**Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ . . .**

**1.** Οι μιγαδικοί αριθμοί z και w συνδέονται με την σχέση $w=\dfrac{az+\beta}{z+\gamma}$, όπου $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Όταν z=0 τότε w=3 και όταν z=-1+i τότε w=2- i. Να βρείτε τις σταθερές α,β,γ.

**2.** α) Αν το άθροισμα και το γινόμενο δύο μη πραγματικών μιγαδικών αριθμών z και w είναι πραγματικοί αριθμοί, να δείξετε ότι οι z,w είναι συζυγείς.
β) Αν το άθροισμα δύο μιγαδικών αριθμών είναι πραγματικός αριθμός και η διαφορά τους είναι φανταστικός αριθμός, να δειχθεί ότι οι αριθμοί αυτοί είναι συζυγείς μιγαδικοί.

**3.** Να βρείτε τους $\chi,\psi\in\mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει $\dfrac{x}{2-i}+\dfrac{yi}{2+i}=\dfrac{4}{1-2i}$.

**4.** Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ ο αριθμός $z=(\lambda+i)\cdot(2+i)^2$ είναι α) πραγματικός , β) φανταστικός;

**5.** Αν $z_1=2-\lambda i$ , $z_2=2\lambda+i$ ($\lambda\in\mathbb{R}$) δύο μιγαδικοί αριθμοί , να βρείτε τον αριθμό λ ώστε ο αριθμός $z_1 \,.\, z_2$ να είναι α) πραγματικός β) φανταστικός.

**6.** Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί χ,ψ για τους οποίους οι μιγαδικοί αριθμοί $z=(\chi^2+\psi)+4i$ και $w=-3+\chi^2\psi i$ είναι συζυγείς.

**7.** Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β για τους οποίους οι μιγαδικοί αριθμοί $z=(2-\alpha+\beta)-(2\alpha+3\beta)i$ και $w=(2\beta+\alpha+3)+(\beta-\alpha)i$ είναι συζυγείς.

**8.** Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α,β,γ, με $\gamma\neq 0$ ισχύει: $-\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2\beta}{3}=\dfrac{2}{\gamma}$, να αποδειχθεί ότι $4(\alpha-3\beta)+(\alpha-2\beta)\gamma i=13\alpha-10i$.

**9.** (α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $z=(1+i)^{100}$ είναι πραγματικός και μάλιστα αρνητικός
(β) Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τον αριθμό $w=(1-i)^{415}$.

**10.** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $f(\nu)=\frac{z}{i^\nu}$, $\nu\in N$, $z\in\mathbb{C}$..

α) Να βρείτε το f(10)+f(17)+f(20)+f(39) ,

β) Να λυθεί ως προς z εξίσωση $f(4\kappa+1)=z^2$, $\kappa\in N$.

**11.** Για τις διάφορες τιμές του φυσικού αριθμού ν, να βρεθούν οι τιμές της παράστασης: $A=1-i+i^2-i^3+\ldots+(-1)^\nu i^\nu$.

**12.** α) Αν οι φυσικοί αριθμοί κ,λ,μ,ν αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν με το 4, να δειχθεί ότι $i^\kappa\cdot i^\lambda\cdot i^\mu\cdot i^\nu=1$

β) Αν οι φυσικοί αριθμοί λ,μ,ν αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν με το 4, να δειχθεί ότι $i^\lambda=i^\mu=i^\nu$.

**13.** Να υπολογίσετε το γινόμενο $A=i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots\cdot i^{100}$

**14.** α) Να λύσετε την εξίσωση $(z+3)^2+(z-1)^2=0$ στο σύνολο $\mathbb{C}$

β) Αν $z_1$ , $z_2$ είναι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης [$Im(z_1)>0$], να γράψετε τον μιγαδικό αριθμό $\frac{i}{z_1}+\frac{1}{z_2}$ στη μορφή α+βi, με $\alpha,\beta\in\Re$.

**15.** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α,β αν γνωρίζουμε ότι οι εξισώσεις $z^2+\alpha z+2\beta=0$ και $2i^{100}z-(1+i)z=2$ έχουν κοινή ρίζα.

**16.** Έστω ο μιγαδικός $w=\frac{z+8i}{z+6}$ , $z\neq-6$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων M(z) των μιγαδικών z στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $w\in\Re$ β) $w\in I$ γ) $w\in\Re$ δ) $Im(w)<0$.

**17.** Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $\bar{z}_1=\frac{1}{z_1}$ και $\bar{z}_2=\frac{1}{z_2}$ , τότε ο αριθμός $w=\frac{1+z_1\cdot z_2}{z_2-z_1}$ είναι φανταστικός.

**18.** Αν $z=\frac{1+ai}{1-ai}$ , $\alpha\in\mathbb{R}$, δείξτε ότι α) $z+\frac{1}{z}\in\Re$, β) $z-\frac{1}{z}$ φανταστικός.

**19.** Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να προσδιορίσετε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο:

i. $z=(\lambda+1)+(3\lambda-1)i$ , $\lambda\in\Re$,
ii. $z=(\lambda+2)+\lambda i$ , $\lambda\in\Re$,
iii. $z=\lambda+\sqrt{\lambda}\,i$ , $\lambda>0$,
iv. $z=\sigma\upsilon\nu\theta-(\eta\mu\theta)i$ , $\theta\in\Re$,
v. $z=\dfrac{1}{\lambda-2i}$ , $\lambda\in\Re$.

**20.** Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^*$ να δείξετε ότι ο αριθμός $u=\dfrac{\beta+ai}{\beta-\gamma i}$ είναι φανταστικός αν και μόνο αν οι αριθμοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

**21.** Αν ο αριθμός $u=\dfrac{2i-z}{z-5}$ είναι πραγματικός, να αποδειχθεί ότι η εικόνα Μ του z κινείται σε μια ευθεία (ε). Μπορεί το σημείο Μ να πάρει οποιαδήποτε θέση πάνω στην ευθεία (ε);

**22.** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z και w οι οποίοι συνδέονται με την σχέση $w=z^2+z\cdot\bar{z}$
Αν Α,Β είναι οι εικόνες των z και w αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο
(α) να δειχθεί ότι η ευθεία ΑΒ διέρχεται από την αρχή των αξόνων,
(β) (i) αν το Α κινείται στην ευθεία ψ=1, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Β,
(ii) αν το Β κινείται στην ευθεία ψ=1, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Α.

