Αρχική Συνάρτηση

6.8. **α)** $2x^3+x^2+3x+c$ **β)** $-\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu 2x+c$ **γ)** $-e^{-x}+e^{2x}+c$ **δ)** $e^x+2x^2+2\ln x+c$

ε) $\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x+c$ **στ)** $4x-4\ln x-\dfrac{1}{x}+c$ **ζ)** $\dfrac{9}{4}\sqrt[3]{x^4}+4\sqrt{x^3}+c$ **η)** $\eta\mu x+4\varepsilon\varphi x-x+c$

6.9. **α)** $xe^{-x}+c$ **β)** $x\eta\mu x+c$ **γ)** $x\ln x+c$

δ) $\dfrac{\eta\mu x}{x}+c$ **ε)** $\dfrac{e^x}{x}+c$ **στ)** $\dfrac{x^2}{e^x}+c$

6.10. Πρέπει $F'(x)=f(x)$ και είναι

$$F'(x)=1+\frac{1}{\left(\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right)^2}\cdot 2\left(\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right)\left(\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right)'=1+\frac{4\alpha}{x^2-\alpha^2}=\frac{x^2-\alpha^2+4\alpha}{x^2-\alpha^2}$$

Πρέπει $\dfrac{x^2-\alpha^2+4\alpha}{x^2-\alpha^2}=\dfrac{x^2+3}{x^2-9}\Leftrightarrow(4\alpha-9)x^2+9\alpha^2-36\alpha=3x^2-3\alpha^2$

οπότε $\begin{cases}4\alpha-9=3\\9\alpha^2-36\alpha=-3\alpha^2\end{cases}\left|\begin{array}{l}\alpha=3\\\alpha=0 \text{ ή } \alpha=3\end{array}\right.$. Οπότε πρέπει $\alpha=3$

6.11. Πρέπει $f'(x)=g(x)$ και είναι

$$f'(x)=(2\alpha x+\beta)e^{2x}+2e^{2x}\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)=e^{2x}\left[2\alpha x^2+(2\beta+2\alpha)x+\beta+2\gamma\right]$$

Οπότε $e^{2x}\left[2\alpha x^2+(2\beta+2\alpha)x+\beta+2\gamma\right]=e^{2x}(4x-2)$

άρα $\left.\begin{cases}2\alpha=0\\2\beta+2\alpha=4\\\beta+2\gamma=-2\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\begin{array}{l}\alpha=0\\\beta=2\\\gamma=-2\end{array}$

6.12. **α)** $\left(x^2+4x-1\right)^4+c$ **β)** $\dfrac{\eta\mu^2 x}{2}+c$ **γ)** $\dfrac{\sqrt{3x^2+6x+8}}{3}+c$ **δ)** $\dfrac{\ln^3 x}{3}+c$

ε) $e^{\sqrt{x}}+c$ **στ)** $\ln\left(x^2+4\right)+c$ **ζ)** $\eta\mu(\alpha x+\beta)+c$

η) $\dfrac{2^x}{\ln 2}-\ln(3x+1)+c$ **θ)** $\ln(\eta\mu x)+c$ **ι)** $\ln\left(e^x+1\right)+c$

6.13. **α)** Είναι $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(2x+1)=1=f(0)$ και $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^x=1$ άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Για $x\le0$ η αρχική F της f είναι $F(x)=x^2+x+c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$ ενώ

για $x>0$ $F(x)=e^x+c_2,\ c_2\in\mathbb{R}$

Άρα $F(x)=\begin{cases}x^2+x+c_1, & x\le0\\e^x+c_2, & x>0\end{cases}$

Όμως η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής οπότε
$\lim\limits_{x\to 0^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} F(x) \Leftrightarrow c_1 = 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = c_1 - 1$

Άρα $F(x) = \begin{cases} x^2 + x + c_1, & x \le 0 \\ e^x - 1 + c_1, & x > 0 \end{cases}, \ c_1 \in \mathbb{R}$

β) Όμοια βρίσκουμε $F(x) = \begin{cases} -\sigma\upsilon\nu x + \dfrac{x^2}{2} + c_1, & x \le 0 \\ \eta\mu x - x - 1 + c_1, & x > 0 \end{cases}$

γ) Είναι $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x < 2 \\ x - 2, & x \ge 2 \end{cases}$, οπότε ανάλογα βρίσκουμε $F(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + 2x + c_1, & x < 2 \\ \dfrac{x^2}{2} - 2x + c_1, & x \ge 2 \end{cases}, \ c_1 \in \mathbb{R}$

δ) Εχουμε $f(x) = \left|2x\left(2x^2+1\right)\right| = 2|x|\cdot\left(2x^2+1\right)$ οπότε $f(x) = \begin{cases} -4x^3 - 2x, & x < 0 \\ 4x^3 + 2x, & x \ge 0 \end{cases}$

και βρίσκουμε $F(x) = \begin{cases} -x^4 - x^2 + c_1, & x < 0 \\ x^4 + x^2 + c_1, & x \ge 0 \end{cases}$

6.14. $f^{(3)}(x) = 2x + 1$ οπότε $f''(x) = x^2 + x + c_1$

και $f'(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$, $f(x) = \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^3}{6} + c_1\dfrac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

Γνωρίζουμε $\left.\begin{array}{r} f(2) = 6 \\ f(1) = -1 \\ f'(1) = 2 \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{l} c_1 = \dfrac{41}{6} \\ c_2 = -\dfrac{17}{3} \\ c_1 = 1 \end{array}$

Άρα $f(x) = \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{41}{12}x^2 - \dfrac{17}{3}x + 1$

6.15. $f'(x) = \dfrac{2x^3 + 2x}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)f'(x) = 2x^3 + 2x \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = 4x^3 + 4x \Leftrightarrow$

$\left[f^2(x)\right]' = \left(x^4 + 2x^2\right)' \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} f^2(x) = x^4 + 2x^2 + c \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow c = 1$

άρα $f^2(x) = x^4 + 2x^2 + 1 \Leftrightarrow f^2(x) = \left(x^2+1\right)^2$

Η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής οπότε θα διατηρεί πρόσημο και αφού $f(x) > 0$ τότε $f(x) = x^2 + 1$.

6.16. Γνωρίζω $f'(x) = \dfrac{3}{x}$ άρα $\left.\begin{array}{ll} f(x) = 3\ln x + c, \ x > 0 \\ \text{και αφού} \quad f(1) = 1 \end{array}\right\} c = 1$, οπότε $f(x) = 3\ln x + 1$

6.17. $f'(x)=8x^3-\frac{5}{x}+2$ οπότε $\left.\begin{array}{l} f(x)=2x^4-5\ln x+2x+c \\ f(1)=3 \end{array}\right\} c=-1$

Άρα $f(x)=2x^4-5\ln x+2x-1$

6.18. $f'(x)=\sqrt{x}+4x=x^{1/2}+4x$ και $f(x)=\dfrac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}+2x^2+c=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2x^2+c$

$f(9)=50\Rightarrow\frac{2}{3}9\sqrt{9}+2\cdot 81+c=50\Rightarrow c=-130$, άρα $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2x^2-130$

6.19. $f'(x)=2e^{2x}+2x$ άρα $\left.\begin{array}{l} f(x)=e^{2x}+x^2+c \\ f(0)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow c=0$. Άρα $f(x)=e^{2x}+x^2$

6.20. $f''(x)=24x^2-6x+1\Leftrightarrow f'(x)=8x^3-3x^2+x+c_1\Leftrightarrow f(x)=2x^4-x^3+\frac{x^2}{2}+c_1x+c_2$

$\left.\begin{array}{l} f(1)=\frac{3}{2} \\ f'(1)=2 \end{array}\right\}\begin{array}{l} c_1=-4 \\ c_2=4 \end{array}$ άρα $f(x)=2x^4-x^3+\frac{x^2}{2}-4x+4$

6.21. $f'(x^3)=2x^3-2$. Αν $x^3=\omega$ τότε $f'(\omega)=2\omega-2$ άρα $f'(x)=2x-2$

$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-2x+c \\ f(8)=44 \end{array}\right\} c=-4$, άρα $f(x)=x^2-2x-4$

6.22. $f'(x)=\dfrac{x^2e^x+f(x)}{x}\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=x^2e^x\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=e^x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=(e^x)'\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{f(x)}{x}=e^x+c \\ f(1)=e \end{array}\right\} c=0$. Άρα $f(x)=xe^x$

6.23. **α)** $f'(x)=\dfrac{4(\ln x+1)^3}{x}\Leftrightarrow f'(x)=4(\ln x+1)^3(\ln x+1)'\Leftrightarrow f'(x)=\left[(\ln x+1)^4\right]'$

άρα $\left.\begin{array}{l} f(x)=(\ln x+1)^4+c \\ f(1)=3 \end{array}\right\} c=2$. Άρα $f(x)=(\ln x+1)^4+2$

β) $f'(4x-3)'=2x+5$. Θέτω $4x-3=\omega\Leftrightarrow x=\frac{\omega+3}{4}$ οπότε $f'(\omega)=2\frac{\omega+3}{4}+5$

$f'(\omega)=\frac{\omega+13}{2}$ άρα $f'(x)=2\frac{x+13}{2}$ και $\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{13x}{2}+c \\ f(-3)=1 \end{array}\right\} c=\frac{73}{4}$

άρα $f(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{13x}{2}+\frac{73}{4}$

γ) $f'(x)-2xf(x)=6x \Leftrightarrow e^{-x^2}f(x)-2xe^{-x^2}f(x)=6xe^{-x^2}$

$$\left(e^{-x^2}f(x)\right)'=\left(-3e^{-x^2}\right)' \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} e^{-x^2}f(x)=-3e^{-x^2}+c \\ f(0)=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c=4. \text{ Άρα } f(x)=-3+4e^{x^2}$$

δ) $f'(x)-1=2xe^{-f(x)+x+x^2} \Leftrightarrow f'(x)-1=2x\dfrac{e^{x^2}}{e^{f(x)-x}} \Leftrightarrow e^{f(x)-x}\left(f'(x)-1\right)=2xe^{x^2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(e^{f(x)-x}\right)'=\left(e^{x^2}\right)' \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} e^{f(x)-x}=e^{x^2}+c \\ f(1)=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c=0$$

οπότε $e^{f(x)-x}=e^{x^2} \Leftrightarrow f(x)-x=x^2 \Leftrightarrow f(x)=x^2+x$

6.24. **α)** $f'(x)=-(2x+1)f(x) \Leftrightarrow f'(x)+(2x+1)f(x)=0 \Leftrightarrow e^{x^2+x}f'(x)+(2x+1)e^{x^2+x}f(x)=0 \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{matrix} \left(e^{x^2+x}f(x)\right)'=0 \Leftrightarrow e^{x^2+x}f(x)=c \\ f(-1)=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c=1, \text{ άρα } e^{x^2+x}f(x)=1 \Leftrightarrow f(x)=e^{-x^2-x}$$

β) $f'(x)+2f(x)=2xe^{-2x} \Leftrightarrow e^{2x}f'(x)+2e^{2x}f(x)=2x$

$$\left.\begin{matrix} \left(e^{2x}f(x)\right)'=\left(x^2\right)' \Leftrightarrow e^{2x}f(x)=x^2+c \\ f(0)=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c=1, \text{ άρα } f(x)=\frac{x^2+1}{e^{2x}}$$

6.25. $(1)\ f'(x)e^{f(x)}=-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+2 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)'=\left(-2\sqrt{x}+2x\right)' \Leftrightarrow e^{f(x)}=-2\sqrt{x}+2x+c\ (2)$

Στην (1) για $x=1$ έχουμε $f'(1)e^{f(1)}=-1+2 \Leftrightarrow e^{f(1)}=1=e^0 \Leftrightarrow f(1)=0$

Οπότε στην (2) για $x=1$ έχουμε: $e^{f(1)}=-2+2+c \Leftrightarrow c=1$ άρα $e^{f(x)}=-2\sqrt{x}+2x+1$

οπότε $f(x)=\ln\left(-2\sqrt{x}+2x+1\right)$

6.26. $$f^2(x)f'(x)=x^2+1 \Leftrightarrow \left(\frac{f^3(x)}{3}\right)'=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)' \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \dfrac{f^3(x)}{3}=\dfrac{x^3}{3}+x+c \\ f(0)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c=0$$

οπότε $f^3(x)=x^3+3x$ και αφού $x\geq 0$ τότε $x^3+3x\geq 0$ άρα $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x}$

6.27. $(1)\ f'(x)+f(x)=1+e^{-x} \Leftrightarrow e^xf'(x)+e^xf(x)=e^x+1$

$\left(e^xf(x)\right)'=\left(e^x+x\right)' \Leftrightarrow e^xf(x)=e^x+x+c\ (2)$

Στην (1) για $x=0$ έχουμε $f'(0)+f(0)=1+1 \Leftrightarrow 2+f(0)=2 \Leftrightarrow f(0)=0$

Οπότε στην (2) για $x=0$ έχουμε: $e^0f(0)=e^0+c \Leftrightarrow c=-1$ άρα

$$e^xf(x)=e^x+x-1 \Leftrightarrow f(x)=\frac{e^x+x-1}{e^x} \Leftrightarrow f(x)=1-\frac{1-x}{e^x} \Leftrightarrow f(x)=1-\frac{e^x-xe^x}{\left(e^x\right)^2}=1-\left(\frac{x}{e^x}\right)'$$

άρα οι αρχικές της $f(x)$ είναι $F(x)=x-\dfrac{x}{e^x}+c$

6.28. $\dfrac{f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} = \dfrac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\right)' = \dfrac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{f(x)}{\eta\mu x} = ce^x \\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow c = 1$

άρα $\dfrac{f(x)}{\eta\mu x} = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^x\eta\mu x$, $x \in (0,\pi)$

6.29. Παρατηρούμε ότι:

i. $\left(\dfrac{f(x)}{e^x\ln x}\right)' = \dfrac{f'(x)e^x\ln x - \left(e^x\ln x + e^x\dfrac{1}{x}\right)f(x)}{\left(e^x\ln x\right)^2} = \dfrac{f'(x)e^x x\ln x - e^x x\ln x - e^x f(x)}{x\left(e^x\right)^2(\ln x)^2} =$

$= \dfrac{f'(x)x\ln x - x\ln x f(x) - f(x)}{x\cdot e^x(\ln x)^2} = 0$ άρα $\left.\begin{array}{l} \dfrac{f(x)}{e^x\ln x} = c \\ f(e) = e^e \end{array}\right\} c = 1$ οπότε $f(x) = e^x\ell nx$

ii. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(e^x\ln x\right) = 0$

6.30. Πρέπει $F'(x) = f(x)$ οπότε $\alpha + 2\beta\sigma\upsilon\nu 2x = 6 - 4\sigma\upsilon\nu 2x$ οπότε $\alpha = 6$ και $2\beta = -4 \Leftrightarrow \beta = -2$

6.31. Είναι $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = g(x)$ οπότε $\Phi'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x) = h(x)$

6.32. Γνωρίζουμε ότι (1) $\left.\begin{array}{l} f(-x) = f(x) \\ F'(x) = f(x) \end{array}\right\}$ οπότε $F'(x) = f(-x)$

Στην (1) θέτουμε όπου $x \to -x$ οπότε $F'(-x) = f(-x)$ (2)

$-F'(-x) = -f(-x) \Leftrightarrow \left[F(-x)\right]' = -f(-x) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \left[F(-x)\right]' = -F'(x)$

άρα $F(-x) = -F(x) + c$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων $c = 0$

6.33. **α)** Στην (1) $f(x)\cdot F(1-x) = e$ θέτουμε $x = 0$ οπότε $f(0)\cdot F(1) = e \Rightarrow 1\cdot F(1) = e \Leftrightarrow F(1) = e$

β) $g'(x) = F'(x)F(1-x) - F(x)F'(1-x) = f(x)F(1-x) - F(x)f(1-x) = e - e = 0$

Γιατί αν στην (1) θέσω $x \to 1-x$ έχουμε $f(1-x)F(x) = e$

Άρα $g(x) = c \Leftrightarrow F(x)\cdot F(1-x) = c$ και για $x = 0$ $F(0)\cdot F(1) = c \Leftrightarrow 1\cdot e = c \Leftrightarrow c = e$

Άρα $g(x) = e$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) Από την (1) $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και αφού f συνεχής τότε θα διατηρεί πρόσημο.

Επειδή $f(0) = 1 > 0$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $F'(x) = f(x) > 0$ οπότε F↑ στο $\mathbb{R}$

δ) Είναι $f(x)\cdot F(1-x) = e$ (2).

$F(x)F(1-x) = e$ (3) για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $F(1-x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και από (2),(3)

προκύπτει $F(x) = f(x)$ και παραγωγίζοντας $f'(x) = f(x)$

Άρα $\left.\begin{array}{l} f(x)=c\cdot e^x \\ f(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow c=1,$ άρα $f(x)=e^x$

6.34. **α)** Στη σχέση $4\alpha F(x^2)\geq 4\alpha^2+F^2(x)$ θέτουμε $x=0$ και προκύπτει $\left(F(0)-2\alpha\right)^2\leq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(0)=2\alpha$ και $x=1$ και προκύπτει $\left(F(1)-2\alpha\right)^2\leq 0\Leftrightarrow F(1)=2\alpha$.

Άρα $F(0)=F(1)=2\alpha$

β) Εφαρμόζουμε Θ. Rolle για την F στο $[0,1]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$: $F'(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=0$

άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον σ' ένα σημείο με τετμημένη $x_0=\xi$

6.35. Είναι $F(x)F(1-x)=F(x^2)$ (1). Παραγωγίζοντας την (1) και έχουμε:

$F'(x)F(1-x)-F(x)F'(1-x)=F'(x^2)\cdot 2x$

$f(x)F(1-x)-F(x)f(1-x)=2xf(x^2)$ (2)

Στην (2) θέτουμε

$x=0$: $f(0)\cdot F(1)-F(0)\cdot f(1)=0\Leftrightarrow f(0)\cdot F(1)=0$ (3) και

$x=1$: $f(1)\cdot F(0)-F(1)\cdot f(0)=2f(1)\Leftrightarrow -F(1)f(0)=2f(1)$ (4)

Προσθέτοντας (3) και (4) κατά μέλη έχουμε: $2f(1)=0\Leftrightarrow f(1)=0$

6.36. Είναι $f(x)=e^{x^2}$ και $F'(x)=f(x)$. Επειδή $x^2\geq 0\Rightarrow e^{x^2}\geq e^0\Leftrightarrow e^{x^2}\geq 1\Leftrightarrow f(x)\geq 1$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την F στο $[0,x]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(0,x)$:

$$F'(\xi)=\frac{F(x)-F(0)}{x}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{F(x)-F(0)}{x}\Leftrightarrow F(x)=xf(\xi)+F(0)$$

Επειδή $f(\xi)\geq 1$ τότε $xf(\xi)\geq x$ και $xf(\xi)+F(0)\geq x+F(0)$ όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+F(0)\right)=+\infty$ άρα

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(\xi)+F(0)\right)=+\infty$ δηλ. $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$

6.37. Είναι $F(x)G(x)=e^{-2x}$ (1) και $f(x)g(x)=e^{-2x}$ (2)

Στην (1) για $x=0$ έχουμε $F(0)G(0)=1\Leftrightarrow G(0)=1$.

Επίσης από την (1) $\Leftrightarrow F(x)=\dfrac{e^{-2x}}{G(x)}$ και παραγωγίζοντας προκύπτει

$$F'(x)=\frac{-2e^{-2x}G(x)-G'(x)e^{-2x}}{G^2(x)}\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^{-2x}\left(-2G(x)-g(x)\right)}{G^2(x)}\quad(3)$$

Επίσης από (2) $\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^{-2x}}{g(x)}$ (4). Άρα από (3) και (4)

$$\frac{e^{-2x}}{g(x)}=\frac{e^{-2x}\left(-2G(x)-g(x)\right)}{G^2(x)}\Leftrightarrow\left(G(x)+g(x)\right)^2=0\Leftrightarrow G(x)+G'(x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^xG(x)+e^xG'(x)=0\Leftrightarrow\left(e^xG(x)\right)'=0\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} e^xG(x)=c \\ G(0)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l} G(x)=e^{-x} \\ G'(x)=-e^{-x} \end{array}\text{ οπότε}$$

$\Leftrightarrow g(x)=-e^{-x}$ και από τη (2) προκύπτει $-e^{-x}f(x)=e^{-2x}\Leftrightarrow f(x)=-e^{-x}$

6.38. **α)** Θ. Rolle για την $g(x)=F(x)-x^2$ στο $[0,1]$ είναι $\left.\begin{array}{l} g(0)=F(0) \\ g(1)=F(1)-1 \end{array}\right\} g(0)=g(1)$

και $g'(x)=F'(x)-2x=f(x)-2x$ οπότε υπάρχει $\xi_1\in(0,1): g'(\xi_1)=0 \Leftrightarrow f(\xi_1)=2\xi_1$

β) Θ. Rolle για $h(x)=F(x)(x-1)-F(0)\cdot x$ στο $[0,1]$ είναι $\left.\begin{array}{l} h(0)=-F(0) \\ h(1)=-F(0) \end{array}\right\}$ άρα $h(0)=h(1)$

και $h'(x)=F'(x)(x-1)+F(x)-F(0)=f(x)(x-1)+F(x)-(F(1)-1)$

άρα υπάρχει $\xi_2\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi_2)=0 \Leftrightarrow f(\xi_2)(\xi_2-1)+F(\xi_2)=F(1)-1 \overset{\xi_2-1\neq 0}{\Leftrightarrow} f(\xi_2)=\frac{F(1)-1-F(\xi_2)}{\xi_2-1}$$

6.39. • Αν $x=y$ ισχύει η ισότητα

• Αν $x>y$ τότε στο $[y,x]$ εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την F οπότε υπάρχει $\xi\in(y,x)$:

$F'(\xi)=\dfrac{F(x)-F(y)}{x-y} \Leftrightarrow f(\xi)=\dfrac{F(x)-F(y)}{x-y}$. Επειδή $\xi<\beta$ και $f'(x)>0$ οπότε η f είναι $\uparrow$

θα έχουμε $f(\xi)<f(\beta) \Leftrightarrow \dfrac{F(x)-F(y)}{x-y}<f(\beta) \Leftrightarrow F(x)-F(y)<f(\beta)(x-y)$

• Όμοια δείχνουμε και αν $x<y$ οπότε σε κάθε περίπτωση $F(x)-F(y)\le f(\beta)(x-y)$

6.40. **α)** Είναι $g'(x)=F'(x)-4=f(x)-4=\dfrac{4e^x+3}{e^x+4}-4=\dfrac{-13}{e^x+4}<0$ άρα $g\downarrow$

β) Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $h(x)=f(x)-4x$ ότι είναι γνησίως μονότονη οπότε η εξίσωση $h(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=4x$ θα έχει το πολύ μία ρίζα. Είναι

$h'(x)=f'(x)-4=...=\dfrac{-4e^{2x}-19e^x-64}{(e^x+4)^2}<0$ οπότε η h είναι $\downarrow$

γ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για F στο $[x,\ x+1]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(x,\ x+1)$:

$F'(\xi)=\dfrac{F(x+1)-F(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow (1)\ f(\xi)=F(x+1)-F(x)$ επειδή $x<\xi<x+1$ και $x\to+\infty$ τότε ξ θα εξαρτάται από το x άρα είναι ένα $\xi(x)$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}\xi(x)=+\infty$ άρα η (1) γίνεται

$f(\xi(x))=F(x+1)-F(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\xi(x))=\lim\limits_{u\to+\infty} f(u)=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{4e^u+3}{e^u+4}=4$ οπότε και

$\lim\limits_{x\to+\infty}[F(x+1)-F(x)]=4$

6.41. Είναι $f\left(\dfrac{1}{x}\right)F(x)=4x \quad (1)$

α) Αφού $x>0$ τότε $f\left(\dfrac{1}{x}\right)F(x)=4x>0$ για κάθε $x>0$ οπότε $F(x)\neq 0$ και αφού F συνεχής και $F(1)=2>0$ τότε $F(x)>0$ για κάθε $x>0$

β) Στην (1) θέτω x το $\frac{1}{x}$ και προκύπτει $f(x)F\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{4}{x}$ (2)

Εστω $g(x)=F\left(\frac{1}{x}\right)F(x)$ τότε $g'(x)=F'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)F(x)+F'(x)F\left(\frac{1}{x}\right)=$

$=-\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)F(x)+f(x)F\left(\frac{1}{x}\right)\underset{(2)}{\overset{(1)}{=}}-\frac{1}{x^2}4x+\frac{4}{x}=0$

άρα $g(x)=c\Leftrightarrow F\left(\frac{1}{x}\right)F(1)=c$ και για $x=1$ $c=F^2(1)=4$ οπότε $F\left(\frac{1}{x}\right)\cdot F(x)=4$ (3)

γ) Από (3) είναι $F\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{4}{F(x)}$ (4)

Οπότε από (2) και (4) έχουμε $f(x)\frac{4}{F(x)}=\frac{4}{x}\Leftrightarrow f(x)=\frac{F(x)}{x}\Leftrightarrow xF'(x)-F(x)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{xF'(x)-F(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow\left(\frac{F(x)}{x}\right)'=0\Leftrightarrow\frac{F(x)}{x}=c_1$ για $x=1$ προκύπτει $c_1=2$

άρα $F(x)=2x$ οπότε $F'(x)=2$ άρα $f(x)=2$

6.42. Εστω $P(t)$ η τιμή του υπολογιστή. Επειδή η αξία του μειώνεται με ρυθμό ανάλογο της τιμής του είναι $P'(t)=-\alpha P(t)$, $\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}P'(t)+\alpha P(t)=0\overset{\alpha e^{\alpha t}}{\Leftrightarrow}e^{\alpha t}P'(t)+\alpha e^{\alpha t}P(t)=0\Leftrightarrow\left(e^{\alpha t}P(t)\right)'=0$.

Άρα $e^{\alpha t}P(t)=c$. Αφού $P(0)=1312$ τότε: $e^0P(0)=c\Leftrightarrow c=1312$

Άρα $e^{\alpha t}P(t)=1312$, επίσης $P(2)=820$, άρα $e^{2\alpha}P(2)=1312\Leftrightarrow e^{2\alpha}820=1312\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{2\alpha}=1{,}6\Leftrightarrow 2\alpha=\ln1{,}6\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{2}\ln1{,}6\Leftrightarrow\alpha=\frac{0{,}47}{2}=0{,}235$.

Οπότε $e^{0{,}235t}P(t)=1312\Leftrightarrow P(t)=1312e^{-0{,}235t}$

6.43. Είναι $Q'(t)=\kappa Q(t)$, $\kappa>0$, τότε:

$Q'(t)-\kappa Q(t)=0\Leftrightarrow Q'(t)e^{-\kappa t}-\kappa e^{-\kappa t}Q(t)=0\Leftrightarrow\left(e^{-\kappa t}Q(t)\right)'=0$

Άρα $e^{-\kappa t}Q(t)=c\Leftrightarrow Q(t)=ce^{\kappa t}$

Είναι $Q(5)=2Q(0)\Leftrightarrow ce^{5\kappa}=2c\Leftrightarrow e^{5\kappa}=2\Leftrightarrow 5\kappa=\ln2\Leftrightarrow\kappa=\frac{1}{5}\ln2$ (1)

Θέλουμε να βρούμε το χρόνο t όπου $Q(t)=5Q(0)\Leftrightarrow ce^{\kappa t}=5e\Leftrightarrow e^{\kappa t}=5\Leftrightarrow\kappa t=\ell n5\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$\left(\frac{1}{5}\ln2\right)t=\ln5\Leftrightarrow t=5\frac{\ln5}{\ln2}\Leftrightarrow t=5\cdot2{,}32=11{,}6h$

6.44. **α)** $K'(x)=3x^2+6x$ ανά προϊόν οπότε είναι $\left.\begin{matrix}K(x)=x^3+3x^2+c\\K(0)=30.000\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow c=30.000$

οπότε $K(x)=x^3+3x^2+30.000$

β) $K(10)=10^3+3\cdot10^2+30.000=31.300$ €

6.45. Παρατηρούμε ότι $\left[5e^{\frac{t}{5}}(t-5)\right]'=5e^{\frac{t}{5}}\frac{1}{5}(t-5)+5e^{\frac{t}{5}}=e^{\frac{t}{5}}(t-5)+5e^{\frac{t}{5}}=te^{\frac{t}{5}}$

Οπότε $P'(t)=te^{\frac{t}{5}}$ άρα $\left.\begin{matrix}P(t)=5e^{\frac{t}{5}}(t-5)+c\\ P(0)=8000\end{matrix}\right\}\Rightarrow c=8025$

Άρα $P(t)=5e^{\frac{t}{5}}(t-5)+8025$

6.46. Είναι $f'(t)=350+\frac{2}{5}t$ άρα $f(t)=350t+\frac{1}{5}t^2+c$, $c\in\mathbb{R}$

$f(0)=0$ οπότε $c=0$ και $f(t)=350t+\frac{1}{5}t^2$.

Η μέση ημερήσια παραγωγή είναι $\overline{f}=\frac{f(300)-f(0)}{300-0}=\frac{350\cdot 300+300\cdot 60}{300}=410$ βιβλία.

Αόριστο Ολοκλήρωμα

6.55. $I_1=\frac{x^4}{4}-2x^3+4x+c$

$I_2=-2\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x+c$

$I_3=e^x-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=e^x-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$

$I_4=\int\left(x-4\sqrt{x}+4\right)dx=\int\left(x-4x^{\frac{1}{2}}+4\right)dx=\frac{x^2}{2}-4\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+4x+c=\frac{x^2}{2}-\frac{8}{3}\sqrt{x^3}+4x+c$

$I_5=\int\frac{\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x}{\eta\mu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2x}dx=\int\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}-\frac{1}{\eta\mu^2x}\right)dx=\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x+c$

$I_6=\int\frac{xe^x+2}{x}dx=\int\left(e^x+\frac{2}{x}\right)dx=e^x+2\ln|x|+c$

$I_7=\int\left(\frac{3}{3x+4}+\frac{2}{2x-1}+\frac{5}{5x+3}\right)dx=\ln|3x+4|+\ln|2x-1|+\ln|5x+3|+c$

$I_8=\int\left(4\eta\mu 2x-2\sigma\upsilon\nu 2x-5x^4\right)dx=-2\sigma\upsilon\nu 2x-\eta\mu 2x-x^5+c$

6.56. $I_1=\int\frac{(x-1)e^x}{x^2}dx=\int\frac{xe^x-e^x}{x^2}dx=\int\left(\frac{e^x}{x}\right)'dx=\frac{e^x}{x}+c$

$I_2=\int\left(2x\eta\mu x+x^2\sigma\upsilon\nu x\right)dx=\int\left(x^2\eta\mu x\right)'dx=x^2\eta\mu x+c$

$I_3=\int\left(2x\ln x+x\right)dx=\int\left(x^2\ln x\right)'dx=x^2\ln x+c$

$I_4=\int\left(1+\ln x\right)dx=\int\left(x\ln x\right)'dx=x\ln x+c$

$I_5=\int\frac{1-\ln x}{x^2}dx=\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)'dx=\frac{\ln x}{x}+c$

$I_6=\int\frac{\sigma\upsilon\nu x-2x\eta\mu x}{2\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{x}}-\frac{x\eta\mu x}{\sqrt{x}}\right)dx=$

$=\int\left(\sigma\upsilon\nu x\left(\sqrt{x}\right)'+\sqrt{x}\left(\sigma\upsilon\nu x\right)'\right)dx=\int\left(\sigma\upsilon\nu x\sqrt{x}\right)'dx=\sqrt{x}\sigma\upsilon\nu x+c$

$I_7=\int\frac{e^x\left(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x\right)}{\eta\mu^2x}dx=\int\frac{e^x\eta\mu x-e^x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2x}dx=\int\left(\frac{e^x}{\eta\mu x}\right)'dx=\frac{e^x}{\eta\mu x}+c$

$I_8=\int\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}dx=\int\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)'dx=\frac{\eta\mu x}{x}+c$

$I_9=\int\frac{\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2x}dx=\int\left(\frac{x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'dx=\frac{x}{\sigma\upsilon\nu x}+c$

6.57. $I_1=\int\frac{3x^2-1}{x^3-x}dx=\int\frac{\left(x^3-x\right)'}{x^3-x}dx=\ln\left|x^3-x\right|+c$

$I_2=\int\frac{2x-4}{x^2-4x+3}dx=\int\frac{\left(x^2-4x+3\right)'}{x^2-4x+3}dx=\ln\left|x^2-4x+3\right|+c$

$I_3=\int\frac{3x+1}{x^2-4x+3}dx=$

Εχουμε $\frac{3x+1}{x^2-4x+3}=\frac{3x+1}{(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}\Leftrightarrow 3x+1=A(x-3)+B(x-1)$

$3x+1=(A+B)x+(-3A-B)$ οπότε $\left.\begin{aligned}A+B=3\\-3A-B=1\end{aligned}\right\}\begin{aligned}A=-2\\B=5\end{aligned}$ οπότε

$I_3=\int\frac{-2}{x-1}dx+\int\frac{5}{x-3}dx=-2\ln|x-1|+5\ln|x-3|+c$

$I_4=\int\frac{3}{x^2-1}dx=\frac{3}{2}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{3}{2}\int\frac{1}{x+1}dx=\frac{3}{2}\ln|x-1|-\frac{3}{2}\ln|x+1|+c$

γιατί $\frac{3}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$ και βρίσκω $A=\frac{3}{2}$ και $B=-\frac{3}{2}$

$I_5=\int\frac{x^2-5x+8}{x^3-4x^2+4x}dx$ έχουμε $\frac{x^2-5x+8}{x^3-4x^2+4x}=\frac{x^2-5x+8}{x(x-2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{\Gamma}{(x-2)^2}\Leftrightarrow$

$x^2-5x+8=(A+B)x^2+(-4A-2B+\Gamma)x+4A\Leftrightarrow\begin{cases}A=2\\B=-1\\\Gamma=1\end{cases}$ άρα

$I_5=\int\frac{2}{x}dx-\int\frac{1}{x-2}dx+\int\frac{1}{(x-2)^2}dx=2\ln|x|-\ln|x-2|-\frac{1}{x-2}+c$

$I_6=\int\frac{10x^2+2}{x^3-2x^2-x+2}dx$ έχουμε

$\frac{10x^2+2}{x^3-2x^2-x+2}=\frac{10x^2+2}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{\Gamma}{x-2}\Leftrightarrow$

$10x^2+2=(A+B+\Gamma)x^2+(-A-3B)x+(-2A+2B-\Gamma)$ άρα $\left\{\begin{aligned}A+B+\Gamma=10\\-A-3B=0\\-2A+2B-\Gamma=2\end{aligned}\right\}\begin{aligned}A=-6\\B=2\\\Gamma=14\end{aligned}$

και

$I_6=\int\frac{-6}{x-1}dx+\int\frac{2}{x+1}dx+\int\frac{14}{x-2}dx=-6\ln|x-1|+2\ln|x+1|+14\ln|x-2|+c$

6.58. $I_1=\int\frac{x^2-6x^2+7x-6}{x^2-6x+5}dx$ εκτελώντας τη διαίρεση των πολυωνύμων έχουμε:

$$\begin{array}{r|l} x^3-6x^2+7x-6 & x^2-6x+5 \\ \cline{2-2} -x^3+6x^2-5x & x \\ \hline 2x-6 & \end{array}$$

οπότε $I_1=\int\frac{x(x^2-6x+5)+(2x-6)}{x^2-6x+5}dx=\int xdx+\int\frac{2x-6}{x^2-6x+5}dx=$

