

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1. Αν είναι $\frac{\pi}{4} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:
(α) $\sin 2\alpha$ και $\sin 2\beta$, (β) $\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ και $\sin(\frac{\pi}{4} - \beta)$.
2. Να λύσετε τις εξισώσεις:
(α) $\sin 3\chi = \eta\mu(\chi + \frac{\pi}{3})$, (β) $\eta\mu \frac{\chi}{2} = \sin 2\chi$.
3. Αν $\alpha = \frac{\epsilon\phi 50^\circ - \epsilon\phi 5^\circ}{1 - \epsilon\phi 50^\circ \cdot \epsilon\phi 5^\circ}$ και $\beta = \frac{\epsilon\phi 50^\circ + \epsilon\phi 5^\circ}{1 + \epsilon\phi 50^\circ \cdot \epsilon\phi 5^\circ}$, να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = \epsilon\phi 55^\circ$.
4. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\eta\mu A \cdot \sin B = 1 + \sin A \cdot \eta\mu B$, δείξτε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.
5. Να λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi]$ τις εξισώσεις:
(α) $\sin(\sin(\sin \chi)) = 2$,
(β) $(\sqrt{3} - \epsilon\phi \chi)(1 + \epsilon\phi \chi) = 0$,
(γ) $(2\sin \chi - 1)(\epsilon\phi \chi - 1)\eta\mu \chi = 0$,
(δ) $(2\eta\mu \chi + \sqrt{2})(1 + \sin \chi)(1 + \epsilon\phi^4 \chi) = 0$.
6. Να λυθεί η εξίσωση: $3\eta\mu^3 \chi + 3\eta\mu \chi \cdot \sin^2 \chi + 2\sin^2 \chi = 0$.
7. Να λυθεί η εξίσωση: $3\epsilon\phi^2 \chi - 16\eta\mu^2 \chi + 3 = 0$.
8. Να δείξετε ότι η παράσταση $A = \sin^2 \chi - 2\sin \chi \cdot \sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \chi) + \sin^2(\alpha + \chi)$ είναι ανεξάρτητη του χ .
9. Αν ισχύει $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \sin \beta$, να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2(\alpha + \beta) = (\eta\mu \alpha + \eta\mu \beta)^2$.
10. Να αποδειχθούν οι παρακάτω ισότητες:
(α) $\eta\mu \alpha \cdot \eta\mu(\beta - \gamma) + \eta\mu \beta \cdot \eta\mu(\gamma - \alpha) + \eta\mu \gamma \cdot \eta\mu(\alpha - \beta) = 0$,
(β) $\eta\mu^2 \alpha + \eta\mu(60^\circ - \alpha) \cdot \eta\mu(60^\circ + \alpha) = \frac{3}{4}$,
(γ) $\sin^2 \alpha + \sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ - \alpha) = \frac{3}{2}$.