**23.** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z,w οι οποίοι συνδέονται με τη σχέση : $w=\dfrac{1}{z+1}$ ($z\neq-1$). Αν η εικόνα Μ του z ανήκει στον κύκλο $(\chi-1)^2+\psi^2=1$, να αποδειχθεί ότι η εικόνα του w ανήκει επίσης σε κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε την εξίσωση.

**24.** Από τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1$ , $z_2$ σχηματίζουμε τους αριθμούς: $\chi=\dfrac{1+z_1z_2}{z_1+z_2}$, $\psi=i\dfrac{1-z_1z_2}{z_1+z_2}$ και $\omega=\dfrac{z_1-z_2}{z_1+z_2}$. Να δειχθεί ότι αν οι $z_1$ , $\dfrac{1}{z_2}$ είναι συζυγείς μιγαδικοί, τότε οι χ,ψ,ω είναι πραγματικοί αριθμοί.

**25.** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μη πραγματικών αριθμών z για τους ποίους οι εικόνες των αριθμών 1,z και $1+z^2$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι συνευθειακά σημεία.

**26.** Να βρείτε δευτεροβάθμια εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές που να έχει ρίζα τον μιγαδικό αριθμό 2-3i.

**27.** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $z^2+(\beta-2\alpha)z+\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta=0$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, έχει ρίζες τις $z_1=\alpha+\beta\chi_1$ , $z_2=\alpha+\beta\chi_2$, όπου $\chi_1,\chi_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\chi^2+\chi+1=0$.
(Υπόδ. Χρησιμοποιήστε τους τύπους του Vieta)

**28.** Δίνονται οι διαφορετικοί ανά δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1,z_2,z_3,z_4$ και έστω $w_1=\dfrac{z_1-z_2}{z_3-z_4}$, $w_2=\dfrac{z_2-z_3}{z_1-z_4}$ και $w_3=\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_4}$. Να αποδειχθεί ότι αν οι $w_1,w_2$ είναι φανταστικοί, τότε και ο $w_3$ είναι φανταστικός.

**29.** Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=-iz-(1+i)\bar{z}$ .
α) να υπολογίσετε τους αριθμούς f(1+i) και f(2+i),
β) αν $z=\alpha+\beta i$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α,β ώστε να ισχύει f(z)=f(1+i),
γ) να αποδείξετε ότι:
γ1) $f(\frac{1}{z})=\dfrac{1}{z\cdot\bar{z}}\cdot f(\bar{z})$ ,
γ2) αν ο f(z) είναι φανταστικός τότε και ο z είναι φανταστικός,
γ3) αν $f(z)=f(\bar{z})$ τότε ο z είναι πραγματικός.

**30.** Δίνεται η εξίσωση $(\sigma\upsilon\nu^2\theta)\cdot z^2-(\eta\mu 2\theta)\cdot z+2-\sigma\upsilon\nu^2\theta=0$ (1) με $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$.
α) να λυθεί η εξίσωση,
β) αν Μ είναι η εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο εκείνης της ρίζας της (1) της οποίας το φανταστικό μέρος είναι θετικό, να δείξετε ότι το Μ κινείται στην υπερβολή $\psi^2-\chi^2=1$.

**ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ . . .**

**31.** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ και w=2+2i. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών: $z$ , $w$ , $z^{-4}$ , $zw$ , $z^2w$ , $\dfrac{z}{w}$ , $\dfrac{z^9}{w^4}$ .

**32.** Να βρεθεί το $|z|$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $z+5i\bar{z}=0$, β) $z^5+32i=0$, γ) $z\cdot\bar{z}^2+1=0$, δ) $(11-z^3)i=z^3+\sqrt{7}$.

**33.** Αν $z=-συνθ+iημθ$, τότε το $\left|\dfrac{(\bar{z})^3}{2-|-z|^2}\right|$ είναι ίσο με:

α. 2 β. 3 γ. 1 δ. $\frac{1}{2}$ ε. $\frac{1}{3}$.

**34.** Το $|zi+\bar{w}|$, $z,w\in\mathbb{C}$, είναι ίσο με:
α. $|-z+\bar{w}|$ β. $|-\bar{z}+w|$ γ. $|-z+i\cdot\bar{w}|$ δ. $|z-i\cdot\bar{w}|$ ε. $|z+i\cdot\bar{w}|$

**35.** Αν $z\in\mathbb{C}^*$, αποδείξτε ότι ο αριθμός $w=\dfrac{z}{\bar{z}}-\dfrac{\bar{z}}{z}$ είναι φανταστικός και ότι $|w|\leq 2$.

**36.** Αν $z_1=\dfrac{\chi}{2-3i}$ , $z_2=\dfrac{\psi}{3+2i}$ ($\chi,\psi\in\Re$) και $z_1+\bar{z}_2=\dfrac{-4-i}{13}$ να βρείτε την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών $z_1$, $z_2$.

**37.** Αν ο $z_1$ είναι μιγαδικός και όχι φανταστικός, τότε οι ρίζες της εξίσωσης
$z^2-2(z_1+\bar{z}_1)z+4z_1\bar{z}_1+1=0$ είναι :
α) θετικές β) αρνητικές γ) πραγματικές και άνισες
δ) φανταστικές ε) τίποτε από τα προηγούμενα .

**38.** Έστω η εξίσωση $α\chi^2+2β\chi+α=0$, με $α>β>0$, που έχει ρίζες τις $\chi_1$, $\chi_2$.
Να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
α) $\chi_1,\chi_2\in R$ β) $\chi_1+\chi_2=-4\cdot\chi_1\chi_2$ γ) $\chi_1=\chi_2$
δ) $|\chi_1|=|\chi_2|=1$ ε) τίποτε από τα προηγούμενα .

**39.** Για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1$ και $z_2$ να αποδείξετε ότι: $|z_1-z_2|^2\leq(1+|z_1|^2)\cdot(1+|z_2|^2)$.

**40.** Για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1$ και $z_2$ να αποδείξετε ότι: $|1-z_1\cdot\bar{z}_2|^2-|z_1-z_2|^2=(1-|z_1|^2)\cdot(1-|z_2|^2)$.

**41.** Έστω οι μιγαδικοί z,w με $|z|=2$ και $w=3-4i$. Να αποδείξετε ότι $3\leq|z+w|\leq 7$.

**42.** Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $|z-2-i|=5$, να αποδείξετε ότι $8 \le |z-14-6i| \le 18$.

**43.** Να αποδείξετε ότι αν για τους μιγαδικούς $z_1, z_2$ ισχύει $\left|\dfrac{z_1 - z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right| = 1$, τότε $|z_1|=1$ ή $|z_2|=1$, και αντίστροφα.