$=\int xdx+\int\frac{(x^2-6x+5)'}{x^2-6x+5}dx=\frac{x^2}{2}+\ln|x^2-6x+5|+c$

$I_2=\int\frac{2x^3-10x^2+15x-1}{x^2-6x+5}dx$ είναι

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-10x^2+15x-1 & x^2-6x+5 \\ \cline{2-2} -2x^3+12x^2-10x & 2x+2 \\ \cline{1-1} 2x^2+5x-1 & \\ -2x^2+12x-10 & \\ \cline{1-1} 17x-11 & \end{array}$$

Οπότε $I_2=\int(2x+2)dx+\int\frac{17x-11}{x^2-6x+5}dx$

$\frac{17x-11}{x^2-6x+5}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-5}\Leftrightarrow...\Leftrightarrow A=-\frac{3}{2},\ B=\frac{37}{2}$

Άρα

$I_2=\int(2x+2)dx+\int\frac{-\frac{3}{2}}{x-1}dx+\int\frac{\frac{37}{2}}{x-5}dx=x^2+2x-\frac{3}{2}\ln|x-1|+\frac{37}{2}\ln|x-5|+c$

$I_3=\int\frac{x^3-2x^2+x+3}{x-1}dx=\int(x^2-x)dx+\int\frac{3}{x-1}dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3\ln|x-1|+c$

$I_4=\int\frac{x+2}{x-3}dx=\int\frac{x-3+5}{x-3}dx=\int\left(1+\frac{5}{x-3}\right)dx=x+5\ln|x-3|+c$

6.59. $I_1=\int\frac{x+3}{4x^2-1}dx=\int\frac{\frac{7}{4}}{2x-1}dx-\int\frac{\frac{5}{4}}{2x+1}dx=\frac{7}{8}\ln|2x-1|-\frac{5}{8}\ln|2x+1|+c$

$I_2=\int\frac{x+2}{x^2-x}dx=\int\frac{-2}{x}dx+\int\frac{3}{x-1}dx=-2\ln|x|+3\ln|x-1|+c$

$I_3=\int\frac{8}{x^2-4}dx=\int\frac{2}{x-2}dx+\int\frac{-2}{x+2}dx=2\ln|x-2|-2\ln|x+2|+c$

$I_4=\int\frac{x^3}{x^2+1}dx$ εκτελούμε τη διαίρεση

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -x^3-x & x \\ \cline{1-1} -x & \end{array}$$

οπότε $I_4=\int xdx-\int\frac{x}{x^2+1}dx=\int xdx-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$

6.60. $I_1=\int x\eta\mu x dx=\int x(-\sigma\upsilon\nu x)'dx=-x\sigma\upsilon\nu x-\int(-\sigma\upsilon\nu x)dx=-x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+c$

$I_2=\int x^2\sigma\upsilon\nu x dx=\int x^2(\eta\mu x)'dx=x^2\eta\mu x-\int 2x\eta\mu x dx=x^2\eta\mu x-\int 2x(-\sigma\upsilon\nu x)'dx=$

$=x^2\eta\mu x+2x\sigma\upsilon\nu x-\int 2\sigma\upsilon\nu x dx=x^2\eta\mu x+2x\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu x+c$

$I_3=\int(x+1)e^{2x}dx=\int(x+1)\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx=\frac{1}{2}e^{2x}(x+1)-\int\frac{1}{2}e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}(x+1)-\frac{1}{4}e^{2x}+c$

$I_4=\int\frac{2x-1}{e^x}dx=\int(2x-1)e^{-x}dx=\int(2x-1)(-e^{-x})'dx=-e^{-x}(2x-1)-\int 2(-e^{-x})dx=$

$$=-e^{-x}(2x-1)-2e^{-x}+c$$

$$I_5=\int(x-2)\eta\mu\frac{x}{2}dx=\int(x-2)\left(-2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\right)'dx=-2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}(x-2)-\int-2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}dx$$

$$=-2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}(x-2)+2\int\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}dx=-2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}(x-2)+4\eta\mu\frac{x}{2}+c$$

$$I_6=\int(x^2-4x+1)e^{-x}dx=\int(x^2-4x+1)(-e^{-x})'dx=-e^{-x}(x^2-4x+1)-\int(2x-4)(-e^{-x})dx=$$

$$=-e^{-x}(x^2-4x+1)+\int(2x-4)(-e^{-x})'dx=-e^{-x}(x^2-4x+1)-(2x-4)e^{-x}-\int2(-e^{-x})dx=$$

$$=-e^{-x}(x^2-2x-3)+2\int e^{-x}dx=-e^{-x}(x^2-2x-3)-2e^{-x}+c=-e^{-x}(x^2-2x-1)+c$$

6.61. $$I_1=\int x\ln x dx=\int\ln x\left(\frac{x^2}{2}\right)'dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{1}{x}\frac{x^2}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+c$$

$$I_2=\int\frac{2\ln x}{(x+2)^2}dx=-\int2\ln x\left(\frac{1}{x+2}\right)'dx=\frac{-2\ln x}{x+2}+\int\frac{2}{x(x+2)}dx\overset{\text{PHTH}}{=}$$

$$=\frac{-2\ln x}{x+2}+\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x+2}dx=\frac{-2\ln x}{x+2}+\ln|x|-\ln|x+2|+c$$

$$I_3=\int4x\ln\sqrt{x}dx=\int4x\ln x^{\frac{1}{2}}dx=\int2x\ln x\,dx=\int(x^2)'\ln x\,dx=x^2\ln x-\int x^2\frac{1}{x}dx=x^2\ln x-\frac{x^2}{2}+c$$

$$I_4=\int\ln^2xdx=\int(x)'\ln^2xdx=x\ln^2x-\int x\frac{2\ln x}{x}dx=x\ln^2x-2\int\ln x(x)'dx=$$

$$=x\ln^2x-2x\ln x+2\int\frac{1}{x}xdx==x\ln^2x-2x\ln x+2x+c$$

$$I_5=\int(3x^2-4x+1)\ln xdx=\int(x^3-2x^2+x)'dx=(x^3-2x^2+x)\ln x-\int\frac{x^3-2x^2+x}{x}dx=$$

$$=(x^3-2x+x)\ln x-\frac{x^3}{3}+x^2-x+c$$

$$I_6=\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\int\ln x(2\sqrt{x})'dx=2\sqrt{x}\ln x-\int\frac{1}{x}2\sqrt{x}dx=2\sqrt{x}\ln x-\int\frac{2}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+c$$

6.62. $$I_1=\int e^{2x}\eta\mu xdx=\int\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'\eta\mu xdx=\frac{1}{2}e^{2x}\eta\mu x-\int\frac{1}{2}e^{2x}\sigma\upsilon\nu xdx=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\eta\mu x-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'\sigma\upsilon\nu xdx=\frac{1}{2}e^{2x}\eta\mu x-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\sigma\upsilon\nu x-\int\frac{1}{2}e^{2x}(-\eta\mu x)dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\eta\mu x-\frac{1}{4}e^{2x}\sigma\upsilon\nu x-\frac{1}{4}\int e^{2x}\eta\mu xdx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I_1=\frac{1}{2}e^{2x}\eta\mu x-\frac{1}{4}e^{2x}\sigma\upsilon\nu x-\frac{1}{4}I_1\Leftrightarrow5I_1=2e^{2x}\eta\mu x-e^{2x}\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I_1=\frac{2e^{2x}\eta\mu x-e^{2x}\sigma\upsilon\nu x}{5}+c$$

$$I_2=\int e^{-x}\sigma\upsilon\nu2xdx=\int(-e^{-x})'\sigma\upsilon\nu2xdx=-e^{-x}\sigma\upsilon\nu2x-\int(-e^{-x})(-2\eta\mu2x)dx=$$

$$= -e^{-x}\sigma\upsilon\nu 2x - 2\int e^{-x}\eta\mu 2x dx = -e^{-x}\sigma\upsilon\nu 2x - 2\int\left(-e^{-x}\right)'\eta\mu 2x dx =$$

$$= -e^{-x}\sigma\upsilon\nu 2x - 2\left[-e^{-x}\eta\mu 2x - \int\left(-e^{-x}\right)\left(2\sigma\upsilon\nu 2x\right)dx\right] =$$

$$= -e^{-x}\sigma\upsilon\nu 2x + 2e^{-x}\eta\mu 2x - 4\int e^{-x}\sigma\upsilon\nu 2x dx \Leftrightarrow$$

$$I_2 = -e^{-x}\sigma\upsilon\nu 2x + 2e^{-x}\eta\mu 2x - 4I_2 \Leftrightarrow I_2 = \frac{-e^{-x}\sigma\upsilon\nu 2x + 2e^{-x}\eta\mu 2x}{5} + c$$

$$I_3 = \int e^{2x}\eta\mu 3x dx = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'\eta\mu 3x dx = \frac{1}{2}e^{2x}\eta\mu 3x - \int\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 3\sigma\upsilon\nu 3x dx =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\eta\mu 3x - \frac{3}{2}\int\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'\sigma\upsilon\nu 3x dx = \frac{1}{2}e^{2x}\eta\mu 3x - \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\sigma\upsilon\nu 3x - \int\frac{1}{2}e^{2x}\left(-3\eta\mu 3x\right)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\eta\mu 3x - \frac{3}{4}e^{2x}\sigma\upsilon\nu 3x - \frac{9}{4}\int e^{2x}\eta\mu 3x dx \Leftrightarrow$$

$$I_3 = \frac{1}{2}e^{2x}\eta\mu 3x - \frac{3}{4}e^{2x}\sigma\upsilon\nu 3x - \frac{9}{4}I_3 \Leftrightarrow 13I_3 = 2e^{2x}\eta\mu 3x - 3e^{2x}\sigma\upsilon\nu 3x \Leftrightarrow$$

$$I_3 = \frac{2e^{2x}\eta\mu 3x - 3e^{2x}\sigma\upsilon\nu 3x}{13} + c$$

6.63. $I_1 = \int(2x+1)e^{x^2+x}dx \underset{(2x+1)dx=du}{\overset{x^2+x=u}{=}} \int e^u du = e^u + c = e^{x^2+x} + c$

$$I_2 = \int\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)dx \underset{\sigma\upsilon\nu x dx=du}{\overset{\eta\mu x=u}{=}} \int\sigma\upsilon\nu u\cdot du = \eta\mu u + c = \eta\mu(\eta\mu x) + c$$

$$I_3 = \int 4\eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu x dx \underset{\sigma\upsilon\nu x dx=du}{\overset{\eta\mu x=u}{=}} \int 4u^3 du = u^4 + c = \eta\mu^4 x + c$$

6.64. $I_1 = \int\sigma\varphi x\ln(\eta\mu x)dx \underset{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}dx=du}{\overset{\ln(\eta\mu x)=u}{=}} \int u du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{\ln^2(\eta\mu x)}{2} + c$

$$I_2 = \int\frac{e^{\varepsilon\varphi x}}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx \underset{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=du}{\overset{\varepsilon\varphi x=u}{=}} \int e^u du = e^u + c = e^{\varepsilon\varphi x} + c$$

$$I_3 = \int\frac{\ln x+1}{x\ln x}dx \underset{(\ln x+1)dx=du}{\overset{x\ln x=4}{=}} \int\frac{1}{u}du = \ln|u| + c = \ln|x\ln x| + c$$

$$I_4 = \int\frac{e^x-2}{e^x+3}dx.$$

Θέτουμε $e^x + 3 = u \Leftrightarrow e^x = u - 3$ τότε $e^x dx = du$ οπότε:

$$I_4 = \int\frac{u-5}{u}\frac{1}{u-3}du = \int\frac{u-5}{u(u-3)}du \overset{\text{PHTH}}{=} \int\frac{\frac{5}{3}}{u}du - \int\frac{\frac{2}{3}}{u-3}du = \frac{5}{3}\ln|u| - \frac{2}{3}\ln|u-3| + c =$$

$$= \frac{5}{3}\ln\left(e^x+3\right) - \frac{2}{3}x + c$$

$$I_5 = \int\sigma\varphi x dx = \int\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}dx = \int\frac{(\eta\mu x)'}{\eta\mu x}dx = \ln|\eta\mu x| + c$$

$$I_6 = \int\frac{e^x}{\left(e^x+2\right)\ln\left(e^x+2\right)}dx.$$

Θέτουμε $\ln\left(e^x+2\right)=u$ οπότε $\frac{e^x}{e^x+2}dx=du$ και $I_6=\int\frac{1}{u}du=\ln|u|+c=\ln\left|\ln\left(e^x+2\right)\right|+c$

6.65. $I_1=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}dx$

Αν $\sqrt{x^2+5}=u$ τότε $\frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}dx=du$ οπότε $I_1=\int du=u+c=\sqrt{x^2+5}+c$

$I_2=\int\frac{4x+3}{\sqrt{3x+5}}dx$

Θέτουμε $u=3x+5\Leftrightarrow x=\frac{u-5}{3}$ και $dx=\frac{1}{3}du$ οπότε

$$I_2=\int\frac{4\frac{u-5}{3}+3}{\sqrt{u}}\frac{du}{3}=\int\frac{4u-11}{9\sqrt{u}}du=\frac{4}{9}\int\sqrt{u}du-\frac{11}{9}\int\frac{1}{\sqrt{u}}du=\frac{8}{27}\sqrt{u^3}-\frac{22}{9}\sqrt{u}+c=$$

$$=\frac{8}{27}\sqrt{\left(3x+5\right)^3}-\frac{22}{9}\sqrt{3x+5}+c$$

$I_3=\int x\sqrt{x+2}dx$

Θέτουμε $u=x+2\Leftrightarrow x=u-2$ και $dx=du$ οπότε

$$I_3=\int\left(u-2\right)\sqrt{u}du=\int\left(u^{\frac{3}{2}}-2u^{\frac{1}{2}}\right)du=\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-2\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{5}\sqrt{\left(x+2\right)^5}-\frac{4}{3}\sqrt{\left(x+2\right)^3}+c$$

$I_4=\int x\sqrt{x^2+1}dx$

Θέτουμε $x^2+1=u$ τότε $2xdx=du$ άρα $I_4=\int\frac{1}{2}\sqrt{u}du=\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+c=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+c$

6.66. $I_1=\int\frac{x-2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}dx$.

Θέτουμε $u=\sqrt{x}\Leftrightarrow x=u^2$ και $du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\Leftrightarrow 2udu=dx$

άρα $I_1=\int\frac{u^2-2u+2}{u+1}2udu=\int\frac{2u^3-4u^2+4u}{u+1}du=\int\left(2u^2-6u+10\right)du+\int\frac{-10}{u+1}du=$

$$=\frac{2}{3}u^3-3u^2+10u-10\ln|u+1|+c=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-3x+10\sqrt{x}-10\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+c$$

$I_2=\int\frac{3x+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}}dx$

Θέτουμε $u=\sqrt[6]{x}\Leftrightarrow x=u^6$ και $dx=6u^5du$ οπότε

$$I_2=\int\frac{3u^6+u^2+1}{u^3}6u^5du=\int\left(18u^8+6u^4+6u^2\right)du=2u^9+\frac{6}{5}u^5+2u^3+c=$$

$$=2\sqrt{x^3}+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}+c$$

$I_3=\int\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[4]{x+2}}{x+2}dx$

Θέτουμε $\sqrt[12]{x+2}=u \Leftrightarrow x+2=u^{12}$ και $dx=12u^{11}du$ οπότε

$$I_3=\int \frac{u^6+u^4+u^3}{u^{12}}12u^{11}du=12\int\left(u^5+u^3+u^2\right)du=2u^6+2u^4+4u^3+c=$$

$$=2\sqrt{x+2}+3\sqrt[3]{x+2}+4\sqrt[4]{x+2}+c$$

$$I_4=\int \frac{x-\sqrt{x+1}-3}{\sqrt[3]{x+1}}dx$$

Θέτουμε $\sqrt[6]{x+1}=u \Leftrightarrow x+1=u^6$ και $dx=6u^5du$ οπότε

$$I_4=\int \frac{u^6-1-u^3-3}{u^2}6u^5du=\int\left(6u^9-6u^6-24u^3\right)du=\frac{6}{10}u^{10}-\frac{6}{7}u^7-6u^4+c=$$

$$=\frac{3}{5}\sqrt[3]{(x+1)^5}-\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}-6\sqrt[6]{(x+1)^4}+c$$

6.67. $I_1=\int \frac{e^{2x}+4e^x}{e^{2x}-3e^x+2}dx=\int \frac{e^x\left(e^x+4\right)}{e^{2x}-3e^x+2}dx$

Εστω $e^x=u$ τότε $e^xdx=du$ τότε

$$I_1=\int \frac{u+4}{(u-1)(u-2)}du=\int \frac{-5}{u-1}du+\int \frac{6}{u-2}du=-5\ln|u-1|+6\ln|u-2|+c$$

$$=-5\ln\left|e^x-1\right|+6\ln\left|e^x-2\right|+c$$

$$I_2=\int \frac{e^{3x}-2e^{2x}-5e^x+6}{e^x+2}dx$$

$e^x=u \Leftrightarrow x=\ln u$ και $dx=\frac{1}{u}du$ οπότε

$$I_2=\int \frac{u^3-2u^2-5u+6}{u+2}\frac{1}{u}du=\int \frac{u^3-2u^2-5u+6}{u^2+2u}du=\int(u-4)du+\int \frac{3u+6}{u(u+2)}du=$$

$$=\int(u-4)du+\int \frac{3(u+2)}{u(u+2)}du=\int(u-4)du+\int \frac{3}{u}du=\frac{u^2}{2}-4u+3\ln|u|+c=$$

$$=\frac{e^{2x}}{2}-4e^x+3x+c$$

6.68. $I_1=\int \frac{3\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2x-7\eta\mu x+10}dx$

Θέτουμε $u=\eta\mu x$ οπότε $du=\sigma\upsilon\nu x dx$ άρα $I_1=\int \frac{3du}{u^2-7u+10}$ είναι

$$\frac{3}{u^2-7u+10}=\frac{A}{u-2}+\frac{B}{u-5}=3=A(u-5)+B(u-2)\Leftrightarrow\begin{cases}A=-1\\B=1\end{cases}$$

άρα $I_1=\int \frac{-1}{u-2}du+\int \frac{1}{u-5}du=-\ln|u-2|+\ln|u-5|+c$

άρα $I_1=-\ln|\eta\mu x-2|+\ln|\eta\mu x-5|+c$

$$I_2=\int \frac{2\ln x+\sqrt{\ln x}}{x\ln x}dx$$

Θέτουμε $u=\ln x$ τότε $du=\frac{1}{x}dx$ και

$$I_2=\int\frac{2u+\sqrt{u}}{u}du=\int\left(2+\frac{1}{\sqrt{u}}\right)du=2u+2\sqrt{u}du=2\ln x+2\sqrt{\ln x}+c$$

$$I_3=\int\sigma\upsilon\nu(\ln 2x)dx$$

Θέτουμε $u=\ln 2x$ οπότε $2x=e^u \Leftrightarrow dx=\frac{1}{2}e^u du$ τότε

$$I_3=\int\sigma\upsilon\nu u\frac{1}{2}e^u du=\frac{1}{2}e^u\sigma\upsilon\nu u+\frac{1}{2}\int e^u\eta\mu u du=\frac{1}{2}e^u\sigma\upsilon\nu u+\frac{1}{2}\int\left(e^u\right)'\eta\mu u du=$$

$$=\frac{1}{2}e^u\sigma\upsilon\nu u+\frac{1}{2}e^u\eta\mu u-\frac{1}{2}\int e^u\sigma\upsilon\nu u du\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I_3=\frac{1}{2}e^u\sigma\upsilon\nu u+\frac{1}{2}e^u\eta\mu u-\frac{1}{2}I_3\Leftrightarrow I_3=\frac{1}{3}\left(e^u\sigma\upsilon\nu u+e^u\eta\mu u\right)+c\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I_3=\frac{2x}{3}\left(\sigma\upsilon\nu(\ln 2x)+\eta\mu(\ln(2x))\right)+c$$

$$I_4=\int e^{\sqrt{x}}du$$

Θέτουμε $u=\sqrt{x}$ τότε $x=u^2$ και $dx=2udu$.

$$I_4=\int e^u 2udu=\int 2u\left(e^u\right)'du=2ue^u-\int 2e^u du=2ue^u-2e^u+c=2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+c$$

$$I_5=\int e^{-2x}\sigma\upsilon\nu\left(e^{-x}\right)dx$$

Θέτουμε $e^{-x}=u$ τότε $-e^{-x}dx=du$ άρα

$$I_5=-\int u\sigma\upsilon\nu u du=-\int u(\eta\mu u)'du=-u\eta\mu u+\int\eta\mu u du$$

$$=-u\eta\mu u-\sigma\upsilon\nu u+c=-e^{-x}\eta\mu e^{-x}-\sigma\upsilon\nu e^{-x}+c$$

$$I_6=-\int\frac{1}{\eta\mu x}dx=\int\frac{\eta\mu x}{\eta\mu^2 x}dx=\int\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx\underset{-\eta\mu x dx=du}{\overset{\sigma\upsilon\nu x=u}{=}}-\int\frac{1}{1-u^2}du=\int\frac{1}{u^2-1}du$$

Είναι $\frac{1}{u^2-1}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}\Leftrightarrow(A+B)u+(A-B)=1,\ A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2}$

$$I_6=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u-1}du-\frac{1}{2}\int\frac{1}{u+1}du=\frac{1}{2}\ln|u-1|-\frac{1}{2}\ln|u+1|+c=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+c=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right|+c$$

6.69. $\int e^{x^2+\ln x}dx=\int e^{x^2}e^{\ln x}dx=\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int\left(x^2\right)'e^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}+c$

6.70. $I_1=\int\sigma\upsilon\nu^3 x\eta\mu^2 xdx=\int\sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu xdx=\int\left(1-\eta\mu^2 x\right)\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu xdx$

Θέτουμε $u=\eta\mu x$ άρα $du=\sigma\upsilon\nu xdx$ και

$$I_1=\int\left(1-u^2\right)u^2du=\int\left(u^2-u^4\right)du=\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}+c=\frac{\eta\mu^3 x}{3}-\frac{\eta\mu^5 x}{5}+c$$

$$I_2=\int\eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu^7 xdx=\int\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^7 x\eta\mu xdx=\int\left(1-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)\sigma\upsilon\nu^7 x\eta\mu xdx$$

Θέτουμε $u=\sigma\upsilon\nu x$ και $du=-\eta\mu xdx$ οπότε

$$I_2=\int\left(1-u^2\right)u^7(-du)=\int\left(u^9-u^7\right)du=\frac{u^{10}}{10}-\frac{u^8}{8}+c=\frac{\sigma\upsilon\nu^{10}x}{10}-\frac{\sigma\upsilon\nu^8 x}{8}+c$$

$$I_3=\int\frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu x}dx=\int\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\eta\mu xdx$$

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x=u$ οπότε $-\eta\mu xdx=du$ οπότε

$$I_3=\int\frac{1-u^2}{u}(-du)=\int\frac{u^2-1}{u}du=\int\left(u-\frac{1}{u}\right)du=\frac{u^2}{2}-\ln|u|+c=\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{2}-\ln|\sigma\upsilon\nu x|+c$$

$$I_4=\int\eta\mu^5x\sigma\upsilon\nu x dx\underset{\substack{\eta\mu x=u\\ \sigma\upsilon\nu x dx=du}}{\overset{\theta\acute{\epsilon}\tau\omega}{=}}\int u^5du=\frac{u^6}{6}+c=\frac{\eta\mu^6x}{6}+c$$

$$I_5=\int\eta\mu^5xdx=\int\eta\mu^4x\eta\mu xdx=\int\left(\eta\mu^2x\right)^2\eta\mu xdx=\int\left(1-\sigma\upsilon\nu^2x\right)^2\eta\mu xdx$$

Θέτουμε $u=\sigma\upsilon\nu x$ οπότε $du=-\eta\mu xdx$ άρα

$$I_5=\int\left(1-u^2\right)^2(-du)=-\int\left(u^4-2u^2+1\right)du=-\frac{u^5}{5}+2\frac{u^3}{3}-u+c$$

$$=-\frac{\sigma\upsilon\nu^5x}{5}+\frac{2}{3}\sigma\upsilon\nu^3x-\sigma\upsilon\nu x+c$$

$$I_6=\int\frac{\eta\mu^5x}{\sigma\upsilon\nu^3x}dx=\int\frac{\left(1-\sigma\upsilon\nu^2x\right)^2}{\sigma\upsilon\nu^3x}\eta\mu xdx$$

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x=u$ οπότε $\eta\mu xdx=du$ τότε

$$I_6=\int\frac{\left(1-u^2\right)^2}{u^3}(-du)=-\int\frac{u^4-2u^2+1}{u^3}du=-\int\left(u-\frac{2}{u}+\frac{1}{u^3}\right)du=-\frac{u^2}{2}+2\ln|u|+\frac{1}{2u^2}+c=$$

$$=-\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{2}+2\ln|\sigma\upsilon\nu x|+\frac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2x}+c$$

6.71. **α)** Για να εφαρμόσουμε την παραγοντική ολοκλήρωση κάνουμε διάσπαση, οπότε:

$$I_\nu=\int\eta\mu^\nu xdx=\int\eta\mu^{\nu-1}x\eta\mu xdx=\int\eta\mu^{\nu-1}x(-\sigma\upsilon\nu x)'dx$$

$$=-\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x-\int(\nu-1)\eta\mu^{\nu-2}x\sigma\upsilon\nu x(-\sigma\upsilon\nu x)dx=$$

$$=-\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x+\int(\nu-1)\eta\mu^{\nu-2}x\sigma\upsilon\nu^2xdx=-\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x+(\nu-1)\int\eta\mu^{\nu-2}x\left(1-\eta\mu^2x\right)dx=$$

$$=-\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x+(\nu-1)\int\eta\mu^{\nu-2}xdx-(\nu-1)\int\eta\mu^{\nu}xdx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I_\nu=-\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x+(\nu-1)I_{\nu-2}-(\nu-1)I_\nu\Leftrightarrow I_\nu=\frac{-\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x+(\nu-1)I_{\nu-2}}{\nu}+c$$

β) Για $\nu=3$ $I_3=\dfrac{-\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu x+(\nu-1)I_1}{3}$, όμως $I_1=\int\eta\mu xdx=-\sigma\upsilon\nu x+c_1$

Άρα $I_3=\dfrac{-\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x}{3}+c_2$

6.72. Είναι $f(x)=2xe^x-xf'(x)\Leftrightarrow f(x)+xf'(x)=2xe^x$ (1)

όμως $\int 2xe^x=2xe^x-2\int e^xdx=2xe^x-2e^x+c$

άρα από $(1)\Rightarrow\left(xf(x)\right)'=\left(2xe^x-2e^x\right)'\Leftrightarrow xf(x)=2xe^x-2e^x+c$

Για $x=1$ προκύπτει $c=2$ άρα $xf(x)=2xe^x-2e^x+2\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2xe^x-2e^x+2}{x}$, $x>0$

6.73. Για $x>1$ στη σχέση $xf'(x)-f(x)=\dfrac{x(\ln x+2)}{\ln x}$ διαιρώντας με x^2 έχουμε

$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{\ln x+2}{x\ln x}$ (1)

Είναι $\int\frac{\ln x+2}{x\ln x}dx \overset{\substack{\text{θέτω } \ln x=u\\ \frac{1}{x}dx=du}}{=} \int\frac{u+2}{u}du=\int\left(1+\frac{2}{u}\right)du=u+2\ln|u|=\ln x+2\ln|\ln x|+c$

άρα από (1) έχουμε $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(\ln x+2\ln|\ln x|\right)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}=\ln x+2\ln|\ln x|+c$ για $x=e$

προκύπτει $c=0$, άρα $\frac{f(x)}{x}=\ln x+2\ln|\ln x| \Leftrightarrow f(x)=x\ln x+2x\ln|\ln x|$, $x\in(1,+\infty)$

6.74. **α)** $f'(x)-2xf(x)=6x \overset{\cdot e^{-x^2}}{\Leftrightarrow} e^{-x^2}f'(x)-2xe^{-x^2}f(x)=6xe^{-x^2}$ (1)

$\int 6xe^{-x^2}dx=-3\int(-2x)e^{-x^2}dx=-3\int\left(-x^2\right)'e^{-x^2}dx=-3e^{-x^2}+c$

άρα η (1) γίνεται $\left(e^{-x^2}f(x)\right)'=\left(-3e^{-x^2}\right)' \Leftrightarrow e^{-x^2}f(x)=-3e^{-x^2}+c$, για $x=0$ είναι $c=4$

οπότε $e^{-x^2}f(x)=-3e^{-x^2}+4 \Leftrightarrow f(x)=4e^{x^2}-3$, $x\in\mathbb{R}$

β) Είναι $xf'(x)+f(x)=x\eta\mu x \Leftrightarrow \left(xf(x)\right)'=x\eta\mu x \Leftrightarrow$

$xf(x)=\int x\eta\mu x dx=\int x(-\sigma\upsilon\nu x)'dx=-x\sigma\upsilon\nu x+\int\sigma\upsilon\nu x dx \Leftrightarrow xf(x)=-x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+c$

Για $x=\frac{\pi}{2}$ προκύπτει $c=0$ άρα $xf(x)=\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x$ και

για $x\neq 0$ είναι $f(x)=\frac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{x}$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, θα είναι και συνεχής οπότε θα είναι και συνεχής στο $x_0=0$ οπότε $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}-\sigma\upsilon\nu x\right)=0$

Άρα $f(x)=\begin{cases}\frac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

γ) Για κάθε $x\neq 0$ είναι $xf'(x)-f(x)=x^3e^x \Leftrightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} \overset{(1)}{=} xe^x \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=xe^x$

Για κάθε $x>0$ είναι $\frac{f(x)}{x}=\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+c_1 \Leftrightarrow$

$\frac{f(x)}{x}=xe^x-e^x+c_1 \Leftrightarrow f(x)=x(x-1)e^x+c_1x$

Επειδή $f(1)=1$ τότε $c_1=1$ άρα $f(x)=x(x-1)e^x+x$, $x>0$

δ) Είναι $xf'(x)-f(x)=\frac{x^2(2x-1)}{x^2-x+5}$.

Για $x>0$ θα έχουμε

$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{2x-1}{x^2-x+5} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(\ln\left|x^2-x+5\right|\right)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}=\ln\left(x^2-x+5\right)+c$

Για $x=1$ προκύπτει $c=0$ άρα $f(x)=x\ln(x^2-x+5)$, $x>0$

6.75. **α)** $f'(x)=-\dfrac{1}{x\ln^2 x}=-\dfrac{(\ln x)'}{\ln^2 x}\Leftrightarrow f'(x)=\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)'\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{\ln x}+c$

Για $x=e$ $1=\dfrac{1}{1}+c\Leftrightarrow c=0$ οπότε $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$

β) $f'(x)=x^{e^x}\cdot e^x\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)=e^{e^x\ln x}\cdot\left(e^x\dfrac{1}{x}+e^x\ln x\right)=e^{e^x\ln x}\cdot\left(e^x\ln x\right)'\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)=\left(e^{e^x\ln x}\right)'\Leftrightarrow f(x)=e^{e^x\ln x}+c$

Για $x=1$ είναι $f(1)=c\Leftrightarrow c=0$, άρα $f(x)=e^{e^x\ln x}$

6.76. **α)** $e^xf'(x)-xf^2(x)=0\Leftrightarrow e^xf'(x)=xf^2(x)\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=xe^{-x}$

οπότε $\left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)'=xe^{-x}$ άρα $-\dfrac{1}{f(x)}=\int xe^{-x}dx$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{f(x)}=\int x\left(e^{-x}\right)'dx\Leftrightarrow\dfrac{1}{f(x)}=xe^{-x}-\int e^{-x}dx\Leftrightarrow\dfrac{1}{f(x)}=xe^{-x}+e^{-x}+c$

Για $x=1$ προκύπτει $c=0$ άρα $\dfrac{1}{f(x)}=xe^{-x}+e^{-x}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$, $x>0$

β) $f'(x)-1=2xe^{-f(x)+x+x^2}\Leftrightarrow f'(x)-1=\dfrac{2xe^{x^2}}{e^{f(x)-x}}\Leftrightarrow\left(f(x)-x\right)'e^{f(x)-x}=2xe^{x^2}\Leftrightarrow\left(e^{f(x)-x}\right)'=\left(e^{x^2}\right)'$

άρα $e^{f(x)-x}=e^{x^2}+c$

Για $x=1$ προκύπτει $c=0$ άρα $e^{f(x)-x}=e^{x^2}\Leftrightarrow f(x)-x=x^2\Leftrightarrow f(x)=x^2+x$, $x>0$

6.77. Αφού η C_f δέχεται οριζοντια εφαπτομένη στο $(0,0)$ θα ισχύει $f(0)=f'(0)=0$

Είναι $f'(x)=\int\left(xe^x+x\sigma\upsilon\nu x\right)dx=\int x\left(e^x\right)'dx+\int x\left(\eta\mu x\right)'dx$

$=xe^x-\int e^xdx+x\eta\mu x-\int\eta\mu xdx\Leftrightarrow f'(x)=xe^x-e^x+x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+c_1$

Επειδή $f'(0)=0$ τότε $c_1=0$ άρα $f'(x)=(x-1)e^x+x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ οπότε

$f(x)=\int(x-1)e^xdx+\int x\eta\mu xdx+\int\sigma\upsilon\nu xdx=(x-1)e^x-\int e^xdx+\int x\left(-\sigma\upsilon\nu x\right)'dx+\eta\mu x=$

$=(x-1)e^x-e^x-x\sigma\upsilon\nu x+\int\sigma\upsilon\nu xdx+\eta\mu x=(x-1)e^x-x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+\eta\mu x+c_2\Leftrightarrow$

$f(x)=(x-2)e^x-x\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x+c_2$

$f(0)=0$ άρα $c_2=2$, οπότε $f(x)=(x-2)e^x-x\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x+2$

6.78 **α)** Είναι $2\left[f'(x)\right]^2+2f(x)f''(x)=e^x\Leftrightarrow\left[2f(x)f'(x)\right]'=\left(e^x\right)'\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=e^x+\alpha\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$\left(f^2(x)\right)'=\left(e^x+\alpha x\right)'\Leftrightarrow f^2(x)=e^x+\alpha x+\beta\quad(1)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

β) Στην (1) για $x=0$ έχουμε $2f(0)f'(0)=e^0+\alpha \Leftrightarrow 0=1+\alpha \Leftrightarrow \alpha=-1$ και

στην (2) για $x=0$ έχουμε $f^2(0)=e^0+\alpha\cdot 0+\beta \Leftrightarrow 1=1+\beta \Leftrightarrow \beta=0$

οπότε $f^2(x)=e^x-x \quad (3)$

γ) Εστω $h(x)=e^x-x-1,\ x\in\mathbb{R}$

$h'(x)=e^x-1\ge 0 \Leftrightarrow e^x\ge 1 \Leftrightarrow x\ge 0$ οπότε

το πρόσημο της h' και η μονοτονία της h δίνονται στο διπλανό πίνακα.

	$-\infty$	0	$+\infty$
h'	$-$		$+$
h	↘		↗

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$h(x)\ge h(0) \Leftrightarrow e^x-x-1\ge 0 \Leftrightarrow e^x\ge x+1$

δ) Επειδή $e^x\ge x+1 \Leftrightarrow e^x-x\ge 1>0$ άρα $e^x-x>0$ οπότε $f^2(x)=e^x-x>0$ άρα

$f^2(x)\ne 0 \Leftrightarrow f(x)\ne 0$ και αφού η f είναι συνεχής τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή $f(0)=1>0$ τότε $f(x)>0$ άρα $f(x)=\sqrt{e^x-x}$

ε) Είναι $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{2\sqrt{e^x-1}} \quad (4)$.