- 11.** Αν A, B, Γ είναι γωνίες τριγώνου $AB\Gamma$ με $\varepsilon\varphi A = \frac{1}{2}$ και $\varepsilon\varphi B = \frac{1}{3}$ να αποδείξετε ότι $\hat{\Gamma} = 135^\circ$.
- 12.** Αν ισχύει $\eta\mu\chi + \eta\mu\psi = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί το $\sigma\upsilon\nu(\chi - \psi)$.
- 13.** Αν $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, να αποδειχθεί ότι:
- (α) $\varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\gamma + \varepsilon\varphi\gamma \cdot \varepsilon\varphi\alpha = 1$
 - (β) $\sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi\beta \cdot \sigma\varphi\gamma = \sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\gamma$
 - (γ) $\varepsilon\varphi^2\alpha + \varepsilon\varphi^2\beta + \varepsilon\varphi^2\gamma \geq 1$.
- 14.** (α) Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\varepsilon\varphi B = \frac{\sigma\upsilon\nu(B - \Gamma)}{\eta\mu A - \eta\mu(B - \Gamma)}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο,
- (β) Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\frac{\eta\mu A}{\eta\mu B} = 2\sigma\upsilon\nu\Gamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
- 15.** Αν είναι $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{4}$, να υπολογιστεί το $\sigma\upsilon\nu\alpha$.
- 16.** Να αποδειχτεί ότι: $(\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta)^2 + (\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta)^2 = 4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$.
- 17.** Να λυθούν οι εξισώσεις: (α) $\sigma\upsilon\nu^4\chi + \eta\mu^4\chi = \frac{1}{2}$,
- (β) $(1 + \eta\mu 2\chi) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \chi\right) = 1$.
- 18.** Να λυθούν οι εξισώσεις: (α) $\eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi = 1$,
- (β) $\sigma\upsilon\nu\chi = 2\eta\mu\frac{\chi}{2} + 1$,
- (γ) $\varepsilon\varphi 2\chi = 2\eta\mu\chi$, $\chi \in (0, \pi)$.
- 19.** Να αποδείξετε ότι:
- (α) $\sigma\upsilon\nu^4\alpha + \sigma\upsilon\nu^4\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\upsilon\nu^4\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu^4\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}$.
- (β) $[\eta\mu\theta(1 + \eta\mu\theta) + \sigma\upsilon\nu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)][\eta\mu\theta(1 - \eta\mu\theta) + \sigma\upsilon\nu\theta(1 - \sigma\upsilon\nu\theta)] = \eta\mu 2\theta$.
- 20.** Δείξτε ότι: (α) $\varepsilon\varphi^2\frac{\pi}{12} + \varepsilon\varphi^2\frac{5\pi}{12} = 14$,
- (β) $\varepsilon\varphi^2\alpha + \sigma\varphi^2\alpha = \frac{2(3 + \sigma\upsilon\nu 4\alpha)}{1 - \sigma\upsilon\nu 4\alpha}$.

21. Δείξτε ότι: $\frac{\eta\mu 4\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 4\alpha} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} = \epsilon\phi \frac{\alpha}{2}$.
22. Να λυθούν οι εξισώσεις: (α) $\eta\mu\chi \cdot \epsilon\phi \frac{\chi}{2} = \sigma\upsilon\nu\chi$,
 (β) $3\eta\mu^2\chi + 5\sigma\upsilon\nu^2\chi - \sqrt{3}\eta\mu 2\chi = 2$,
 (γ) $1 + \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu 2\chi + \sigma\upsilon\nu 2\chi = 0$.
23. Να λυθεί η εξίσωση: $\eta\mu^2(\chi + 15^\circ) - \eta\mu^2(\chi - 15^\circ) = \frac{1}{4}$.
24. Να αποδειχτεί ότι: (α) $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{7} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{7} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$,
 (β) $\eta\mu 10^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 20^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 40^\circ = \frac{1}{8}$,
 (γ) $\sigma\upsilon\nu 20^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 40^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 80^\circ = \frac{1}{16}$.
25. (α) Δείξτε ότι για κάθε γωνία α ισχύει: $\sigma\upsilon\nu 3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha$,
 (β) Να λυθεί η εξίσωση: $1 + 2\eta\mu 2\chi = \sigma\phi\chi$.
26. Να λυθεί η εξίσωση: $2\eta\mu\chi - \eta\mu 2\chi = 2(1 - \sigma\upsilon\nu\chi)^2$.
27. (α) Αν για τις γωνίες α, β ισχύει $\eta\mu^2\beta = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$, να αποδείξετε ότι $2\sigma\upsilon\nu^2(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \sigma\upsilon\nu 2\beta$.
 (β) Αν για τις γωνίες α, β ισχύει $\epsilon\phi^2\alpha = 1 + 2\epsilon\phi^2\beta$, να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu^2\beta = 1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha$.
28. (α) Δείξτε ότι για κάθε γωνία α ισχύει: $\eta\mu 3\alpha = 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha$,
 (β) Αν $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = 0$, να δείξετε ότι $\frac{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma}{\eta\mu 3\alpha + \eta\mu 3\beta + \eta\mu 3\gamma} = -\frac{1}{12}$.
29. (α) Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\eta\mu^2 A = \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο,
 (β) Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma = 2$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
30. Να δείξετε ότι: $\frac{1}{\eta\mu 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu 10^\circ} = 4$.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