**44.** Αν $|2z+3|=1$, να δειχτεί ότι $|z+2|^2+|z+1|^2=1$.

**45.** Αν $z\in\mathbb{C}$, να δειχθεί ότι: $|z+4|=2|z+1| \Leftrightarrow |z|=2$.

**46.** Αν ισχύει $z^2+z+1=0$ να αποδείξετε ότι $|z|=|z+1|=1$ και αντίστροφα.

**47.** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=\alpha^2-\beta+2\alpha i$ και $z_2=\beta i-1$, όπου $\alpha,\beta\in\Re$.
α) να βρείτε τους αριθμούς α,β ώστε οι παραπάνω μιγαδικοί να είναι συζυγείς,
β) για τις παραπάνω τιμές των α,β που βρήκατε δείξτε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|z - i\alpha\bar{z}| = |\beta i|$ είναι δύο ευθείες παράλληλες.

**48.** Έστω Β,Γ οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $w = 2+2i\sqrt{3}$ και $u = 2-2i\sqrt{3}$ αντίστοιχα.
α) να δείξετε ότι τα Β,Γ ανήκουν σε κύκλο κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας 4,
β) έστω Α η εικόνα του μιγαδικού $z = \dfrac{u-w}{2}$. Υπολογίστε τα $|w-u|$, $|u-z|$ και $|w-z|$.
γ) προσδιορίστε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ.

**49.** Αν $z^{2005}=i(z-1)^{2005}$ να δείξετε ότι $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{1}{2}$.

**50.** Αν $z\in\mathbb{C}$ και ισχύει $(1+iz)^{999}=(1-iz)^{999}$, να δείξετε ότι $z\in\Re$.

**51.** Δείξτε ότι η εξίσωση $(1+iz)^{2005}=\dfrac{2+3i}{2\sqrt{3}-i}$ δεν έχει πραγματική ρίζα.

**52.** Αν $z_1=1-2i$, $z_2=3+4i$ τότε:
α) αν $\dfrac{z_2}{z_1} = k + \lambda i$, να αποδείξετε ότι κ=-1 και λ=2,

β) αν μια ρίζα της εξίσωσης $\chi^2+\beta\chi+2\gamma=0$ , $\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, είναι η $\dfrac{z_2}{z_1}$ δείξτε ότι $\beta^2<8\gamma$ και βρείτε τους αριθμούς β,γ ,

γ) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|z-2z_1|=|z_2|$..

**53.** Οι μιγαδικοί αριθμοί z και w συνδέονται με την σχέση $w=\dfrac{z+1}{z-i}$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο, όταν ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι:

α) ο πραγματικός άξονας,

β) ο φανταστικός άξονας,

γ) ο κύκλος $|w|=1$.

**54.** Έστω οι μιγαδικοί $z=\chi+\psi i$ και $w=z(3-4i)+\bar{z}(3+4i)$, όπου $\chi,\psi \in \mathbb{R}$.

Α) Να δειχθεί ότι $w\in\mathbb{R}$

Β) Να βρεθεί ο μιγαδικός z, αν ισχύει $w=|z|^2+25$

Γ) Έστω w=50.

α) να βρεθεί το σύνολο των σημείων M(z) που είναι εικόνες των μιγαδικών z

β) να βρεθεί ο μιγαδικός z που έχει το μικρότερο μέτρο.

**55.** Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{1+z^{11}}{(1+z)^{11}}$ , να αποδείξετε ότι:

α) $f(z)=f(\dfrac{1}{z})$ , για κάθε $z\neq 0$

β) αν $z\in\mathbb{C}$ με $|z|=1$ και $z\neq -1$ τότε να δειχθεί ότι $f(z)\in\mathbb{R}$.

**56.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ(χ,ψ) του επιπέδου όταν ισχύει $|2z-1+3i|=3$ , όπου $z=(2\chi-3)+(2\psi-1)i$ με $\chi,\psi\in\Re$.

**57.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ(χ,ψ) του επιπέδου όταν ισχύει $|z+i|=|z+2|$ , όπου $z=(\chi-2)+(\psi-1)i$ με $\chi,\psi\in\Re$.

**58.** Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=(2+\dfrac{3i}{2})\cdot z-\dfrac{5}{2}\cdot\bar{z}\cdot i$ , όπου $z=\chi+\psi i$ , τότε:

α) να βρείτε τα Re(f(z)) , Im(f(z)) ως συνάρτηση των χ,ψ β) να δείξετε ότι $|f(z)|=|\chi-2\psi|.\sqrt{5}$,

γ) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών $z=\chi+\psi i$ αν ισχύει $|f(z)|=\sqrt{5}$.

**59.** Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{z+i}{z}$, όπου $z\in\mathbb{C}^*$.

α) αν ισχύει $|f(z)|=|f(\bar{z})|$ δείξτε ότι $z\in\Re$,

β) αν ισχύει $|f(z)|=1$ να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο,

γ) αν ισχύει $\mathrm{Re}(f(z))=2$ δείξτε ότι οι εικόνες του z βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

**60.** Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{iz-2+4i}{z-i}$, όπου $z\neq i$ και α,β μιγαδικοί αριθμοί με $\alpha=z-i$ και $\beta=f(z)-i$

α) να δείξετε ότι $\alpha\beta=-3+4i$

β) να βρείτε τον α όταν $\alpha=\beta$

γ) να λύσετε την εξίσωση $f(z)=1-i$

δ) αν $f(z)\in R$, να δείξετε ότι η εικόνα M(z) του z στο μιγαδικό επίπεδο διαγράφει κύκλο με εξαίρεση το σημείο (0,1).

**61.** Να αποδειχθεί για τους μιγαδικούς αριθμούς z,w ότι: $|z+w|^2\leq 4|z|^2+\dfrac{4}{3}|w|^2$.

**62.** Αν ν φυσικός αριθμός και $z=1+(1-i)+(1-i)^2+\ldots+(1-i)^{50}$, να αποδείξετε ότι: $2^{\frac{51}{2}}-1\leq|z|\leq 2^{\frac{51}{2}}+1$.

**63.** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha,\beta\in\Re$, και $w=3z-i\bar{z}+4$.

α) να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(w)=3\alpha-\beta+4$ και $\mathrm{Im}(z)=3\beta-\alpha$

β) να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $\psi=\chi-12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία $\psi=\chi-2$

γ) να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $\psi=\chi-2$, έχει το ελάχιστο μέτρο.