Από την υπόθεση έχουμε ότι $2f(x)f''(x)=e^x-2\left[f'(x)\right]^2 \quad (5)$ οπότε

$$\int\frac{f(x)f''(x)}{e^x-1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2f(x)f''(x)}{e^x-1}dx\overset{(5)}{=}\frac{1}{2}\int\frac{e^x-2\left[f'(x)\right]^2}{e^x-1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{e^x}{e^x-1}dx-\int\frac{\left[f'(x)\right]^2}{e^x-1}dx\overset{(4)}{=}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{e^x}{e^x-1}dx-\int\frac{\frac{1}{4}\frac{\left(e^x-1\right)^2}{e^x-x}}{e^x-1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|e^x-1\right|-\frac{1}{4}\int\frac{e^x-1}{e^x-x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|e^x-1\right|-\frac{1}{4}\ln\left|e^x-x\right|+c$$

6.79. **α)** Η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^{2x}+\kappa\right)-x$, με $\kappa>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+\kappa}-1=\frac{2e^{2x}-e^{2x}-\kappa}{e^{2x}+\kappa}=\frac{e^{2x}-\kappa}{e^{2x}+\kappa}$$

Είναι $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow e^{2x}-\kappa\ge 0 \Leftrightarrow e^{2x}\ge\kappa \Leftrightarrow 2x\ge\ln\kappa \Leftrightarrow x\ge\frac{1}{2}\ln\kappa$

Οπότε το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f δίνονται στο διπλανό πίνακα.

	$-\infty$	$\frac{1}{2}\ln\kappa$	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	↘		↗

Παρατηρούμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για $x_0=\frac{1}{2}\ln\kappa$

β) Είναι $f(x_0)=\ln\left(e^{2\frac{1}{2}\ln\kappa}+\kappa\right)-\frac{1}{2}\ln\kappa=\ln 2\kappa-\frac{1}{2}\ln\kappa=\ln 2+\ln\kappa-\frac{1}{2}\ln\kappa=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\kappa$

Οπότε το ακρότατο της f είναι το σημείο $\left(\frac{1}{2}\ln\kappa,\ln 2+\frac{1}{2}\ln\kappa\right)$, $\kappa>0$ οπότε αν $x=\frac{1}{2}\ln\kappa$ και $y=\ln2+\frac{1}{2}\ln\kappa$ θα είναι $y=\ln2+x$ άρα ο γεωμετρικός τόπος των ακροτάτων είναι η ευθεία $y=x+\ln2$

γ) Είναι $I(x)=\int e^{2x}f(x)dx=\int e^{2x}\left[\ln\left(e^{2x}+\kappa\right)-x\right]dx=\int e^{2x}\ln\left(e^{2x}+\kappa\right)dx-\int xe^{2x}dx$

Εστω $I_1=\int e^{2x}\ln\left(e^{2x}+\kappa\right)dx$. Εστω $u=e^{2x}+\kappa$ τότε $du=2e^{2x}dx$ άρα

$$I_1=\frac{1}{2}\int \ln u du=\frac{1}{2}\int (u)'\ln u du=\frac{1}{2}u\ln u-\frac{1}{2}\int u\frac{1}{u}du=\frac{1}{2}u\ln u-\frac{1}{2}u+c_1=$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{2x}+\kappa\right)\ln\left(e^{2x}+\kappa\right)-\frac{1}{2}\left(e^{2x}+\kappa\right)+c_1 \text{ και}$$

$$I_2=\int xe^{2x}dx=\int x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+c_2$$

Άρα $I(x)=I_1+I_2=\frac{1}{2}\left(e^{2x}+\kappa\right)\ln\left(e^{2x}+\kappa\right)-\frac{1}{2}\left(e^{2x}+\kappa\right)+\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+c$

Ορισμένο ολοκλήρωμα

6.115. α) Η συνάρτηση $f(x)=2x+1$ είναι συνεχής στο $[1,2]$ οπότε

$$\int_1^2 (2x+1)dx=\lim_{\nu\to+\infty}\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\cdot\Delta x .$$

Χωρίζουμε το διάστημα $[1,2]$ σε ν ίσα τμήματα πλάτους $\Delta x=\frac{2-1}{\nu}=\frac{1}{\nu}$ και

$\xi_\kappa=1+\kappa\frac{1}{\nu}=1+\frac{\kappa}{\nu}$. Είναι $f(\xi_\kappa)=2\left(1+\frac{\kappa}{\nu}\right)+1=3+\frac{2\kappa}{\nu}$ οπότε

$$\left.\begin{aligned} f(\xi_1)&=3+\frac{2\cdot 1}{\nu}\\ f(\xi_2)&=3+\frac{2\cdot 2}{\nu}\\ &\vdots\\ f(\xi_\nu)&=3+\frac{2\cdot \nu}{\nu}\end{aligned}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)=3\cdot\nu+\frac{2(1+2+...+\nu)}{\nu}=3\cdot\nu+\frac{\cancel{2}}{\cancel{\nu}}\frac{\cancel{\nu}(\nu+1)}{\cancel{2}}=3\nu+\nu+1=4\nu+1$$

και $\int_1^2 (2x+1)dx=\lim_{\nu\to+\infty}\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\cdot\Delta x=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{4\nu+1}{\nu}=4$

β) Η συνάρτηση $f(x)=3x^2-4x$ είναι συνεχής στο $[1,2]$ οπότε

$$\int_0^1 (3x^2-4x)dx=\lim_{\nu\to+\infty}\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\cdot\Delta x$$

Είναι $\Delta x=\frac{1-0}{\nu}=\frac{1}{\nu}$ και $\xi_\kappa=0+\kappa\frac{1}{\nu}=\frac{\kappa}{\nu}$ και $f(\xi_\kappa)=3\left(\frac{\kappa}{\nu}\right)^2-4\left(\frac{\kappa}{\nu}\right)=3\frac{\kappa^2}{\nu^2}-4\frac{\kappa}{\nu}$ οπότε

$$\left.\begin{aligned} f(\xi_1)&=3\cdot\frac{1^2}{\nu^2}-4\frac{1}{\nu}\\ f(\xi_2)&=3\cdot\frac{2^2}{\nu^2}-4\frac{2}{\nu}\\ &\vdots\\ f(\xi_\nu)&=3\cdot\frac{\nu^2}{\nu^2}-4\frac{\nu}{\nu}\end{aligned}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)=3\frac{1^2+2^2+...+\nu^2}{\nu^2}-4\frac{1+2+...+\nu}{\nu}\Leftrightarrow$$

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)=\frac{\cancel{3}}{\nu^{\cancel{2}}}\frac{\cancel{\nu}(\nu+1)(2\nu+1)}{\cancel{6}2}-\frac{4}{\cancel{\nu}}\frac{\cancel{\nu}(\nu+1)}{2}=\frac{2\nu^2+3\nu+1}{2\nu}-\frac{4\nu+4}{2}=$$

$$=\frac{2\nu^2+3\nu+1-4\nu^2-4\nu}{2\nu}=\frac{-2\nu^2+\nu+1}{2\nu}$$

και $\int_0^1 (3x^2-4x)dx=\lim_{\nu\to+\infty}\left[\frac{-2\nu^2+\nu+1}{2\nu}\cdot\frac{1}{\nu}\right]=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{-2\nu^2+\nu+1}{2\nu^2}=-1$

γ) Η συνάρτηση $f(x)=3x^2+2x+1$ είναι συνεχής στο $[-1,1]$ οπότε

$\int_{-1}^1 (3x^2+2x+1)dx=\lim_{\nu\to+\infty}\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\cdot\Delta x$ όπου $\Delta x=\frac{1-(-1)}{\nu}=\frac{2}{\nu}$ και $\xi_\kappa=-1+\kappa\frac{2}{\nu}$ οπότε

$$f(\xi_\kappa)=3\left(-1+\frac{2\kappa}{\nu}\right)^2+2\left(-1+\frac{2\kappa}{\nu}\right)+1=3\left(1-\frac{4\kappa}{\nu}+\frac{4\kappa^2}{\nu^2}\right)-2+\frac{4\kappa}{\nu}+1=$$

$$=3-\frac{12\kappa}{\nu}+\frac{12\kappa^2}{\nu^2}-2+\frac{4\kappa}{\nu}+1=\frac{12\kappa^2}{\nu^2}-\frac{8\kappa}{\nu}+2$$

οπότε

$$\left.\begin{aligned} f(\xi_1)&=\frac{12\cdot 1^2}{\nu^2}-\frac{8\cdot 1}{\nu}+2\\ f(\xi_2)&=\frac{12\cdot 2^2}{\nu^2}-\frac{8\cdot 2}{\nu}+2\\ &\vdots\\ f(\xi_\nu)&=\frac{12\cdot \nu^2}{\nu^2}-\frac{8\cdot \nu}{\nu}+2\end{aligned}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}\sum_{\kappa=1}^{\nu}f(\xi_\kappa)=\frac{12}{\nu^2}\left(1^2+2^2+\ldots+\nu^2\right)-\frac{8}{\nu}(1+2+\ldots+\nu)+2\nu \Leftrightarrow$$

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}f(\xi_\kappa)=\frac{\cancel{12}\,2}{\nu^{\cancel{2}}}\frac{\cancel{\nu}(\nu+1)(2\nu+1)}{\cancel{6}}-\frac{\cancel{8}}{\cancel{\nu}}\frac{\cancel{\nu}(\nu+1)}{\cancel{2}}+2\nu=\frac{2(\nu+1)(2\nu+1)}{\nu}-4\nu-4+2\nu=$$

$$=\frac{4\nu^2+6\nu+2}{\nu}-2\nu-4=\frac{4\nu^2+6\nu+2-2\nu^2-4\nu}{\nu}=\frac{2\nu^2+2\nu+2}{\nu}$$

Οπότε $\int_{-1}^{1}\left(3x^2+2x+1\right)dx=\lim_{\nu\to+\infty}\left[\frac{2\nu^2+2\nu+2}{\nu}\cdot\frac{2}{\nu}\right]=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{4\nu^2}{\nu^2}=4$

δ) Η συνάρτηση $f(x)=x^3-x$ είναι συνεχής στο $[2,4]$ οπότε

$\int_{2}^{4}\left(x^3-x\right)dx=\lim_{\nu\to+\infty}\sum_{\kappa=1}^{\nu}f(\xi_\kappa)\cdot\Delta x$ όπου $\Delta x=\frac{4-2}{\nu}=\frac{2}{\nu}$ και $\xi_\kappa=2+\kappa\frac{2}{\nu}=\frac{2\kappa}{\nu}+2$ άρα

$f(\xi_\kappa)=\left(\frac{2\kappa}{\nu}+2\right)^3-\left(\frac{2\kappa}{\nu}+2\right)=\frac{8\kappa^3}{\nu^3}+\frac{24\kappa^2}{\nu^2}+\frac{24\kappa}{\nu}+8-\frac{2\kappa}{\nu}-2=\frac{8\kappa^3}{\nu^3}+\frac{24\kappa^2}{\nu^2}+\frac{22\kappa}{\nu}+6$ και

$$\left.\begin{aligned} f(\xi_1)&=\frac{8\cdot 1^3}{\nu^3}+\frac{24\cdot 1^2}{\nu^2}+\frac{22\cdot 1}{\nu}+6\\ f(\xi_2)&=\frac{8\cdot 2^3}{\nu^3}+\frac{24\cdot 2^2}{\nu^2}+\frac{22\cdot 2}{\nu}+6\\ &\vdots\\ f(\xi_\nu)&=\frac{8\cdot \nu^3}{\nu^3}+\frac{24\cdot \nu^2}{\nu^2}+\frac{22\cdot \nu}{\nu}+6\end{aligned}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}$$

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}f(\xi_\kappa)=\frac{8}{\nu^3}\left(1^3+2^3+\ldots+\nu^3\right)+\frac{24}{\nu^2}\left(1^2+2^2+\ldots+\nu^2\right)+\frac{22}{\nu}(1+2+\ldots+\nu)+6\nu=$$

$$=\frac{\cancel{8}\,2}{\nu^{\cancel{3}}}\frac{\cancel{\nu^2}(\nu+1)^2}{\cancel{4}}+\frac{\cancel{24}\,4}{\nu^{\cancel{2}}}\frac{\cancel{\nu}(\nu+1)(2\nu+1)}{\cancel{6}}+\frac{\cancel{22}\,11}{\cancel{\nu}}\cdot\frac{\cancel{\nu}(\nu+1)}{\cancel{2}}+6\nu=$$

$$=\frac{2(\nu+1)^2}{\nu}+\frac{4(\nu+1)(2\nu+1)}{\nu}+11\nu+11+6\nu=$$

$$=\frac{2\nu^2+4\nu+4+8\nu^2+12\nu+4}{\nu}+17\nu+11=\frac{10\nu^2+16\nu+8+17\nu^2+11\nu}{\nu}=$$

$=\frac{27\nu^2+27\nu+8}{\nu}$, οπότε $\int_{2}^{4}\left(x^3-x\right)dx=\lim_{\nu\to+\infty}\left[\frac{27\nu^2+27\nu+8}{\nu}\cdot\frac{2}{\nu}\right]=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{54\nu^2}{\nu^2}=54$

ε) Η συνάρτηση $f(x)=x^3+x^2$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ οπότε

$\int_{0}^{1}\left(x^3+x^2\right)dx=\lim_{\nu\to+\infty}\left[\sum_{\kappa=1}^{\nu}f(\xi_\kappa)\cdot\Delta x\right]$ όπου $\Delta x=\frac{1-0}{\nu}=\frac{1}{\nu}$ και $\xi_\kappa=0+\kappa\frac{1}{\nu}=\frac{\kappa}{\nu}$ άρα

$$f(\xi_\kappa)=\left(\frac{\kappa}{\nu}\right)^3+\left(\frac{\kappa}{\nu}\right)^2=\frac{\kappa^3}{\nu^3}+\frac{\kappa^2}{\nu^2}\ \text{και}$$

$$\left.\begin{aligned}
&f(\xi_1)=\frac{1^3}{\nu^3}+\frac{1^2}{\nu^2}\\
&f(\xi_2)=\frac{2^3}{\nu^3}+\frac{2^2}{\nu^2}\\
&\vdots\\
&f(\xi_\nu)=\frac{\nu^3}{\nu^3}+\frac{\nu^2}{\nu^2}
\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sum_{\kappa=1}^{\nu}f(\xi_\kappa)=\frac{1}{\nu^3}\left(1^3+2^3+\ldots+\nu^3\right)+\frac{1}{\nu^2}\left(1^2+2^2+\ldots+\nu^2\right)=$$

$$=\frac{1}{\nu^{\cancel{3}}}\frac{\cancel{\nu^2}(\nu+1)^2}{4}+\frac{1}{\nu^{\cancel{2}}}\frac{\cancel{\nu}(2\nu+1)(\nu+1)}{6}=\frac{(\nu+1)^2}{4\nu}+\frac{2\nu^2+3\nu+1}{6\nu}=$$

$$=\frac{3\nu^2+6\nu+3+4\nu^2+6\nu+2}{12\nu}=\frac{7\nu^2+12\nu+5}{12\nu}$$

οπότε $\int_0^1\left(x^3+x^2\right)dx=\lim_{\nu\to+\infty}\left[\frac{7\nu^2+12\nu+5}{12\nu}\cdot\frac{1}{\nu}\right]=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{7\nu^2}{12\nu^2}=\frac{7}{12}$

στ) Η συνάρτηση $f(x)=4x^3-3x^2+2x-1$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ οπότε

$\int_0^2\left(4x^3-3x^2+2x-1\right)dx=\lim_{\nu\to+\infty}\left[\sum_{\kappa=1}^{\nu}f(\xi_\kappa)\cdot\Delta x\right]$ όπου $\Delta x=\frac{2-0}{\nu}=\frac{2}{\nu}$ και $\xi_\kappa=0+\kappa\frac{2}{\nu}=\frac{2\kappa}{\nu}$

και $f(\xi_\kappa)=4\left(\frac{2\kappa}{\nu}\right)^3-3\left(\frac{2\kappa}{\nu}\right)^2+2\left(\frac{2\kappa}{\nu}\right)-1=\frac{32\kappa^3}{\nu^3}-\frac{12\kappa^2}{\nu^2}+\frac{4\kappa}{\nu}-1$,οπότε

$$\left.\begin{aligned}
&f(\xi_1)=32\cdot\frac{1^3}{\nu^3}-\frac{12\cdot1^2}{\nu^2}+\frac{4\cdot1}{\nu}-1\\
&f(\xi_2)=32\cdot\frac{2^3}{\nu^3}-\frac{12\cdot2^2}{\nu^2}+\frac{4\cdot2}{\nu}-1\\
&\vdots\\
&f(\xi_\nu)=32\cdot\frac{\nu^3}{\nu^3}-\frac{12\cdot\nu^2}{\nu^2}+4\cdot\frac{\nu}{\nu}-1
\end{aligned}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}$$

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}f(\xi_\kappa)=\frac{32}{\nu^3}\cdot\left(1^3+2^3+\ldots+\nu^3\right)-\frac{12}{\nu^2}\left(1^2+2^2+\ldots+\nu^2\right)+\frac{4}{\nu}(1+2+\ldots+\nu)-\nu=$$

$$=\frac{\cancel{32}\,8}{\nu^{\cancel{3}}}\cdot\frac{\cancel{\nu^2}(\nu+1)^2}{\cancel{4}}-\frac{\cancel{12}\,2}{\nu^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{\nu}(\nu+1)(2\nu+1)}{\cancel{6}}+\frac{\cancel{4}\,2}{\cancel{\nu}}\cdot\frac{\cancel{\nu}(\nu+1)}{\cancel{2}}-\nu=$$

$$=\frac{8(\nu+1)^2}{\nu}-\frac{2(\nu+1)(2\nu+1)}{\nu}+2\nu+2-\nu=$$

$$=\frac{8\nu^2+16\nu+8-4\nu^2-6\nu-2+\nu^2+2\nu}{\nu}=\frac{5\nu^2+12\nu+6}{\nu}$$

άρα $\int_0^2\left(4x^3-3x^2+2x-1x^3+x^2\right)dx=\lim_{\nu\to+\infty}\left[\frac{5\nu^2+12\nu+6}{\nu}\cdot\frac{2}{\nu}\right]=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{10\nu^2}{\nu^2}=10$

6.116. $I_1=\int_{-2}^{0}f(x)dx=(OAB)=\frac{(OA)(OB)}{2}=\frac{2\cdot3}{2}=3$

$I_2=\int_{-2}^{1}f(x)dx=(AB\Gamma)=\frac{(A\Gamma)(BO)}{2}=\frac{3\cdot3}{2}=\frac{9}{2}$

$$I_3=\int_1^3 f(x)dx=-(\Gamma\Delta E)=-\frac{(\Gamma E)\cdot u}{2}=-\frac{2\cdot 4}{2}=-4$$

$$I_4=\int_3^5 f(x)dx=(ZEH)=\frac{(EH)\cdot u}{2}=\frac{2\cdot 4}{2}=4$$

6.117. Είναι $\int_\alpha^\beta\left(\int_\alpha^x(1+t)dz\right)dx=\int_\alpha^\beta\left((1+t)\int_\alpha^x dz\right)dx=\int_\alpha^\beta(1+t)(x-\alpha)dx=(1+t)\int_\alpha^\beta(x-\alpha)dx=$

$$=(1+t)\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^\beta-\alpha[x]_\alpha^\beta\right)=(1+t)\left(\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}-\alpha(\beta-\alpha)\right)=$$

$$=(1+t)(\beta-\alpha)\left(\frac{\beta+\alpha}{2}-\alpha\right)=(1+t)(\beta-\alpha)\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{(1+t)(\beta-\alpha)^2}{2}$$

6.118. Είναι $\int_{\lambda+3}^{\lambda^2+1}\frac{4x^2-3x-5}{x^2+4}dx+\int_{\lambda^2+1}^{\lambda+3}\frac{3x^2-3x-9}{x^2+4}dx=\int_{-1}^{1}2dx\Leftrightarrow$

$$\int_{\lambda+3}^{\lambda^2+1}\left(\frac{4x^2-3x-5}{x^2+4}-\frac{3x^2-3x-9}{x^2+4}\right)dx=2(1+1)\Leftrightarrow\int_{\lambda+3}^{\lambda^2+1}\frac{x^2+4}{x^2+4}dx=4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_{\lambda+3}^{\lambda^2+1}1\cdot dx=4\Leftrightarrow\lambda^2+1-\lambda-3=4\Leftrightarrow\lambda^2-\lambda-6=0\Leftrightarrow\lambda=3\ \text{ή}\ \lambda=-2$$

6.119. Εχουμε $\int_3^9\frac{\ln x-2x^2+5}{x^2+x+3}dx-\int_4^5 xdt-\int_1^3\lambda dx=\int_9^3\frac{3x^2+x-\ln x-2}{x^2+x+3}dx-x\Leftrightarrow$

$$\int_3^9\left(\frac{\ln x-2x^2+5}{x^2+x+3}+\frac{3x^2+x-\ln x-2}{x^2+x+3}\right)dx-x(5-4)-\lambda(3-1)=-x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_3^9\frac{x^2+x+3}{x^2+x+3}dx-x-2\lambda=-x\Leftrightarrow\int_3^9 1dx-2\lambda=0\Leftrightarrow 1(9-3)-2\lambda=0\Leftrightarrow 6=2\lambda\Leftrightarrow\lambda=3$$

6.120. $A=\int_3^6\frac{2-x^2-4x}{x^3-1}dx+\int_3^6\frac{x}{x-1}dx+\int_3^6\frac{3}{x^2+x+1}dx=$

$$=\int_3^6\left(\frac{2-x^2-4x}{(x-1)(x^2+x+1)}+\frac{\overset{x^2+x+1}{\breve{x}}}{x-1}+\frac{\overset{x-1}{\breve{3}}}{x^2+x+1}\right)dx=\int_3^6\frac{2-x^2-4x+x^3+x^2+x+3x-3}{(x-1)(x^2+x+1)}dx=$$

$$=\int_3^6\frac{x^3-1}{x^3-1}dx=\int_3^6 1dx=6-3=3$$

6.121. Εχουμε $\int_0^\alpha 2xe^xdx=\int_\alpha^0 x^2e^xdx+9e^\alpha\Leftrightarrow\int_0^\alpha 2xe^xdx-\int_\alpha^0 x^2e^xdx=9e^\alpha\Leftrightarrow$

$$\int_0^\alpha\left(2xe^x+x^2e^x\right)dx=9e^\alpha\Leftrightarrow\int_0^\alpha\left(x^2e^x\right)'dx=9e^\alpha\Leftrightarrow\left[x^2e^x\right]_0^\alpha=9e^\alpha\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2e^\alpha=9e^\alpha\Leftrightarrow\alpha^2=9\Leftrightarrow\alpha=\pm 3$$

6.122. Εστω $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$. Επειδή η f είναι περιττή θα ισχύει $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε $\alpha(-x)^3+\beta(-x)^2+\gamma(-x)+\delta=-\left(\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\alpha x^3+\beta x^2-\gamma x+\delta=-\alpha x^3-\beta x^2-\gamma x-\delta$ οπότε $\beta=-\beta \Leftrightarrow \beta=0$ και $\delta=-\delta \Leftrightarrow \delta=0$

Οπότε $f(x)=\alpha x^3+\gamma x$ και $f'(x)=3\alpha x^2+\gamma$. Επειδή $f'(1)=4 \Leftrightarrow 3\alpha+\gamma=4 \quad (1)$

και $\int_0^1 f(x)dx=-3 \Leftrightarrow \int_0^1(\alpha x^3+\gamma x)dx=-3 \Leftrightarrow \alpha\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1+\gamma\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{4}+\frac{\gamma}{2}=-3 \Leftrightarrow \alpha+2\gamma=-12 \quad (2)$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) έχουμε: $\left.\begin{array}{l}3\alpha+\gamma=4\\ \alpha+2\gamma=-12\end{array}\right\} \Leftrightarrow \alpha=4,\ \gamma=-8$

άρα $f(x)=4x^3-8x$.

6.123. Εστω $f(x)=\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon$, $\alpha\neq 0$. Αφού η f είναι άρτια τότε ισχύει $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε $\alpha(-x)^4+\beta(-x)^3+\gamma(-x)^2+\delta(-x)+\varepsilon=-(\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon) \Leftrightarrow$

$\alpha x^4-\beta x^3+\gamma x^2-\delta x+\varepsilon=\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon$ πρέπει $-\beta=\beta \Leftrightarrow \beta=0$ και $-\delta=\delta \Leftrightarrow \delta=0$

Τότε $f(x)=\alpha x^4+\gamma x^2+\varepsilon$ και $f'(x)=4\alpha x^3+2\gamma x$

Είναι $\left\{\begin{array}{l} f(2)=-6 \Leftrightarrow 16\alpha+4\gamma+\varepsilon=-6\\ f'(2)=0 \Leftrightarrow 32\alpha+4\gamma=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}16\alpha-32\alpha+\varepsilon=-6\\ 4\gamma=-32\alpha\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{ll}\varepsilon=16\alpha-6 & (1)\\ \gamma=-8\alpha & (2)\end{array}$

Επίσης $\int_0^1 f(x)dx=\frac{113}{15} \Leftrightarrow \int_0^1(\alpha x^4+\gamma x^2+\varepsilon)dx=\frac{113}{15} \Leftrightarrow$

$\alpha\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1+\gamma\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\varepsilon[x]_0^1=\frac{113}{15} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{5}+\frac{\gamma}{3}+\varepsilon=\frac{113}{15} \Leftrightarrow 3\alpha+5\gamma+15\varepsilon=113 \underset{(2)}{\overset{(1)}{\Leftrightarrow}}$

$3\alpha+5(-8\alpha)+15(16\alpha-6)=113 \Leftrightarrow -37\alpha+240\alpha-90=113$

$203\alpha=203 \Leftrightarrow \alpha=1$, άρα $\gamma=-8$ και $\varepsilon=10$ και $f(x)=x^4-8x^2+10$

6.124. Εστω $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ και $f'(x)=2\alpha x+\beta$

Είναι $\int_0^1 f(x)dx=0 \Leftrightarrow \int_0^1(\alpha x^2+\beta x+\gamma)dx=0 \Leftrightarrow \left[\frac{\alpha x^3}{3}+\frac{\beta x^2}{2}+\gamma x\right]_0^1=0 \Leftrightarrow$

$\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}+\gamma=0 \Leftrightarrow 2\alpha+3\beta+6\gamma=0 \quad (1)$

$f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{4\alpha}{9}+\frac{2\beta}{3}+\gamma=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow 4\alpha+6\beta+9\gamma=-3 \quad (2)$ και

$f'\left(\frac{2}{3}\right)=0 \Leftrightarrow 2\alpha\frac{2}{3}+\beta=0 \Leftrightarrow 4\alpha+3\beta=0 \quad (3)$

Λύνοντας το σύστημα των $(1),(2),(3)$ έχουμε: $\alpha=3$, $\beta=-4$, $\gamma=1$ και $f(x)=3x^2-4x+1$

6.125. Θέτουμε $u=\sqrt{x^2+64}$ οπότε $u^2=x^2+64 \Leftrightarrow x^2=u^2-64$ και αφού $x\in[0,6]$ τότε $x\geq 0$

άρα $x=\sqrt{u^2-64}$ και $dx=\left(\sqrt{u^2-64}\right)'du$. Επίσης

x	0	6
u	8	10

Οπότε

$$\int_0^6\sqrt{x^2+64}dx=\int_8^{10}u\left(\sqrt{u^2-64}\right)'du=\left[u\sqrt{u^2-64}\right]_8^{10}-\int_8^{10}\sqrt{u^2-64}du\Leftrightarrow$$

$$\int_0^6\sqrt{u^2-64}dx=10\cdot 6-8\cdot 0-\int_8^{10}\sqrt{u^2-64}du\Leftrightarrow\int_0^6\sqrt{x^2-64}dx+\int_8^{10}\sqrt{x^2-64}dx=60$$

6.126. Εχουμε $\int_1^5 f(x)dx\int_3^6 f(x)dx-\int_1^6 f(x)dx\int_3^5 f(x)dx=$

$$=\left[\int_1^3 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx\right]\cdot\int_3^6 f(x)dx-\int_1^6 f(x)dx\cdot\int_3^5 f(x)dx=$$

$$=\int_1^3 f(x)dx\cdot\int_3^6 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx\cdot\int_3^6 f(x)dx-\int_1^6 f(x)dx\cdot\int_3^5 f(x)dx=$$

$$=\int_1^3 f(x)dx\int_3^6 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx\left(\int_3^6 f(x)dx-\int_1^6 f(x)dx\right)=$$

$$=\int_1^3 f(x)dx\int_3^6 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx\left(\int_3^6 f(x)dx-\int_1^3 f(x)dx-\int_3^6 f(x)dx\right)$$

$$=\int_1^3 f(x)dx\int_3^6 f(x)dx-\int_3^5 f(x)dx\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx\left(\int_3^6 f(x)dx-\int_3^5 f(x)dx\right)$$

$$=\int_1^3 f(x)dx\cdot\left(\int_3^5 f(x)dx+\int_5^6 f(x)dx-\int_3^5 f(x)dx\right)=\int_1^3 f(x)dx\int_5^6 f(x)dx$$

6.127. **α)** $\int_0^1\left(x^3-6x^2+4\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1-2\left[x^3\right]_0^1+4\left[x\right]_0^1=\frac{1}{4}-2+4=\frac{9}{4}$

β) $\int_{-1}^1\left(4x^3-2x+1\right)dx=\left[x^4\right]_{-1}^1-\left[x^2\right]_{-1}^1+\left[x\right]_{-1}^1=1-1-(1-1)+1+1=2$

γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\eta\mu x-3\sigma\upsilon\nu x)dx=-2[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}}-3[\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}}=-2(0-1)-3(1-0)=2-3=-1$

δ) $\int_0^{\pi}\left(4e^x-3\sigma\upsilon\nu x+1\right)dx=4\left[e^x\right]_0^{\pi}-3[\eta\mu x]_0^{\pi}+[x]_0^{\pi}=$

$$=4\left(e^{\pi}-1\right)-3(0-0)+\pi=4e^{\pi}+\pi-4$$

ε) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu 4x)dx=-\frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu 2x]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}[\eta\mu 4x]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}(-1-1)+\frac{1}{4}(0-0)=1$

στ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\eta\mu x\right)dx=[\varepsilon\varphi x]_0^{\frac{\pi}{4}}+[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-0+\frac{\sqrt{2}}{2}-1=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ζ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{3}{\eta\mu^2 x}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)dx=-3[\sigma\varphi x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+[\varepsilon\varphi x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=$

$$=-3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)=-\sqrt{3}+3+\sqrt{3}-1=2$$

η) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\frac{1}{\eta\mu^2 x}\right)dx=$

$$=\left[\varepsilon\varphi x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}+\left[\sigma\varphi x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+1-\sqrt{3}=2-\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

θ) $\int_0^{\pi}\left(4\eta\mu 2x-2\sigma\upsilon\nu 2x-5x^4\right)dx=-2\left[\sigma\upsilon\nu 2x\right]_0^{\pi}-\left[\eta\mu 2x\right]_0^{\pi}-\left[x^5\right]_0^{\pi}=$

$$=-2(1-1)-(0-0)-\pi^5=-\pi^5$$

ι) $\int_1^2\frac{xe^x+2}{x}dx=\int_1^2\left(e^x+\frac{2}{x}\right)dx=\left[e^x\right]_1^2+2\left[\ln|x|\right]_1^2=e^2-e+2\ln 2$

κ) $\int_1^2\frac{6x^3-8x^2+5x+2}{x}dx=\int_1^2\left(6x^2-8x+5+\frac{2}{x}\right)dx=2\left[x^3\right]_1^2-4\left[x^2\right]_1^2+5\left[x\right]_1^2+2\left[\ln|x|\right]_1^2=$

$$=2\cdot(8-1)-4\cdot(4-1)+5\cdot(2-1)+2\ln 2=$$

$$=14-12+5+2\ln 2=7+2\ln 2$$

λ) $\int_1^4 x\sqrt{x}dx=\int_1^4 x\cdot x^{\frac{1}{2}}dx=\int_1^4 x^{\frac{3}{2}}dx=\left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_1^4=\frac{2}{5}\left[\sqrt{x^5}\right]_1^4=\frac{2}{5}\left(\sqrt{4^5}-1\right)=\frac{2}{5}(32-1)=\frac{62}{5}$

6.128. α) $\int_{-1}^0\frac{x^3-1}{x-1}dx=\int_{-1}^0\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)}dx=\int_1^0\left(x^2+x+1\right)dx=$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0+\left[x\right]_{-1}^0=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1=\frac{5}{6}$$

β) $\int_2^3\frac{2x^3-x^2+x-2}{x-1}dx=\int_2^3\frac{\cancel{(x-1)}\left(2x^2+x+2\right)}{\cancel{x-1}}dx=\int_2^3\left(2x^2+x+2\right)dx=$

$$=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3+\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3+2\left[x\right]_2^3=\frac{38}{3}+\frac{5}{2}+6=\frac{103}{6}$$

γ) $\int_4^9\left(\sqrt{x}-2\right)dx=\int_4^9\left(x^{\frac{1}{2}}-2\right)dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_4^9-2\left[x\right]_4^9=\frac{2}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_4^9-2(9-4)=$

$$=\frac{2}{3}\left(9\sqrt{9}-4\sqrt{4}\right)-10=14-10=4$$

δ) $\int_1^9 5\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^2dx=\int_1^9 5\sqrt{x}\left(1-2\sqrt{x}+x\right)dx=\int_1^9\left(5x^{\frac{1}{2}}-10x+5x^{\frac{3}{2}}\right)dx$

$$=5\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^9-10\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^9+5\left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_1^9=\frac{10}{3}\left(9\sqrt{9}-1\right)-10\frac{81-1}{2}+2\left(9^2\sqrt{9}-1\right)$$

$$=\frac{260}{3}-400+484=\frac{512}{3}$$

ε) $\int_0^{16}\left(4\sqrt{x}-5\sqrt[3]{x}\right)dx = 4\left[\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{16} - 5\left[\dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_0^{16} = \dfrac{8}{3}16\sqrt{16}-\dfrac{15}{4}\sqrt[3]{16^4} = \dfrac{512}{3}-120\sqrt[3]{2}$

στ) $\int_8^{64}\dfrac{x-\sqrt[3]{x}}{x^3}dx = \int_8^{64}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^3}\right)dx = -\left[\dfrac{1}{x}\right]_8^{64} - \int_8^{64}x^{-\frac{8}{3}}dx =$

$$= -\left(\frac{1}{64}-\frac{1}{8}\right) - \left[\frac{x^{-\frac{5}{3}}}{-\frac{5}{3}}\right]_8^{64} = \frac{7}{64}+\frac{3}{5}\left[\sqrt[3]{x^5}\right]_8^{64} =$$

$$= \frac{7}{64}+\frac{3}{5}\left(64\sqrt[3]{64^2}-8\sqrt[3]{8^2}\right) = \frac{\overset{3}{\cancel{7}}}{64}+\frac{\overset{64}{\cancel{672}}}{3} = \frac{43029}{192}$$

ζ) $\int_0^4\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)dx = \int_0^4\left(x-\sqrt{x}-2\right)dx = \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^4 - \left[\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 - 2\left[x\right]_0^4 = 8-\dfrac{2}{3}8-8 = -\dfrac{16}{3}$

η) $\int_1^2\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \left[\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2 - 2\left[\sqrt{x}\right]_1^2 = \dfrac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)-2\left(\sqrt{2}-1\right) = \dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$

θ) $\int_0^1\sqrt{x\sqrt{x^3}}\,dx = \int_0^1\sqrt{\sqrt{x^2x^3}}\,dx = \int_0^1\sqrt[4]{x^5}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{5}{4}}dx = \left[\dfrac{x^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}}\right]_0^1 = \dfrac{4}{9}(1-0) = \dfrac{4}{9}$