- 31.** Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=(\alpha+1)x^3+2x^2+\beta x+\gamma-2$ και $Q(x)=3x^3+\delta x^2+6x+1$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο $F(x)=P(x)+Q(x)$ είναι:
- (α) βαθμού 3,
 - (β) βαθμού 2,
 - (γ) βαθμού 0,
 - (δ) το μηδενικό πολυώνυμο.
- 32.** (α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε τα πολυώνυμα $P(x)=4x^2+x+9$ και $Q(x)=\alpha(x+3)(x+4)+\beta x(x-2)+\gamma$ να είναι ίσα.
(β) Υπάρχουν τιμές $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε τα πολυώνυμα $f(x)=x^3+x^2+1$ και $g(x)=\alpha(x+3)(x+4)+\beta x(x-2)+\gamma$ να είναι ίσα;
- 33.** Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ τρίτου βαθμού το οποίο να έχει ρίζα το 0 και να ικανοποιεί την σχέση $P(x-1)=P(x)-x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.
- 34.** Αν το πολυώνυμο $P(x)=x^4+4x^3-2x^2+\alpha x+\beta$ είναι τέλειο τετράγωνο πολυωνύμου, ναδειχτεί ότι $3\alpha+4\beta=0$.
- 35.** Αν είναι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ και $\alpha+\beta+\gamma=0$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x)=3(\alpha-\beta)x^9+2(\beta-\gamma)x^3-13(\gamma-\alpha)$ είναι το μηδενικό.
(Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα του Euler...)
- 36.** (α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x+2$, να δείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x)=P(3x+13)+x^2-25$ έχει παράγοντα το $x+5$.
(β) Αν $P(x)$ είναι ένα μη μηδενικό πολυώνυμο και το $x-\alpha$ διαιρεί ακριβώς το πολυώνυμο $f(x)=P(x)-x$, να δείξετε ότι το $x-\alpha$ διαιρεί ακριβώς το πολυώνυμο $g(x)=P(P(x))-x$.
- 37.** (α) Να βρείτε πολυώνυμο το οποίο όταν διαιρεθεί με το x^2+x+1 δίνει πηλίκο $2x+1$ και υπόλοιπο $x+3$.
(β) Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)=x^2+x^2+2(\alpha^2-3\alpha+1)x-3(4\alpha+1)$ δια του $x+2$, είναι ανεξάρτητο του α .
- 38.** Να προσδιορίσετε το $\theta \in (0, \pi)$ ώστε το $x-1$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)=x^4-(\sin^2\theta)x^3+2(\eta\mu\theta)x^2+x-4$.

39. Αν το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+ax^2-13x+\beta$ έχει ως παράγοντα το x^2-x-6 , να προσδιορίσετε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$.
40. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με τα πολυώνυμα $x+1$ και $x+2$ αφήνει υπόλοιπο -1 και 4 αντίστοιχα. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x+1)(x+2)$.
41. Αν είναι $f(x)=\frac{(x-1)^{2\nu}}{4^\nu}-1$ και $g(x)=\frac{x+1}{4^\nu}$ να δείξετε ότι η διαίρεση $f(x):g(x)$ είναι τέλεια (ν φυσικός αριθμός).
42. Αν το πολυώνυμο $P(x)=-\nu x^{\nu+1}+(\nu+1)x^\nu+a$ διαιρείται με το $x-1$, τότε να δείξετε ότι διαιρείται και με το $(x-1)^2$.
43. Να λυθούν οι εξισώσεις:
(α) $x^3-9x^2+8x=0$,
(β) $x^3-3x^2-3x+1=0$,
(γ) $x^4-4x^3+12x-9=0$,
(δ) $2x^3+3x^2+8x+12=0$.
44. Έστω οι ακέραιοι a, β και το πολυώνυμο $P(x)=x^4+ax^3+\beta x+2$. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει δύο θετικές ακέραιες ρίζες, να βρείτε τους a, β .
45. Να λυθούν οι εξισώσεις:
(α) $x^6-9x^3+8=0$,
(β) $(x+1)^4-5(x+1)^2+4=0$.
46. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=2x^3-3x^2+ax+\beta$, $Q(x)=x^2-x-2$. Αν το $Q(x)$ διαιρεί ακριβώς το $P(x)$, να λυθεί η ανίσωση $P(x)<0$.
47. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $x^\nu-1=0$ (ν φυσικός αριθμός) έχει ακριβώς δύο ακέραιες ρίζες, όταν ν -άρτιος και έχει ακριβώς μια ακέραια ρίζα, όταν ν -περιττός.
48. Να λυθεί η ανίσωση: $x^4-13x^2+36<0$.