**64.** Να βρεθεί το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει η σχέση: $\log(1-|z|)<0$.

**65.** Έστω $z_1$,$z_2$ οι ρίζες της εξίσωσης $z^2+4z+8=0$ και Α,Β αντίστοιχα οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο.

α) να γράψετε τον μιγαδικό αριθμό $w=\dfrac{z_1+z_2+4i}{z_1\cdot z_2+8i}$ στη μορφή α+βi (όπου α,β πραγματικοί)

β) να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, (όπου Ο η αρχή των αξόνων)

γ) να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΟΒ.

**66.** Να βρεθεί το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών z οι οποίοι έχουν την εξής ιδιότητα: ο λόγος των αποστάσεών τους από τα σταθερά σημεία $z_1=0$ και $z_2=3$ είναι σταθερός και ίσος με $\dfrac{1}{2}$.

**67.** Αν ο μιγαδικός $u=\dfrac{w-\overline{w}\cdot z}{1-z}$ είναι πραγματικός, δείξτε ότι $w\in\mathbb{R}$ ή $|z|=1$.

**68.** Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $|z-i|=|z-4|$ να βρείτε:

a) Τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z,

b) Τον μιγαδικό με το ελάχιστο μέτρο,

c) Την ελάχιστη τιμή του $|z|$.

**69.** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1$,$z_2$,$z_3$ των οποίων οι εικόνες βρίσκονται στον κύκλο $\chi^2+\psi^2=1$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w=\dfrac{(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)}{z_1z_2z_3}$ είναι φανταστικός

**70.** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1$,$z_2$,$z_3$ οι οποίοι έχουν ίσα μέτρα. Αν οι εικόνες των $z_1$,$z_2$,$z_3$ είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z_1z_2$ , $z_1z_3$ , $z_2z_3$ είναι επίσης κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

**71.** Αν ο μιγαδικός αριθμός $w=\dfrac{z-i}{z-1}$ είναι φανταστικός, δείξτε ότι $|2z-1-i|=\sqrt{2}$.

**72.** Αν $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ αποδείξτε ότι $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|<1 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z)>0$.

**73.** Δείξτε ότι για κάθε $z$,$z_1$,$z_2$ μιγαδικούς αριθμούς ισχύουν οι σχέσεις:

α) $|\operatorname{Im}(z)|+|\operatorname{Re}(z)|\geq|z|$, β) $\sqrt{2}\,|\operatorname{Im} z| = \sqrt{|z^2| - \operatorname{Re}(z^2)}$ ,

γ) $2[|z_1z_2| - \operatorname{Re}(z_1z_2)] = |\bar{z}_2 - z_1|^2 - (|z_2| - |z_1|)^2$,

δ) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$,

ε) $|z + i\cdot\bar{z}|^2 = 2|z|^2 + 2\operatorname{Im}(z^2)$ .

**74.** Για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς α,β να αποδείξετε ότι $\left|\bar{\beta} - \alpha\right|^2 - (|\beta| - |\alpha|)^2 = 2|\alpha\beta| - 2\operatorname{Re}(\alpha\beta)$.

**75.** α) Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $|z| = 1$ να δείξετε ότι $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$,

β) Αν $z_1+z_2+z_3=1$ και $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ να δείξετε ότι $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3} = 1$,

γ) Αν $z_1+z_2+z_3=0$ και $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ να δείξετε ότι $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$,

δ) Αν $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $w = (z_1 + z_2 + z_3)\cdot(\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3})$ να δείξετε ότι $w \in \Re$.

**76.** Αν για τον μιγαδικό z ισχύουν $|z-2| = 1$ και $|z-1| \le 1$ , αποδείξτε ότι $1 \le |z| \le \sqrt{3}$ .

**77.** Για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1, z_2$ ισχύει $\left|z_1 + \bar{z}_2\right| = \left|\bar{z}_1 - z_2\right|$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $z_1 \cdot z_2$ είναι φανταστικός.

**78.** Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1$ και $z_2$ $(z_2 \neq 0)$ ισχύει $|z_1+z_2| = |z_1-z_2|$ , να δειχθεί ότι ο αριθμός $\dfrac{z_1}{z_2}$ είναι φανταστικός.

**79.** Έστω $\lambda \in \Re$ και ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{3\lambda + i}{1 + \lambda i}$.

α) να γράψετε τον z στη μορφή $\alpha+\beta i$ , $(\alpha,\beta \in \Re)$

β) δείξτε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος ο οποίος και να βρεθεί,

γ) αν $z_1$ , $z_2$ δύο τυχαίοι μιγαδικοί από τον παραπάνω κύκλο , δείξτε ότι $|z_1 - z_2| \le 4$.

**80.** Δίνεται η εξίσωση $z^2-(2^{\theta+1}\,συν\theta)z+2^{2\theta}=0$ , $\theta\in[0,2\pi)$.

α) να βρεθούν οι ρίζες $z_1$ , $z_2$

β) Αν Α,Β είναι οι εικόνες των ριζών $z_1$ , $z_2$ αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές

(όπου Ο η αρχή των αξόνων)

γ) να βρεθεί η τιμή του θ έτσι, ώστε το παραπάνω τρίγωνο ΟΑΒ να είναι ισόπλευρο.

**81.** Αν $M_1$ , $M_2$ είναι οι εικόνες των μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών $z_1$ , $z_2$ αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι:

ο αριθμός $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}$ είναι πραγματικός ⇔

{ $\left|\overrightarrow{OM_1}\right| = \left|\overrightarrow{OM_2}\right|$ **ή** τα σημεία Ο , $M_1$, $M_2$ είναι συνευθειακά}

(όπου Ο η αρχή των αξόνων).

**Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ-ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ/ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ – ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ. . .**

**82.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(\chi)=\dfrac{συν(1+\sqrt{-\chi})}{\chi^2+\chi-2}$,

β) $g(\chi)=\dfrac{\sqrt{-\chi^2+6\chi-5}}{\chi^2-|\chi|}$,

γ) $h(\chi)=\dfrac{\chi\eta\mu(\sqrt{\chi})}{\ln\chi-1}$,

δ) $\sigma(\chi)=\sqrt{e^{2\chi}-e^{\chi}-2}$,

ε) $\phi(\chi)=\dfrac{\sqrt[7]{\chi^2-5\chi+6}}{\chi^2-1}$.

**83.** Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(\chi)=2\chi^2+\alpha\chi+\beta$ και $g(\chi)=(\alpha^2+2)\chi^2-3\chi+\alpha^2-6$. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g να έχουν κοινά σημεία πάνω στον άξονα ψψ' και στην ευθεία $\chi=2$.