ι) $\int_1^2\left(\dfrac{3}{3x+4}+\dfrac{2}{2x-1}\right)dx = \left[\ln|3x+4|\right]_1^2 + \left[\ln|2x-1|\right]_1^2 = \ln 10-\ln 7+\ln 3 = \ln\dfrac{30}{7}$

κ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\varepsilon\varphi^2 x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \left[\varepsilon\varphi x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$

λ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)^2}\,dx =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)dx =$$

$$= -\left[\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -(0-1)+(1-0) = 2$$

6.129. **α)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2x\eta\mu x+x^2\sigma\upsilon\nu x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x^2\eta\mu x\right)'dx = \left[x^2\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi^2}{4}$

β) $\int_0^1 x^2e^x\left(3+x\right)dx = \int_0^1\left(3x^2e^x+x^3e^x\right)dx = \int_0^1\left(x^3e^x\right)'dx = \left[x^3e^x\right]_0^1 = e$

γ) $\int_1^e\left(2x\ln x+x\right)dx = \int_1^e\left(x^2\ln x\right)'dx = \left[x^2\ln x\right]_1^e = e^2$

δ) $\int_1^e\left(1+\ln x\right)dx = \int_1^e\left(x\ln x\right)'dx = \left[x\ln x\right]_1^e = e$

ε) $\int_1^2 \frac{(x-1)e^x}{x^2}dx = \int_1^2 \frac{xe^x - e^x}{x^2}dx = \int_1^2 \left(\frac{e^x}{x}\right)' dx = \left[\frac{e^x}{x}\right]_1^2 = \frac{e^2}{2} - e = \frac{e^2-2e}{2}$

στ) $\int_1^e \frac{1-\ln x}{x^2}dx = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)' dx = \left[\frac{\ln x}{x}\right]_1^e = \frac{1}{e}$

ζ) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)' dx = \left[\frac{\eta\mu x}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{1}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$

η) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^x}{\eta\mu x}\right)' dx = \left[\frac{e^x}{\eta\mu x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}} - 2e^{\frac{\pi}{6}}$

θ) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' dx = \left[\frac{x}{\sigma\upsilon\nu x}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3}$

6.130. α) $I_1 = \int_1^e \frac{2\ln x}{x}dx$ Θέτουμε $u = \ln x$ οπότε $du = \frac{1}{x}dx$ και

x	1	e
u	0	1

άρα $I_1 = \int_0^1 2udu = \left[u^2\right]_0^1 = 1$

β) $I_2 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$ Θέτουμε $u = \ln x$ οπότε $du = \frac{1}{x}dx$ και

x	e	e^2
u	1	2

άρα $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{u}du = \left[\ln|u|\right]_1^2 = \ln 2$

γ) $I_3 = \int_{-1}^0 (3x^2-2x)e^{x^3-x^2}dx$ Θέτουμε $u = x^3 - x^2$ οπότε $du = (3x^2-2x)dx$ και

x	–1	0
u	-2	0

άρα $I_3 = \int_{-2}^0 e^u du = \left[e^u\right]_{-2}^0 = 1 - e^{-2}$

δ) $I_4 = \int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} 3\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x dx$ Θέτουμε $u = \eta\mu x$ οπότε $du = \sigma\upsilon\nu x dx$ και

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	0	1

άρα $I_4 = \int_0^1 3u^2 du = \left[u^3\right]_0^1 = 1$

ε) $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sigma\upsilon\nu^3 x\eta\mu x dx$ Θέτουμε $u = \sigma\upsilon\nu x$ οπότε $du = -\eta\mu x dx$ και

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	1	0

άρα $I_4 = \int_0^1 3u^2 du = \left[u^3\right]_0^1 = 1$

στ) $I_6 = \int_0^1 \frac{e^x+2x}{e^x+x^2}dx$ Θέτουμε $u = e^x + x^2$ οπότε $du = (e^x+2x)dx$ και

x	0	0
u	1	e+1

άρα $I_6 = \int_1^{e+1} \frac{du}{u} = \left[\ln|u|\right]_1^{e+1} = \ln(e+1)$

ζ) $I_7 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu(\sigma\varphi x)}{\eta\mu^2 x}dx$ Θέτουμε $u = \sigma\varphi x$ οπότε $du = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}dx$ και

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
u	1	0

άρα $I_7 = \int_1^0 \eta\mu u(-du) = \int_0^1 \eta\mu u du = -\left[\sigma\upsilon\nu u\right]_0^1 = -\sigma\upsilon\nu 1 + 1$

η) $I_8=\int_0^1 10(2x-1)^4dx$ Θέτουμε $u=2x-1$ οπότε $du=2dx$ και

x	0	1
u	–1	1

άρα $I_8=\int_{-1}^1 5u^4du=\left[u^5\right]_{-1}^1=1+1=2$

θ) $I_9=\int_1^2\frac{2x-1}{\left(x^2-x+1\right)^4}dx$ Θέτουμε $u=x^2-x+1$ οπότε $du=(2x-1)dx$ και

x	1	2
u	1	3

άρα $I_9=\int_1^3\frac{du}{u^4}=\int_1^3u^{-4}du=\left[\frac{u^{-3}}{-3}\right]_1^3=-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{u^3}\right]_1^3=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{27}-1\right)=\frac{26}{81}$

ι) $I_{10}=\int_0^1\left(3x^2-2\right)\left(x^3-2x\right)^4dx$ Θέτουμε $u=x^3-2x$ οπότε $du=\left(3x^2-2\right)dx$ και

x	0	1
u	0	–1

άρα $I_{10}=\int_0^{-1}u^4du=\left[\frac{u^5}{5}\right]_0^{-1}=-\frac{1}{5}$

κ) $I_{11}=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\left[\ln\left|e^x+1\right|\right]_0^1=\ln(e+1)-\ln2=\ln\frac{e+1}{2}$

λ) $I_{12}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x\, e^{\eta\mu x}dx$ Θέτουμε $u=\eta\mu x$ οπότε $du=\sigma\upsilon\nu x dx$ και

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	0	1

άρα $I_{12}=\int_0^1e^udu=\left[e^u\right]_0^1=e-1$

6.131. **α)** Αρχικά εξετάζουμε την συνέχεια της $f(x)=\begin{cases}4x^3-2x^2+1, & x<0\\ 2e^x-1, & x\geq0\end{cases}$ στο $x_0=0$

Είναι $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(4x^3-2x^2+1\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(2e^x-1\right)=2-1=1=f(0)$ οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ οπότε θα είναι συνεχής και στο $[-2,2]$, άρα

$$\int_{-2}^2f(x)dx=\int_{-2}^0\left(4x^3-2x^2+1\right)dx+\int_0^2\left(2e^x-1\right)dx=\left[x^4\right]_{-2}^0-\frac{2}{3}\left[x^3\right]_{-2}^0+2+2\left[e^x\right]_0^2-2=$$

$$=-16-\frac{16}{3}+2e^2-2=2e^2-\frac{64}{3}$$

β) $\int_1^{e^2}f(x)dx=\int_1^{e^2}|1-\ln x|dx=\int_1^e(1-\ln x)dx-\int_e^{e^2}(1-\ln x)dx=$

$$=e-1-\int_1^e(x)'\ln xdx-\left(e^2-e\right)+\int_e^{e^2}(x)'\ln xdx=$$

$$=e-1-\left[x\ln x\right]_1^e+\int_1^e1dx-e^2+e+\left[x\ln x\right]_e^{e^2}-\int_e^{e^2}1dx=$$

$$=\cancel{e}-1-\cancel{e}+e-1-\cancel{e^2}+e+\cancel{2e^2}-\cancel{e}-\cancel{e^2}+\cancel{e}=2e-2$$

γ) Αρχικά εξετάζουμε τη συνέχεια της $f(x)=\begin{cases}4\eta\mu^2x+1, & x\leq0\\ \sigma\upsilon\nu^2x, & x>0\end{cases}$ στο $x_0=0$

Είναι $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(4\eta\mu^2x+1\right)=1=f(0)$ και $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sigma\upsilon\nu^2x\right)=1$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$

Οπότε $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(4\eta\mu^2 x+1\right)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 x dx =$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 4\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}dx + \frac{\pi}{2} + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}dx =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 2dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 2\sigma\upsilon\nu 2x dx + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu 2x dx =$$

$$= \pi - \left[\eta\mu 2x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\left[\eta\mu 2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7\pi}{4}$$

δ) $\int_0^1 \sqrt{x^2-8x+16}\,dx = \int_0^1 \sqrt{(x-4)^2}\,dx = \int_0^1 |x-4|dx =$

$$= -\int_0^1 (x-4)dx = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + 4[x]_0^1 = -\frac{1}{2} + 4 = \frac{7}{2}$$

ε) $\int_0^2 |x-1|dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx = 1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$

στ) $\int_1^3 |x^2-4|dx = \int_1^2 \left(-x^2+4\right)dx + \int_2^3 \left(x^2-4\right)dx =$

	$-\infty$ -2 2 $+\infty$
x^2-4	$+$ 0 $-$ 0 $+$

$$= -\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + 4[x]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 - 4[x]_2^3 =$$

$$= -\frac{7}{3} + 4 + \frac{19}{3} - 4 = 4$$

x	$-\infty$ -2 2 $+\infty$
x^2-3x+2	$+$ 0 $-$ 0 $+$

ζ) $\int_{-1}^4 \left(3\left|x^2-3x+2\right|-4\right)dx = 3\int_{-1}^4 \left|x^2-3x+2\right|dx - 4(4+1) =$

$$= 3\int_{-1}^1 \left(x^2-3x+2\right)dx - 3\int_1^2 \left(x^2-3x+2\right)dx + 3\int_2^4 \left(x^2-3x+2\right)dx - 20 = \frac{17}{2}$$

6.132. Επειδή η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,3]$, θα είναι και συνεχής στο $[0,3]$, άρα θα είναι και συνεχής στο $x_0 = 1$, οπότε:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^3 + \beta\sqrt{x}\right) = 1+\beta = f(1)$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(\alpha x+\beta) = \alpha+\beta$,

οπότε $1+\beta = \alpha+\beta \Leftrightarrow \alpha = 1$

Επίσης $I = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 \left(x^3+\beta\sqrt{x}\right)dx + \int_1^3 (\alpha x+\beta)dx =$

$$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \frac{2\beta}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_0^1 + \alpha\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 + \beta[x]_1^3 = \frac{1}{4} + \frac{2\beta}{3} + 4\alpha + 2\beta =$$

$$= \frac{49}{4} \Leftrightarrow \frac{2\beta}{3} + 4 + 2\beta = \frac{48}{4} \Leftrightarrow \frac{8\beta}{3} = 8 \Leftrightarrow \beta = 3$$

6.133. **α)** Εστω $h(x) = e^x - x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι $h'(x) = e^x - 1$ οπότε το πρόσημο της h' και η μονοτονία της h δίνονται στο διπλανό πίνακα. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow e^x - x \geq 1 > 0$ άρα $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

	$-\infty$	0	$+\infty$
h'	$-$	0	$+$
h	↘		↗

Οπότε $\int_{-1}^{1}\left|e^x-x\right|dx=\int_{-1}^{1}\left(e^x-x\right)dx=\left[e^x\right]_{-1}^{1}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=e-\frac{1}{e}$

β) Εστω $h(x)=x-\ln x$, $x>0$ είναι $h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

	0	1	$+\infty$
h'	$-$		$+$
h	↘		↗

οπότε το πρόσημο της h' και η μονοτονία της h δίνονται στο διπλανό πίνακα. Για κάθε $x>0$ θα είναι $h(x)\geq h(1)\Leftrightarrow x-\ln x\geq 1>0$ άρα $h(x)>0$ οπότε

$$\int_1^e\left|x-\ln x\right|dx=\int_1^e\left(x-\ln x\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e-\int_1^e(x)'\ln x\,dx=$$

$$=\frac{e^2-1}{2}-\left[x\ln x\right]_1^e+\int_1^e 1dx=\frac{e^2-1}{2}-\cancel{e}+\cancel{e}-1=\frac{e^2-3}{2}$$

γ) Εστω $h(x)=e^x-xe$, $x\in\mathbb{R}$ είναι $h'(x)=e^x-e$

	$-\infty$	1	$+\infty$
h'	$-$	0	$+$
h	↘		↗

οπότε το πρόσημο της h' και η μονοτονία της h δίνονται στο διπλανό πίνακα και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα είναι $h(x)\geq h(1)\Leftrightarrow e^x-xe\geq 0$ άρα $h(x)\geq 0$ οπότε

$$\int_0^1\left|e^x-xe\right|dx=\int_0^1\left(e^x-xe\right)dx=\left[e^x\right]_0^1-e\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=e-1-\frac{e}{2}=\frac{e-2}{2}$$

6.134. α) $\int_0^{e-1}\frac{x}{x+1}dx=\int_0^{e-1}\frac{x+1-1}{x+1}dx=\int_0^{e-1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left[x\right]_0^{e-1}-\left[\ln|x+1|\right]_0^{e-1}=e-1-1=e-2$

β) $\int_2^3\frac{x+2}{x-1}dx=\int_2^3\frac{x-1+3}{x-1}dx=\int_2^3\left(1+\frac{3}{x-1}\right)dx=1+3\left[\ln|x-1|\right]_2^3=1+3\ln 2$

γ) $\int_0^1\frac{2x+1}{x-2}dx=\int_0^1\frac{2x-4+5}{x-2}dx=\int_0^1\frac{2(x-2)+5}{x-2}dx=\int_0^1\left(2+\frac{5}{x-2}\right)dx=$

$=2+5\left[\ln|x-2|\right]_0^1=2-5\ln 2$

δ) $I=\int_0^1\frac{x-2}{2x+1}dx$ είναι

$$\begin{array}{r|l} x-2 & 2x+1 \\ \cline{2-2} -x-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{5}{2} & \end{array}$$

άρα $I=\int_0^1\left(\frac{1}{2}+\frac{-\frac{5}{2}}{2x+1}\right)dx=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\frac{1}{2}\left[\ln|2x+1|\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\ln 3$

ε) $\int_0^1\frac{6x+7}{3x+2}dx=\int_0^1\frac{6x+4+3}{3x+2}dx=\int_0^1\frac{2(3x+2)+3}{3x+2}dx=$

$=\int_0^1\left(2+\frac{3}{3x+2}\right)dx=2\left[x\right]_0^1+\left[\ln|3x+2|\right]_0^1=2+\ln\frac{5}{2}$

στ) $I=\int_0^1 \frac{3x^2+x+1}{x+2}dx$ έχουμε

$$\begin{array}{r|l} \cancel{3x^2}+x+1 & x+2 \\ \cline{2-2} -\cancel{3x^2}-6x & 3x-5 \\ \cline{1-1} -5x+1 & \\ +5x+10 & \\ \cline{1-1} 11 & \end{array}$$

οπότε $I=\int_0^1(3x-5)dx+\int_0^1\frac{11}{x+2}dx$

$=3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-5[x]_0^1+11\left[\ln|x+2|\right]_0^1=\frac{3}{2}-5+11\ln\frac{3}{2}$

ζ) $I=\int_0^1\frac{4x^3+7x^2+5x+2}{x^2+x+1}dx$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{4x^3}+7x^2+5x+2 & x^2+x+1 \\ \cline{2-2} -\cancel{4x^3}-4x^2-4x & 4x+3 \\ \cline{1-1} \cancel{3x^2}+x+2 & \\ -\cancel{3x^2}-3x-3 & \\ \cline{1-1} -2x-1 & \end{array}$$

οπότε $I=\int_0^1(4x+3)dx+\int_0^1\frac{-2x-1}{x^2+x+1}dx=$

$=2\left[x^2\right]_0^1+3-\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=$

$=2+3-\left[\ln\left|x^2+x+1\right|\right]_0^1=5-\ln3$

η) $I=\int_2^3\frac{x^3-2x-2}{x-1}dx$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^3}\quad -2x-2 & x-1 \\ \cline{2-2} -\cancel{x^3}+x^2 & x^2+x-1 \\ \cline{1-1} \cancel{x^2}-2x-2 & \\ -\cancel{x^2}+x & \\ \cline{1-1} -\cancel{x}-2 & \\ +\cancel{x}-1 & \\ \cline{1-1} -3 & \end{array}$$

οπότε $I=\int_2^3\left(x^2+x-1\right)dx+\int_2^3\frac{-3}{x-1}dx=$

$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3+\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3-1-3\left[\ln|x-1|\right]_2^3=$

$=\frac{19}{3}+\frac{5}{2}-1-3\ln2=\frac{47}{6}-3\ln2$

θ) $I=\int_2^3\frac{3x^5+x^3-1}{x^3-1}$ είναι

$$\begin{array}{r|l} \cancel{3x^5}\quad +x^3\qquad -1 & x^3-1 \\ \cline{2-2} -\cancel{3x^5}\qquad +3x^2\qquad & 3x^2+1 \\ \cline{1-1} \cancel{x^3}+3x^2\quad -1 & \\ -\cancel{x^3}\qquad +1 & \\ \cline{1-1} 3x^2 & \end{array}$$

οπότε $I=\int_2^3\left(3x^2+1\right)dx+\int_2^3\frac{3x^2}{x^3-1}dx=$

$=\left[x^3\right]_2^3+[x]_2^3+\left[\ln\left|x^3-1\right|\right]_2^3=$

$=19+1+\ln26-\ln7=$

$=20+\ln\frac{26}{7}$

6.135. α) $I=\int_2^3\frac{2x+1}{x^2+3x+2}dx$.

Είναι $\frac{2x+1}{x^2+3x+2}=\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}\Leftrightarrow 2x+1=A(x+2)+B(x+1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+1=(A+B)x+2A+B$, οπότε $\left.\begin{array}{r} A+B=2 \\ 2A+B=1 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \begin{array}{l} A=-1 \\ B=3 \end{array}$

οπότε $I=\int_2^3\frac{-1}{x+1}dx+\int_2^3\frac{3}{x+2}dx=-\left[\ln|x+1|\right]_2^3+3\left[\ln|x+2|\right]_2^3=$

$=-\ln4+\ln3+3\ln5-3\ln4=3\ln5+\ln3-4\ln4$

β) $\int_0^1\frac{4x-1}{2x^2-x+3}dx=\int_0^1\frac{\left(2x^2-x+3\right)'}{2x^2-x+3}dx=\left[\ln\left|2x^2-x+3\right|\right]_0^1=\ln4-\ln3=\ln\frac{4}{3}$

γ) $I=\int_{-1}^{0}\frac{2x+1}{x^2-4x+3}dx$

Είναι $\frac{2x+1}{x^2-4x+3}=\frac{2x+1}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}\Leftrightarrow 2x+1=A(x-3)+B(x-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+1=(A+B)x+(-3A-B)$ οπότε $\left.\begin{matrix}A+B=2\\-3A-B=1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{matrix}A=-\frac{3}{2}\\B=\frac{7}{2}\end{matrix}$

οπότε $I=\int_{-1}^{0}\frac{-\frac{3}{2}}{x-1}dx+\int_{-1}^{0}\frac{\frac{7}{2}}{x-3}dx=-\frac{3}{2}\left[\ln|x-1|\right]_{-1}^{0}+\frac{7}{2}\left[\ln|x-3|\right]_{-1}^{0}=\frac{7}{2}\ln3-2\ln2$

δ) $I=\int_{1}^{2}\frac{x+2}{x^2+x}dx$

Είναι $\frac{x+2}{x^2+x}=\frac{x+2}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}\Leftrightarrow x+2=A(x+1)+Bx\Leftrightarrow x+2=(A+B)x+A\Leftrightarrow$

οπότε $\left.\begin{matrix}A+B=1\\A=2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{matrix}A=2\\B=-1\end{matrix}$

οπότε $I=\int_{1}^{2}\frac{2}{x}dx+\int_{1}^{2}\frac{-1}{x+1}dx=2\left[\ln|x|\right]_{1}^{2}-\left[\ln|x+1|\right]_{1}^{2}=2\ln2-\ln3+\ln2=3\ln2-\ln3$

ε) $I=\frac{5x-13}{x^2-5x+6}dx$

Είναι $\frac{5x-13}{x^2-5x+6}=\frac{5x-13}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\Leftrightarrow 5x-13=A(x-3)+B(x-2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x-13=(A+B)x-3A-2B$ οπότε $\left.\begin{matrix}A+B=5\\-3A+2B=-13\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{matrix}A=3\\B=2\end{matrix}$

οπότε $I=\int_{0}^{1}\frac{3}{x-2}dx+\int_{0}^{1}\frac{2}{x-3}dx=x\left[\ln|x-2|\right]_{0}^{1}+2\left[\ln|x-3|\right]_{0}^{1}=-3\ln2+2\ln2-\ln3=$

$=-\ln2-\ln3=-\ln6$

στ) $I=\int_{2}^{3}\frac{4}{x^2-1}dx$

Είναι $\frac{4}{x^2-1}=\frac{4}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}\Leftrightarrow 4=A(x+1)+B(x-1)\Leftrightarrow 4=(A+B)x+A-B$

οπότε $\left.\begin{matrix}A+B=0\\A-B=4\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{matrix}A=2\\B=-2\end{matrix}$

οπότε $I=\int_{2}^{3}\frac{2}{x-1}dx+\int_{2}^{3}\frac{-2}{x+1}dx=2\left[\ln|x-1|\right]_{2}^{3}-2\left[\ln|x+1|\right]_{2}^{3}=2\ln2-2\ln4+2\ln3=2\ln\frac{3}{2}$

ζ) $I=\int_{0}^{1}\frac{8}{x^2-4}dx$

Είναι $\frac{8}{x^2-4}=\frac{8}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}\Leftrightarrow 8=A(x+2)+B(x-2)$

$\Leftrightarrow 8=(A+B)x+2A-2B$ οπότε $\left.\begin{matrix}A+B=0\\2A-2B=8\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{matrix}A=2\\B=-2\end{matrix}$

οπότε $I=\int_0^1 \frac{2}{x-2}dx-\int_0^1 \frac{2}{x+2}dx=2\left[\ln|x-2|\right]_0^1-2\left[\ln|x+2|\right]_0^1=$

$=-2\ln2-2\ln3+2\ln2=-2\ln3$

η) $I=\int_2^3 \frac{x^3+2x+5}{x^2-1}dx$

$$\begin{array}{ll|l} \cancel{x^3} & +2x+5 & x^2-1 \\ \hline -\cancel{x^3} & +\ x & x \\ \hline & 3x+5 & \end{array}$$

οπότε $I=\int_2^3 xdx+\int_2^3 \frac{3x+5}{x^2-1}dx$ είναι

$\frac{3x+5}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}\Leftrightarrow 3x+5=A(x+1)+B(x-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x+5=(A+B)x+A-B\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} A+B=3 \\ A-B=5 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \begin{array}{l} A=4 \\ B=-1 \end{array}$

οπότε $I=\int_2^3 xdx+\int_2^3 \frac{4}{x-1}dx+\int_2^3 \frac{-1}{x+1}dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3+4\left[\ln|x-1|\right]_2^3-\left[\ln|x+1|\right]_2^3=$

$=\frac{5}{2}+4\ln2-\ln4+\ln3=\frac{5}{2}+\ln12$

θ) $I=\int_0^1 \frac{x^3-2x}{x^2+3x+2}dx$

$$\begin{array}{ll|l} \cancel{x^3} & -2x & x^2+3x+2 \\ \hline -\cancel{x^3} & -3x^2-2x & x-3 \\ \hline & -\cancel{3x^2}-4x & \\ & +\cancel{3x^2}+9x+6 & \\ \hline & 5x+6 & \end{array}$$

οπότε $I=\int_0^1 (x-3)dx+\int_0^1 \frac{5x+6}{x^2+3x+2}dx$

είναι $\frac{5x+6}{x^2+3x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x+6=A(x+1)+B(x+2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x+6=(A+B)x+A+2B\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} A+B=5 \\ A+2B=6 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \begin{array}{l} A=4 \\ B=1 \end{array}$

άρα $I=\int_0^1 (x-3)dx+\int_0^1 \frac{4}{x+2}dx+\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-3+4\left[\ln|x+2|\right]_0^1+\left[\ln|x+1|\right]_0^1=$

$=\frac{1}{2}-3+4\ln3-4\ln2+\ln2=-\frac{5}{2}+4\ln3-3\ln2$

6.136. α) $I=\int_{-2}^{-1} \frac{4-x}{x^3-3x^2+2x}dx$

είναι $\frac{4-x}{x^3-3x^2+2x}=\frac{4-x}{x(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{\Gamma}{x-2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4-x=A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+\Gamma x(x-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x+4=(A+B+\Gamma)x^2+(-3A-2B-\Gamma)x+2A\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} A+B+\Gamma=0 \\ -3A-2B-\Gamma=-1 \\ 2A=4 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \begin{array}{l} A=2 \\ B=-3 \\ \Gamma=1 \end{array}$

οπότε $I=\int_{-2}^{-1} \frac{2}{x}dx+\int_{-2}^{-1} \frac{-3}{x-1}dx+\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x-2}dx=-2\left[\ln|x|\right]_{-2}^{-1}-3\left[\ln|x-1|\right]_{-2}^{-1}+\left[\ln|x-2|\right]_{-2}^{-1}=$

$=2\ln2-3(\ln2-\ln3)+\ln3-\ln4=4\ln3-3\ln2$

β) $I=\int_2^3 \frac{6x^2+x-3}{x^3-x^2}dx$

είναι $\frac{6x^2+x-3}{x^3-x^2}=\frac{6x^2+x-3}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{\Gamma}{x-1}\Leftrightarrow 6x^2+x-3=Ax(x-1)+B(x-1)+\Gamma x^2$

$$6x^2+x-3=(A+\Gamma)x^2+(-A+B)x-B\Leftrightarrow \begin{cases} A+\Gamma=6 \\ -A+B=1 \\ -B=-3 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{matrix} A=2 \\ B=3 \\ \Gamma=4 \end{matrix}$$

οπότε $\int_2^3 \frac{2}{x}dx+\int_2^3 \frac{3}{x^2}dx+\int_2^3 \frac{4}{x-1}dx=2\left[\ln|x|\right]_2^3-3\left[\frac{1}{x}\right]_2^3+4\left[\ln|x-1|\right]_2^3=$

$$=2\ln3-2\ln2-3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+4\ln2=2\ln6+\frac{1}{2}$$

γ) $I=\int_2^3 \frac{4x^2+7x-20}{(x+2)^2(x-1)}dx$

είναι $\frac{4x^2+7x-20}{(x+2)^2(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{\Gamma}{x-1}\Leftrightarrow$

$$4x^2+7x-20=A(x+2)(x-1)+B(x-1)+\Gamma(x+2)^2\Leftrightarrow$$

$$4x^2+7x-20=(A+\Gamma)x^2+(A+B+4\Gamma)x+(-2A-B+4\Gamma)$$

$$\begin{cases} A+\Gamma=4 \\ A+B+4\Gamma=7 \\ -2A-B+4\Gamma=-20 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{matrix} A=5 \\ B=6 \\ \Gamma=-1 \end{matrix}$$

οπότε $I=\int_2^3 \frac{5}{x+2}dx+\int_2^3 \frac{6}{(x+2)^2}dx-\int_2^3 \frac{1}{x-1}dx=5\left[\ln|x+2|\right]_2^3-6\left[\frac{1}{x+2}\right]_2^3-\left[\ln|x-1|\right]_2^3=$

$$=5(\ln5-\ln4)+\frac{3}{10}-(\ln2-0)=5\ln\frac{4}{5}+\frac{3}{10}-\ln2$$

δ) $I=\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^3-x^2}dx$

είναι $\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{\Gamma}{x-1}\Leftrightarrow x^2+1=Ax(x-1)+B(x-1)+\Gamma x^2\Leftrightarrow$

$$x^2+1=(A+\Gamma)x^2+(-A+B)x-B\Leftrightarrow \begin{cases} A+\Gamma=1 \\ -A+B=0 \\ -B=1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{matrix} A=-1 \\ B=-1 \\ \Gamma=2 \end{matrix}$$

οπότε $I=\int_2^3 \frac{-1}{x}dx+\int_2^3 \frac{-1}{x^2}dx+\int_2^3 \frac{2}{x-1}dx=-\left[\ln|x|\right]_2^3+\left[\frac{1}{x}\right]_2^3+2\left[\ln|x-1|\right]_2^3=3\ln2-\ln3-\frac{1}{6}$

ε) $I=\int_2^3 \frac{x-3}{x^3-x}dx$

είναι $\frac{x-3}{x(x^2-1)}=\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{\Gamma}{x+1}\Leftrightarrow$

$x-3=A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+\Gamma x(x-1)\Leftrightarrow$

$$x-3=(A+B+\Gamma)x^2+(B-\Gamma)x-A\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{r}A+B+\Gamma=0\\ B-\Gamma=1\\ -A=-3\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{array}{l}A=3\\ B=-1\\ \Gamma=-2\end{array}$$

οπότε $I=\int_2^3\frac{3}{x}dx+\int_2^3\frac{-1}{x-1}dx+\int_2^3\frac{-2}{x+1}dx=3\left[\ln|x|\right]_2^3-\left[\ln|x-1|\right]_2^3-2\left[\ln|x+1|\right]_2^3=$

$=3(\ln3-\ln2)-\ln2-2\ln4+2\ln3=5\ln3-7\ln2$

στ) $I=\int_{-3}^{-2}\frac{x^3-3}{x^3-x}$

$$\begin{array}{rr|l} \cancel{x^3} & -3 & x^3-x\\ \cline{3-3} \cancel{-x^3} & -x & 1\\ \hline & -x-3 & \end{array}$$

οπότε $I=\int_{-3}^{-2}1dx+\int_{-3}^{-2}\frac{-x-3}{x^3-x}dx$

είναι $\frac{-x-3}{x^3-x}=\frac{-x-3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{\Gamma}{x+1}\Leftrightarrow$

$-x-3=A(x^2-1)+Bx(x+1)+\Gamma x(x-1)\Leftrightarrow$

$$-x-3=(A+B+\Gamma)x^2+(B-\Gamma)x-A\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-A=-3\\ A+B+\Gamma=0\\ B-\Gamma=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{array}{l}A=3\\ B=-2\\ \Gamma=-1\end{array}$$

οπότε $I=\int_{-3}^{-2}1dx+\int_{-3}^{-2}\frac{3}{x}dx-\int_{-3}^{-2}\frac{2}{x-1}dx-\int_{-3}^{-2}\frac{1}{x+1}dx=$

$=1+3\left[\ln|x|\right]_{-3}^{-2}-2\left[\ln|x-1|\right]_{-3}^{-2}-\left[\ln|x+1|\right]_{-3}^{-2}=$

$=1+3\ln2-3\ln3-2(\ln3-\ln4)+\ln2=1+8\ln2-5\ln3$

6.137. α) $\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+\Gamma}{x^2+1}\Leftrightarrow1=A(x^2+1)+(B+\Gamma)x\Leftrightarrow$

$$1=Ax^2+A+Bx^2+\Gamma x\Leftrightarrow1=(A+B)x^2+\Gamma x+A\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}A+B=0\\ \Gamma=0\\ A=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{array}{l}B=-1\\ \Gamma=0\\ A=1\end{array}$$

β) $\int_1^2\frac{dx}{x^3+x}=\int_1^2\frac{1}{x(x^2+1)}dx=\int_1^2\frac{1}{x}dx+\int_1^2\frac{-x}{x^2+1}dx=\left[\ln|x|\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{2x}{x^2+1}dx=$

$=\ln2-\frac{1}{2}\left[\ln|x^2+1|\right]_1^2\Leftrightarrow=\ln2-\frac{1}{2}\ln5+\frac{1}{2}\ln2=\frac{3}{2}\ln2-\frac{1}{2}\ln5$

6.138. α) $\dfrac{x-1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+\Gamma}{x^2-x+1} \Leftrightarrow x-1=A\left(x^2-x+1\right)+(B+\Gamma)(x+1) \Leftrightarrow$

$x-1=Ax^2-Ax+A+Bx^2+Bx+\Gamma x+\Gamma \Leftrightarrow x-1=(A+B)x^2+(-A+B+\Gamma)x+A+\Gamma \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+\Gamma=1 \\ A+\Gamma=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} A=-\dfrac{2}{3} \\ B=\dfrac{2}{3} \\ \Gamma=-\dfrac{1}{3} \end{array}$$

β) $\int_0^1 \dfrac{x-1}{x^3+1}dx=\int_0^1 \dfrac{x-1}{(x+1)(x^2-x+1)}dx=\int_0^1 \dfrac{-\frac{2}{3}}{x+1}dx+\int_0^1 \dfrac{\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}{x^2-x+1}dx=$

$=-\dfrac{2}{3}\left[\ln|x+1|\right]_0^1+\dfrac{1}{3}\int_0^1 \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}dx=-\dfrac{2}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}\left[\ln\left|x^2-x+1\right|\right]_0^1=$

$=-\dfrac{2}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}(\ln 1-\ln 1)=-\dfrac{2}{3}\ln 2$

6.139. α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\sigma\upsilon\nu x)' dx=-\left[x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x dx=0+\left[\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-1)\eta\mu 2x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-1)\left(-\dfrac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x\right)' dx=$

$\dfrac{1}{2}\left[(x-1)\sigma\upsilon\nu 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\dfrac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x\right)dx=\dfrac{\pi}{4}-1+\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu 2x dx=$

$\dfrac{\pi}{4}-1+\dfrac{1}{4}\left[\eta\mu 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{4}-1$

γ) $\int_0^1\left(x^2+1\right)e^{2x}dx=\int_0^1\left(x^2+1\right)\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\right)' dx=\dfrac{1}{2}\left[e^{2x}\left(x^2+1\right)\right]_0^1-\int_0^1 2x\dfrac{1}{2}e^{2x}dx=$

$=\dfrac{1}{2}\left(2e^2-1\right)-\int_0^1 x\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\right)' dx=e^2-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left[xe^{2x}\right]_0^1+\dfrac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx=$

$=e^2-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^2+\dfrac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_0^1=\dfrac{1}{2}e^2-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\left(e^2-1\right)=\dfrac{3}{4}e^2-\dfrac{3}{4}$

δ) $\int_0^1(x-3)e^{-x}dx=\int_0^1(x-3)\left(-e^{-x}\right)' dx=-\left[(x-3)e^{-x}\right]_0^1-\int_0^1\left(-e^{-x}\right)dx=$

$=\dfrac{2}{e}-3+\int_0^1 e^{-x}dx=\dfrac{2}{e}-3-\left[e^{-x}\right]_0^1=\dfrac{2}{e}-3-\dfrac{1}{e}+1=\dfrac{1}{e}-2$

ε) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}3x^2\sigma\upsilon\nu 2x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3x^2\left(\dfrac{1}{2}\eta\mu 2x\right)' dx=\left[\dfrac{3}{2}x^2\eta\mu 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}6x\dfrac{1}{2}\eta\mu 2x dx=$

$=0-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\eta\mu 2x dx=+\dfrac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\sigma\upsilon\nu 2x)' dx=$

$=\dfrac{3}{2}\left[x\sigma\upsilon\nu 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\dfrac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu 2x dx=-\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{3}{4}\left[\eta\mu 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\dfrac{3\pi}{4}$

στ) $\int_1^e x^3\ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^4}{4}\right)'\ln x dx = \left[\frac{x^4}{4}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}dx = \frac{e^4}{4}\ln e - \frac{1}{4}\int_1^e x^3 dx =$

$= \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^e = \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3e^4+1}{16}$

ζ) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx = -\int_1^2 \ln x\left(\frac{1}{x}\right)' dx = -\left[\frac{\ln x}{x}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{\ln 2}{2} + \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx =$

$= -\frac{\ln 2}{2} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1-\ln 2}{2}$

η) $\int_1^e \ln x dx = \int_1^e (x)'\ln x dx = \left[x\ln x\right]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}dx = e\ln e - (e-1) = e - e + 1 = 1$