49. Να βρεθούν τρεις διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί τέτοιοι, ώστε ο κύβος του μεγαλύτερου να ισούται με το τριπλάσιο του αθροίσματος των κύβων των δύο άλλων.
50. Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{\chi^3 + 2\chi - 4}{\chi - 2} \geq 1$.
51. Να λυθούν οι εξισώσεις: (α) $\chi^2 + \frac{1}{\chi^2} = \chi + \frac{1}{\chi}$, (β) $\chi^3 + \frac{1}{\chi^3} = 6(\chi + \frac{1}{\chi})$.
52. Να λυθεί η εξίσωση: $(\chi + 2)\sqrt{\chi + 5} = (\chi + 3)\sqrt{\chi + 2}$.
53. Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{\frac{\chi + 9}{\chi}} + 4\sqrt{\frac{\chi}{\chi + 9}} = 4$.
54. Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{2 + \sqrt{\chi - 5}} = \sqrt{13 - \chi}$.
55. Να λυθούν οι ανισώσεις: (α) $\chi + 4 \geq \sqrt{\chi}$ (β) $\chi \leq \sqrt{\chi + 2}$.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

56. Σε μια αριθμητική πρόοδο η διαφορά ω και ο δεύτερος όρος είναι η μικρότερη και η μεγαλύτερη ρίζα αντίστοιχα της πολυωνυμικής εξίσωσης $\chi^3 - 6\chi^2 + 11\chi - 6 = 0$. Να βρεθεί το $10^{\text{ος}}$ όρος της προόδου.
57. Αν οι αριθμοί $\sin^2(\frac{\pi}{4} - \chi)$, $\sin^2\chi$, $\sin^2(\frac{\pi}{4} + \chi)$ με $\chi \in [0, 2\pi]$, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να βρεθεί το χ .
58. Να βρεθούν τρεις αριθμοί που είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν το άθροισμά τους είναι 21 και το γινόμενό τους 315.
59. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύει: $\alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_8 = 35$ και $S_5 = \alpha_7 + 20$. Να βρείτε την πρόοδο και το άθροισμα S_{20} .
60. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να δειχθεί ότι $(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2 = 6(\beta^2 - \alpha\gamma)$.