**84.** (α) Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(\chi)=\dfrac{2\alpha^2\chi+\alpha}{\chi+1-\alpha}$ και $g(\chi)=\dfrac{(3\alpha-1)\chi+\alpha}{\chi+\alpha}$. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α για τον οποίο να ισχύει f =g.

(β) Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(\chi)=\dfrac{(\lambda+1)\chi-1}{\chi+\lambda^2-1}$ και $g(\chi)=\dfrac{(1-2\lambda)\chi+\lambda-1}{\lambda-\chi-5}$.

Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ για τον οποίο να ισχύει f =g.

**85.** (α) Αν για τις συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $(f+g)(\chi)\cdot[(f+g)(\chi)-2]=2\cdot[(f\cdot g)(\chi)-1]$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$, να αποδειχτεί ότι f =g.

(β) Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:
$[(f+g)(\chi)]^2-2(f\cdot g)(\chi)-2[f(\chi)\cdot\eta\mu\chi-g(\chi)\cdot\sigma\upsilon\nu\chi]+1=0$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$.

**86.** Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f(\chi))^7+\chi^7=1$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$. Να αποδειχτεί ότι $f\circ f=I$, όπου $I(\chi)=\chi$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$.

**87.** Αν οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονες στο $\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g\circ f$ είναι

i) γνησίως αύξουσα, αν οι f,g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας,

ii) γνησίως φθίνουσα, αν οι f,g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας.

Τι συμπεραίνετε για το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $F(\chi)=-2(3\chi^3+5)^{99}+7$;

**88.** (α) Αν οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι «1-1» να αποδειχθεί ότι και η συνάρτηση $g\circ f$ είναι «1-1».

(β) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι «1-1» να δείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και για την συνάρτηση $F(\chi)=(f(\chi))^{11}+2f(\chi)-3$.

**89.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f:[0,2)\to\mathbb{R}$ με $f(\chi)=3\chi+2$ και $g:(-1,5]\to\mathbb{R}$ με $g(\chi)=\chi^2-\chi$. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι συναρτήσεις fof , fog.

**90.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(\chi)=\chi^2-6\chi+7$ και $g:[-1,7)\to\mathbb{R}$ με $f(\chi)=2\chi+\mu$ $(\mu\in\mathbb{R})$.
(α) Να βρεθεί, αν υπάρχει, η συνάρτηση gof,
(β) Να βρεθούν οι τιμές του μ για τις οποίες να ορίζεται η σύνθεση fog.

**91.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi)=\chi^7+7\chi-7$.
(α) να δειχτεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της,
(β) να λυθεί η ανισότητα: $(fof)(\chi)<1$.

**92.** Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f\circ f)(\chi)=\chi^2-\chi+1$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:
(α) η f δεν είναι «1-1»,
(β) $f(1)=1$,
(γ) η συνάρτηση $g(\chi)=\chi^2-\chi f(\chi)+1$ δεν είναι «1-1».

**93.** (α) Να δειχθεί ότι αν οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσες, τότε και η f+g είναι γνησίως φθίνουσα.
(β) Αν $\alpha\in(0,1)$ να βρεθούν οι τιμές του αριθμού λ εάν ισχύει: $\alpha^{\lambda^2-4\lambda}-\alpha^{5\lambda-20}=\lambda^2-9\lambda+20$.

**94.** Δίνεται ο πραγματικός αριθμός $\alpha\neq 0$ και η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f\circ f)(\chi)=\alpha\chi+f(\chi)$ για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:
(α) η f είναι «1-1» (β) $f(0)=0$.

**95.** Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(f(\chi))=9\chi-8$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$.
(α) να δειχθεί ότι η f είναι «1-1»,
(β) να δειχθεί ότι $f(9\chi-8)=9f(\chi)-8$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$,
(γ) να βρεθεί η τιμή $f(1)$,
(δ) αν η f είναι γνησίως αύξουσα και $f(\chi)=\alpha\chi+\beta$, να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β.

**96.** Να βρεθεί «1-1» συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία να ισχύει:

$(fofof)(\chi-1)=(fof)(\chi+1)$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$.

**97.** Δίνονται οι αριθμοί α,β για τους οποίους ισχύει $\alpha^2<4\beta$. Υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $f(\chi)\cdot f(\psi)+a\cdot f(\chi+\psi)+\beta=0$, για κάθε $\chi,\psi\in\mathbb{R}$;

**98.** Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f_\alpha$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_\alpha(\chi)=(\alpha-1)\chi^2+\alpha\chi-2(\alpha-1)$ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία και να βρεθούν.

**99.** Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f(\chi))^2-f(\chi)=\chi$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η f είναι «1-1» και να βρεθεί η $f^{-1}$.

**100.** Έστω οι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ να ισχύει: $f(\chi)>0$ και $g(\chi)<0$.

(α) να δειχθεί ότι η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι γνησίως μονότονη και να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της,

(β) να λυθεί η ανισότητα: $f(\chi^2)\cdot g(\chi)-f(\chi)\cdot g(\chi^2)>0$.

**101.** Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι συναρτήσεις:

α) $f(\chi)=-\chi^3+2$,

β) $f(\chi)=\dfrac{2}{\chi-1}$,

γ) $f(\chi)=\begin{cases}\chi, \alpha\nu\chi<0\\ \chi^2, \alpha\nu\chi\geq 0\end{cases}$,

δ) $f(\chi)=\begin{cases}\chi^2, \alpha\nu\chi<0\\ -2\chi+3, \alpha\nu\chi\geq 0\end{cases}$,

ε) $f(\chi)=\chi|\chi|$.

**102.** Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

(α) $f(\chi+\psi)=f(\chi).f(\psi)$ , για κάθε $\chi,\psi \in \mathbb{R}$,

(β) $f(0)\neq 0$,

(γ) η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία με εξίσωση $\psi=1$ σε ένα μόνο σημείο.

Να αποδειχθεί ότι:

1. η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $\chi\chi'$,
2. η f είναι «1-1»,
3. για κάθε $\chi,\psi \in f(\mathbb{R})$ ισχύει $\chi\psi \in f(\mathbb{R})$ και $f^{-1}(\chi\psi)=f^{-1}(\chi)+f^{-1}(\psi)$.

**103.** Να βρεθεί συνάρτηση $f$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία να ισχύει: $\chi f(\chi)+f(-\chi)=\chi$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Να γίνει το ίδιο για την συνάρτηση g: $\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ αν ισχύει $4g(\chi)-g(\frac{1}{\chi})=\frac{15}{4\chi}$, για κάθε $\chi\neq 0$.