θ) $\int_1^{e^2} \ln^2 x dx = \int_1^e (x)'\ln^2 x dx = \left[x\ln^2 x\right]_1^e - \int_1^e x\cdot 2\frac{\ln x}{x}dx = e - 2\int_1^e (x)'\ln x dx =$

$= e - 2\left[x\ln x\right]_1^e + 2\int_1^e x\frac{1}{x}dx = e - 2e + 2e - 2 = e - 2$

ι) $\int_0^1 \frac{x-2}{e^x}dx = \int_0^1 (x-2)e^{-x}dx = \int_0^1 (x-2)\left(-e^{-x}\right)' dx = -\left[(x-2)e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx =$

$= \frac{1}{e} - 2 - \left[e^{-x}\right]_0^1 = \frac{1}{e} - 2 - \frac{1}{e} + 1 = -1$

κ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2-3x+1)\eta\mu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2-3x+1)(-\sigma\upsilon\nu x)' dx =$

$= -\left[(x^2-3x+1)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-3)\sigma\upsilon\nu x dx =$

$= -(0-1) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-3)(\eta\mu x)' dx =$

$= 1 + \left[(2x-3)\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\eta\mu x dx = 1 +$

$= \left(2\frac{\pi}{2} - 3\right) + 2\left[\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2 - 2 = \pi - 4$

λ) $\int_1^e (x^2-2x)\ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)'\ln x dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\frac{1}{x}dx =$

$= \frac{e^3}{3} - e^2 - \int_1^e \left(\frac{x^2}{3} - x\right)dx = \frac{e^3}{3} - e^2 - \frac{1}{9}\left[x^3\right]_1^e + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e =$

$= \frac{e^3}{3} - e^2 - \frac{e^3-1}{9} + \frac{e^2-1}{2} = \frac{2e^3}{9} - \frac{e^2}{2} - \frac{7}{18}$

6.140. α) $I_1 = \int_0^1 e^x\sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^1 e^x(\eta\mu x)' dx = \left[e^x\eta\mu x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\eta\mu x dx =$

$= e\eta\mu 1 - \int_0^1 e^x(-\sigma\upsilon\nu x)' dx = e\eta\mu 1 + \left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\sigma\upsilon\nu x dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow I_1 = e\eta\mu 1 + e\sigma\upsilon\nu 1 - 1 - I_1 \Leftrightarrow I_1 = \frac{e(\eta\mu 1 + \sigma\upsilon\nu 1) - 1}{2}$

β) $I_2=\int_0^1 e^x\eta\mu 4x dx=\int_0^1 (e^x)'\eta\mu 4x dx=\left[e^x\eta\mu 4x\right]_0^1-\int_0^1 e^x 4\sigma\upsilon\nu 4x dx=$

$=e\eta\mu 4-4\int_0^1 (e^x)'\sigma\upsilon\nu 4x dx=e\eta\mu 4-4\left[e^x\sigma\upsilon\nu 4x\right]_0^1+4\int_0^1 e^x(-4\eta\mu 4x)dx=$

$=e\eta\mu 4-4(e\sigma\upsilon\nu 4-1)-16\int_0^1 e^x\eta\mu 4x dx\Leftrightarrow I_2=e\eta\mu 4-4e\sigma\upsilon\nu 4+4-16I_2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow I_2=\frac{e\eta\mu 4-4e\sigma\upsilon\nu 4+4}{17}$

γ) $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sigma\upsilon\nu 2x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'\sigma\upsilon\nu 2x dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\sigma\upsilon\nu 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}e^{2x}(-2\eta\mu 2x)dx=$

$=-\frac{e^\pi}{2}-\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\eta\mu 2x dx=-\frac{e^\pi}{2}-\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'\eta\mu 2x dx=$

$=-\frac{e^\pi}{2}-\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{2}e^{2x}\eta\mu 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}e^{2x}2\sigma\upsilon\nu 2x dx\Leftrightarrow I_3=-\frac{e^\pi}{2}-\frac{1}{2}+0-I_3\Leftrightarrow I_3=\frac{-e^\pi-1}{4}$

δ) $I_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\eta\mu 3x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-e^{-x})'\eta\mu 3x dx=-\left[e^{-x}\eta\mu 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}(3\sigma\upsilon\nu 3x)dx=$

$=e^{-\frac{\pi}{2}}+3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-e^{-x})'\sigma\upsilon\nu 3x dx=e^{-\frac{\pi}{2}}-3\left[-e^{-x}\sigma\upsilon\nu 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-e^{-x})(-3\eta\mu 3x)dx=$

$=e^{-\frac{\pi}{2}}-3(0-1)-9\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\eta\mu 3x dx\Leftrightarrow I_4=e^{-\frac{\pi}{2}}+3-9I_4\Leftrightarrow I_4=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}+3}{10}$

ε) $I_5=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}\sigma\upsilon\nu 3x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)'\sigma\upsilon\nu 3x dx=$

$=-\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\sigma\upsilon\nu 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)(-3\eta\mu 3x)dx=-\frac{1}{2}(0-1)-\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}\eta\mu 3x dx=$

$=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)'\eta\mu 3x dx=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\eta\mu 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)3\cdot\sigma\upsilon\nu 3x dx=$

$=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}e^{-\pi}-\frac{9}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}\sigma\upsilon\nu 3x dx\Leftrightarrow I_5=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}e^{-\pi}-\frac{9}{4}I_5\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4I_5=2-3e^{-\pi}-9I_5\Leftrightarrow I_5=\frac{2-3e^{-\pi}}{13}$

στ) $I_6=\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{-3x}\eta\mu 3x dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)'\eta\mu 3x dx=$

$=-\frac{1}{3}\left[e^{-3x}\eta\mu 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)(3\sigma\upsilon\nu 3x)dx=$

$=0+\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{-3x}\sigma\upsilon\nu 3x dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)'\sigma\upsilon\nu 3x dx=$

$=-\frac{1}{3}\left[e^{-3x}\sigma\upsilon\nu 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)(-3\eta\mu 3x)dx=-\frac{1}{3}(-e^{-\pi}-1)-\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{-3x}\eta\mu 3x dx\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow I_6=\frac{e^\pi+1}{3}-I_6\Leftrightarrow I_6=\frac{e^\pi+1}{6}$

6.141. Εχουμε:

$$\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\sigma\upsilon\nu x dx=2\pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\sigma\upsilon\nu x dx+\int_0^{\pi}\left(f'(x)\right)'\sigma\upsilon\nu x dx=2\pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\sigma\upsilon\nu x dx+\left[f'(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)(-\eta\mu x)dx=2\pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\sigma\upsilon\nu x dx+f'(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi-f'(0)\sigma\upsilon\nu 0+\int_0^{\pi} f'(x)\eta\mu dx=2\pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\sigma\upsilon\nu x dx-f'(\pi)-f'(0)+\left[f(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f(x)\sigma\upsilon\nu x dx=2\pi \Leftrightarrow$$

$$\pi-f'(0)=2\pi \Leftrightarrow f'(0)=-\pi$$

6.142. Είναι $\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx+\int_0^{\pi}\left(f'(x)\right)'\eta\mu x dx=0 \Leftrightarrow$

$$\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx+0-\left[f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi} f(x)(-\eta\mu x)dx=0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx-f(\pi)(-1)+f(0)-\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx=0 \Leftrightarrow$$

$f(\pi)+f(0)=0 \Leftrightarrow f(\pi)=-f(0) \quad (1)$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και $f(0)\cdot f(\pi)=-f^2(0)\leq 0$

- Αν $f(0)\cdot f(\pi)<0$ τότε από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,\pi)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.
- Αν $f(0)\cdot f(\pi)=0 \Leftrightarrow f^2(0)=0$ άρα $f(0)=0$ και από την (1) θα είναι και $f(\pi)=0$ οπότε $x_0=0$ ή $x_0=\pi$ θα είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

Τελικά υπάρχει $x_0\in[0,\pi]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

6.143. Επειδή η f είναι άρτια στο $[-3,3]$ ισχύει $f(-x)=f(x) \quad (1)$

Παραγωγίζοντας την (1) έχουμε $-f'(-x)=f'(x) \quad (2)$ και

$$I=\int_{-3}^{3}\left[xf''(x)-f'(x)\right]dx=\int_{-3}^{3}x\left[f'(x)\right]'dx-\int_{-3}^{3}f'(x)dx=$$

$$=\left[xf'(x)\right]_{-3}^{3}-\int_{-3}^{3}f'(x)dx-\int_{-3}^{3}f'(x)dx=3f'(3)+3f'(-3)-2\int_{-3}^{3}f'(x)dx=$$

$$=3\left(f'(3)+f'(-3)\right)-2\left(f(3)-f(-3)\right)$$

Από (1) για $x=3$ προκύπτει $f(-3)=f(3)\Leftrightarrow f(3)-f(-3)=0 \quad (3)$ και

στην (2) για $x=3$ έχουμε $-f'(-3)=f'(3)\Leftrightarrow f'(3)+f'(-3)=0 \quad (4)$

Άρα από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι $I=0$.

6.144. Εχουμε $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x f(x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x f'(x)dx=-2 \Leftrightarrow$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x f(x)dx-\left[\sigma\upsilon\nu x f(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\eta\mu x)f(x)dx=-2 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x f(x)dx-0+\sigma\upsilon\nu 0 f(0)-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x f(x)dx=-2 \Leftrightarrow f(0)=-2$$

6.145. $I=\int_0^3 f'(x)f''(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^3 2f'(x)f''(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^3\left(\left[f'(x)\right]^2\right)'dx=$

$$=\frac{1}{2}\left[\left[f'(x)\right]^2\right]_0^3=\frac{1}{2}\left(f'(3)\right)^2-\frac{1}{2}\left(f'(0)\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{e^9}{\sqrt[3]{25}}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{16^2}}=\frac{e^{18}}{10\sqrt[3]{5}}-\frac{1}{8\sqrt[3]{4}}$$

6.146. **α)** $I_\nu+I_{\nu+1}=\int_0^2\frac{e^{\nu x}}{1+e^x}dx+\int_0^2\frac{e^{(\nu+1)x}}{1+e^x}dx=\int_0^2\frac{e^{\nu x}+e^{\nu x}e^x}{1-e^x}dx=\int_0^2\frac{e^{\nu x}\left(1+e^x\right)}{1+e^x}dx=$

$$=\int_0^2 e^{\nu x}dx=\frac{1}{\nu}\left[e^{\nu x}\right]_0^2=\frac{1}{\nu}\left(e^{2\nu}-1\right)$$

β) Για $\nu=1$ είναι $I_1+I_2=e^2-1\Leftrightarrow I_2=e^2-1-I_1\Leftrightarrow I_2=e^2-1-\int_0^2\frac{e^x}{1+e^x}dx=$

$$=e^2-1-\left[\ln\left(1+e^x\right)\right]_0^2=e^2-1-\ln\left(1+e^2\right)+\ln 2=e^2-1-\ln\frac{1+e^2}{2}$$

6.147. **α)** $I_\nu+I_{\nu+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\varepsilon\varphi^\nu x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varepsilon\varphi^{\nu+2}x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\varepsilon\varphi^\nu x+\varepsilon\varphi^{\nu+2}x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\varepsilon\varphi^\nu x\left(1+\varepsilon\varphi^2 x\right)dx$

Θέτω $u=\varepsilon\varphi^\nu x$ οπότε $du=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=\left(1+\varepsilon\varphi^2 x\right)dx$ και

x	0	$\frac{\pi}{4}$
u	0	1

άρα $I_\nu+I_{\nu+2}=\int_0^1 u^\nu du=\left[\frac{u^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_0^1=\frac{1}{\nu+1}$

β) Για $\nu=2$ θα έχουμε $I_2+I_4=\frac{1}{3}\Leftrightarrow I_4=\frac{1}{3}-I_2=\frac{1}{3}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\varepsilon\varphi^2 x dx=$

$$=\frac{1}{3}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=\frac{1}{3}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}1dx=\frac{1}{3}-\left[\varepsilon\varphi x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$$

6.148. **α)** $I_\nu=\int_1^e \ln^\nu x dx=\int_1^e (x)'\ln^\nu x dx=\left[x\ln^\nu x\right]_1^e-\int_1^e x\nu\ln^{\nu-1}x\frac{1}{x}dx=$

$$=e-0-\nu\int_1^e\ln^{\nu-1}x dx\Leftrightarrow I_\nu=e-\nu I_{\nu-1}\quad(1)$$

β) Για $\nu=3$ στην (1) έχουμε $I_3=e-3I_2\quad(2)$ και

για $\nu=2$ στην (1) έχουμε $I_2=e-2I_1\quad(3)$

Άρα από (2) και (3) $\quad I_3=e-3\left(e-2I_1\right)=6I_1-2e=6\int_1^e\ln x dx-2e=$

$$=6\left(\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e x\frac{1}{x}dx\right)-2e=6\left(e-\left(e-1\right)\right)=6-2e$$

6.149. $I_\nu+I_{\nu+1}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\eta\mu^\nu x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+1}dx+\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\eta\mu^{\nu+1}x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+1}dx=$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\eta\mu^\nu x\left(\eta\mu x+1\right)\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\eta\mu^\nu x\sigma\upsilon\nu x dx$$

Θέτουμε $u = ημx$ οπότε $du = συνx dx$ και

x	0	$\frac{\pi}{6}$
u	0	$\frac{1}{2}$

άρα $I_ν + I_{ν+1} = \int_0^{\frac{1}{2}} u^ν du = \left[\frac{u^{ν+1}}{ν+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{(ν+1)2^{ν+1}}$

6.150. Επειδή η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα $[0,1]$ τότε $f(0) = f(1)$.

Οπότε $\int_0^1 xf''(x)dx = [xf'(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x)dx = f'(1) - [f(x)]_0^1 = f'(1) - (f(1) - f(0)) = f'(1)$

6.151. α) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ημx}{(1+2συνx)} dx$

Θέτουμε $u = 1 + 2συνx$ οπότε $du = -2ημx dx$ και

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	3	1

άρα $I_1 = \int_3^1 \frac{-\frac{1}{2}du}{u^2} = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{u}\right]_1^3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{1}{3}$

β) $I_2 = \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Θέτουμε $u = \sqrt{x}$ οπότε $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ και

x	1	4
u	1	2

οπότε $I_2 = \int_1^2 e^u 2du = 2[e^u]_1^2 = 2(e^2 - e)$

γ) $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - ημx)^4 συνx dx$

Θέτουμε $u = 1 - ημx$ οπότε $du = -συνx dx$ και

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	1	0

οπότε $I_3 = \int_1^0 u^4(-du) = \int_0^1 u^4 du = \left[\frac{u^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$

δ) $I_4 = 7\int_0^2 (x^2 - 3x)^6 (2x - 3) dx$

Θέτουμε $u = x^2 - 3x$ οπότε $du = (2x - 3)dx$ και

x	0	2
u	0	–2

οπότε $I_4 = 7\int_0^{-2} u^6 du = [u^7]_0^{-2} = (-2)^7 = -128$

ε) $I_5 = 12\int_0^1 (3x+1)^3 dx$

Θέτουμε $u = 3x + 1$ οπότε $du = 3dx$ και

x	0	1
u	1	4

οπότε $I_5 = 4\int_1^4 u^3 du = [u^4]_1^4 = (4^4 - 1) = 255$

στ) $I_6 = \int_0^1 (2x+1)e^{x^2+x} dx$

Θέτουμε $u = x^2 + x$ οπότε $du = (2x+1)dx$ και

x	0	1
u	0	2

οπότε $I_6 = \int_0^2 e^u du = e^2 - 1$

ζ) $I_7=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu x dx$

Θέτουμε $u=\eta\mu x$ οπότε $du=\sigma\upsilon\nu x dx$ και

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	0	1

οπότε $I_7=\int_0^1 4u^3 du=\left[u^4\right]_0^1=1$

η) $I_8=\int_0^1 e^{2x+1}dx=\frac{1}{2}\left[e^{2x+1}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(e^3-e\right)$

θ) $I_9=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sigma\upsilon\nu 2x dx=\frac{1}{2}\left[\eta\mu 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}$

ι) $I_{10}=\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$

Θέτουμε $u=\ln x$ οπότε $du=\frac{1}{x}dx$ και

x	1	e
u	0	1

οπότε $I_{10}=\int_0^1 u^2 du=\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$

κ) $I_{11}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x 2^{\eta\mu x}dx$

Θέτουμε $u=\eta\mu x$ οπότε $du=\sigma\upsilon\nu x dx$ και

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	0	1

οπότε $I_{11}=\int_0^1 2^u du=\left[\frac{2^u}{\ln 2}\right]_0^1=\frac{2}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}$

λ) $I_{12}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)dx$

Θέτουμε $u=\eta\mu x$ οπότε $du=\sigma\upsilon\nu x dx$ και για

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	0	1

άρα $I_{12}=\int_0^1 \sigma\upsilon\nu u du=\left[\eta\mu u\right]_0^1=\eta\mu 1$

6.152. **α)** $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu^2 x}dx$

Θέτουμε $u=1+\eta\mu^2 x$ οπότε $du=2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x dx$ και

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	1	2

άρα $I_1=\int_1^2 \frac{1}{2}\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\left[\ln|u|\right]_1^2=\frac{1}{2}\ln 2$

β) $I_2=\int_0^{\frac{\pi^2}{3}} \frac{2x-\eta\mu x}{x^2+\sigma\upsilon\nu x}dx$

Θέτουμε $u=x^2+\sigma\upsilon\nu x$ οπότε $du=(2x-\eta\mu x)dx$ και

x	0	$\frac{\pi}{3}$
u	1	$\frac{\pi^2}{3}+\frac{1}{2}$

οπότε $I_2=\int_1^{\frac{\pi^2}{3}+\frac{1}{2}} \frac{du}{u}=\left[\ln|u|\right]_1^{\frac{\pi^2}{3}+\frac{1}{2}}=\ln\left(\frac{\pi^2}{3}+\frac{1}{2}\right)$

γ) $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}dx=-\left[\ln|\sigma\upsilon\nu x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\left(\ln\frac{1}{2}-\ln 1\right)=-\ln\frac{1}{2}=\ln 2$

δ) $I_4=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi x dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\eta\mu x)'}{\eta\mu x}dx=\left[\ln|\eta\mu x|\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\ln 1-\ln\frac{1}{2}=\ln 2$

ε) $I_5=\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx=\int_0^1 \frac{e^x\cdot e^x}{1+e^x}dx$

Θέτουμε $u=1+e^x$ οπότε $e^x=u-1$ και $du=e^x dx$, επίσης

x	0	1
u	2	1+e

άρα $I_5=\int_2^{1+e}\frac{(u-1)du}{u}=\int_2^{1+e}\left(1+\frac{1}{u}\right)du=$

$$=\left[u\right]_2^{1+e}-\left[\ln|u|\right]_2^{1+e}=1+e-2-\left(\ln(1+e)-\ln 2\right)=e-1-\ln\frac{1+e}{2}$$

στ) $I_6=\int_0^1\frac{2x-3}{(4x-7)^3}dx$

Θέτουμε $u=4x-7$ οπότε $du=4dx$ και $x=\frac{u+7}{4}$ επίσης

x	0	1
u	–7	–3

οπότε $I_6=\int_{-7}^{-3}\frac{2\frac{u+7}{4}-3}{u^3}\frac{1}{4}du=\int_{-7}^{-3}\frac{u+1}{8u^3}du=\frac{1}{8}\int_{-7}^{-3}\left(u^{-2}+u^{-3}\right)du=$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{u^{-1}}{-1}\right]_{-7}^{-3}+\frac{1}{8}\left[\frac{u^{-2}}{-2}\right]_{-7}^{-3}=\frac{-1}{8}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{49}\right)=\frac{1}{42}-\frac{5}{882}$$

ζ) $I_7=\int_0^1 x^2(x+1)^u dx$.

Θέτουμε $u=x+1$ οπότε $x=u-1$ και $dx=du$ για

x	0	1
u	1	2

άρα $I_7=\int_1^2(u-1)^2u^4du=\int_1^2\left(u^6-2u^5+u^4\right)du=$

$$=\left[\frac{u^7}{7}\right]_1^2-2\left[\frac{u^6}{6}\right]_1^2+\left[\frac{u^5}{5}\right]_1^2=\frac{127}{7}-\frac{63}{3}+\frac{31}{5}$$

η) $I_8=\int_1^2 5(2x-3)(x-1)^4dx$. Θέτουμε $u=x-1$ οπότε $du=dx$ και $x=u+1$

x	1	2
u	0	1

οπότε $I_8=\int_0^1 5\left[2(u+1)-3\right]u^4du=\int_0^1 5(2u-1)u^4du=$

$$=\int_0^1\left(10u^5-5u^4\right)du=10\left[\frac{u^6}{6}\right]_0^1-5\left[\frac{u^5}{5}\right]_0^1=\frac{10}{6}-1=\frac{2}{3}$$

θ) $I_9=\int_0^1\frac{e^x-2}{e^x+3}dx=\int_0^1\frac{(e^x-2)e^x}{e^x(e^x+3)}dx$. Θέτουμε $u=e^x+3$ οπότε $du=e^xdx$ και

x	0	1
u	1	e

οπότε $I_9=\int_1^e\frac{u-2}{u(u+3)}du$ και είναι

$$\frac{u-2}{u(u+3)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u+3}\Leftrightarrow u-2=A(u+3)+Bu\Leftrightarrow u-2=(A+B)u+3A\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=1\\3A=-2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$A=-\frac{2}{3},\ B=\frac{5}{3}$

οπότε $I_9=\int_1^e\frac{-\frac{2}{3}}{u}du+\int_1^e\frac{\frac{5}{3}}{u+3}du=-\frac{2}{3}\left[\ln|u|\right]_1^e+\frac{5}{3}\left[\ln|u+3|\right]_1^e=-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}\ln(e+3)-\frac{5}{3}\ln 4$

6.153. α) $I_1=\int_e^{e^2}\frac{\ln x+1}{x\ln x}dx$. Θέτουμε $u=\ln x$ οπότε $du=\frac{1}{x}dx$ και

x	e	e^2
u	1	2

οπότε $I_1=\int_1^2 \frac{u+1}{u}du=\int_1^2\left(1+\frac{1}{u}\right)du=\left[u\right]_1^2+\left[\ln|u|\right]_1^2=1+\ln 2$

β) $I_2=\int_1^2 \frac{6x^5}{\left(x^6+1\right)\ln\left(x^6+1\right)}dx$. Θέτουμε $u=\ln\left(x^6+1\right)$ οπότε $du=\frac{6x^5}{x^6+1}dx$ και

x	1	2
u	ln2	ln65

οπότε $I_2=\int_{\ln 2}^{\ln 65}\frac{du}{u}=\left[\ln|u|\right]_{\ln 2}^{\ln 65}=\ln\frac{\ln 65}{\ln 2}$

γ) $I_3=\int_0^1 \frac{e^x}{\left(e^x+2\right)\ln\left(e^x+2\right)}dx$.

Θέτουμε $u=\ln\left(e^x+2\right)$ οπότε $du=\frac{e^x}{e^x+2}dx$ και

x	0	1
u	ln3	$\ln(e+2)$

οπότε $I_3=\int_{\ln 3}^{\ln(e+2)}\frac{du}{u}=\left[\ln|u|\right]_{\ln 3}^{\ln(e+2)}=\ln\frac{\ln(e+2)}{\ln 3}$

δ) $I_4=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sigma\varphi x\left(\eta\mu x\right)dx$. Θέτουμε $u=\ln\left(\eta\mu x\right)$ οπότε $du=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}dx=\sigma\varphi x dx$ και

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
u	$\ln\frac{1}{2}$	0

οπότε $I_4=\int_{-\ln 2}^{0}u\,du=\left[\frac{u^2}{2}\right]_{-\ln 2}^{0}=-\frac{\ln^2 2}{2}$

6.154. α) $I_1=\int_0^1\frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$. Θέτουμε $u=e^x+1$ οπότε $du=e^x dx$ και για

x	0	1
u	2	e+1

οπότε $I_1=\int_2^{e+1}\frac{du}{\sqrt{u}}=2\left[\sqrt{u}\right]_2^{e+1}=2\left(\sqrt{e+1}-\sqrt{2}\right)$

β) $I_2=\int_0^2\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}dx$. Θέτουμε $u=x^2+5$ οπότε $du=2xdx$ και

x	0	2
u	5	9

άρα $I_2=\int_5^9\frac{du}{2\sqrt{u}}=\left[\sqrt{u}\right]_5^9=3-\sqrt{5}$

γ) $I_3=\int_0^3\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}dx$. Θέτουμε $u=x^2+16$ οπότε $du=2xdx$ και

x	0	3
u	16	25

οπότε $I_3=\int_{16}^{25}\frac{du}{2\sqrt{u}}=\left[\sqrt{u}\right]_{16}^{25}=5-4=1$

δ) $I_4=\int_2^6\frac{4x+3}{\sqrt{2x+4}}dx$. Θέτουμε $u=2x+4$ οπότε $du=2dx$, $x=\frac{u-4}{2}$ και

x	2	6
u	8	16

οπότε $I_4=\int_8^{16}\frac{4\frac{u-4}{2}+3}{\sqrt{u}}\frac{du}{2}=\int_8^{16}\frac{2u-5}{2\sqrt{u}}du=\int_8^{16}u^{\frac{1}{2}}du-5\int_8^{16}\frac{1}{2\sqrt{u}}du=$

$=\frac{2}{3}\left[\sqrt{u^3}\right]_8^{16}-5\left[\sqrt{u}\right]_8^{16}=\frac{2}{3}\left(64-16\sqrt{2}\right)-5\left(4-2\sqrt{2}\right)=$

$=\frac{128}{3}-20+10\sqrt{2}-\frac{32}{3}\sqrt{2}=\frac{68}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{2}$

ε) $I_5=\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$. Θέτουμε $u=4-x^2$ άρα $-2xdx=du$ και

x	0	2
u	4	0

οπότε $I_5=\int_4^0\sqrt{u}\left(-\frac{1}{2}du\right)=\frac{1}{2}\int_0^4\sqrt{u}du=\frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{1}{3}\left[\sqrt{u^3}\right]_0^4=\frac{8}{3}$

στ) $I_6=\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$. Θέτουμε $u=x+1$ οπότε $du=dx$, $x=u-1$ και

x	0	3
u	1	4

οπότε $I_6=\int_1^4(u-1)\sqrt{u}du=\int_1^4 u^{\frac{3}{2}}du-\int_1^4 u^{\frac{1}{2}}du=\frac{2}{5}\left[\sqrt{u^5}\right]_1^4-\frac{2}{3}\left[\sqrt{u^3}\right]_1^4=$

$=\frac{2}{5}(32-1)-\frac{2}{3}(8-1)=\frac{62}{5}-\frac{14}{3}=\frac{116}{15}$

ζ) $I_7=\int_2^5 x^2\sqrt{x-1}\,dx$. Θέτουμε $u=x-1$ οπότε $du=dx$, $x=u+1$ και

x	2	5
u	1	4

οπότε $I_7=\int_1^4(u+1)^2\sqrt{u}du=\int_1^4\left(u^2\sqrt{u}+2u\sqrt{u}+\sqrt{u}\right)du=$

$=\int_1^4\left(u^{\frac{5}{2}}+2u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}}\right)du=\frac{2}{7}\left[\sqrt{u^7}\right]_1^4+2\frac{2}{5}\left[\sqrt{u^5}\right]_1^4+\frac{2}{3}\left[\sqrt{u^3}\right]_1^4$

$=\frac{2}{7}(128-1)+\frac{4}{5}(32-1)+\frac{2}{3}(8-1)=\frac{2\overset{15}{5}4}{7}+\frac{1\overset{21}{2}4}{7}+\frac{1\overset{35}{4}}{3}=\frac{6904}{105}$

η) $I_8=\int_3^{11}\frac{x+2}{\sqrt{x-2}}dx$. Θέτουμε $u=x-2$ οπότε $du=dx$, $x=u+2$ και

x	3	11
u	1	9

οπότε $I_8=\int_1^9\frac{u+4}{\sqrt{u}}du=\int_1^9\left(\sqrt{u}+\frac{4}{\sqrt{u}}\right)du=\frac{2}{3}\left[\sqrt{u^3}\right]_1^9+8\left[\sqrt{u}\right]_1^9=$

$=\frac{52}{3}+16=\frac{100}{3}$

θ) $I_9=\int_0^4\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}dx$. Θέτουμε $u=\sqrt{x}\Leftrightarrow u^2=x$ οπότε $2udu=dx$ και

x	0	4
u	0	2

οπότε $I_9=\int_0^2\frac{u+2}{u+3}2udu=\int_0^2\frac{2u^2+4u}{u+3}du$ και

$$\begin{array}{rr|l} \cancel{2u^2} & +4u & u+3 \\ \cline{3-3} \cancel{-2u^2} & -6u & 2u-2 \\ \hline & \cancel{-2u} & \\ & +2u+6 & \\ \hline & 6 & \end{array}$$

οπότε $I_9=\int_0^2(2u-2)du+\int_0^2\frac{6}{u+3}du=$

$=\left[u^2\right]_0^2-2\left[u\right]_0^2+6\left[\ln|u+3|\right]_0^2=$

$=4-4+6(\ln5-\ln3)=6\ln\frac{5}{3}$

ι) $\int_1^{64}\frac{3x+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}}dx=\int_1^{64}\left(\frac{3x}{\sqrt{x}}+\frac{x^{1/3}}{x^{1/2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int_1^{64}\left(3x^{1/2}+x^{-1/6}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=$

$=3\frac{2}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_1^{64}+\frac{6}{5}\left[\sqrt[6]{x^5}\right]_1^{64}+2\left[\sqrt{x}\right]_1^{64}=2(512-1)+\frac{6}{5}(32-1)+2(8-1)=$

$=1036+\frac{186}{5}=\frac{5366}{5}$

κ) $I_{11}=\int_0^4 \frac{x-2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}dx$. Θέτουμε $u=\sqrt{x}$, οπότε $u^2=x$ και $2udu=dx$ και

x	0	4
u	0	2

οπότε $I_{11}=\int_0^2 \frac{u^2-2u+2}{u+1}2udu=\int_0^2 \frac{2u^3-4u^2+4u}{u+1}du$

και

$$\begin{array}{rrr|l} \cancel{2u^3} & -4u^2 & +4u & u+1 \\ \cline{4-4} -\cancel{2u^3} & -2u^2 & & 2u^2-6u+10 \\ \cline{1-3} & -\cancel{6u^2} & +4u & \\ & +\cancel{6u^2} & +6u & \\ \cline{1-3} & & \cancel{10u} & \\ & & -\cancel{10u}\ -10 & \\ \cline{1-3} & & -10 & \end{array}$$

άρα $I_{11}=\int_0^2\left(2u^2-6u+10\right)du-\int_0^2 \frac{10}{u+1}du=2\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^2-3\left[u^2\right]_0^2+20-10\left[\ln|u+1|\right]_0^2=$

$=\frac{16}{3}-12+20-10\ln3=\frac{40}{3}-10\ln3$

λ) $I_{12}=\int_0^7 \frac{x-\sqrt{x+1}-3}{\sqrt[3]{x+1}}dx$. Θέτουμε $u=x+1$ οπότε $x=u-1,\ dx=du$ και

x	0	7
u	1	8

οπότε $I_{12}=\int_1^8 \frac{u-1-\sqrt{u}-3}{\sqrt[3]{u}}du=\int_1^8\left(\frac{u}{\sqrt[3]{u}}-\frac{\sqrt{u}}{\sqrt[3]{u}}-\frac{4}{\sqrt[3]{u}}\right)du=\int_1^8\left(u^{2/3}-u^{1/6}-4u^{-1/3}\right)du=$

$=\frac{3}{5}\left[\sqrt[3]{u^5}\right]_1^8-\frac{6}{7}\left[\sqrt[6]{u^7}\right]_9^8-4\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{u^2}\right]_1^8=\frac{3}{5}(32-1)-\frac{6}{7}\left(8\sqrt{2}-1\right)-6(4-1)=$

$=\frac{51}{35}-\frac{48\sqrt{2}}{7}$

6.155. α) $I_1=\int_0^1 \frac{e^{3x}-2e^{2x}-5e^x+6}{e^x+2}dx=\int_0^1 \frac{\left(e^{3x}-2e^{2x}-5e^x+6\right)e^x}{e^x\left(e^x+2\right)}dx$

Θέτουμε $u=e^x$ οπότε $du=e^x dx$ και

x	0	1
u	1	e

οπότε $I_1=\int_1^e \frac{u^3-2u^2-5u+6}{u(u+2)}du=\int_1^e \frac{u^3-2u^2-5u+6}{u^2+2u}du$

$$\begin{array}{rrr|l} u^3 & -2u^2 & -5u+6 & u^2+2u \\ \cline{4-4} -u^3 & -2u^2 & & u-4 \\ \cline{1-3} & -\cancel{4u^2} & -5u+6 & \\ & +\cancel{4u^2} & +8u & \\ \cline{1-3} & & 3u+6 & \end{array}$$

οπότε $I_1=\int_1^e(u-4)du+\int_1^e \frac{3u+6}{u^2+2u}du=$

$=\int_1^e(u-4)du+\int_1^e \frac{3\cancel{(u+2)}}{u\cancel{(u+2)}}du=$

$=\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^e-4(e-1)+3\left[\ln|u|\right]_1^e=\frac{e^2-1}{2}-4(e-1)+3$

β) $I_2=\int_{\ln3}^{\ln4} \frac{e^{2x}+4e^x}{e^{2x}-3e^x+2}dx=\int_{\ln3}^{\ln4} \frac{\left(e^x+4\right)e^x}{e^{2x}-3e^x+2}dx$.

Θέτουμε $e^x = u$ οπότε $e^x dx = du$ και

x	ln3	ln4
u	3	4

άρα $I_2 = \int_3^4 \frac{u+4}{u^2-3u+2}du$

$$\frac{u+4}{(u-1)(u-2)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u-2} \Leftrightarrow u+4 = A(u-2)+B(u-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u+4 = (A+B)u - 2A - B \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -2A-B=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} A=-5 \\ B=6 \end{matrix}$$

συνεπώς $I_2 = \int_3^4 \frac{-5}{u-1}du + \int_3^4 \frac{6}{u-2}du = -5\left[\ln|u-1|\right]_3^4 + 6\left[\ln|u-2|\right]_3^4 = 11\ln2 - 5\ln3$

γ) $I_3 = \int_0^1 \frac{e^{4x}-e^x}{e^x+3}dx = \int_0^1 \frac{\left(e^{3x}-1\right)e^x}{e^x+3}dx$. Θέτουμε $e^x = u$ οπότε $e^x dx = du$ και

x	0	1
u	1	e

άρα $I_3 = \int_1^e \frac{u^3-1}{u+3}du$

$$\begin{array}{rr|l} \cancel{u^3} & -1 & u+3 \\ \cline{3-3} -\cancel{u^3} & -3u^2 & u^2-3u+9 \\ \cline{1-2} -\cancel{3u^2} & -1 & \\ +\cancel{3u^2} & +9u & \\ \cline{1-2} \cancel{9u} & -1 & \\ -\cancel{9u} & -27 & \\ \cline{1-2} & -28 & \end{array}$$

και $I_3 = \int_1^e \left(u^2-3u+9\right)du - \int_1^e \frac{28}{u+3}du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_1^e - \frac{3}{2}\left[u^2\right]_1^e + 9(e-1) - 28\left[\ln|u+3|\right]_1^e =$

$$= \frac{e^3-1}{3} - \frac{3}{2}\left(e^2-1\right) + 9(e-1) - 28\ln\frac{e+3}{4}$$

δ) $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3συνx}{ημ^2x - 7ημx + 10}dx$. Θέτουμε $u = ημx$ οπότε $du = συνx dx$ και

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	0	1

Οπότε $I_4 = \int_0^1 \frac{3}{u^2-7u+10}du \Leftrightarrow \frac{3}{u^2-7u+10} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u-5} \Leftrightarrow 3 = Au - 5A + Bu - 2B \Leftrightarrow$

$$3 = (A+B)u + (-5A-2B) \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -5A-2B=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} A=-1 \\ B=1 \end{matrix}$$

άρα $I_4 = \int_0^1 \frac{-1}{u-2}du + \int_0^1 \frac{1}{u-5}du = -\left[\ln|u-2|\right]_0^1 + \left[\ln|u-5|\right]_0^1 =$

$$= -(\ln1 - \ln2) + (\ln4 - \ln5) = 3\ln2 - \ln5$$

ε) $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{συνx}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{συνx}{συν^2x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{συνx}{1-ημ^2x}dx$.

