-ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝ. ΠΑΙΔΕΙΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ -
ΟΙ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΤΕΡΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΜΕ ΤΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΟΥΣ

ΠΡΟΤΑΣΗ 1 **Χρησιμοποιώντας τη σχέση συν(α-β) = συνασυνβ + ημαημβ να αποδείξετε ότι:**
α)συν(α+β) = συνασυνβ – ημαημβ
β)ημ(α+β) = ημασυνβ + συναημβ
γ)ημ(α-β) = ημασυνβ – συναημβ.
[Απόδειξη: α) Στην ισότητα συν(α-β) = συνασυνβ + ημαημβ αντικαθιστούμε το β με το –β και παίρνουμε συν(α-(-β)) = συνασυν(-β) + ημαημ(-β) => συν(α+β) = συνασυνβ – ημαημβ

β) Επίσης, $\eta\mu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)) = \sigma\upsilon\nu((\frac{\pi}{2}-\alpha)-\beta) = \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}-\alpha)\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu(\frac{\pi}{2}-\alpha)\eta\mu\beta =$ *ημασυνβ + συναημβ=> ημ(α+β) = ημασυνβ + συναημβ*

γ) Στην παραπάνω σχέση ημ(α+β) = ημασυνβ + συναημβ αντικαθιστούμε το β με το –β και παίρνουμε ημ(α+(-β)) = ημασυν(-β) + συναημ(-β)= ημασυνβ – συναημβ => ημ(α-β) = ημασυνβ – συναημβ].

ΠΡΟΤΑΣΗ 2 **Αποδείξτε τους τύπους:** $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$ **,** $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta) = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$ **.**

[Απόδειξη: Για να ορίζονται οι εφ(α + β) , εφα , εφβ πρέπει συν(α + β) ≠ 0 , συνα ≠ 0 και συνβ ≠ 0. Έχουμε

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)} = \frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta} = \frac{\frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}+\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}}{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}-\frac{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}.$$

Αν στην παραπάνω ισότητα αντικαταστήσουμε το β με –β, έχουμε $\varepsilon\varphi(\alpha+(-\beta)) = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi(-\beta)}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi(-\beta)} = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$ *].*

ΠΡΟΤΑΣΗ 3 **Αποδείξτε τους τύπους:** $\sigma\varphi(\alpha+\beta) = \dfrac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}$ **,** $\sigma\varphi(\alpha-\beta) = \dfrac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}$

[Απόδειξη:Για να ορίζονται οι σφ(α + β) , σφα , σφβ πρέπει ημ(α + β) ≠ 0 , ημα ≠ 0 και ημβ ≠ 0. Έχουμε

$$\sigma\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}{\eta\mu(\alpha+\beta)} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta} = \frac{\frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}+\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}}{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}-\frac{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}} = \frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}.$$

Αν στην παραπάνω ισότητα αντικαταστήσουμε το β με –β, έχουμε

$$\sigma\varphi(\alpha+(-\beta)) = \frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi(-\beta)-1}{\sigma\varphi(-\beta)+\sigma\varphi\alpha} = \frac{-\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta-1}{-\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha} = \frac{-(\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta+1)}{-(\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha)} = \frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}].$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 4 **Αποδείξτε τους τύπους: ημ2α= 2ημασυνα , συν2α = συν^2 α - ημ^2 α , συν2α =2συν^2 α – 1 , συν2α =1 - 2ημ^2 α , εφ2α =** $\dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$

[Απόδειξη: ***ημ2α*** *= ημ(α + α) = ημασυνα + ημασυνα =* ***2ημασυνα***
συν2α *= συν(α + α) = συνασυνα – ημαημα =* ***συν^2 α - ημ^2 α***
συν2α = συν^2 α - ημ^2 α = *συν^2 α – (1 - συν^2 α)* ***= 2συν^2 α - 1***
συν2α = συν^2 α - ημ^2 α = *(1 - ημ^2 α) - ημ^2 α* ***= 1 - 2ημ^2 α***
εφ2α $= \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\alpha} = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$*].*