- 61.** Να βρεθούν οι συντελεστές α, β του τριωνύμου $x^2 + \alpha x + \beta$, αν οι συντελεστές $1, \alpha, \beta$ είναι διαδοχικοί όροι αύξουσας αριθμητικής προόδου και το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών του είναι 62.
- 62.** Σε μια αύξουσα αριθμητική πρόοδο με 100 όρους, οι δύο μεσαίοι όροι είναι οι αριθμοί 50 και 52. Να βρείτε την πρόοδο και το άθροισμα των όρων της προόδου που είναι μεταξύ του 20^{ου} και του 40^{ου} όρου.
- 63.** Ένας γυμναστής τοποθετεί τους 36 μαθητές μιας τάξης σε σχήμα τριγώνου έτσι, ώστε ο πρώτος στίχος να έχει 1 μαθητή, ο δεύτερος στίχος να έχει 2 μαθητές, ο τρίτος 3 μαθητές κ.ο.κ. Να βρεθεί πόσους στίχους έχει ο σχηματισμός.
- 64.** Αν οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, δείξτε ότι και οι αριθμοί $\beta + \gamma + \delta$, $\gamma + \delta + \alpha$, $\delta + \alpha + \beta$, $\alpha + \beta + \gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου
- 65.** (α) Να βρεθεί το χ ώστε τα τετράγωνα των αριθμών $\chi + 1, \chi + 3$ και $\chi + 9$ να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.
(β) Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να δειχθεί ότι και οι αριθμοί $\alpha^2 - \beta\gamma$, $\beta^2 - \alpha\gamma$ και $\gamma^2 - \alpha\beta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
- 66.** (α) Αν τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να δείξετε ότι τα μήκη αυτά είναι ανάλογα των αριθμών 3, 4, 5.
(β) Αν οι τρεις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά 6, να βρεθούν οι πλευρές του τριγώνου.
- 67.** Σε μια αριθμητική πρόοδο το άθροισμα των 20 πρώτων όρων είναι 1030 και η διαφορά του τρίτου από τον δέκατο όρο είναι 35. Να βρεθούν οι 5 πρώτοι όροι της προόδου.
- 68.** Αν S_1, S_2, S_3 είναι αντίστοιχα τα αθροίσματα των n πρώτων όρων τριών αριθμητικών προόδων, που έχει κάθε μια πρώτο όρο το 1 και διαφορά

1,2,3 αντίστοιχα, να δείξετε ότι οι αριθμοί S_1 , S_2 , S_3 είναι επίσης διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

69. Να αποδειχτεί ότι αν οι πλευρές α, β, γ τριγώνου και η ημιπερίμετρος του είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
70. Μεταξύ των αριθμών 4 και α παρεμβάλλονται 8 αριθμοί έτσι, ώστε οι 10 συνολικά αριθμοί να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά $\frac{5}{2}$. Να βρεθεί ο αριθμός α και η πρόοδος.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

71. Το γινόμενο τριών φυσικών αριθμών είναι 1000 και το άθροισμά τους είναι 35. Αν τα τετράγωνά τους σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο, να βρεθούν οι αριθμοί.
72. Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο (α_n) για την οποία ισχύει: $S_4=40$ και $S_8=3280$.
73. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_n) ισχύει ότι: $\alpha_1=\frac{1}{2}$, $\alpha_x=64$ και $S_x=\frac{255}{2}$ (για κάποιο x φυσικό αριθμό). Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και το x .
74. Να βρεθούν τρεις διαδοχικοί αριθμοί γεωμετρικής προόδου οι οποίοι να έχουν άθροισμα 21 και γινόμενο 64.
75. Να λυθεί η εξίσωση: $5 \cdot 5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^8 \cdot \dots \cdot 5^{2^x} = 5^{255}$. (x φυσικός αριθμός)
76. Αν οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι διαδοχικοί αριθμοί γεωμετρικής προόδου να αποδείξετε ότι: $\alpha^3(\beta+\gamma)(\beta^2+\gamma^2)=\beta^3(\alpha+\delta)(\alpha^2+\delta^2)$.
77. Να βρεθεί ο πρώτος όρος και ο λόγος γεωμετρικής προόδου (α_n) αν ισχύουν οι σχέσεις: $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5=93$ και $\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6=186$.

- 78.** Μεταξύ των αριθμών 5 και 160 να παρεμβληθούν τέσσερις αριθμοί έτσι, ώστε όλοι μαζί οι αριθμοί να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.
- 79.** Να βρεθεί ο γενικός όρος της ακολουθίας (α_n) για την οποία ισχύει: $\alpha_1=3$ και $16\alpha_{n+1}^2 + \alpha_n^2 = 8\alpha_{n+1} \cdot \alpha_n$ ($n=1,2,\dots$)
- 80.** Να βρεθεί ο γενικός όρος της ακολουθίας (α_n) για την οποία ισχύει: $\alpha_1=2$ και $\alpha_n=3\alpha_{n+1} - 2$. ($n=1,2,\dots$)