Θέτουμε $u = ημx$ οπότε $du = συνx dx$

x	0	$\frac{\pi}{3}$
u	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

άρα $I_5 = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{1-u^2} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\frac{1}{2}}{1-u}du + \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\frac{1}{2}}{1+u}du =$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|1-u|\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1}{2}\left[\ln|1+u|\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{4}$$

στ) $I_6=\int_{\ln5}^{\ln12}\frac{e^x dx}{e^x\sqrt{e^x+4}}$

Θέτουμε $u=\sqrt{e^x+4}\Leftrightarrow u^2-4=e^x$ και $e^x dx=2udu$ επίσης

x	ln5	ln12
u	3	4

άρα $I_6=\int_3^4\frac{2udu}{\left(u^2-4\right)\cdot u}=\int_3^4\frac{2}{u^2-4}du=\int_3^4\frac{\frac{1}{2}}{u-2}du-\int_3^4\frac{\frac{1}{2}}{u+2}du=$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|u-2|\right]_3^4-\frac{1}{2}\left[\ln|u+2|\right]_3^4=\frac{1}{2}\ln2-\frac{1}{2}\ln6+\frac{1}{2}\ln5$$

6.156. α) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\eta\mu x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\eta\mu x}{1-\eta\mu^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=\left[\varepsilon\varphi x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$$

Θέτουμε $u=\sigma\upsilon\nu x$ οπότε $du=-\eta\mu x dx$

x	0	$\frac{\pi}{3}$
u	1	$\frac{1}{2}$

άρα $I_1=\sqrt{3}+\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{du}{u^2}=\sqrt{3}-\left[\frac{1}{u}\right]_1^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}-(2-1)=\sqrt{3}-1$

β) $I_2=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}dx=$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\eta\mu^2 x}dx-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}dx=-\left[\sigma\varphi x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}dx$$

Θέτουμε $u=\eta\mu x$ οπότε $du=-\sigma\upsilon\nu x dx$

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
u	$\frac{1}{2}$	1

άρα $I_2=-\left(0-\sqrt{3}\right)-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{du}{u^2}=\sqrt{3}+\left[\frac{1}{u}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\sqrt{3}+(1-2)=\sqrt{3}-1$

γ) $I_3=\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx$. Θέτουμε $u=\sqrt{x}\Leftrightarrow x=u^2$ οπότε $dx=2udu$ και

x	1	4
u	1	2

Άρα $I_3=\int_1^2 e^u 2udu=\left[2ue^u\right]_1^2-\int_1^2 2e^u du=4e^2-2-2\left(e^2-1\right)=2e^2$

δ) $I_4=\int_0^{\ln\pi}e^{2x}\sigma\upsilon\nu\left(e^x\right)dx$. Θέτω $e^x=u$ οπότε $e^x dx=du$ και

x	0	$\ln\pi$
u	1	π

Άρα $I_4=\int_1^{\pi}u\sigma\upsilon\nu u du=\int_1^{\pi}u\left(\eta\mu u\right)' du=$

$$=\left[u\eta\mu u\right]_1^{\pi}-\int_1^{\pi}\eta\mu u du=-\eta\mu1+\left[\sigma\upsilon\nu u\right]_1^{\pi}=-\eta\mu1-1-\sigma\upsilon\nu1$$

ε) $I_5=\int_1^{e^{\pi}}\eta\mu\left(\ln x\right)dx$. Θέτουμε $u=\ln x\Leftrightarrow x=e^u$ και $dx=e^u du$ επίσης

x	1	e^{π}
u	0	π

οπότε $I_5=\int_0^{\pi}\eta\mu u\cdot e^u du=\left[e^u\eta\mu u\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu u\cdot e^u du=0-\left[e^u\sigma\upsilon\nu u\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\left(-\eta\mu u\right)\cdot e^u du=$

$$=-\left(-e^{\pi}-1\right)-\int_0^{\pi}\eta\mu u\cdot e^u du\Leftrightarrow I_5=e^{\pi}+1-I_5\Leftrightarrow I_5=\frac{e^{\pi}+1}{2}$$

στ) $I_6=\int_0^{\pi^2}\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}dx$. Θέτουμε $u=\sqrt{x}\Leftrightarrow x=u^2$ και $dx=2udu$ επίσης

x	1	π^2
u	0	π

οπότε $I_6 = \int_0^{\pi} συνu \cdot 2udu = \int_0^{\pi} (ημu)' \, 2udu = \left[2uημu\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2ημudu =$

$= 0 + 2\left[συνu\right]_0^{\pi} = 2(-2) = -4$

6.157. α) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ημ^3 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ημ^2 x \cdot ημxdx = \int_0^{2} \left(1 - συν^2 x\right) ημxdx$

Θέτουμε $u = συνx$ οπότε $du = -ημxdx$ και

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	1	0

οπότε

$$I_1 = \int_1^0 \left(1 - u^2\right)(-du) = \int_0^1 \left(1 - u^2\right) du = 1 - \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

β) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} συν^3 xημxdx$. Θέτουμε $u = συνx$ οπότε $du = -ημxdx$ και

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	1	0

άρα $I_2 = \int_1^0 u^3 (-du) = \int_1^0 u^3 du = \left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

γ) $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ημ^3 xσυν^2 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - συν^2 x\right) συν^2 xημxdx$

Θέτουμε $u = συνx$ οπότε $du = -ημxdx$ και

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	1	0

άρα

$$I_3 = \int_1^0 \left(1 - u^2\right) u^2 (-du) = \int_0^1 \left(u^2 - u^4\right) du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{u^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

δ) $I_4 = \int_1^{\frac{\pi}{2}} συν^5 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} συν^4 xσυνxdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - ημ^2 x\right)^2 συνxdx$

Θέτουμε $u = ημx$ οπότε $du = συνxdx$ και

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	0	1

Άρα

$$I_4 = \int_0^1 \left(1 - u^2\right)^2 du = \int_0^1 \left(1 - 2u^2 + u^4\right) du = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$$

ε) $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{ημx}{συν^2 x} dx$. Θέτουμε $u = συνx$ οπότε $du = -ημxdx$ και

x	0	$\frac{\pi}{3}$
u	1	$\frac{1}{2}$

άρα $I_5 = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{-du}{u^2} = \left[\frac{1}{u}\right]_1^{\frac{1}{2}} = 2 - 1 = 1$

στ) $I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ημ^3 xσυν^5 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ημ^2 xσυν^5 xημxdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - συν^2 x\right) συν^5 xημxdx$

Θέτουμε $u = συνx$ οπότε $du = -ημxdx$ και

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	1	0

άρα

$$I_6 = \int_1^0 \left(1 - u^2\right) u^5 (-du) = \int_0^1 \left(u^5 - u^7\right) du = \left[\frac{u^6}{6}\right]_0^1 - \left[\frac{u^8}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

ζ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} συν^2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+συν2x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} συν2x dx = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\left[ημ2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

η) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} ημ^4x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(ημ^2x\right)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-συν2x}{2}\right)^2 dx =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-2συν2x+συν2x}{4} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} συν2x dx + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+συν4x}{2} dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[ημ2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{32}\left[ημ4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} = \frac{3\pi}{16}$$

θ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} ημ^2x συν^4x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-συν2x}{2}\cdot\left(\frac{1+συν2x}{2}\right)^2 dx =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-συν2x}{2}\cdot\frac{1+2συν2x+συν^2 2x}{4} dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2συν2x+συν^2 2x - συν2x - 2συν^2 2x - συν^3 2x}{8} dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8} dx + \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} συν2x dx - \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} συν^2 2x dx - \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} συν^3 2x dx =$$

$$= \frac{1}{8}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{16}\left[ημ2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+συν4x}{2} dx - \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} συν^2 2x συν2x dx =$$

$$= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} συν4x dx - \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-ημ^2 2x\right)συν2x dx =$$

$$= \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{32} - \frac{1}{64}\left[ημ4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-ημ^2 2x\right)2συν2x dx =$$

$$= \frac{\pi}{32} - \frac{1}{16}\int_0^0 \left(1-u^2\right) du = \frac{\pi}{32}$$

6.158. α) $I_1 = \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2} dx$. Θέτουμε $u = 1+x^2$ οπότε $du = 2x dx$ και

x	0	$\sqrt{3}$
u	1	4

Οπότε $I_1 = \int_1^4 \sqrt{u}\frac{1}{2} du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{1}{3}\left[\sqrt{u^3}\right]_1^4 = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$

β) $I_2 = \int_{\frac{4\sqrt{3}}{3}}^4 \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}} dx$.

Θέτουμε $x = \frac{2}{συνt}$ οπότε $dx = -\frac{2(-ημt)}{συν^2t} dt \Leftrightarrow dx = 2ημt\frac{1}{συν^2t} dt$ και

x	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	4
t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$

Οπότε $I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\frac{4}{συν^2t}\sqrt{\frac{4}{συν^2t}-4}}\cdot 2ημt\frac{1}{συν^2t} dt =$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2ημt}{4\sqrt{\frac{4ημ^2t}{συν^2t}}} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{συνt}{4} dt = \frac{1}{4}\left[ημt\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{8}$$

γ) $I_3 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dt$. Θέτουμε $x = εφt$ οπότε $dx = \frac{1}{συν^2t} dt$ και

x	1	$\sqrt{3}$
t	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

$$I_3=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\varepsilon\varphi^2 t\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 t}}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\eta\mu^2 t\sqrt{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}}}dt=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sigma\upsilon\nu t}{\eta\mu t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sigma\varphi t dt=-\left[\frac{1}{\eta\mu^2 t}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{3}$$

δ) $I_4=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$. Θέτουμε $x=2\eta\mu t$ οπότε $dx=2\sigma\upsilon\nu t dt$ και

x	0	1
t	0	$\frac{\pi}{2}$

οπότε $I_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{4-4\eta\mu^2 t}}2\sigma\upsilon\nu t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sigma\upsilon\nu t}{\sqrt{4\left(1-\eta\mu^2 t\right)}}dt=$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sigma\upsilon\nu t}{2\sigma\upsilon\nu t}dt=\frac{\pi}{2}$$

ε) $I_5=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}dx$. Θέτουμε $x=\sqrt{2}\eta\mu t$ οπότε $dx=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu t dt$ και

x	0	1
t	0	$\frac{\pi}{4}$

οπότε $I_5=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\eta\mu^2 t}{\sqrt{2-2\eta\mu^2 t}}\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu t dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\eta\mu^2 t}{\sqrt{2\left(1-\eta\mu^2 t\right)}}\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu t dt=$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\eta\mu^2 t dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\sigma\upsilon\nu 2t\right)dt=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left[\eta\mu 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

στ) $I_6=\int_0^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}dx$. Θέτουμε $x=\alpha\eta\mu t$ οπότε $dx=\alpha\sigma\upsilon\nu t dt$ και

x	0	α
t	0	$\frac{\pi}{2}$

οπότε $I_6=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\alpha^2-\alpha^2\eta\mu^2 t}\cdot\alpha\sigma\upsilon\nu t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2 t}\cdot\alpha\sigma\upsilon\nu t dt=$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2 t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\alpha^2\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2t}{2}dt=\frac{\alpha^2}{2}\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu 2t dt==$$

$$=\frac{\alpha^2\pi}{4}+\frac{\alpha^2}{4}\left[\eta\mu 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\alpha^2\pi}{4}$$

6.159. α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu 2x\eta\mu x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sigma\upsilon\nu\left(2x-x\right)-\sigma\upsilon\nu\left(2x+x\right)\right]dx=$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu dx-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu 3x dx=\frac{1}{2}\left[\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{6}\left[\eta\mu 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\left(-1\right)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu 2x\sigma\upsilon\nu x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sigma\upsilon\nu\left(2x+x\right)+\sigma\upsilon\nu\left(2x-x\right)\right]dx=$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sigma\upsilon\nu 3x+\sigma\upsilon\nu x\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu 3x dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x dx=$$

$$=\frac{1}{6}\left[\eta\mu 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\left[\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{6}\left(0-1\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

6.160. $f(x)=x^2 \qquad D_f=\mathbb{R}$

$g(x)=\ln x \qquad D_g=(0,+\infty)$

$D_{f\circ g}=\{x\in D_g / g(x)\in D_f\}=\{x>0 / \ln x\in\mathbb{R}\}=(0,+\infty)$

Είναι $(f\circ g)(x)=f(\ln x)=\ln^2 x$

οπότε $I=\int_1^e \ln^2 x dx=\int_1^e (x)'\ln^2 x dx=\left[x\ln^2 x\right]_1^e-\int_1^e x2\ln x\frac{1}{x}dx$

$=e-\int_1^e (2x)'\ln x dx=e-\left[2x\ln x\right]_1^e+\int_1^e 2dx=e-2e+2e-2=e-2$

6.161. Είναι $I=\int_1^2 \frac{x^3}{x^{\nu-2}}dx=\int_1^2 x^{3-\nu+2}dx=\int_1^2 x^{5-\nu}dx$

- Αν $\nu=6 \quad I=\int_1^2 x^{-1}dx=\int_1^2 \frac{1}{x}dx=\left[\ln|x|\right]_1^2=\ln 2$
- Αν $\nu\neq 6 \quad I=\int_1^2 x^{5-\nu}dx=\left[\frac{x^{6-\nu}}{6-\nu}\right]_1^2=\frac{2^{6-\nu}-1}{6-\nu}$

6.162. $\int_0^1 \frac{2}{2-e^{-x}}dx=\int_0^1 \frac{2}{2-\frac{1}{e^x}}dx=\int_0^1 \frac{2e^x}{2e^x-1}dx=\left[\ln|2e^x-1|\right]_0^1=\ln(2e-1)$

6.163. Είναι $f(x)=\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$, $x>1$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}}\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right)'=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}}\cdot\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)'$$

$$=\frac{1}{2\frac{x^2+1}{x^2-1}}\cdot\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x}{2x(x^2+1)(x^2-1)}=\frac{-2x}{x^4-1}$$

οπότε $\quad I=\int_2^3 \frac{-2x}{x^4-1}dx=\int_2^3\left(\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right)'dx=\left[\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right]_2^3=\ln\sqrt{\frac{5}{4}}-\ln\sqrt{\frac{5}{3}}=\ln\sqrt{\frac{3}{4}}$

6.164. α) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Είναι $x+\sqrt{x^2+1}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε $D_f=\mathbb{R}$

$f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=$

$$=\ln\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-f(x)$$

β) $f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

γ) $I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'dx=\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

6.165. Είναι $I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$ Θέτω $x=\varepsilon\varphi u$ οπότε $dx=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 u}du$ και

x	-1	1
u	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$

Οπότε $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 u}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 u}du=$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 u}\cdot\left(1+\varepsilon\varphi^2 u\right)du=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}du=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

6.166. Είναι $\int_\alpha^\beta xf''(x)dx=\left[xf'(x)\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f'(x)dx=\beta f'(\beta)-\alpha f'(\alpha)-\left[f(x)\right]_\alpha^\beta=$

$$=\beta\alpha-\alpha\beta-\left[f(\beta)-f(\alpha)\right]=0$$

6.167. Είναι $\int_\alpha^\beta\frac{4f(x)f'(x)}{f(\beta)-f(\alpha)}dx=\frac{2}{f(\beta)-f(\alpha)}\int_\alpha^\beta 2f(x)f'(x)dx=\frac{2}{f(\beta)-f(\alpha)}\left[f^2(x)\right]_\alpha^\beta=$

$$=\frac{2\left(f^2(\beta)-f^2(\alpha)\right)}{f(\beta)-f(\alpha)}=2\left(f(\beta)+f(\alpha)\right)$$

6.168. Είναι $\int_{-\alpha}^{\alpha}f'(x)f^{2\kappa}(x)dx=0\Leftrightarrow\left[\frac{f^{2\kappa+1}(x)}{2\kappa+1}\right]_{-\alpha}^{\alpha}=0$

$$\frac{f^{2\kappa+1}(\alpha)-f^{2\kappa+1}(-\alpha)}{2\kappa+1}=0\Leftrightarrow f^{2\kappa+1}(\alpha)=f^{2\kappa+1}(-\alpha)\Leftrightarrow f(\alpha)=f(-\alpha)$$

Επειδή η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[-\alpha,\alpha]$ τότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(-\alpha,\alpha)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$

6.169. **α)** Εχουμε $e^x-e^{f(x)}=e^{x+f(x)}\Leftrightarrow\frac{e^x-e^{f(x)}}{e^{x+f(x)}}=1\Leftrightarrow e^{-f(x)}-e^{-x}=1\Leftrightarrow e^{-f(x)}=1+e^{-x}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)\Leftrightarrow f(x)=-\ln\left(1+e^{-x}\right)=$$

$$=-\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=-\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)=\ln\frac{e^x}{1+e^x}\Leftrightarrow f(x)=\ln\frac{e^x}{1+e^x}$$

β) $I=\int_0^1 e^{f(x)-x}dx=\int_0^1\frac{e^{f(x)}}{e^x}dx=\int_0^1\frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{e^x}dx=\int_0^1\frac{e^x}{e^x\left(1+e^x\right)}dx$

Θέτουμε $e^x=u$ οπότε $e^x dx=du$ και

x	0	1
u	1	e

Άρα $I=\int_1^e\frac{du}{u(1+u)}=\int_1^e\frac{1}{u}du-\int_1^e\frac{1}{1+u}du=\left[\ln|u|\right]_1^e-\left[\ln|1+u|\right]_1^e=$

$$=1-\ln(e+1)+\ln 2=\ln 2+\ln\frac{e}{e+1}$$

6.170. Αν $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε αφού η f είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$.

Αν $f(x)>0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx>0$ άτοπο

Αν $f(x)<0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx<0$ άτοπο

οπότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

6.171.α) Εχουμε $f'(x)f(-x)=f(x)f'(-x)\Leftrightarrow f'(x)\cdot f(-x)-f(x)f'(-x)=0\Leftrightarrow [f(x)f(-x)]'=0$

οπότε $f(x)\cdot f(-x)=c$ και για $x=0$ είναι $f(0)\cdot f(0)=c\Leftrightarrow c=1$ άρα $f(x)\cdot f(-x)=1$

β) Επειδή $f(x)\cdot f(-x)=1\neq 0$ είναι $f(x)\neq 0$ και αφού η f είναι συνεχής, θα διατηρεί πρόσημο. Είναι $f(0)=1>0$ άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in[-2,2]$.

γ) Εστω $I=\int_{-2}^{2}\frac{1}{1+f(x)}dx=\int_{-2}^{2}\frac{1}{1+\frac{1}{f(-x)}}dx=\int_{-2}^{2}\frac{f(-x)}{1+f(-x)}dx$

Θέτω $-x=u$ οπότε $dx=-du$ και

x	−2	2
u	2	−2

οπότε $I=\int_{-2}^{2}\frac{f(u)}{1+f(u)}(-du)=\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{1+f(x)}dx=J$

οπότε $I+J=\int_{-2}^{2}\frac{1}{1+f(x)}dx+\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{1+f(x)}dx=\int_{-2}^{2}\frac{1+f(x)}{1+f(x)}dx=\int_{-2}^{2}dx=4$

αφού $I=J$ τότε $2I=4\Leftrightarrow I=2$

6.172. Εστω F αρχική της συνεχούς συνάρτησης f στο $[1,7]$ τότε

$$3\int_{\xi}^{4}f(x)dx+4\int_{\xi}^{4}f(x)dx=0\Leftrightarrow 3[F(x)]_{\xi}^{4}+4[F(x)]_{\xi}^{5}=0\Leftrightarrow 3F(4)+4F(5)=7F(\xi)\Leftrightarrow$$

$$F(\xi)=\frac{3F(4)+4F(5)}{7}\quad(1)$$

Επομένως αρκεί να υπάρχει $\xi\in(1,7)$ που να ικανοποιεί τη σχέση (1).

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $[1,7]$ με $F'(x)=f(x)>0$ οπότε η F είναι γνησίως αύξουσα

Είναι $1<4<7$ άρα $F(1)<F(4)<F(7)\Leftrightarrow 3F(1)<3F(4)<3F(7)$ (2)

Επίσης $1<5<7$ οπότε $F(1)<F(5)<F(7)\Leftrightarrow 4F(1)<4F(5)<4F(7)$ (3)

Από $(2)+(3)$ προκύπτει $F(1)<\frac{3F(4)+4F(5)}{7}<F(7)$ οπότε από Θ.Ε.Τ. υπάρχει $\xi\in(1,7)$ τέτοιο ώστε $F(\xi)=\frac{3F(4)+4F(5)}{7}$.

6.173. α) $0\le x\le 1\Leftrightarrow 1\le x+1\le 2\Leftrightarrow \frac{1}{2}\le\frac{1}{x+1}\le 1\Leftrightarrow \frac{x^{\nu}}{2}\le\frac{x^{\nu}}{x+1}\le x^{\nu}\Rightarrow$

$$\int_0^1\frac{x^{\nu}}{2}dx\le\int_0^1\frac{x^{\nu}}{x+1}dx\le\int_0^1 x^{\nu}dx\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_0^1\le\int_0^1\frac{x^{\nu}}{x+1}dx\le\left[\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_0^1\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\nu+1}\le\int_0^1\frac{x^\nu}{x+1}dx\le\frac{1}{\nu+1}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le(\nu+1)I_\nu\le 1$$

β) $I_{\nu+1}+I_\nu=\int_0^1\frac{x^{\nu+1}}{x+1}dx+\int_0^1\frac{x^\nu}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x^{\nu+1}+x^\nu}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x^\nu\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}dx=\left[\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_0^1=\frac{1}{\nu+1}$

γ) $\frac{1}{2}\le(\nu+1)I_\nu\le1\Leftrightarrow\frac{1}{2(\nu+1)}\le I_\nu\le\frac{1}{\nu+1}$

Είναι $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\frac{1}{\nu+1}=0$ και $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\frac{1}{2(\nu+1)}=0$, άρα και $\lim\limits_{\nu\to+\infty}I_\nu=0$.

δ) Είναι $I_{\nu+1}+I_\nu=\frac{1}{\nu+1}$, οπότε

για $\nu=3$: $I_4+I_3=\frac{1}{4}\Leftrightarrow I_4=\frac{1}{4}-I_3$,

για $\nu=2$: $I_3+I_2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow I_3=\frac{1}{3}-I_2$,

για $\nu=1$: $I_2+I_1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow I_2=\frac{1}{2}-\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\frac{1}{2}-\int_0^1\frac{x+1-1}{x+1}dx=\frac{1}{2}-\int_0^1dx+\int_0^1\frac{1}{x+1}dx\Leftrightarrow$

$I_2=\frac{1}{2}-1+\left[\ln(x+1)\right]_0^1=-\frac{1}{2}+\ln2$.

Άρα $I_3=\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{2}+\ln2\right)=\frac{5}{6}-\ln2$ και $I_4=\frac{1}{4}-\left(\frac{5}{6}-\ln2\right)=\ln2-\frac{7}{12}$.

6.174. Είναι $|f'(x)|<1\Leftrightarrow-1<f'(x)<1$.

Θεωρώ $g(x)=f(x)-x$, $x\in[0,2]$ και $g'(x)=f'(x)-1<0$ οπότε $g\downarrow$

Αν $0<x<1\Rightarrow g(x)>g(1)\Leftrightarrow f(x)-x>0$

Αν $1<x<2\Rightarrow g(x)<g(1)\Leftrightarrow f(x)-x<0$

οπότε $I_1=\int_0^2|f(x)-x|dx=\int_0^1(f(x)-x)-\int_1^2(f(x)-x)dx=$

$$=\int_0^1f(x)dx-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\int_1^2f(x)dx+\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2=$$

$$=\int_0^1f(x)dx-\frac{1}{2}-\int_1^2f(x)dx+\frac{3}{2}=\int_0^1f(x)dx-\int_1^2f(x)dx+1$$

Εστω $h(x)=2-x-f(x)$, $x\in[0,2]$ και $h'(x)=-1-f'(x)<0$ οπότε $h\downarrow$

Αν $0<x<1\Rightarrow h(x)>h(1)\Rightarrow h(x)>0$

Αν $1<x<2\Rightarrow h(x)<h(1)\Rightarrow h(x)<0$

οπότε $I_2=\int_0^2|2-x-f(x)|dx=\int_0^1(2-x-f(x))dx-\int_1^2(2-x-f(x))dx=$

$$=2-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\int_0^1f(x)dx-2+\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2+\int_1^2f(x)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}-\int_0^1f(x)dx+\frac{3}{2}+\int_1^2f(x)dx=1-\int_0^1f(x)dx+\int_1^2f(x)dx$$, οπότε $I_1+I_2=2$

6.175. α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1-x^2}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}\right] = 0$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}{x} = -2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+2x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}\right] = 0$

Οπότε η $y=-2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$

γ) $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$ οπότε

$f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}+f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}-x = x-\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}-x=0$

δ) $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx \overset{(\gamma)}{=} \int_0^1 -\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = -\left[\ln|f(x)|\right]_0^1 = -\ln f(1) = -\ln\left(\sqrt{2}-1\right) =$

$= \ln\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \ln\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)}{1} = \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

6.176. Εστω F αρχική της f τότε $\left|\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right| \le (x-x_0)^2 \Leftrightarrow \left|\left[F(t)\right]_{x_0}^{x}\right| \le |x-x_0|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\right| \le |x-x_0| \Leftrightarrow -|x-x_0| \le \dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \le |x-x_0|$

και από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=0$ άρα $F'(x_0)=0$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$

οπότε και $f(x_0)=0$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι η μηδενική συνάρτηση.

6.177. $\int_1^2 g(x)g''(x)dx = g'(2)-g'(1) \Leftrightarrow \left[g(x)g'(x)\right]_1^2 - \int_1^2\left(g'(x)\right)^2 dx = g'(2)-g'(1)$

$g(2)g'(2)-g(1)g'(1)-\int_1^2\left(g'(x)\right)^2 dx = g'(2)-g'(1)$

$g'(2)-g'(1)-\int_1^2\left(g'(x)\right)^2 dx = g'(2)-g'(1) \Leftrightarrow \int_1^2\left(g'(x)\right)^2 dx = 0$

Αν υπάρχει $x_0\in[1,2]$ τέτοιο ώστε $g'(x_0)\neq 0$ τότε $\int_1^2\left(g'(x)\right)^2 dx>0$ άτοπο.

Άρα $g'(x)=0$ για κάθε $x\in[1,2]$ επομένως $g(x)=c$ και $g(1)=1\Leftrightarrow c=1$, άρα $g(x)=1$ για κάθε $x\in[1,2]$.

6.178. **α)** Εφαρμόζουμε Θ. Rolle για την $g(x)=f(x)-x$ στο $[1,2]$ είναι $\begin{cases} g(1)=f(1)-1=0 \\ g(2)=f(2)-2=0 \end{cases}$

και $g'(x)=f'(x)-1$ οπότε υπάρχει $\xi\in(1,2): g'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=1$

β) Θεωρούμε $h(x)=f(x)-3+x$, συνεχής στο $[1,2]$

$h(1)=f(1)-2=-1<0$ και $h(2)=f(2)-1=1>0$

οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(1,2)$: $h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=3-x_0$

γ) ΘΜΤ στο $[1,x_0],[x_0,2]$ υπάρχουν $\xi_1\in(1,x_0)$ και $\xi_2\in(x_0,2)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}=\frac{3-x_0-1}{x_0-1}=\frac{2-x_0}{x_0-1} \quad \text{και}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(2)-f(x_0)}{2-x_0}=\frac{2-3+x_0}{2-x_0}=\frac{x_0-1}{2-x_0} \quad \text{οπότε} \quad f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=2$$

δ) Είναι $\int_1^2 xf''(x)dx=0 \Leftrightarrow [xf'(x)]_1^2-\int f'(x)dx=0$

$2f'(2)-f'(1)-[f(x)]_1^2=0 \Leftrightarrow 2f'(2)-f'(1)-f(2)+f(1)=0 \Leftrightarrow f'(1)=2f'(2)-1$

Θεωρούμε την $\varphi(x)=xf'(x)-x$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(1)=f'(1)-1=2f'(2)-2 \\ \varphi(2)=2f'(2)-2\end{array}\right\}\varphi(1)=\varphi(2)$$

άρα από Θ. Rolle υπάρχει $\rho\in(1,2)$:

$\varphi'(p)=0 \Leftrightarrow f'(p)+pf''(p)-1=0 \Leftrightarrow f'(p)+pf''(p)=1$

6.179. α) Είναι $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}=\lambda\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}+\kappa \Leftrightarrow$

$\eta\mu x=\lambda(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)+\kappa(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)\Leftrightarrow$

$\eta\mu x=(\kappa-\lambda)\eta\mu x+(\kappa+\lambda)\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\kappa-\lambda=1\\ \kappa+\lambda=0\end{matrix}\right\} \left|\begin{matrix}\kappa=\dfrac{1}{2}\\ \lambda=-\dfrac{1}{2}\end{matrix}\right.$

Οπότε $f(x)=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}+\dfrac{1}{2}$

β) i. $I(\alpha)=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha}\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}+\dfrac{1}{2}\right)dx=-\dfrac{1}{2}\Big[\ln(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha\right)=$

$=-\dfrac{1}{2}\left[\ln\left(\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)-\ln(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha)\right]+\dfrac{\pi}{4}-\alpha=$

$=-\dfrac{1}{2}\Big[\ln(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)-\ln(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha)\Big]+\dfrac{\pi}{4}-\alpha=\dfrac{\pi}{4}-\alpha$

ii. Η συνάρτηση $I(\alpha)=\dfrac{\pi}{4}-\alpha$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ με $I'(\alpha)=-1<0$

άρα $I(\alpha)\downarrow$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι $\left[I\left(\dfrac{\pi}{4}\right),I(0)\right]=\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$

6.180. α) Για $x\neq 0$ $f(x)=\int_0^1 e^{tx^2}dt=\dfrac{1}{x^2}\int_0^1 e^{tx^2}\cdot x^2dt=$

$=\dfrac{1}{x^2}\int_0^1\left[e^{tx^2}\right]'dt=\dfrac{1}{x^2}\left[e^{tx^2}\right]_0^1=\dfrac{1}{x^2}\left(e^{x^2}-1\right)=\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}$

Για $x=0$ $f(0)=\int_0^1 e^0dt=[t]_0^1=1$. Άρα $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} & ,x\neq 0\\ 1 & ,x=0\end{cases}$

β) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\overset{\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega}{\underset{x^2=y\to 0}{=}}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^y-1}{y}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\dfrac{e^y}{1}=1=f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0=0$

και αφού η f είναι συνεχής και για $x\neq 0$ ως πηλίκο συνεχών τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^{x^2}-2x}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2x}{3}\cdot\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\right]=0\cdot 1=0$, οπότε $f'(0)=0$

δ) Είναι $f'(x)=\dfrac{2xe^{x^2}\cdot x^2-2x\left(e^{x^2}-1\right)}{x^4}=\dfrac{2x\left(e^{x^2}x^2-e^{x^2}+1\right)}{x^4}=\dfrac{2\left(e^{x^2}x^2-e^{x^2}+1\right)}{x^3}$

Εστω $g(x)=e^{x^2}\cdot x^2-e^{x^2}+1$, $g'(x)=2x\cdot e^{x^2}\cdot x^2+2xe^{x^2}-2xe^{x^2}=2x^3e^{x^2}$

Αν $x>0$, $g'(x)>0$ οπότε $g\uparrow[0,+\infty)$, $x>0\Leftrightarrow g(x)>g(0)=0$, οπότε $f'(x)>0$, άρα $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$

Αν $x<0$, $g'(x)<0$ οπότε $g\downarrow$, $x<0 \Leftrightarrow g(x)<g(0)=0$, όμως $x^3<0$ άρα $f'(x)>0$, άρα $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$

ε) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}-1}{x^3}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2xe^{x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}}{3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\cdot x\cdot e^{x^2}}{3}=+\infty$$

οπότε δεν έχει πλάγια ή οριζόντια στο $(+\infty)$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ οπότε δεν έχει ασύμπτωτες η γραφική παράσταση της f.

6.181. **α)** Είναι $f^3(x)-f^2(x)+f(x)=1-\eta\mu x \quad (1)$

και παραγωγίζοντας έχουμε

$3f^2(x)f'(x)-2f(x)f'(x)+f'(x)=-\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f'(x)\left(3f^2(x)-2f(x)+1\right)=-\sigma\upsilon\nu x \quad (2)$

Είναι $3f^2(x)-2f(x)+1>0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$

και $\sigma\upsilon\nu x>0$ αν $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

$\sigma\upsilon\nu x<0$ αν $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f'		$-$		$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Στην (1) για $x=0$ προκύπτει

$f^3(0)-f^2(0)+f(0)-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(f(0)-1\right)\left(f^2(0)+1\right)=0 \Leftrightarrow f(0)=1$. Όμοια και $f(\pi)=1$.

Επίσης στην (1) για $x=\frac{\pi}{2}$ έχουμε $f^3\left(\frac{\pi}{2}\right)-f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)\left[f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)+1\right]=0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

Άρα η f έχει μέγιστο το 1 για $x=0$ ή $x=\pi$ και ελάχιστο το 0 για $x=\frac{\pi}{2}$

β) $f\left([0,\pi]\right)=[0,1]$

γ) Rolle για την $g(x)=\pi f(x)+2x$ στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

δ) Είναι $f(0)=f(\pi)=1$ οπότε εφαρμόζουμε Rolle για την f στο $[0,\pi]$ υπάρχει $x_0\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$. Οπότε η εφαπτομένη της C_f στο $\left(x_0,f(x_0)\right)$ είναι παράλληλη με τον $x'x$ όπως η $y=1$.