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 5</u> Αποδείξτε τους <u>τύπους</u> <u>αποτετραγωνισμού:</u>

$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha} = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$, $\boldsymbol{\eta\mu^2 \alpha} = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$, $\boldsymbol{\varepsilon\varphi^2 \alpha} = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$

[Απόδειξη: $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\,\sigma\upsilon\nu^2 \alpha - 1 \Leftrightarrow 1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\,\sigma\upsilon\nu^2 \alpha \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 \alpha = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$

$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 1 - 2\,\eta\mu^2 \alpha \Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\,\eta\mu^2 \alpha \Leftrightarrow \eta\mu^2 \alpha = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$,

$\varepsilon\varphi^2 \alpha = \dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \dfrac{\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}} = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$*].*

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 6</u> Το υπόλοιπο υ της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(χ) με το χ-ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για χ = ρ. Είναι δηλαδή υ = P(ρ).

[Απόδειξη: Η ταυτότητα της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(χ) με το πολυώνυμο χ – ρ γράφεται P(χ) = (χ – ρ) π(χ) + υ(χ). Επειδή ο διαιρέτης χ – ρ είναι πρώτου βαθμού το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι ένα σταθερό πολυώνυμο υ .Άρα P(χ) = (χ – ρ) π(χ) + υ , θέτω χ = ρ και παίρνουμε P(ρ) = (ρ – ρ) π(ρ) +υ = 0+υ = υ. *Επομένως P(χ) = (χ – ρ) π(χ) + P(ρ)].*

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 7</u> Ένα πολυώνυμο P(χ) έχει παράγοντα το χ – ρ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(χ) , δηλαδή αν και μόνο αν P(ρ) = 0.

[Απόδειξη: Έστω χ – ρ είναι παράγοντας του P(χ) , τότε P(χ) = (χ – ρ)π(χ). Αν θέσω χ = ρ παίρνουμε P(ρ) = (ρ – ρ)π(ρ) = 0 που σημαίνει ότι το ρ είναι ρίζα του P(χ) .
Αντίστροφα , έστω ρ ρίζα του P(χ) δηλαδή P(ρ) = 0 τότε από την σχέση P(χ) = (χ – ρ) π(χ) + P(ρ) παίρνουμε P(χ) = (χ – ρ) π(χ) που σημαίνει ότι το χ – ρ είναι παράγοντας του P(χ)].

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 8</u> (Ακέραιων ριζών) Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu \chi^\nu + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + ... + \alpha_1\chi + \alpha_0$ = 0 , με ακέραιους συντελεστές . Αν ο ακέραιος ρ $\neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

[Απόδειξη: Αν $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης τότε διαδοχικά έχουμε
$\alpha_\nu \rho^\nu + \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} + ... + \alpha_1\rho + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = -\alpha_\nu\rho^\nu - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} - ... - \alpha_1\rho \Leftrightarrow \alpha_0 = \rho(-\alpha_\nu\rho^{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2} - .... - \alpha_1)$.
Επειδή οι ρ , $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ είναι ακέραιοι έπεται ότι και ο $-\alpha_\nu\rho^{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2} - .... - \alpha_1$ είναι ακέραιος . Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0].

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 9</u> Ο ν-οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι
$\boldsymbol{\alpha_\nu} = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$

[Απόδειξη:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_1 \\ \alpha_2 = \alpha_1 + \omega \\ \alpha_3 = \alpha_2 + \omega \\ .... \\ \alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu-2} + \omega \\ \alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \omega \end{array}\right\} \text{προσθέτω κατά μέλη και έχω}$$

$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu = \alpha_1 + \alpha_1 + \omega + ... + \alpha_{\nu-1} + \omega \Leftrightarrow \alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$ *].*

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 10</u> Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει
$\beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$**.** (ο β λέγεται αριθμητικός μέσος των α , β)

[Απόδειξη:Αν πάρουμε τρεις διαδοχικούς όρους α , β , γ μιας αριθμητικής προόδου με διαφορά ω τότε ισχύει
$\beta - \alpha = \omega$ *και* $\gamma - \beta = \omega$*, άρα* $\beta - \alpha = \gamma - \beta$ *ή* $\beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$.