**104.** Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω συναρτήσεις αντιστρέφονται και να βρεθεί η αντίστροφή τους.

α) $f(\chi)=\chi^3$, β) $f(\chi)=2\chi^3-1$, γ) $f(\chi)=\sqrt{5+\sqrt{6-\chi}}$.

**105.** Δίνεται η συνάρτηση f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\alpha\cdot f(\chi+\psi)=f(\chi)\cdot f(\psi)+1$, για κάθε $\chi,\psi\in\mathbb{R}$, (όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ σταθερά), να δειχθεί ότι:

(α) $|a|\geq 2$,

(β) αν α=2 τότε η f είναι σταθερή.

**106.** Αν f(χ)=(2α-1)χ+β-1 $(a,\beta\in\Re, a\neq\frac{1}{2})$, να δειχτεί ότι η f αντιστρέφεται. Για ποιες τιμές των α,β ισχύει $f=f^{-1}$;

**107.** Έστω οι συναρτήσεις f(χ)=1-lnχ και g(χ)=$\frac{e^\chi}{1+e^\chi}$. Να βρεθεί (αν υπάρχει) η συνάρτηση $g^{-1}of$.

**108.** Έστω $\alpha\in\mathbb{R}$ σταθερά. Αν η συνάρτηση f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με: $(fog)(\chi+\alpha)\geq f(\chi)\geq f(g(x)+\alpha)$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$, να βρεθεί η συνάρτηση g.

**109.** Δίνονται οι συναρτήσεις f(χ)=2+lnχ και g(χ) $=\begin{cases}1+e^{\chi-2}, \chi\leq 3\\ 1-e^{\chi-2}, \chi>3\end{cases}$.

Να βρεθεί (αν υπάρχει) η συνάρτηση gof.

**110.** Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α) $f(\chi)=-2\sqrt{3-\chi}+10$,

β) $g(\chi)=2\sqrt{\chi-3}-4$,

γ) $h(\chi)=-3|\chi|+4$,

δ) $\sigma(\chi)=5\chi-3$, $\chi\in[-1,3)$,

ε) $\phi(\chi)=\sqrt{9-\chi^2}$.

**111.** Να δειχθεί ότι η συνάρτηση f:ℝ→ℝ με f(χ)= $\begin{cases} \chi^2 - 2\chi, \chi \le 1 \\ 2 - 3\chi, \chi > 1 \end{cases}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο ℝ. Είναι η f «1-1» ;

---

**ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $\chi_o \varepsilon \mathbb{R}$ . . .**

**112.** Να αποδείξετε ότι:

i. $\lim\limits_{\chi \to 4} \dfrac{\chi^2 - 16}{\chi - \sqrt{\chi} - 2} = \dfrac{32}{3}$

ii. $\lim\limits_{\chi \to 4} \dfrac{\chi - 4\sqrt{\chi} + 4}{(\chi - 4)^2} = \dfrac{1}{16}$

iii. $\lim\limits_{\chi \to 1} \dfrac{\chi^2 - \chi}{3\chi - 2\sqrt{\chi} - 1} = \dfrac{1}{2}$.

**113.** Να βρεθούν όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν:

i. $\lim\limits_{\chi \to -3} \dfrac{\sqrt{\chi^2 + 6\chi + 9}}{\chi + 3}$

ii. $\lim\limits_{\chi \to 2} \dfrac{2|\chi - 1| + |\chi^2 - 6|}{|\chi + 2|}$

iii. $\lim\limits_{\chi \to 1} \dfrac{|\chi - 2| - \chi^2}{\chi^2 - \chi}$

iv. $\lim\limits_{\chi \to 2} \dfrac{|\chi^2 - 2\chi|}{\chi - 2}$

v. $\lim\limits_{\chi \to 1} \dfrac{|5 - 3\chi| - |3\chi - 1|}{\chi^2 - 1}$.

**114.** Αν α,β μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί με $a \ne \beta$, αποδείξτε ότι $\lim\limits_{\chi \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha\chi - \sigma\upsilon\nu\beta\chi}{\chi^2} = \dfrac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$.

**115.** Να αποδείξετε ότι:

i. $\lim\limits_{\chi \to 4} \dfrac{\chi^2 - 5\chi + 4}{\sqrt{\chi} - 2} = 12$

ii. $\lim\limits_{\chi \to 0} \dfrac{(1 + \chi)\sqrt{1 + \chi} - 1}{\chi} = \dfrac{3}{2}$

**116.** Να αποδείξετε ότι:

i. $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{\chi^2+1}-1}{\sqrt{\chi^2+2}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ii. $\lim\limits_{\chi\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{\chi+6}-2}{\sqrt{\chi+7}-3}=\dfrac{1}{2}$.

**117.** Να αποδειχθεί ότι για κάθε ν =1,2,… ισχύει:

i. $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\chi+\eta\mu 2\chi+\eta\mu 3\chi+...+\eta\mu\nu\chi}{\chi}=\dfrac{\nu^2+\nu}{2}$

ii. $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\chi\cdot\eta\mu 2\chi\cdot\eta\mu 3\chi\cdot...\cdot\eta\mu\nu\chi}{\chi^\nu}=\nu!$

**118.** Δίνεται η συνάρτηση f:ℝ→ℝ με $f(\chi)=\begin{cases}2\chi^2+\alpha\chi+\beta, \alpha\nu\chi\le 1\\ 3\chi+1, \alpha\nu -1<\chi<2\\ \chi^2-\beta\chi+\alpha-2, \alpha\nu\chi\ge 2\end{cases}$.

Να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών αριθμών α,β ώστε να υπάρχουν τα $\lim\limits_{\chi\to -1}f(\chi)$ και $\lim\limits_{\chi\to 2}f(\chi)$.

**119.** Να βρεθούν τα όρια:

i. $\lim\limits_{\chi\to 5}\dfrac{\varepsilon\phi(\pi\chi)}{\chi-5}$ ii. $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\eta\mu(3\pi\chi)}{\eta\mu(4\pi\chi)}$.

**120.** Να βρεθούν τα όρια:

i. $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\eta\mu(\sqrt{\chi+3}-2)}{\eta\mu(\chi-1)}$

ii. $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu(\eta\mu^2\chi)}{\chi^2}$

iii. $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu(1-\sigma\upsilon\nu\chi)}{\chi^2}$.