ε) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf''(x)dx=\left[xf'(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)dx=$

$=\frac{\pi}{2}f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left[f(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}f'\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f(0)=\frac{\pi}{2}\cdot 0-0+1=1$

γιατί από τη σχέση (2) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

6.182. $f(x)=\ln(\ln x-1)$

α) $x>0$, $\ln x-1>0 \Leftrightarrow x>e$ άρα $D_f=(e,+\infty)$

$f'(x)=\frac{1}{\ln x-1}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln x-x}$

$f''(x)=-\frac{(x\ln x-x)'}{(x\ln x-x)^2}=-\frac{\ln x+1-1}{(x\ln x-x)^2}=-\frac{\ln x}{(x\ln x-x)^2}<0$, όταν $x\in(e,+\infty)$

β) ΘΜΤ για την f στα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right],\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ υπάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$

τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$, $f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$ επειδή $\xi_1<\xi_2$ και $f'\downarrow$,

τότε $f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Leftrightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>f(\alpha)+f(\beta)\Leftrightarrow$

$2\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}-1\right)>\ln(\ln\alpha-1)+\ln(\ln\beta-1)\Leftrightarrow \ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}-1\right)^2>\ln\left[(\ln\alpha-1)(\ln\beta-1)\right]\Leftrightarrow$

$\ln\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-1\right)^2>(\ln\alpha-1)(\ln\beta-1)$, οπότε $\ln\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-1\right)>\sqrt{(\ln\alpha-1)(\ln\beta-1)}$

γ) $I=\int_{e^2}^{e^3}\frac{f(x)}{x}=\int_{e^2}^{e^3}\frac{\ln(\ln x-1)}{x}dx$. Θέτουμε $u=\ln x-1$ οπότε $du=\frac{1}{x}dx$ και

x	e^2	e^3
u	1	2

άρα $I=\int_1^2 \ln u du=\int_1^2 (u)'\ln u du=\left[u\ln u\right]_1^2-\int_1^2 u\frac{1}{u}du=2\ln 2-1.$

6.183. **α)** $f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}>0$ οπότε η $f\uparrow$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}=-1$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$, οπότε $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-1,1)$

β) Επειδή $\frac{2014}{2015}\in(-1,1)$ και η $f\uparrow$ τότε από ΘΕΤ υπάρχει μοναδικό $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε

$f(x_0)=\frac{2014}{2015}\Leftrightarrow\frac{e^{x_0}-1}{e^{x_0}+1}=\frac{2014}{2015}\Leftrightarrow 2015\left(e^{x_0}-1\right)=2014\left(e^{x_0}+1\right)$

γ) $1-f^2(x)=1-\dfrac{\left(e^x-1\right)^2}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{4e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=2f'(x)\Leftrightarrow f^2(x)+2f'(x)-1=0$

δ) Επειδή $f^2(x)=1-2f'(x)$ τότε $I=\int_0^1 f^2(x)dx=\int_0^1\left[1-2f'(x)\right]dx=1-2\left[f(1)-f(0)\right]=$

$$=1-2\frac{e-1}{e+1}=\frac{3-e}{e+1}$$

Επίσης $1-f^2(x)=2f'(x)$ οπότε $J=\int_0^1 x\left[1-f^2(x)\right]dx=\int_0^1 x2f'(x)dx=$

$$=\left[2xf(x)\right]_0^1-2\int_0^1 f(x)dx=2f(1)-2\int_0^1 f(x)dx$$

Όμως $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\dfrac{e^x-1}{e^x+1}dx=\int_0^1\dfrac{e^x}{e^x+1}dx-\int_0^1\dfrac{1}{e^x+1}dx=$

$$=\left[\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1-\int_0^1\frac{e^x}{e^x\left(e^x+1\right)}dx=\ln(e+1)-\ln 2-\int_1^e\frac{du}{u(u+1)}du=$$

$$=\ln(e+1)-\ln 2-\int_1^e\frac{1}{u}du+\int_1^e\frac{1}{u+1}du=$$

$$=\ln(e+1)-\ln 2-\left[\ln|u|\right]_1^e+\left[\ln|u+1|\right]_1^e=\ln\frac{(e+1)^2}{4e}$$

Άρα $J=2\dfrac{e-1}{e+1}-\ln\dfrac{(e+1)^2}{4e}$.

ε) Αφού $f\uparrow$ θα είναι και 1–1, οπότε αντιστρέφεται και έχουμε $f(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=y\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x y+y=e^x-1\Leftrightarrow e^x=\dfrac{1+y}{1-y}$, οπότε $\dfrac{1+y}{1-y}>0\Leftrightarrow y\in(-1,1)$ και $f^{-1}(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

στ) Είναι $f^{-1}(x)=0\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right)=f(0)\Leftrightarrow x=0$

ζ) $\int_{-\frac12}^{\frac12}f^{-1}(x)dx=\int_{-\frac12}^{\frac12}\ln\dfrac{1+x}{1-x}dx=\int_{-\frac12}^{\frac12}(x)'\ln\dfrac{1+x}{1-x}dx=\left[x\ln\dfrac{1+x}{1-x}\right]_{-\frac12}^{\frac12}-\int_{-\frac12}^{\frac12}\dfrac{2x}{1-x^2}dx=$

$$=\left(\frac12\ln 3+\frac12\ln\frac13\right)+\left[\ln\left|x^2-1\right|\right]_{-\frac12}^{\frac12}=0$$

6.184. Είναι $\int_0^2\left(1+\eta\mu^{10}x\right)\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)dx-\int_0^1\left(1+\eta\mu^{10}x\right)\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)dx=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\int_1^2\left(1+\eta\mu^{10}x\right)\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)dx=0\quad(1)$

Εστω $f'(x)=\left(1+\eta\mu^{10}x\right)\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)$ τότε η (1) γίνεται $\int_1^2 f'(x)dx=0\Leftrightarrow\left[f(x)\right]_1^2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(2)-f(1)=0\Leftrightarrow f(2)=f(1)$

Εφαρμόζοντας Θ. Rolle για την f (αφού f αρχική της f') υπάρχει $\xi\in(1,2)$ ώστε

$f'(\xi)=0\Leftrightarrow\left(1+\eta\mu^{10}\xi\right)\left(\alpha\xi^2+\beta\xi+\gamma\right)=0$ και αφού $1+\eta\mu^{10}\xi\neq 0$ τότε $\alpha\xi^2+\beta\xi+\gamma=0$.

6.203. $f(x)=e^{x}-e^{-2x}+3x-2$

α) Είναι $f'(x)=e^{x}+2e^{-2x}+3>0$ οπότε η $f\uparrow$ άρα και 1–1, οπότε αντιστρέφεται.

β) $I=\int_{-2}^{\frac{e^3+e^2-1}{e^2}} f^{-1}(x)dx$.

Θέτω $f^{-1}(x)=u \Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$

Για $x=-2$: $f(u)=-2=f(0)$ άρα $u=0$

Για $x=\dfrac{e^3+e^2-1}{e^2}$ $f(u)=\dfrac{e^3+e^2-1}{e^2}=f(1)$ άρα $u=1$

Οπότε $I=\int_0^1 uf'(u)du=\left[uf(u)\right]_0^1-\int_0^1 f(u)du=f(1)-\int_0^1\left(e^{u}-e^{-2u}+3u-2\right)du=$

$$=\frac{e^3+e^2-1}{e^2}-(e-1)-\frac{1}{2}\left[e^{-2u}\right]_0^1+3\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1+2=$$

$$=\frac{e^3+e^2-1}{e^2}-e+1-\frac{1}{2e^2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+2=3-\frac{3}{2e^2}$$

6.204. **α)** Παραγωγίζουμε στη σχέση (1) $\ln f(x)+e^{f(x)}=x$ οπότε $\dfrac{f'(x)}{f(x)}+e^{f(x)}f'(x)=1\Leftrightarrow$

$f'(x)\left(\dfrac{1}{f(x)}+e^{f(x)}\right)=1$, οπότε $f'(x)>0$ αφού $\dfrac{1}{f(x)}+e^{f(x)}>0$, άρα η $f\uparrow$ οπότε και 1–1,

συνεπώς αντιστρέφεται και $f^{-1}(x)=\ln x+e^{x}$

β) Είναι $I=\int_1^e f^{-1}(x)dx+\int_e^{e^e+1} f(x)dx$. Θέτουμε $f(x)=u$ οπότε $x=f^{-1}(u)$ και

$dx=\left(f^{-1}(u)\right)'du$

Για $x=e$: $f^{-1}(u)=e=f^{-1}(1)$ άρα $u=1$

ενώ για $x=e^e+1$ $f^{-1}(u)=e^e+1=f^{-1}(e)$ άρα $u=e$,

συνεπώς $I=\int_1^e f^{-1}(x)dx+\int_1^e u\left(f^{-1}(u)\right)'du=\int_1^e f^{-1}(x)dx+\left[uf^{-1}(u)\right]_1^e-\int_1^e f^{-1}(u)du=$

$$=ef^{-1}(e)-1f^{-1}(1)=e\left(e^e+1\right)-e=e^{e+1}$$

6.205. **α)** Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$, οπότε είναι και 1–1 και αντιστρέφεται.

β) $I=\int_0^2 \ln(x+1)dx=\int_0^2 \ln(x+1)(x+1)'dx=$

$$=\left[(x+1)\ln(x+1)\right]_0^2-\int_0^2\frac{1}{x+1}(x+1)dx=3\ln3-\int_0^2 dx=3\ln3-2$$

Θέτουμε $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$.

Για $x=0$ είναι $f(u)=0\Leftrightarrow \ln(u+1)=0\Leftrightarrow u=0$ και για $x=f(2)$ είναι $f(u)=f(2)\Leftrightarrow u=2$

Είναι $J=\int_0^{f(2)} f^{-1}(x)dx=\int_0^2 uf'(u)du=\left[uf(u)\right]_0^2-\int_0^2 f(u)du=$

$$=2f(2)-I=2\ln3-(3\ln3-2)=2-\ln3.$$

Άρα $I+J=3\ln3-2+2-\ln3=2\ln3$

6.206. **α)** $f(x)=x^5+2x^3-3$, $x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=5x^4+6x^2>0$ για κάθε $x\neq0$ οπότε $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

β) $I=\int_{-3}^{0}f^{-1}(x)dx$. Θέτουμε $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$

για $x=-3$ $f(u)=-3=f(0)$ άρα $u=0$

για $x=0$ $f(u)=0=f(1)$ άρα $u=1$

οπότε $I=\int_0^1 uf'(u)du=\int_0^1 u\left(5u^4+6u^2\right)du=\left[5\frac{u^6}{6}+6\frac{u^4}{4}\right]_0^1=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$.

6.207. Είναι $8f^3(x)+4f(x)-x+10=0$ (1)

α) Εστω $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $8f^3(x_1)=8f^3(x_2)$ και $4f(x_1)=4f(x_2)$, οπότε

$8f^3(x_1)+4f(x_1)=8f^3(x_2)+4f(x_2)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}x_1-10=x_2-10\Leftrightarrow x_1=x_2$,

οπότε η f είναι 1–1 και αντιστρέφεται. Στην (1) θέτω $f(x)=y$ και $x=f^{-1}(y)$ οπότε

$8y^3+4y-f^{-1}(y)+10\Leftrightarrow f^{-1}(y)=8y^3+4y+10$

β) $I=\int_{-2}^{10}f(x)dx$.

Θέτω $f(x)=u$ οπότε $x=f^{-1}(u)$ και $dx=\left(f^{-1}(u)\right)'du$

για $x=-2$ $f^{-1}(u)=-2=f^{-1}(-1)$ άρα $u=-1$ ενώ

για $x=10$ $f^{-1}(u)=10=f^{-1}(0)$ άρα $u=0$

οπότε $I=\int_{-1}^{0}u\left(f^{-1}(u)\right)'du=\left[uf^{-1}(u)\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}f^{-1}(u)du=f^{-1}(-1)-\int_{-1}^{0}\left(8u^3+4u+10\right)du=$

$=-2-2\left[u^4\right]_{-1}^{0}-2\left[u^2\right]_{-1}^{0}-10\left[u\right]_{-1}^{0}=-2+2+2-10=-8$

γ) Είναι $I_1=\int_{-2}^{10}xf'(x)dx=\left[xf(x)\right]_{-2}^{10}-\int_{-2}^{10}f(x)dx=10f(10)+2f(-2)-(-8)$

Όμως $f^{-1}(0)=10\Leftrightarrow f(10)=0$ και $f^{-1}(-1)=-2\Leftrightarrow f(-2)=-1$ άρα $I_1=0-2+8=6$

6.208. **α)** $I=\int_4^6\frac{x}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}dx$. Θέτω $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$

για $x=4$ $f(u)=4=f(2)$ άρα $u=2$ ενώ για $x=6$ $f(u)=6=f(3)$ άρα $u=3$.

$I=\int_2^3\frac{f(u)\cdot f'(u)du}{f'(u)}=\int_2^3 f(u)du=\int_2^3 f(x)dx$

β) Επειδή η f είναι 1–1 και συνεχής τότε είναι και γνησίως μονότονη (απόδειξη στο 1ο τεύχος).

γ) $I_1=\int_4^6 f^{-1}(x)dx$. Με βάση το (α) ερώτημα και κάνοντας τις ίδιες αντικαταστάσεις έχουμε:

$I_1=\int_2^3 uf'(u)du=\left[uf(u)\right]_2^3-\int_2^3 f(u)du=3f(3)-2f(2)-1=3\cdot6-2\cdot4=9$

6.209. $f^5(x)+4f(x)=5x \quad (1)$

α) Εστω $f(x_1)=f(x_2)$ οπότε $f^5(x_1)=f^5(x_2)$ και $4f(x_1)=4f(x_2)$ άρα $f^5(x_1)+4f(x_1)=f^5(x_2)+4f(x_2)$.

Όποτε από την $(1)\Rightarrow\ 5x_1=5x_2$, άρα $x_1=x_2$ οπότε η f αντιστρέφεται.

Αν $f(x)=y$ τότε $x=f^{-1}(y)$ άρα από την (1) $y^5+4y=5f^{-1}(y)$ άρα $f^{-1}(x)=\dfrac{x^5+4x}{5}$

β) Στην (1) για $x=0$: $f^5(0)+4f(0)=0\Leftrightarrow f(0)\left[f^4(0)+4\right]=0\Leftrightarrow f(0)=0$ και στην (1) για $x=1$: $f^5(1)+4f(1)-5=0$. Θεωρούμε την $g(x)=x^5+4x-5$ η οποία είναι $\uparrow$ και έχει μοναδική ρίζα $x=1$ άρα $f(1)=1$.

γ) $I=\int_0^1\left(f(x)+f^{-1}(x)\right)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f^{-1}(x)dx$. Αφού $f(0)=0\Leftrightarrow f^{-1}(0)=0$ όπως $f(1)=1\Leftrightarrow f^{-1}(1)=1$. Θέτω $u=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$, οπότε

$$I=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 uf'(u)du=\int_0^1 f(x)dx+\left[uf(u)\right]_0^1-\int_0^1 f(u)du=f(1)=1$$

δ) Εστω $f(x)\le x$ τότε $f^5(x)\le x^5$ και $4f(x)\le 4x$, οπότε $f^5(x)+4f(x)\le x^5+4x\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$ $5x\le x^5+4x\Leftrightarrow x^5-x\ge 0\quad x\in[-1,0]\cup[1,+\infty)$ άτοπο, αφού $x\in(0,1)$ άρα $f(x)>x$ για κάθε $x\in(0,1)$.

6.210. **α)** Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, οπότε $f^3(x_1)=f^3(x_2)$ και $2f(x_1)=2f(x_2)$ άρα $f^3(x_1)+2f(x_1)=f^3(x_2)+2f(x_2)$ οπότε $x_1+3=x_2+3\Leftrightarrow x_1=x_2$, οπότε η f 1–1 συνεπώς αντιστρέφεται.

Αν $f(x)=y$ τότε $x=f^{-1}(y)$ και η σχέση $f^3(x)+2f(x)=x+3$ γίνεται $y^3+2y=f^{-1}(y)+3$ άρα $f^{-1}(x)=x^3+2x-3$, $x\in\mathbb{R}$

β) Είναι $\left(f^{-1}(x)\right)'=3x^2+2>0$, οπότε η $f^{-1}\uparrow$ άρα $f\uparrow$ οπότε $f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow$ $f^{-1}(x)=x\Leftrightarrow x^3+x-3=0$. Έστω $g(x)=x^3+x-3$, $x\in\mathbb{R}$ $g'(x)=3x^2+1>0$ άρα η $g\uparrow$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ οπότε $g(A)=\mathbb{R}$.

Επειδή $0\in\mathbb{R}$ και $g\uparrow$ η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική λύση.

γ) Είναι $I=\int_{-3}^{0}f(x)dx$. Θέτω $f(x)=u\Leftrightarrow x=f^{-1}(u)$, $x=u^3+2u-3$ άρα $dx=\left(3u^2+2\right)du$.

Για $x=-3$ $f^{-1}(u)=-3=f^{-1}(0)\Leftrightarrow u=0$, για $x=0$ $f^{-1}(u)=0=f^{-1}(1)=u=1$ οπότε

$$I=\int_0^1 u\left(3u^2+2\right)du=\left[\frac{3u^4}{4}\right]_0^1+\left[u^2\right]_0^1=\frac{7}{4}$$

6.211. **α)** $f'(x)=\dfrac{4+\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{4x+\eta\mu x}}>0$ οπότε η $f\uparrow$.

β) $f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x+\eta\mu x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}\cdot\sqrt{4+\dfrac{\eta\mu x}{x}}\right]=+\infty$ γιατί με κριτήριο παρεμβολής αποδεικνύεται $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$ οπότε το σύνολο τιμών $f(A)=[0,+\infty)$.

γ) Αφού η $f\uparrow$ άρα και 1–1, ορίζεται η f^{-1} και έχει πεδίο ορισμού $D_{f^{-1}}=f(A)=[0,+\infty)$

δ) Εστω $f^{-1}(x)=u \Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$.

Για $x=0$ $\;f(u)=0=f(0)$ οπότε $u_1=0$. Για $x=2\sqrt{\pi}$ $\;f(u)=2\sqrt{\pi}=f(\pi)$ οπότε $u_2=\pi$.

$$\text{Άρα } I=\int_0^{\pi} f(u)uf'(u)du=\int_0^{\pi} u\left(\frac{f^2(u)}{2}\right)'du=\left[u\frac{f^2(u)}{2}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{f^2(u)}{2}du=$$

$$=\frac{\pi f^2(\pi)}{2}-\int_0^{\pi}\frac{4u+\eta\mu u}{2}du=\frac{\pi\cdot 4\pi}{2}-\left[u^2\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu u\right]_0^{\pi}=\pi^2-1$$

6.212. Στην σχέση $2f(x)+3f(-x)=30x^2$ ολοκληρώνουμε: $2\int_{-1}^{1} f(x)dx+3\int_{-1}^{1} f(-x)dx=30\int_{-1}^{1} x^2dx$

Θέτω $-x=u$ οπότε $dx=-du$ και $2\int_{-1}^{1} f(x)dx+3\int_{-1}^{1} f(u)(-du)=30\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} \Leftrightarrow$

$2\int_{-1}^{1} f(x)dx+3\int_{-1}^{1} f(u)du=10\cdot 2 \Leftrightarrow 5\int_{-1}^{1} f(x)dx=20 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx=4$.

6.213. **α)** Είναι $f(-x)=-f(x)$ οπότε $I=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=\int_{-\alpha}^{0} f(x)dx+\int_0^{\alpha} f(x)dx$.

Θέτω $x=-u$ οπότε $dx=-du$ και για $x=-\alpha \Rightarrow u=\alpha$ ενώ για $x=0$ θα είναι $u=0$, οπότε

$I=\int_{\alpha}^{0} f(-u)(-du)+\int_0^{\alpha} f(x)dx=\int_0^{\alpha} f(-u)du+\int_0^{\alpha} f(x)dx=-\int_0^{\alpha} f(u)du+\int_0^{\alpha} f(x)dx=0$

β) Η συνάρτηση $f(x)=x^{1821}\sigma\upsilon\nu x$ είναι περιττή γιατί

$f(-x)=(-x)^{1821}\sigma\upsilon\nu(-x)=-x^{1821}\sigma\upsilon\nu x=-f(x)$ οπότε με βάση το ερώτημα (α)

$\int_{-1453}^{1453} x^{1821}\sigma\upsilon\nu x dx=0$.

6.214. **α)** Είναι $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$. $I=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=\int_{-\alpha}^{0} f(x)dx+\int_0^{\alpha} f(x)dx$

Θέτω $x=-u$ και $dx=-du$ άρα $I=\int_{\alpha}^{0} f(-u)(-du)+\int_0^{\alpha} f(x)dx=\int_0^{\alpha} f(-u)du+\int_0^{\alpha} f(x)dx=$

$=\int_0^{\alpha} f(u)du+\int_0^{\alpha} f(x)d=2\int_0^{\alpha} f(x)dx$.

β) Η συνάρτηση $f(x)=x^8\sigma\upsilon\nu x$ είναι άρτια οπότε με βάση το (α) ερώτημα

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^8\sigma\upsilon\nu x dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^8\sigma\upsilon\nu x dx$$

6.215. $I=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)}{e^x+1}dx=\int_{-\alpha}^{0}\frac{f(x)}{e^x+1}dx+\int_{0}^{\alpha}\frac{f(x)}{e^x+1}dx$. Θέτω $x=-u$ και $dx=-du$ και

x	$-\alpha$	0
u	α	0

οπότε $I=\int_{\alpha}^{0}\frac{f(-u)}{e^{-u}+1}(-du)+\int_{0}^{\alpha}\frac{f(x)}{e^x+1}dx=\int_{0}^{\alpha}\frac{f(u)}{\frac{1}{e^u}+1}du+\int_{0}^{\alpha}\frac{f(x)}{e^x+1}=$

$$=\int_{0}^{\alpha}\frac{f(x)\cdot e^x}{e^x+1}dx+\int_{0}^{\alpha}\frac{f(x)}{e^x+1}dx=\int_{0}^{\alpha}\frac{f(x)e^x+f(x)}{e^x+1}dx=\int_{0}^{\alpha}f(x)dx$$

6.216. Ολοκληρώνουμε τη σχέση (1) $f(x)+f(\alpha+\beta-x)=c$ οπότε

$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta}f(\alpha+\beta-x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}cdx$ (2). Θέτω $\alpha+\beta-x=u$ οπότε $dx=-du$ και

x	α	β
u	β	α

οπότε η (2) γίνεται $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx+\int_{\beta}^{\alpha}f(u)(-du)=c(\beta-\alpha)\Leftrightarrow 2\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=c(\beta-\alpha)\Leftrightarrow$

$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\frac{c}{2}(\beta-\alpha)$. Στην (1) για $x=\alpha$: $f(\alpha)+f(\beta)=c$ και στην (1) για $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$

προκύπτει $2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=c\Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{c}{2}$.

Άρα $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot(\beta-\alpha)$

6.217. Εστω $I=\int_{0}^{2}2x^3f(x^2-4)dx$. Θέτουμε $x^2-4=u$ οπότε $x^2=u+4$ και $2xdx=du$

επίσης

x	0	2
u	-4	0

οπότε $I=\int_{0}^{2}x^2f(x^2-4)\cdot 2xdx=\int_{-4}^{0}(u+4)f(u)\cdot du=\int_{-4}^{0}(x+4)f(x)dx$.

6.218. Ολοκληρώνουμε στη σχέση $f(x)+f(2-x)=g(x)+g(2-x)$ οπότε

$\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(2-x)dx=\int_{0}^{2}g(x)dx+\int_{0}^{2}g(2-x)dx$.

Θέτουμε $2-x=u$ οπότε $dx=-du$ και

x	0	2
u	2	0

οπότε $\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{0}f(u)(-du)=\int_{0}^{2}g(x)dx+\int_{2}^{0}g(u)(-du)\Leftrightarrow$

$2\int_{0}^{2}f(x)dx=2\int_{0}^{2}g(x)dx\Leftrightarrow\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{2}g(x)dx$.

6.219. α) $f(1-x)=\ln\frac{e^{1-x}+e}{e^{1-x}+1}=\ln\frac{\frac{e}{e^x}+e}{\frac{e}{e^x}+1}=\ln\frac{e\frac{1+e^x}{e^x}}{\frac{e+e^x}{e^x}}=\ln\left(e\frac{1+e^x}{e+e^x}\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(1-x)=\ln e+\ln\frac{1+e^x}{e+e^x}=1+\ln\left(\frac{e+e^x}{1+e^x}\right)^{-1}=1-\ln\frac{e+e^x}{1+e^x}=1-f(x).$$

β) Από τη σχέση $f(1-x)=1-f(x)$, προκύπτει: $\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1 1dx-\int_0^1 f(x)dx \quad (1)$.

Θέτουμε $1-x=u$, τότε $-dx=du \Leftrightarrow dx=-du$.

Για $x=0$ είναι $u=1$, ενώ για $x=1$ είναι $u=0$.

Η σχέση (1) γίνεται: $-\int_1^0 f(u)du=\int_0^1 1dx-\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx=1-\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\int_0^1 f(x)dx=1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}$.

6.220. **α)** Εστω $I_1=\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx$. Θέτουμε $\alpha+\beta-x=u$ οπότε $dx=-du$ και

x	α	β
u	β	α

οπότε $I_1=\int_\beta^\alpha f(u)(-du)=\int_\alpha^\beta f(u)du=\int_\alpha^\beta f(x)dx$

β) Είναι $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\eta\mu^2x+2\eta\mu x+5\right)dx\overset{(\alpha)}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+5\right)dx=$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\sigma\upsilon\nu^2x+2\sigma\upsilon\nu x+5\right)dx$$

γ) Εστω $I_2=\int_0^\pi xe^{\sigma\upsilon\nu^4x}dx$. Θέτουμε $x=\pi-u \Leftrightarrow dx=-du$ και

x	0	π
u	π	0

οπότε $I_2=\int_\pi^0(\pi-u)e^{\sigma\upsilon\nu^4(\pi-u)}(-du)=\int_\pi^0(\pi-u)e^{\sigma\upsilon\nu^4u}du=$

$$=\pi\int_0^\pi e^{\sigma\upsilon\nu^4x}dx-\int_0^\pi xe^{\sigma\upsilon\nu^4x}dx \Leftrightarrow I_2=\pi\int_0^\pi e^{\sigma\upsilon\nu^4x}dx-I_2 \Leftrightarrow I_2=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi e^{\sigma\upsilon\nu^4x}dx$$

δ) Εχω $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu^\nu x}{\eta\mu^\nu x+\sigma\upsilon\nu^\nu x}dx$.

Θέτουμε $x=\frac{\pi}{2}-u$ οπότε $dx=-du$ και

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	$\frac{\pi}{2}$	0

οπότε $I_3=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\eta\mu^\nu\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\eta\mu^\nu\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+\sigma\upsilon\nu^\nu\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}(-du)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu^\nu u}{\eta\mu^\nu u+\sigma\upsilon\nu^\nu u}du=I_4$.

Είναι $I_3=I_4$ και $I_3+I_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu^\nu x+\sigma\upsilon\nu^\nu x}{\eta\mu^\nu x+\sigma\upsilon\nu^\nu x}dx=\frac{\pi}{2}$ άρα $I_3=I_4=\frac{\pi}{4}$

ε) $I_5=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x f(\eta\mu x)dx$.

Θέτουμε $x=\frac{\pi}{2}-u$ οπότε $dx=-du$ και

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	$\frac{\pi}{2}$	0

οπότε $I_5=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-u\right)f\left(\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right)(-du)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu u f(\sigma\upsilon\nu u)du$

6.221. Είναι $f(x)=f(\alpha+\beta-x) \quad (1)$

α) Εστω $I_1=\int_\alpha^\beta xf(x)dx$. Θέτουμε $x=\alpha+\beta-u$ οπότε $dx=-du$ και

x	α	β
u	β	α

οπότε $I_1=\int_\beta^\alpha(\alpha+\beta-u)f(\alpha+\beta-u)(-du)\overset{(1)}{=}\int_\alpha^\beta(\alpha+\beta-u)f(u)du=$

$=(\alpha+\beta)\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta xf(x)dx\Leftrightarrow I_1=(\alpha+\beta)\int_\alpha^\beta f(x)dx-I_1\Leftrightarrow I_1=\frac{\alpha+\beta}{2}\int_\alpha^\beta f(x)dx$

β) Εστω $I_2=\int_0^\pi xf(\eta\mu x)dx$. Θέτουμε $x=\pi-u$ άρα $dx=-du$ και

x	0	π
u	π	0

οπότε $I_2=\int_\pi^0(\pi-u)f(\eta\mu(\pi-u))(-du)=\int_0^\pi(\pi-u)f(\eta\mu u)du=$

$=\pi\int_\pi^0 f(\eta\mu x)dx-\int_0^\pi xf(\eta\mu x)dx=\pi\int_0^\pi f(\eta\mu x)dx-I_2\Leftrightarrow I_2=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\eta\mu x)dx$

και $I=\int_0^\pi\frac{x\eta\mu x}{3+\eta\mu^2x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\eta\mu x}{3+\eta\mu^2x}=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\eta\mu x}{4-\sigma\upsilon\nu^2x}dx$.

Θέτουμε $u=\sigma\upsilon\nu x$ οπότε $du=-\eta\mu x dx$ και

x	0	π
u	1	−1

οπότε $I=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-1}{4-u^2}du=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^1\frac{1}{u^2-4}du=$

$=\frac{\pi}{2}\left[\int_{-1}^1\frac{\frac{1}{4}}{u-2}du-\int_{-1}^1\frac{\frac{1}{4}}{u+2}du\right]=\frac{\pi}{8}\left[\ln|u-2|\right]_{-1}^1-\frac{\pi}{8}\left[\ln|u+2|\right]_{-1}^1=-\frac{\pi}{4}\ln3$

6.222. α) $I_1=\int_0^1 2f(2x+1)dx$. Θέτουμε $u=2x+1$ οπότε $du=2dx$ και

x	0	1
u	1	3

οπότε $I_1=\int_1^3 f(u)du=\int_1^3 f(x)dx$

β) $I_2=\int_2^5[f(x)+f(x+3)]dx=\int_2^5 f(x)dx+\int_2^5 f(x+3)dx$.

Θέτουμε $u=x+3$ οπότε $du=dx$ και

x	2	5
u	5	8

άρα $I_2=\int_2^5 f(x)dx+\int_5^8 f(u)du=\int_2^8 f(x)dx$

γ) $I_3=\int_{\kappa\alpha}^{\kappa\beta}f\left(\frac{x}{\kappa}\right)dx$. Θέτουμε $\frac{x}{\kappa}=\omega\Leftrightarrow x=\kappa\omega$, οπότε $dx=\kappa d\omega$ και

x	κα	κβ
ω	α	β

οπότε $I_3=\int_\alpha^\beta f(\omega)\kappa d\omega=\int_\alpha^\beta \kappa f(x)dx$.

δ) $I_4=\int_\alpha^0 f(\alpha-x)dx+\int_0^\beta f(\beta-x)dx$

Θέτουμε $u_1=\alpha-x$ οπότε $dx=-du_1$ και

x	α	0
u_1	0	α

και $u_2=\beta-x$ οπότε $dx=-du_2$ και

x	0	β
u_2	β	0

άρα $I_4=\int_0^\alpha f(u_1)(-du_1)+\int_\beta^0 f(u_2)(-du_2)=\int_\alpha^0 f(u_1)du_1+\int_0^\beta f(u_2)du_2=$

$=\int_\alpha^0 f(x)dx+\int_0^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx$

6.223. Στη σχέση $f(\alpha+x)+f(\alpha-x)=2\beta$ ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\int_0^{\alpha} f(\alpha+x)dx+\int_0^{\alpha} f(\alpha-x)dx=\int_0^{\alpha} 2\beta dx \quad (1)$$

Θέτουμε $u_1=\alpha+x$ οπότε $dx=du_1$ και

x	0	α
u_1	α	2α

και $u_2=\alpha-x$ οπότε $dx=-du_2$ και

x	0	α
u_2	α	0

οπότε $(1)\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{2\alpha} f(u_1)du_1+\int_{\alpha}^{0} f(u_2)(-du_2)=2\beta(\alpha-0)\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{2\alpha} f(x)dx+\int_0^{\alpha} f(x)dx=2\alpha\beta\Leftrightarrow$

$\int_0^{2\alpha} f(x)dx=2\alpha\beta$

6.224. α) Στην σχέση (1) $\;3f(1-x)+f(x+1)=2x^2-x$ ολοκληρώνουμε και προκύπτει

$$3\int_0^2 f(1-x)dx+\int_0^2 f(x+1)dx=\int_0^2 (2x^2-x)dx \quad (2)$$

Θέτουμε $u_1=1-x$ οπότε $dx=-du_1$ και

x	0	2
u_1	1	-1

Θέτουμε $u_2=x+1$ οπότε $dx=du_2$ και

x	0	2
u_2	1	3

οπότε $(2)\Leftrightarrow 3\int_1^{-1} f(u_1)(-du_1)+\int_1^3 f(u_2)du_2=2\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^2-\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3\int_1^{-1} f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx=\frac{10}{3}\Leftrightarrow 9\int_{-1}^{1} f(x)dx+3\int_1^3 f(x)dx=10$$

β) Στην (1) θέτω $x\to 1-x$ οπότε προκύπτει $3f(x)+f(2-x)=2x^2-3x+1 \quad (3)$

Επίσης στην (3) θέτω $x\to 2-x$ οπότε $3f(2-x)+f(x)=2x^2-5x+3 \quad (4)$. Οπότε

$$\begin{aligned}
&(3)\overset{\cdot(-3)}{\Rightarrow} -9f(x)-3f(2-x)=-6x^2+9x-3\\
&(4)\Rightarrow f(x)+3f(2-x)=2x^2-5x+3 \qquad (+)\\
\hline
&-8f(x)=-4x^2+4x\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2-x}{2}
\end{aligned}$$

6.225. α) i. Στην (1) $\;\alpha f(x)+\beta f(\theta-x)=g(x)$ θέτω όπου $x\to\theta-x$ οπότε προκύπτει $\beta f(x)+\alpha f(\theta-x)=g(\theta-x) \quad (2)$. Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) έχουμε $f(x)=\dfrac{\beta}{\beta^2-\alpha^2}g(\theta-x)-\dfrac{\alpha}{\beta^2-\alpha^2}g(x) \quad (3)$ και επειδή η g είναι συνεχής τότε από την (3) προκύπτει ότι και η f είναι συνεχής.

ii. Ολοκληρώνοντας την (3) έχουμε

$$\int_0^{\theta} f(x)dx=\frac{\beta}{\beta^2-\alpha^2}\int_0^{\theta} g(\theta-x)dx-\frac{\alpha}{\beta^2-\alpha^2}\int_0^{\theta} g(x)dx \quad (4)$$

Θέτουμε $u=\theta-x$ οπότε $dx=-du$ και η (4) γίνεται

$$\int_0^\theta f(x)dx = \frac{\beta}{\beta^2-\alpha^2}\int_0^\theta g(u)du - \frac{\alpha}{\beta^2-\alpha^2}\int_0^\theta g(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^\theta f(x)dx = \frac{\beta-\alpha}{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}\int_0^\theta g(x)dx \Leftrightarrow (\alpha+\beta)\int_0^\theta f(x)dx = \int_0^\theta g(x)dx$$

β) Αν $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\sqrt{1-x}-\sqrt{x}}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{e^{\sqrt{1-x}}}{e^{\sqrt{x}}}} = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}}+e^{\sqrt{1-x}}}$.

Παρατηρούμε ότι $f(x)+f(1-x)=1$ και η f συνεχής στο $[0,1]$ άρα από το (α) (ii) ερώτημα θα έχουμε $(1+1)\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 1dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = \dfrac{1}{2}$

6.226. Επειδή η f είναι περιττή και η g άρτια στο $[-\alpha,\alpha]$, ισχύει: $f(-x)=-f(x)$ και $g(-x)=g(x)$ για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$. Οπότε: $I=\int_{-\alpha}^{\alpha}\dfrac{g(x)}{1+e^{f(x)}}dx = \int_{-\alpha}^{\alpha}\dfrac{g(-x)}{1+e^{-f(-x)}}dx$.

Θέτουμε $-x=u$. Τότε $dx=-du$. Για $x=-\alpha$ είναι $u=\alpha$, ενώ για $x=\alpha$ είναι $u=-\alpha$. Τότε:

$$I=-\int_{\alpha}^{-\alpha}\frac{g(u)}{1+e^{-f(u)}}du = \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{g(u)}{1+e^{-f(u)}}du = \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{g(u)}{1+\frac{1}{e^{f(u)}}}du = \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{g(u)}{\frac{e^{f(u)}+1}{e^{f(u)}}}du = \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{g(u)e^{f(u)}}{e^{f(u)}+1}du \Leftrightarrow$$

$$I=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{g(u)e^{f(u)}+g(u)-g(u)}{e^{f(u)}+1}du = \int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\frac{g(u)\left(e^{f(u)}+1\right)}{e^{f(u)}+1}-\frac{g(u)}{e^{f(u)}+1}\right)du = \int_{-\alpha}^{\alpha}g(u)du - I \Leftrightarrow$$

$$2I=\int_{-\alpha}^{\alpha}g(x)dx \Leftrightarrow 2I=\int_{-\alpha}^{0}g(x)dx+\int_0^{\alpha}g(x)dx$$

Θέτουμε $x=-u$. Τότε $dx=-du$. Για $x=-\alpha$ είναι $u=\alpha$, ενώ για $x=0$ είναι $u=0$.

