώνιες, τότε το πλήθος των πλευρών του είναι άρτιος αριθμός.

86. Δύο κύκλοι $(Ο_1,R_1)$ και $(Ο_2,R_2)$ εφάπτονται εξωτερικά και έστω $Ε_1,Ε_2$ τα εμβαδά των κύκλων αυτών αντίστοιχα. Αν Ε είναι το εμβαδόν του κύκλου που έχει διάμετρο το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων, να δείξετε ότι $Ε^2=Ε_1.Ε_2$

87. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και σημείο Α με ΟΑ=2R. Αν ΑΒ,ΑΓ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο, να βρεθεί το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ. (όπου $\hat{ΒΓ}$ το μικρότερο τόξο).

88. Δίνεται κύκλος (O,R) στον οποίο είναι εγγεγραμμένο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=60^o$. Αν εκτός του τριγώνου γραφεί ημικύκλιο διαμέτρου ΒΓ, να βρεθεί το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου.

89. Δίνεται τετράγωνο πλευράς α και οι πέντε ίσοι κύκλοι μέσα σε αυτό, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρεθεί ως συνάρτηση του α του εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του τετραγώνου.



90. Δίνονται τρεις ίσοι κύκλοι ακτίνας 1 που εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο. Δίνεται επίσης ένας κύκλος που εφάπτεται στους παραπάνω τρεις κύκλους, όπως στο διπλανό σχήμα. . Να βρεθεί του εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του εξωτερικού κύκλου.