**121.** Να αποδείξετε ότι:

i. $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{\chi}+\sqrt{\chi}-2}{\chi-1}=\dfrac{5}{6}$

ii. $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{\chi^2}-2\cdot\sqrt[3]{\chi}+1}{\chi-2\sqrt{\chi}+1}=\dfrac{4}{9}$

iii. $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\sqrt{\chi}-\sqrt[3]{\chi}}{\sqrt[3]{\chi}-\sqrt[4]{\chi}}=2.$

**122.** Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α αν είναι γνωστό ότι

$$\lim_{\chi\to 2}\frac{2\chi^3+4\alpha\chi^2+\alpha^2\chi-2}{\chi-2}=9.$$

**123.** Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α να βρεθεί το όριο

$$\lim_{\chi\to\alpha}\frac{\sqrt{\chi^2-2\alpha\chi+2\alpha^2}-\alpha}{|\chi|-\alpha}.$$

**124.** Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{\chi\to 2}\frac{\sqrt{\chi^2+\chi+3}-3}{\eta\mu(\pi\chi)}=\frac{5}{6\pi}.$$

**125.** Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{|\chi^3-\chi+2|-2}{\chi-1}.$

**126.** Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες:

- $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)-\alpha\beta$, για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{f(\chi)}{\chi}=4.$

Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to\chi_o}\dfrac{f(\chi)-f(\chi_o)}{\chi-\chi_o}$, όπου $\chi_o$ σταθερός πραγματικός αριθμός.

**127.** Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια

i. $\lim\limits_{\chi\to -3}\dfrac{|\chi^2-\chi-12|+|\chi+3|}{\chi+3}$

ii. $\lim\limits_{\chi\to 3}\dfrac{|\chi-3|+|2\chi-1|-|\chi-8|}{|\chi+1|-|\chi-7|}.$

**128.** Να βρεθεί (αν υπάρχει) το όριο $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{|6-\chi|-|\chi+1|-|\chi-4|}{|\chi|-|\chi-2|}.$

**129.** Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\eta\mu(\pi\chi)}{\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi\chi}{2})}=2.$

**130.** Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{\chi\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{6-\chi}-\sqrt{\chi+6}}{\chi+2}.$

**131.** Αν για τις συναρτήσεις f,g:ℝ→ℝ ισχύει ότι $(f(\chi))^2+(g(\chi))^2=2\chi f(\chi)$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$, να δειχθεί ότι $\lim\limits_{\chi\to 0}f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0}g(\chi)=0$.

**132.** Αν για τις συναρτήσεις f,g:ℝ→ℝ ισχύει ότι $\lim\limits_{\chi\to 2}(2f(\chi)+g(\chi))=3$ και $\lim\limits_{\chi\to 2}(f(\chi)-2g(\chi))=4$, να βρεθούν τα όρια:

i. $\lim\limits_{\chi\to 2}f(\chi)$ ii. $\lim\limits_{\chi\to 2}g(\chi)$ iii. $\lim\limits_{\chi\to 2}\dfrac{f^2(\chi)-f(\chi)-2}{\sqrt{f(\chi)+2}-2}.$

**133.** Δίνεται η συνάρτηση f:ℝ→ℝ για την οποία ισχύει:

$2\chi-\chi^2\le f(\chi)\le \chi^2+2\chi$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$.

Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{f(\chi)-f(0)}{\eta\mu\chi}.$

**134.** Δίνεται η συνάρτηση f:ℝ→ℝ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες:

- $\lim\limits_{\chi\to 0}f(\chi)=\lambda\in\Re$
- $\eta\mu\chi\cdot f(\chi)\ge\chi^2\cdot\eta\mu\dfrac{1}{\chi}$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}^*$.

Να βρεθεί το λ.

**135.** Δίνεται η συνάρτηση f:ℝ→ℝ για την οποία ισχύει:

$\chi+|\eta\mu\chi|\le f(\chi)\le|\chi|+\chi$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$.

Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{f(\chi)-(f(0))^{2000}}{\eta\mu\chi}.$

**136.** Αν για την συνάρτηση f:ℝ→ℝ ισχύει $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{f(\chi)-\chi}{\chi^2-1}=-2$, να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\chi^2\cdot f(\chi)-1}{\chi^2+\chi-2}.$

**ΑΠΕΙΡΟ ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $\chi_o \in \mathbb{R}$ . . .**

**137.** Να βρεθούν, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{\chi\to 3}\dfrac{3\chi+12}{\chi^2-6\chi+9}$ ii. $\lim\limits_{\chi\to 3}\dfrac{|\chi+2|-7}{\chi^2-9}$ iii. $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\chi-1}{\chi^3+2\chi^2}$

iv. $\lim\limits_{\chi\to 1^-}\dfrac{\sqrt{\chi}-1}{(\chi-1)^2}$ v. $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{3\chi-7}{\sigma\upsilon\nu\chi-1}$.

**138.** Να βρεθεί , αν υπάρχει, το $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu^2\chi}{\chi^3}$.

**139.** Αν για τις συναρτήσεις f,g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $\lim\limits_{\chi\to -3}(2f(\chi)-3g(\chi))=-\infty$ και $\lim\limits_{\chi\to -3}(3f(\chi)+2g(\chi))=-1$, να βρεθούν τα $\lim\limits_{\chi\to -3}f(\chi)$ και $\lim\limits_{\chi\to -3}g(\chi)$.

**140.** Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu 2\chi}{\sqrt{\chi^3+1}-1}$.

**141.** Να βρεθεί, εφόσον υπάρχει, το $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\chi-4}{\chi-3\sqrt{\chi}+2}$.

**142.** Για τις διάφορες τιμές του λ$\in\mathbb{R}$ να βρεθεί, αν υπάρχει, το $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\sqrt{\chi}-\lambda}{(\chi-1)^2}$.

**143.** Να εξετασθεί αν η συνάρτηση $f(\chi)=\dfrac{\chi\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi\chi)}{(\chi^2-4)(\sqrt{\chi+7}-3)}$ έχει όριο στο σημείο $\chi_o=2$.

**144.** Για τις διάφορες τιμές του α$\in\mathbb{R}$ να βρεθεί, αν υπάρχει, το $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\sqrt{\chi+4}-\alpha}{\chi\cdot|\chi|}$.

**ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ . . .**

**145.** Να βρεθούν, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{\chi\to +\infty}(\sqrt{\chi^2-4\chi}-\chi)$

ii. $\lim\limits_{\chi\to-\infty}(\sqrt{9\chi^2-\chi}+3\chi)$

iii. $\lim\limits_{\chi\to+\infty}(\sqrt{4\chi^2-\chi+1}-2\chi)$.