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

- 81.** Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=2^x - 2^{-x}$ ($x \in \mathbb{R}$)
- (α) Να αποδείξετε ότι η είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$,
- (β) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=0$.
- 82.** Αν $a > 0$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $A = a^{1+\sqrt{3}}$ και $B = a^{2-\sqrt{2}}$.
- 83.** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $2(4^x + 9^x) \geq (2^x + 3^x)^2$.
Πότε ισχύει η ισότητα;
- 84.** Για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$ οι αριθμοί $5^{x+1} + 5^{1-x}$, 6 , $25^x + 25^{-x}$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου;
- 85.** Να λυθούν οι εξισώσεις:
- (α) $x^{\sqrt{16}} = 8 \cdot x^{\sqrt{2-8}}$
- (β) $x^{\sqrt{16}} = 8^{x+1} \cdot \sqrt{2-8}$
- 86.** Αν η εξίσωση $4x^2 - 4(2^0 + 1)x + 9 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες, να προσδιορίσετε το θ .
- 87.** Να λυθούν οι εξισώσεις:
- (α) $7^{\eta\mu^2 x} \cdot 7^{\eta\mu x} = 49$
- (β) $2^{\eta\mu^2 x} - 5 \cdot 2^{\sigma\upsilon\nu^2 x} = -9$.

88. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 2^x - 3^y = -1 \\ 2^x 3^y - 11 \cdot 2^x = -16 \end{cases}$$

89. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 4^x = 5^y \\ 5^x = 4^y \end{cases}$$

90. Να λυθούν οι εξισώσεις:

(α) $27^{x(x+2)} = 243^{x-2}$

(β) $16^{x^2-2x+3} + 5 \cdot 4^{x^2-2x+3} = 6.$

91. Να λυθεί η ανίσωση: $4^{x^2+x+5} < 1.$

92. Να λυθεί η ανίσωση: $e^{x+1} - e < e^{2x} - e^x.$

93. Να λυθεί η ανίσωση: $2 \cdot 4^x + 3 \cdot 9^x > 5 \cdot 6^x$

94. Να λυθεί η ανίσωση: $10 \cdot 3^x > 9^x + 9.$

95. Να λυθούν οι εξισώσεις:

(α) $\sqrt[3]{4^x} = \sqrt{2^{4x+3}}$

(β) $((5^4-x)^{6-x})^{x^4} = 1$

(γ) $100 \cdot 10^x = \sqrt[5]{1000^5}.$

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

96. Ναδειχθεί ότι οι αριθμοί $\frac{1}{3} \log_{3\sqrt{3}} 27$ και $\log_3 5 \cdot \log_{25} 27$ είναι αντίστροφοι.

97. Να συγκριθούν οι αριθμοί $A = \log_2 (8 \cdot \sqrt[3]{4})$ και $B = \log_3 (27 \cdot \sqrt[3]{9})$.

98. Αν $\alpha = \log_{12} 27$ ναδειχθεί ότι $\log_6 16 = \frac{4(3-\alpha)}{3+\alpha}.$

99. Αν $0 < \alpha, \beta, \chi \neq 1$ και $\alpha\beta \neq 1$, να αποδειχθεί ότι:
$$\frac{1}{\log_a \chi} + \frac{1}{\log_b \chi} = \frac{1}{\log_{\alpha\beta} \chi}.$$

100. Να βρεθεί το $\chi \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $2(\log_{\chi} 8)^2 + \log_{\chi} 64 + \log_{\chi} 8 = 9$.

101. Να αποδειχθεί ότι: (α) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_9 10 = (\log 2)^{-1}$
(β) $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9 = 2$.

102. Να αποδειχθεί ότι: (α) $\log_{\sqrt[3]{5}} 2 \cdot \log_{\sqrt[3]{2}} 5 = 9$
(β) $2 \log_{\frac{1}{3}} 27 - 3 \log_{\frac{1}{6}} 6 + \log_{\frac{1}{5}} 125 = -6$.