Αντίστροφα, αν για τους αριθμούς α , β , γ ισχύει $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2} \Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \beta - \alpha = \gamma - \beta$ *που σημαίνει ότι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου].*

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 11</u> Ο ν-οστός όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι $\alpha_\nu = a_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$

[Απόδειξη:

$\alpha_1 = \alpha_1$

$\alpha_2 = \alpha_1 \lambda$

$\alpha_3 = \alpha_2 \lambda$

....

$\alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu-2} \lambda$

$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} \lambda$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ν αυτές ισότητες παίρνουμε $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_\nu = a_1 \cdot a_1 \cdot \lambda \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_{\nu-1}\lambda$ *και διαγράφοντας έχουμε* $\alpha_\nu = a_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$ *].*

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 12</u> Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει β^2=αγ (ο θετικός αριθμός $\sqrt{\alpha\gamma}$ λέγεται γεωμετρικός μέσος των α , γ) .

[Απόδειξη:Αν πάρουμε τρεις διαδοχικούς όρους α , β , γ μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ τότε ισχύει $\frac{\beta}{a} = \lambda$ *και* $\frac{\gamma}{a} = \lambda$ *επομένως* $\frac{\beta}{a} = \frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha\gamma$

Αντίστροφα ,αν για τρεις αριθμούς α , β , γ $\neq 0$ *ισχύει* $\beta^2 = \alpha\gamma \Leftrightarrow \frac{\beta}{a} = \frac{\gamma}{\beta}$ *που σημαίνει ότι οι α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου].*

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 13</u> Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου α_ν με λόγο λ$\neq 1$ είναι

$$\mathbf{S}_\nu = a_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$$

[Απόδειξη: Έχουμε $S_\nu = a_1 + a_1\lambda + a_1\lambda^2 + \ldots + a_1\lambda^{\nu-1}$ *και πολλαπλασιάζουμε με λ ,* $\lambda S_\nu = a_1\lambda + a_1\lambda^2 + a_1\lambda^3 + \ldots + a_1\lambda^\nu$ *.Αφαιρούμε τις δύο σχέσεις κατά μέλη ,* $\lambda\ S_\nu - S_\nu = a_1\lambda^\nu - a_1 \Leftrightarrow (\lambda - 1) S_\nu = a_1(\lambda^\nu - 1) \Leftrightarrow S_\nu = a_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$ *].*

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 14</u> Αν 0 <α $\neq 1$ τότε για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς θ_1,θ_2,θ και για κάθε κ$\in R$ ισχύουν :

α) $\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$

β) $\log_a\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$

γ) $\log_a(\theta)^\kappa = \kappa \cdot \log_a \theta$

[Απόδειξη: Ας ονομάσουμε $\chi = \log_a \theta_1$ *,* $\psi = \log_a \theta_2$ *και* $\omega = \log_a \theta$ *, τότε παίρνουμε ισοδύναμα* $\theta_1 = \alpha^\chi$ *και* $\theta_2 = \alpha^\psi$ *και* $\theta = \alpha^\omega$ *.*

α) $\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a(\alpha^\chi \cdot \alpha^\psi) \overset{\text{δυνάμεις}}{=\!=\!=\!=} \log_a(\alpha^{\chi+\psi}) \overset{\text{ιδιότητα λογάριθμου}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \chi + \psi = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$

β) $\log_a\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log_a(\frac{\alpha^\chi}{\alpha^\psi}) \overset{\text{δυνάμεις}}{=\!=\!=\!=} \log_a(\alpha^{\chi-\psi}) \overset{\text{ιδιότητα λογάριθμου}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \chi - \psi = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$

γ) $\log_a(\theta)^\kappa = \log_a\left[\left(\alpha^\omega\right)^\kappa\right] = \log_a\left(\alpha^{\omega\kappa}\right) \overset{\text{ιδιότητα λογάριθμου}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \omega\kappa = \kappa\omega = \kappa \cdot \log_a \theta$ *].*