**146.** Να βρεθεί, εφόσον υπάρχει, το $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{2\cdot|5-\chi|+3}{|\chi-4|+8}$.

**147.** Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}(\sqrt{4\chi^2+3\chi+2}-\sqrt{\chi^2+\chi+2}-\chi)$.

**148.** Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\chi\cdot\eta\mu\frac{1}{\chi}}{\sqrt{\chi^2+\chi}-\chi}$.

**149.** Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to-\infty}f(\chi)$, όπου $f(\chi)=(\lambda^2-5\lambda+6)\chi^3+(\lambda-2)\chi^2+\chi+1$ $(\lambda\in\mathbb{R})$

**150.** Για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ να βρεθεί, αν υπάρχει, το $\lim\limits_{\chi\to-\infty}(\sqrt{4\chi^2-5\chi+7}+\alpha\chi)$.

**151.** (α) Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}(\chi\cdot\eta\mu\frac{\kappa}{\chi})$ , για $\kappa=1,2,\ldots$

(β) Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}[\chi\cdot(\eta\mu\frac{1}{\chi}+\eta\mu\frac{2}{\chi}+\ldots+\eta\mu\frac{\nu}{\chi})]$.

ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ...

**152.** Να αποδεχθεί ότι η εξίσωση $\chi^3-5\chi=-3$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (0,2).

**153.** Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(\chi)=\chi^4+\chi^3-\chi+2$ και $g(\chi)=-\chi^4+\chi+5$ έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τετμημένη $\chi_o\in(0,2)$.

**154.** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\chi_o\in(\alpha,\beta)$: $f(\chi_o)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

**155.** Έστω f,g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Αν οι συναρτήσεις $2f(\chi)+3g(\chi)$ και $f(\chi)-2g(\chi)$ είναι συνεχείς να αποδειχθεί ότι και οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς.

**156.** Αν μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύει $f(\alpha)\neq 0$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\chi_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ,ώστε $\dfrac{f(\chi_o)}{\chi_o-\alpha}=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{\beta-\alpha}$.

**157.** Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\dfrac{\chi^3}{16}-\eta\mu(\pi\chi)+7$. Να εξετασθεί αν η f παίρνει την τιμή $\dfrac{7}{2}$ στο διάστημα [-4,4]

**158.** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\dfrac{\varepsilon\varphi\chi}{4\chi-\pi}+\dfrac{\sigma\varphi\chi}{3\chi-\pi}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3})$.

**159.** Αν μια συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και επιπλέον ισχύει $0<f(\chi)<1$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $\chi_o\in(1,e)$: $f(\ln\chi_o)=\ln\chi_o$

**160.** Αν μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, $0<\alpha<\beta$ και $\alpha\leq f(\chi)\leq\beta$ για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\chi_o\in[\alpha,\beta]$: $f(\chi_o)=\dfrac{\alpha\cdot\beta}{\chi_o}$.

**161.** Να προσδιορισθεί το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

(α) $f(\chi)=\dfrac{1}{\chi^2}$ με $\chi\in[1,3]$

(β) $f(\chi)=\eta\mu\chi+\varepsilon\varphi\chi$ με $\chi\in[0,\dfrac{\pi}{4}]$

(γ) $f(\chi)=2\chi^2-4\chi$ με $\chi\in[1,3]$

(δ) $f(\chi)=\sigma\upsilon\nu\chi-\chi^2$ με $\chi\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$.

**162.** Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\chi_o\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ τέτοιο, ώστε: $\eta\mu(\sigma\upsilon\nu\chi_o)+\sigma\upsilon\nu(\eta\mu\chi_o)=\chi_o$ .

**163.** Αν μια συνάρτηση f: [0,1]→ℝ είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και f (1)= 1, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\chi_o \in (0,1)$: $f(\chi_o) + \chi_o \cdot e^{\chi_o} = e^{\chi_o}$

**164.** Να αποδειχθεί ότι αν α,β>0 τότε η εξίσωση $\chi = \alpha \cdot \eta\mu\chi + \beta$ έχει τουλάχιστον μια θετική ρίζα μικρότερη ή ίση του α+β.

**165.** Να προσδιορισθεί, αν υπάρχει, η τιμή του α∈ℝ για την οποία η συνάρτηση f: ℝ→ℝ με $f(\chi) = \begin{cases} \alpha\chi - 4, & \alpha\nu \quad \chi \le 4 \\ \dfrac{\chi\sqrt{\chi} - 8}{4 - \chi}, & \alpha\nu \quad \chi > 4 \end{cases}$ να είναι συνεχής.

**166.** Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι πραγματικοί αριθμοί α,β (β≠0) ώστε η συνάρτηση f: ℝ→ℝ με τύπο $f(\chi) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\chi + \beta \cdot \eta\mu\chi}{\chi}, & \alpha\nu \quad \chi < 0 \\ \beta - \dfrac{1}{2}, & \alpha\nu \quad \chi = 0 \\ \dfrac{\sqrt{\chi + 1} - 1}{\beta\chi}, & \alpha\nu \quad \chi > 0 \end{cases}$ να είναι συνεχής.

**167.** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\chi \cdot 2^{\chi} = 1$ έχει μοναδική θετική ρίζα.

**168.** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\dfrac{2}{\chi} + 3 = \sqrt{\chi}$ έχει μοναδική ρίζα.

**169.** Να προσδιορισθεί, αν υπάρχει, η τιμή του α∈ℝ για την οποία η συνάρτηση f: ℝ→ℝ με $f(\chi) = \begin{cases} \dfrac{\chi^4 - 2\chi^2 - \alpha}{(\chi - 1)^2}, & \alpha\nu \quad \chi \ne 1 \\ 4, & \alpha\nu \quad \chi = 1 \end{cases}$ να είναι συνεχής στο $\chi_o = 1$.

**170.** Έστω συνάρτηση f: ℝ→ℝ με f(0)=3 και $\lim\limits_{\chi \to +\infty} \dfrac{f(\chi) - 3 - \varepsilon\phi\chi}{\chi^2 - \chi} = 5$. Τότε:

(α) να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο μηδέν και

(β) να βρεθούν τα όρια

(i) $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{f(\chi)-3}{\chi}$

(ii) $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{|2f(\chi)-3|-3}{\chi}$.

**171.** Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια η συνάρτηση f: ℝ→ℝ με

$$f(\chi)=\begin{cases}\chi^{\frac{1}{\chi^2}} & ,\alpha\nu \quad \chi>0\\ \alpha \ , & \alpha\nu \quad \chi\le 0\end{cases} \quad (\alpha\in\mathbb{R})$$