103. Αν $\alpha, \beta > 0$ και ισχύει η σχέση: $\log\left(\frac{\alpha + \beta}{4}\right) = \frac{\log \alpha + \log \beta}{2}$, να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί α^2 , $7\alpha\beta$, β^2 είναι όροι αριθμητικής προόδου.

104. Αν για τους διαφορετικούς ανά δύο θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει: $\frac{\log \alpha}{\beta - \gamma} = \frac{\log \beta}{\gamma - \alpha} = \frac{\log \gamma}{\alpha - \beta}$, να δειχθεί ότι $\alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta} \cdot \gamma^{\gamma} = 1$.

105. Αν $0 < \alpha, \beta, \gamma, \chi \neq 1$ και οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να δειχθεί ότι οι αριθμοί $\frac{1}{\log_{\alpha} \chi}$, $\frac{1}{\log_{\beta} \chi}$, $\frac{1}{\log_{\gamma} \chi}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

106. Να αποδειχθεί ότι: $5^{\frac{3 - \log 5}{\log 25}} = 10\sqrt{2}$.

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

107. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f με τύπο:

(α) $f(x) = \log_2(1 + \sqrt{2x - 1})$

(β) $f(x) = \log(\log x - 3)$

(γ) $f(x) = \log_x(3x + 4)$

(δ) $f(x) = \log(3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3)$.

108. Να βρεθεί το πρόσημο των αριθμών:

(α) $\log_4\left(\frac{1}{3}\right)$

(β) $\log_{\frac{1}{2}} 5$

(γ) $\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{4}{5}\right)$.

- 109.** Να λυθούν οι ανισώσεις: (α) $\ln x \geq (\ln x)^3$
(β) $2 \ln(x-2) < \ln 2 + \ln x$.
- 110.** Να λυθεί η εξίσωση: $(2 + \log_x 5) \cdot (\log_5 x)^2 = 1$.
- 111.** Να λυθούν οι εξισώσεις:
(α) $\log_{x+1}(x^2 + x - 6) = 2$
(β) $(\log_5 x)^{\log_5 x} = 1$.
- 112.** Να λυθούν οι εξισώσεις: (α) $\ln^3 x - 6 \cdot \ln^2 x + 11 \cdot \ln x - 6 = 0$
(β) $2^{\ln x} + 2^{2-\ln x} = 5$.
- 113.** Να λυθεί η ανίσωση: $\ln \sqrt{x-2} - \ln x < 0$.
- 114.** Να λυθούν οι ανισώσεις: (α) $\log_{4-x}(x-5) > -7$
(β) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) - \log_{\frac{1}{2}}(x-4) > 1$.
- 115.** Για ποιες τιμές του $\theta \in \mathbb{R}$ η ανίσωση: $x^2 - 2(1 + \log \theta)x + 5 - (\log \theta)^2 \geq 0$
αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$;
- 116.** Να λυθεί η ανίσωση: $\log^2 x \geq |2 + \log x|$.
- 117.** Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{1}{\log x + 1} > \frac{1}{\log x - 1} + 2$.
- 118.** Να λυθεί η ανίσωση: $\ln^2 x - 5 \ln x \leq -4$.
- 119.** Να λυθεί η εξίσωση: $(4x)^{\log 2 + \log \sqrt{x}} = 100$.
- 120.** Να λυθεί η εξίσωση: $x^{2 \log_4 x} = x \cdot 16^{\log_4 x}$.
- 121.** Να λυθεί η εξίσωση: $\log_2(\log_2 x) = \log_4(\log_4 x)$.

122. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

$$(α) \begin{cases} \log(x\psi) = \frac{3}{2} \\ \log\left(\frac{x}{\psi}\right) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (β) \begin{cases} \log(x^2 + \psi^2) = 1 + \log 8 \\ \log(x - \psi) + \log 3 = \log(x + \psi) \end{cases}$$

123. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \log_{\psi} x + \log_x \psi = 2 \\ x^2 + \psi = 12 \end{cases}$$

124. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 2^{\log x} - 3^{\log \psi} = 1 \\ 4^{\log x} + 9^{\log \psi} = 25 \end{cases}$$

125. Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10.$