Τότε $\int_{-\alpha}^{0}g(x)dx = -\int_{\alpha}^{0}g(u)du = \int_0^{\alpha}g(x)dx$.

Τότε: $2I=\int_0^{\alpha}g(x)dx+\int_0^{\alpha}g(x)dx \Leftrightarrow 2I=2\int_0^{\alpha}g(x)dx \Leftrightarrow I=\int_0^{\alpha}g(x)dx$

6.227. Θέτουμε $x=\dfrac{1}{u}$, τότε $dx=-\dfrac{1}{u^2}du$. Για $x=\dfrac{1}{\alpha}$ είναι $u=\alpha$ και για $x=\alpha$ είναι $u=\dfrac{1}{\alpha}$.

Τότε: $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{\ln x}{x}dx = \int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}} f\left(\dfrac{1}{u}+u\right)\dfrac{\ln\frac{1}{u}}{\frac{1}{u}}\left(-\dfrac{1}{u^2}\right)du = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} f\left(\dfrac{1}{u}+u\right)\dfrac{\ln 1-\ln u}{\frac{1}{u}u^2}du =$

$$= -\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} f\left(\frac{1}{u}+u\right)\frac{\ln u}{u}du = -\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} f\left(\frac{1}{x}+x\right)\frac{\ln x}{x}dx \Leftrightarrow$$

$$2\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} f\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx = 0 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} f\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx = 0.$$

6.228. **α)** $\int_0^2 f'(x)dx = 4-2f(0) \Leftrightarrow \left[f(x)\right]_0^2 = 4-2f(0) \Leftrightarrow f(2)-f(0)=4-2f(0) \Leftrightarrow f(2)+f(0)=4$

Στην (1) $f(x)=c-f(2-x)$ θέτω όπου $x=0$ οπότε $f(0)=c-f(2) \Leftrightarrow f(2)+f(0)=c$

οπότε $c=4$

β) Είναι $\int_0^2 f(2-x)dx \overset{2-x=u}{=} \int_2^0 f(u)(-du) = \int_0^2 f(u)du$.

γ) Από τη σχέση $(1) \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 4dx - \int_0^2 f(2-x)dx \Leftrightarrow$

$2\int_0^2 f(x)dx = 8 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = 4$.

6.229. **α)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\beta,\alpha]$ οπότε θα είναι και συνεχής στο $[\beta,\alpha]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(\beta+x) = \lim\limits_{u\to\beta^+} f(u) = f(\beta)$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(\alpha-x) = \lim\limits_{w\to\alpha^-} f(w) = f(\alpha)$

Επειδή (1) $f(\beta+x)=f(\alpha-x)$ θα είναι και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(\beta+x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(\alpha-x) \Leftrightarrow f(\beta)=f(\alpha)$

β) Στην (1) θέτουμε $u=\alpha-x \Leftrightarrow x=\alpha-u$ και γίνεται $f(\beta+\alpha-u)=f(u)$ για κάθε $u\in(\beta,\alpha)$

άρα και $f(\beta+\alpha-x)=f(x)$ για κάθε $x\in[\beta,\alpha]$ αφού είναι και $f(\beta)=f(\alpha)$.

Εχουμε $I=\int_\beta^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx = \int_\beta^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(\beta+\alpha-x)dx$. Θέτουμε $y=\beta+\alpha-x$ οπότε $dy=-dx$ και

για $x=\beta$ είναι $y=\alpha$, ενώ για $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ είναι $y=\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Οπότε $I=\int_\beta^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(y)(-dy) = \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(y)dy = \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\alpha} f(x)dx$.

6.230. Είναι $f''(x)+f''(4-x)=2$ οπότε $f'(x)-f'(4-x)=2x+c$

Για $x=2$ $f'(2)-f'(2)=4+c \Leftrightarrow c=-4$.

Οπότε $f'(x)-f'(4-x)=2x+4 \Leftrightarrow f(x)+f(4-x)=x^2-4x+c_1$

Για $x=2$: $f(2)+f(2)=4-8+c_1 \Leftrightarrow c_1=6$.

Οπότε $f(x)+f(4-x)=x^2-4x+6$ και $\int_1^3 f(x)dx + \int_1^3 f(4-x)dx = \int_1^3 (x^2-4x+6)dx$.

Θέτουμε $4-x=u$ οπότε $dx=-du$ και

x	1	3
u	3	1

οπότε $\int_1^3 f(x)dx + \int_3^1 f(u)(-du) = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 - 2\left[x^2\right]_1^3 + 6\left[x\right]_1^3 \Leftrightarrow$

$\int_1^3 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx = \frac{26}{3} - 16 + 12 \Leftrightarrow 2\int_1^3 f(x)dx = \frac{14}{3}$ οπότε $\int_1^3 f(x)dx = \frac{7}{3}$

6.231. **α)** $f''(x)=-4f''(2x-1) \Leftrightarrow f'(x)=-2f'(2x-1)+c_1$. Για $x=1$ είναι

$f'(1)=-2f'(1)+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$ και $f'(x)=-2f'(2x-1) \Leftrightarrow f(x)=-f(2x-1)+c_2$.

Για $x=1$ είναι $f(1)=-f(1)+c_2 \Leftrightarrow c_2=1$, άρα $f(x)+f(2x-1)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Οπότε και $\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(2x-1)dx = \int_0^1 1dx = 1$.

Θέτουμε $2x-1=u \Leftrightarrow x=\frac{u+1}{2}$ και $dx=\frac{1}{2}du$. Για $x=0$ είναι $u=-1$ και για $x=1$ είναι $u=1$, τότε $\int_0^1 f(x)dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(u)du=1 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(x)dx+2\int_0^1 f(x)dx=2$

β) Εστω $g(x)=f(x)+f(2x-1)-e+2x=1-e+2x$, $x\in[0,1]$.

$g(0)=1-e<0$, $g(1)=3-e>0$ και g συνεχής στο $[0,1]$, άρα λόγω του Θ.Β υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)+f(2\xi-1)=e-2\xi$

6.232. α) $\ln x\ge\frac{x-1}{x} \overset{x>1}{\Rightarrow} x\ln x-x+1\ge 0$.

Εστω $g(x)=x\ln x-x+1$, $x\ge1$ είναι $g'(x)=\ln x+1-1=\ln x>0$ γι α κάθε $x>1$ οπότε $g\uparrow[1,+\infty)$.

Για $x\ge1$ είναι $g(x)\ge g(1)\Leftrightarrow x\ln x-x+1\ge0 \Leftrightarrow x\ln x\ge x-1\Leftrightarrow \ln x\ge\frac{x-1}{x}$

β) Είναι $x\ln x\ge x-1\Leftrightarrow \ln x^x\ge x-1\Leftrightarrow x^x\ge e^{x-1}$ οπότε και

$$\int_\alpha^\beta x^x dx\ge\int_\alpha^\beta e^{x-1}dx=\left[e^{x-1}\right]_\alpha^\beta=e^{\beta-1}-e^{\alpha-1}=\frac{e^\beta}{e}-\frac{e^\alpha}{e}\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta x^x dx\ge\frac{e^\beta-e^\alpha}{e}.$$

6.233. α) Εστω $f(x)=x^2\ln x+2-x$, $x>1$. Είναι $f'(x)=2x\ln x+x-1>0$ όταν $x>1$ οπότε $f\uparrow$.

Για $x>1\Leftrightarrow f(x)>f(1)\Leftrightarrow x^2\ln x+2-x>1>0$

β) Είναι $x^2\ln x>x-2$ οπότε $\int_2^4 x^2\ln x dx>\int_2^4(x-2)dx\Leftrightarrow\int_2^4 x^2\ln xdx>\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4-2[x]_2^4=2$

6.234. α) $f(x)=x\ln x-x+1$, $x>0$ και $f'(x)=\ln x+1-1=\ln x$

x	0		1	
f′		−		+
f		↘		↗

ολικό ελάχιστο το $f(1)=0$

β) Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)\ge f(1)$.

$x\ln x-x+1\ge0\Leftrightarrow\ln x^x\ge x-1\Leftrightarrow x^x\ge e^{x-1}$ οπότε $\int_1^2 x^x dx\ge\int_1^2 e^{x-1}dx$

6.235. α) Εστω $f(x)=x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln x}{x}}$, $x>0$. $f'(x)=e^{\frac{\ln x}{x}}\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$

x	0		e	
f′		+		−
f		↗		↘

Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)\le f(e)\Leftrightarrow x^{\frac{1}{x}}\le e^{\frac{1}{e}}$ οπότε

$$\int_{2e}^{3e}x^{\frac{1}{x}}dx\le\int_{2e}^{3e}e^{\frac{1}{e}}dx=e^{\frac{1}{e}}\cdot e=e^{\frac{1}{e}+1}=e^{\frac{e+1}{e}}$$

β) Εστω $g(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$, $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. $g'(x)=\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}<0$

όταν $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ οπότε $g\downarrow$. Για $x\ge\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow g(x)\le g\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{2}{\pi}$ οπότε

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\eta\mu x}{x}dx\le\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{2}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\cdot\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=1$$

γ) Εστω $h(x)=\eta\mu^{1821}x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ είναι $h'(x)=1821\eta\mu^{1820}x\cdot\sigma\upsilon\nu x>0$ όταν $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

οπότε $h\uparrow$. Για $x\le\frac{\pi}{2}$ είναι $h(x)\le h\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\eta\mu^{1821}x\le 1$ οπότε

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^{1821}x\,dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^{1821}x\,dx\le\frac{\pi}{2}$$

6.236. **α)** Είναι $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}>0$ όταν $x>0$ οπότε η $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$

β) Αν $x\in[\kappa,\kappa+14]$ τότε $f(x)\ge f(\kappa)$

οπότε $\int_\kappa^{\kappa+14}f(x)dx\ge\int_\kappa^{\kappa+14}\sqrt{\kappa}dx\Leftrightarrow\int_\kappa^{\kappa+14}\sqrt{x}dx\ge\sqrt{\kappa}(\kappa+14-\kappa)\Leftrightarrow\int_\kappa^{\kappa+14}\sqrt{x}dx\ge 14\sqrt{\kappa}\ge\sqrt{\kappa}$

και αν $x\in[\kappa-1,\kappa]$ τότε $f(x)\le f(\kappa)$

οπότε $\int_{\kappa-1}^{\kappa}f(x)dx\le\int_{\kappa-1}^{\kappa}\sqrt{\kappa}dx\Leftrightarrow\int_{\kappa-1}^{\kappa}\sqrt{x}dx\le\sqrt{\kappa}$.

6.237. **α)** Εστω $f(x)=\frac{e^x}{x^x}$, $x\in(0,+\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

	0	1	$+\infty$
f'	+	0	−
f	$\nearrow$	Ο.Μ.	$\searrow$

$$f'(x)=\left(\frac{e^x}{x^x}\right)'=\left(\frac{e^x}{e^{\ln x^x}}\right)'=\left(e^{x-x\ln x}\right)'=$$

$$=e^{x-x\ln x}\left(1-\ln x-x\frac{1}{x}\right)=-\ln x\cdot e^{x-x\ln x}$$

Είναι $f'(x)\ge 0\Leftrightarrow -\ln x\cdot e^{x-x\ln x}\ge 0\Leftrightarrow \ln x\le 0\Leftrightarrow 0<x\le 1$

Για κάθε $x\in(1,2)$ είναι $f'(x)<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$.

Οπότε $f(2)\le f(x)\le f(1)\Leftrightarrow\frac{e^2}{4}\le\frac{e^x}{x^x}\le e$,

άρα και $\int_1^2\frac{e^2}{4}dx\le\int_1^2\frac{e^x}{x^x}dx\le\int_1^2 e\,dx\Leftrightarrow\frac{e^2}{4}\le\int_1^2\frac{e^x}{x^x}dx\le e$.

β) Εστω $f(x)=e^{x^2}$ είναι $f'(x)=2xe^{x^2}>0$ όταν $x\in(0,2)$ οπότε $f\uparrow$ στο $[0,2]$ και

$f(0)\le f(x)\le f(2)\Leftrightarrow 1\le e^{x^2}\le e^4$ άρα $\int_0^2 1dx\le\int_0^2 e^{x^2}dx\le\int_0^2 e^4dx\Leftrightarrow 2\le\int_0^2 e^{x^2}dx\le 2e^4$.

γ) Εστω $f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x^2+4}$, $x\in[-2,2]$. Είναι $f'(x)=\frac{4(x-2)(x+2)}{(x^2+4)^2}<0$ αν $x\in(2,2)$ οπότε

$f\downarrow$ άρα $f(2)\le f(x)\le f(-2)\Leftrightarrow 0\le\frac{x^2-4x+4}{x^2+4}\le 2$ άρα

$$0\le\int_{-2}^{2}\frac{x^2-4x+4}{x^2+4}dx\le\int_{-2}^{2}2dx=8.$$

δ) Αν $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ τότε $\frac{1}{2}\le\sigma\upsilon\nu x\le 1\Leftrightarrow 2\le 4\sigma\upsilon\nu x\le 4\Leftrightarrow 5\le 3+4\sigma\upsilon\nu x\le 7\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7 \geq \dfrac{35}{3+4\sigma\upsilon\nu x} \geq 5$ οπότε $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 5dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{35}{3+4\sigma\upsilon\nu x} \leq \int_0^{\frac{\pi}{3}} 7dx \Leftrightarrow \dfrac{5\pi}{3} \leq \int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{35}{3+4\sigma\upsilon\nu x} \leq \dfrac{7\pi}{3}$.

ε) $f(x) = \dfrac{x^4+5}{x^4+2} = \dfrac{x^4+2+3}{x^4+2} = 1 + \dfrac{3}{x^4+2}$ και $f'(x) = \dfrac{-3\cdot 4x^3}{(x^4+2)^2} < 0$ όταν $x \in (0,2)$ οπότε $f\downarrow$

$f(2) \leq f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow \dfrac{21}{18} \leq \dfrac{x^4+5}{x^4+2} \leq \dfrac{5}{2}$

οπότε $\int_0^2 \dfrac{21}{18}dx \leq \int_0^2 \dfrac{x^4+5}{x^4+2}dx \leq \int_0^2 \dfrac{5}{2}dx \Leftrightarrow \dfrac{7}{3} \leq \int_0^2 \dfrac{x^4+5}{x^4+2}dx \leq 5$.

6.238. **α)** Στο διάστημα $[0,1]$ έχουμε: $\dfrac{1}{1+x^{60}} \leq 1 \overset{\cdot(1+x^{30})>0}{\Leftrightarrow} \dfrac{1+x^{30}}{1+x^{60}} \leq 1+x^{30}$

οπότε $\int_0^1 \dfrac{1+x^{30}}{1+x^{60}}dx \leq \int_0^1 (1+x^{30})dx = 1 + \left[\dfrac{x^{31}}{31}\right]_0^1 = \dfrac{32}{31} \Leftrightarrow \int_0^1 \dfrac{1+x^{30}}{1+x^{60}}dx \leq \dfrac{32}{31}$

β) Στο διάστημα $[1,\alpha]$ έχουμε: $\dfrac{1+x^{30}}{1+x^{60}} < \dfrac{1+x^{30}}{x^{60}} = \dfrac{1}{x^{60}} + \dfrac{1}{x^{30}}$ άρα και

$$\int_1^{\alpha} \frac{1+x^{30}}{1+x^{60}}dx \leq \int_0^{\alpha}\left(\frac{1}{x^{60}} + \frac{1}{x^{30}}\right)dx = \left[\frac{x^{-59}}{-59}\right]_1^{\alpha} + \left[\frac{x^{-29}}{-29}\right]_1^{\alpha} =$$

$$= -\frac{1}{59\alpha^{59}} - \frac{1}{29\alpha^{29}} + \frac{1}{59} + \frac{1}{29} < \frac{1}{59} + \frac{1}{29} < \frac{1}{58} + \frac{2}{58} = \frac{3}{58}$$

Συνεπώς $\int_1^{\alpha} \dfrac{1+x^{30}}{1+x^{60}}dx < \dfrac{3}{58}$.

6.239. Είναι $1+x^9 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt[7]{1+x^9} \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt[7]{1+x^9}} \leq 1$ οπότε $\dfrac{x^{19}}{\sqrt[7]{1+x^9}} \leq x^{19}$

άρα $\int_0^1 \dfrac{x^{19}}{\sqrt[7]{1+x^9}}dx \leq \int_0^1 x^{19}dx = \left[\dfrac{x^{20}}{20}\right]_0^1 = \dfrac{1}{20}$ άρα $\int_0^1 \dfrac{x^{19}dx}{\sqrt[7]{1+x^9}}dx \leq \dfrac{1}{20}$

6.240. Στο διάστημα $[0,1]$ επειδή $x^3 \geq 0$ τότε $\sqrt{4-3x} \leq \sqrt{4-3x+x^3}$

άρα και $\dfrac{1}{\sqrt{4-3x+x^3}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{4-3x}}$ οπότε και $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{4-3x+x^3}} \leq \int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{4-3x}}$

Στο ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{4-3x}}$ θέτω $u = 4-3x$ οπότε $du = -3dx$ και για $x = 0 \Rightarrow u = 4$ ενώ

για $x = 1$ είναι $u = 0$ οπότε $I = \dfrac{1}{3}\int_1^4 \dfrac{du}{\sqrt{u}} = \dfrac{2}{3}\left[\sqrt{u}\right]_1^4 = \dfrac{2}{3}$. Άρα $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{4-3x+x^3}} \leq \dfrac{2}{3}$.

6.241. $f'(x) + f(x) > 2xe^{-x} \Leftrightarrow e^x f'(x) + e^x f(x) - 2x > 0$ οπότε $\left(e^x f(x) - x^2\right)' > 0$.

Εστω $g(x) = e^x f(x) - x^2$ τότε $g'(x) > 0$ άρα η $g\uparrow$ και $0 \leq x \leq 1$ είναι $g(0) \leq g(x) \leq g(1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq e^x f(x) - x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq e^x f(x) \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow e^{-x}x^2 \leq f(x) \leq e^{-x}(x^2+1)$,

οπότε $\int_0^1 e^{-x}x^2 dx \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 e^{-x}(x^2+1)dx \quad (1)$.

Εστω $I_1=\int_0^1 e^{-x}x^2dx=\int_0^1\left(-e^{-x}\right)'x^2dx=\left[-e^{-x}x^2\right]_0^1-\int_0^1 -e^{-x}\cdot 2xdx=$

$$=-\frac{1}{e}+\int_0^1 e^{-x}2xdx=-\frac{1}{e}+\int_0^1\left(-e^{-x}\right)'2xdx=-\frac{1}{e}+\left[-e^{-x}2x\right]_0^1-\int_0^1\left(-e^{-x}\right)\cdot 2dx=$$

$$=-\frac{1}{e}-\frac{2}{e}+2\int_0^1 e^{-x}dx=-\frac{3}{e}-2\left[e^{-x}\right]_0^1=-\frac{3}{e}-2\left(\frac{1}{e}-1\right)=2-\frac{5}{e}$$

και $I_2=\int_0^1 e^{-x}\left(x^2+1\right)dx=\int_0^1\left(-e^{-x}\right)'\left(x^2+1\right)dx=\left[-e^{-x}\left(x^2+1\right)\right]_0^1-\int_0^1\left(-e^{-x}\right)\cdot 2xdx=$

$$=1-\frac{2}{e}+\int_0^1 e^{-x}2xdx=1-\frac{2}{e}+\int_0^1\left(-e^{-x}\right)'2xdx=1-\frac{2}{e}+\left[-e^{-x}2x\right]_0^1-\int_0^1 -e^{-x}\cdot 2dx=$$

$$=1-\frac{2}{e}-\frac{2}{e}+2\int_0^1 e^{-x}dx=1-\frac{4}{e}-2\left(\frac{1}{e}-1\right)=3-\frac{6}{e}$$

Άρα η (1) γίνεται $2-\frac{5}{e}\le\int_0^1 f(x)dx\le 3-\frac{6}{e}$

6.242. **α)** Εστω $g(x)=f(\beta)(x-\alpha)+f(\alpha)(\beta-x)-f(x)(\beta-\alpha)$, $x\in[\alpha,\beta]$

και $g'(x)=f(\beta)-f(\alpha)-f'(x)(\beta-\alpha)=(\beta-\alpha)\left[\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}-f'(x)\right]$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για f στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta):f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ άρα

$g'(x)=(\beta-\alpha)\left(f'(\xi)-f'(x)\right)$.

Αν $\alpha<x<\xi\overset{f'\downarrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(\xi)\Leftrightarrow g'(x)<0$. Αν $\xi<x<\beta\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(\xi)\Leftrightarrow g'(x)>0$

Οπότε

	α		ξ		β
g'		$-$		$+$	
g		↘		↗	

Για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ είναι $g(x)\le g(\alpha)=g(\beta)=0$, άρα

$g(x)\le 0\Leftrightarrow f(\beta)(x-\alpha)+f(\alpha)(\beta-x)\le f(x)(\beta-\alpha)$ (1)

β) Ολοκληρώνοντας στην (1) έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta f(\beta)(x-\alpha)dx+\int_\alpha^\beta f(\alpha)(\beta-x)dx\le\int_\alpha^\beta f(x)(\beta-\alpha)dx\Leftrightarrow$$

$$f(\beta)\int_\alpha^\beta xdx-\alpha f(\beta)(\beta-\alpha)+\beta f(\alpha)(\beta-\alpha)-f(\alpha)\int_\alpha^\beta xdx\le(\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta f(x)dx\Leftrightarrow$$

$$f(\beta)\frac{\left(\beta^2-\alpha^2\right)}{2}-\alpha f(\beta)(\beta-\alpha)+\beta f(\alpha)(\beta-\alpha)-f(\alpha)\frac{\left(\beta^2-\alpha^2\right)}{2}\le(\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta f(x)dx\Leftrightarrow$$

$$\overset{:\beta-\alpha>0}{\Leftrightarrow}f(\beta)(\beta+\alpha)-2\alpha f(\beta)+2\beta f(\alpha)-f(\alpha)(\beta+\alpha)\le 2\int_\alpha^\beta f(x)dx\Leftrightarrow$$

$$2\int_\alpha^\beta f(x)dx\ge f(\beta)(\beta-\alpha)+f(\alpha)(\beta-\alpha)\Leftrightarrow 2\int_\alpha^\beta f(x)dx\ge\left[f(\beta)+f(\alpha)\right](\beta-\alpha)$$

6.243. **α)** Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,x]$, $x\in(\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,x): f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$.

Επειδή $\xi<x<\beta$ και $f'\uparrow$ τότε

$$f'(\xi)<f'(\beta)\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}<f'(\beta)\Leftrightarrow f(x)-f(\alpha)<f'(\beta)(x-\alpha).$$

Αν $x=\alpha$ ισχύει η ισότητα. Οπότε για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ είναι $f(x)-f(\alpha)\le f'(\beta)(x-\alpha)$ (1).

β) Ολοκληρώνοντας στην (1) έχουμε: $\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta f(\alpha)dx\le f'(\beta)\int_\alpha^\beta (x-\alpha)dx\Leftrightarrow$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx-f(\alpha)(\beta-\alpha)\le f'(\beta)\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}-\alpha f'(\beta)(\beta-\alpha)\Leftrightarrow$$

$$2\int_\alpha^\beta f(x)dx\le 2f(\alpha)(\beta-\alpha)+f'(\beta)(\beta^2-\alpha^2)-2\alpha f'(\beta)(\beta-\alpha)\Leftrightarrow$$

$$2\int_\alpha^\beta f(x)dx\le 2f(\alpha)(\beta-\alpha)+f'(\beta)(\beta^2-\alpha^2-2\alpha\beta+2\alpha^2)\Leftrightarrow$$

$$2\int_\alpha^\beta f(x)dx\le 2f(\alpha)(\beta-\alpha)+f'(\beta)(\beta-\alpha)^2$$

6.244. Για $x\ge\alpha$ θα είναι $f(x)\ge f(\alpha)$ οπότε $f(x)-f(\alpha)\ge 0$. Επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\alpha$ είναι: $\int_\alpha^\beta (f(x)-f(\alpha))dx>0\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta f(x)dx>\int_\alpha^\beta f(\alpha)dx\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta f(x)dx>f(\alpha)(\beta-\alpha)$.

6.245. • Αν $x\in\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ τότε $x\le\frac{\alpha+\beta}{2}$ και αφού $f\uparrow$ τότε $f(x)\le f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

άρα $\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx\le\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)dx\Leftrightarrow\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx\le f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$ (1)

• Αν $x\in\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ τότε $x\ge\frac{\alpha+\beta}{2}$ και $f(x)\ge f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

οπότε $\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta f(x)dx\ge\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)dx\Leftrightarrow\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta f(x)dx\ge f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι $\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta f(x)dx\ge\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx$.

6.246. • Αν $x\in\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ τότε $x\le\frac{\alpha+\beta}{2}$ και αφού $f\downarrow$ θα είναι $f(x)\ge f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

οπότε $\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx\ge\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)dx\Leftrightarrow\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx\ge f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$ (1)

• Αν $x\in\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ τότε $x\ge\frac{\alpha+\beta}{2}$ και $f(x)\le f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

οπότε $\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta f(x)dx\le\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)dx\Leftrightarrow\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta f(x)dx\le f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι $\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx\ge\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta f(x)dx$.

6.247. Θεωρούμε την $f(x)=x\ln x$, $x>1$ με $f'(x)=\ln x+1$ και $f''(x)=\frac{1}{x}>0$ οπότε $f'\uparrow$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στο $[x,x+1]$ με $x\geq 1$ οπότε υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ με

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow f'(\xi)=(x+1)\ln(x+1)-x\ln x=\ln\frac{(x+1)^{x+1}}{x^x}$$

Επειδή $1\leq x<\xi<x+1$ τότε $f'(x)<f'(\xi)<f'(x+1)\Leftrightarrow \ln x+1<\ln\frac{(x+1)^{x+1}}{x^x}<\ln(x+1)+1$

οπότε και $\int_1^e(\ln x+1)dx<\int_1^e\ln\frac{(x+1)^{x+1}}{x^x}dx<\int_1^e(\ln(x+1)+1)dx\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow[x\ln x]_1^e<\int_1^e\ln\frac{(x+1)^{x+1}}{x^x}dx<[(x+1)\ln(x+1)]_1^e\Leftrightarrow e<\int_1^e\ln\frac{(x+1)^{x+1}}{x^x}dx<\ln(e+1)^{e+1}-\ln 2^2$$

6.248. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στο $[0,x]$ για την f, οπότε υπάρχει

$$\xi_1\in(0,x):f(\xi_1)=\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{f(x)-1}{x}\text{ όμως }|f'(\xi_1)|<1\Leftrightarrow\left|\frac{f(x)-1}{x}\right|<1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1<\frac{f(x)-1}{x}<1\overset{\cdot x>0}{\Rightarrow} -x<f(x)-1<x\Leftrightarrow -x+1<f(x)<x+1\Rightarrow f(x)>1-x$$

οπότε $\int_0^1 f(x)dx>\int_0^1(1-x)dx\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx>\frac{1}{2}$ (1)

Επίσης εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x,2]$ οπότε υπάρχει

$$\xi_2\in(x,2):f'(\xi_2)=\frac{f(2)-f(x)}{2-x}=\frac{1-f(x)}{2-x}\text{ όμως }|f'(\xi_2)|<1\Leftrightarrow\left|\frac{1-f(x)}{2-x}\right|<1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1<\frac{1-f(x)}{2-x}<1\Leftrightarrow x-2<1-f(x)<2-x\Leftrightarrow x-3<-f(x)<1-x\Leftrightarrow 3-x>f(x)>x-1$$

οπότε $\int_1^2 f(x)dx>\int_1^2(x-1)dx\Leftrightarrow\int_1^2 f(x)dx>\frac{1}{2}$ (2)

Προσθέτουμε την (1) και (2) κατά μέλη οπότε $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx>1.$

6.249. Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[0,x]$, $x\in(0,2]$,

οπότε υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x}\Leftrightarrow xf'(\xi)=f(x)-f(0)$.

Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0,2]$, η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Είναι $0<\xi<x<2$ άρα

$f'(\xi)>f'(x)\Leftrightarrow xf'(\xi)>xf'(x)\Leftrightarrow f(x)-f(0)>xf'(x)\Leftrightarrow f(x)-f(0)-xf'(x)>0$ άρα και

$$\int_0^2 f(x)dx-\int_0^2 f(0)dx-\int_0^2 xf'(x)dx>0\Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f(x)dx-f(0)(2-0)-[xf(x)]_0^2+\int_0^2 f(x)dx>0\Leftrightarrow$$

$$2\int_0^2 f(x)dx-2f(0)-2f(2)>0\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx>f(2)+f(0)$$

6.250. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1,x]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(1,x): f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

Επειδή $1<\xi<x<2$ τότε $\xi<2$ και $f'\uparrow$ άρα

$$f'(\xi)<f'(2)\Leftrightarrow\frac{f(x)-f(1)}{x-1}<f'(2)\Leftrightarrow\Leftrightarrow f(x)<f'(2)(x-1)+f(1) \text{ οπότε}$$

$$\int_1^2 f(x)dx<\int_1^2 f'(2)(x-1)dx+\int_1^2 f(1)dx\Leftrightarrow\int_1^2 f(x)dx<\frac{1}{2}f'(2)+f(1).$$

6.251. **α)** $(1)\ \lambda^2 f(x)+2\lambda+\dfrac{1}{f(x)}\geq 0 \overset{\cdot f(x)>0}{\Rightarrow} \lambda^2 f^2(x)+2\lambda f(x)+1\geq 0\Leftrightarrow(\lambda f(x)+1)^2\geq 0$ που ισχύει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Ολοκληρώνοντας στην (1) έχουμε $\lambda^2\int_\alpha^\beta f(x)dx+2\lambda\int_\alpha^\beta dx+\int_\alpha^\beta\dfrac{1}{f(x)}dx\geq 0\Leftrightarrow$

$$\lambda^2\int_\alpha^\beta f(x)dx+2(\beta-\alpha)\lambda+\int_\alpha^\beta\frac{1}{f(x)}dx\geq 0\quad(2)$$

Η σχέση (2) είναι τριώνυμο ως προς λ και αληθεύει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ οπότε πρέπει

$$\Delta\leq 0\Leftrightarrow 4(\beta-\alpha)^2-4\int_\alpha^\beta f(x)dx\cdot\int_\alpha^\beta\frac{1}{f(x)}dx\leq 0\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta f(x)dx\int_\alpha^\beta\frac{1}{f(x)}dx\geq(\beta-\alpha)^2.$$

6.252. Εστω ότι η f είναι γνησίως μονότονη και έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε για κάθε $\alpha<x<\beta$ θα είναι $f(\alpha)<f(x)<f(\beta)$ οπότε

$\int_\alpha^\beta f(\alpha)dx<\int_\alpha^\beta f(x)dx>\int_\alpha^\beta f(\beta)dx\Leftrightarrow 0<0<-4(\beta-\alpha)$ άτοπο, αφού $\beta-\alpha>0$. Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν η f είναι γνησίως φθίνουσα.

6.253. Αφού η f κοίλη τότε $f'\downarrow$ στο $\mathbb{R}$. Στο διάστημα $[-2,x]$ με $x\in(-2,2]$ εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει $\xi\in(-2,x): f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}$. Όμως $-2<\xi<x\leq 2$ άρα $\xi<2$ οπότε

$$f'(\xi)>f'(2)\Leftrightarrow\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}>f'(2)\Leftrightarrow f(x)-f(-2)>f'(2)(x+2) \text{ και}$$

$$\int_{-2}^2 f(x)dx-\int_{-2}^2 f(-2)dx>\int_{-2}^2 f'(2)(x+2)dx\Leftrightarrow\int_{-2}^2 f(x)dx-4f(-2)>f'(2)\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^2\Leftrightarrow$$

$$\int_{-2}^2 f(x)dx-4f(-2)>8f'(2)\Leftrightarrow 8f'(2)+4f(-2)<\int_{-2}^2 f(x)dx\Leftrightarrow 2f'(2)+f(-2)<\frac{1}{4}\int_{-2}^2 f(x)dx$$

6.254. Εστω ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση για την οποία να ισχύει $f'(x)\geq\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$,

οπότε $\int_1^e f'(x)dx\geq\int_1^e\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}dx\quad(1)$. Θέτω $u=\ln x$ οπότε $du=\dfrac{1}{x}dx$ και

x	1	e
u	0	1

οπότε η (1) γίνεται $[f(x)]_1^e\geq\int_0^1\sqrt{u}du\Leftrightarrow f(e)-f(1)\geq\dfrac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_0^1\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{2}\geq\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\geq\dfrac{2}{3}$ άτοπο.

6.255. Επειδή $\int_0^1 f(x)dx = 1$ και $\lambda > 1$ τότε $\lambda^2\int_0^1 f(x)dx = \lambda^2$ (1)

Επίσης $\int_0^1 xf(x)dx = \lambda \Leftrightarrow -2\lambda\int_0^1 xf(x)dx = -2\lambda^2$ (2) και $\int_0^1 x^2f(x)dx = \lambda^2$ (3)

Προσθέτουμε τις σχέσεις (1), (2), (3) οπότε

$\int_0^1 \lambda^2 f(x)dx + \int_0^1 -2\lambda xf(x)dx + \int_0^1 x^2f(x)dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (\lambda^2 - 2\lambda x + x^2)f(x)dx = 0 \Leftrightarrow$

$\int_0^1 (\lambda - x)^2 f(x)dx = 0$ άτοπο γιατί $f(x) > 0$ και αφού $\lambda > 1$ και $x \in [0,1]$ τότε $\lambda - x \neq 0$ άρα $(\lambda - x)^2 > 0$. Άρα $(\lambda - x)^2 f(x) > 0$ οπότε δεν υπάρχει συνάρτηση f που να ικανοποιεί τις παραπάνω σχέσεις.

6.256. Είναι $f(x) \le x$ και για $x = 0$ έχουμε $f(0) \le 0$, όμως $f(0) \ge 0$ άρα $f(0) = 0$.

Για $x = 2$ είναι $f(2) \le 2 \Leftrightarrow \frac{f(2)}{3} \le \frac{2}{3}$.

Επίσης $\int_0^2 f'(x)\frac{1}{x+1}dx = \left[f(x)\frac{1}{x+1}\right]_0^2 - \int_0^2 f(x)\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx =$

$$= \frac{f(2)}{3} - f(0) + \int_0^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2}dx \le \frac{2}{3} + \int_0^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2}dx \quad (1)$$

Όμως $f(x) \le x$ και για κάθε $x \in [0,2]$ είναι $\frac{f(x)}{(x+1)^2} \le \frac{x}{(x+1)^2}$ άρα

$$\int_0^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2}dx \le \int_0^2 \frac{x}{(x+1)^2}dx = \int_0^2 \frac{x+1-1}{(x+1)^2}dx = \int_0^2 \frac{1}{x+1}dx - \int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2}dx =$$

$$= \left[\ln|x+1|\right]_0^2 + \left[\frac{1}{x+1}\right]_0^2 = \ln 3 - \frac{2}{3}.$$

Άρα $\frac{2}{3} + \int_0^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2}dx \le \frac{2}{3} + \ln 3 - \frac{2}{3} = \ln 3$ (2).

Από (1) και (2) $\int_0^2 \frac{f'(x)}{x+1}dx \le \ln 3$

6.257. Ισχύει $(5g(x) - 3h(x))^2 \ge 0 \Leftrightarrow 25g^2(x) - 30h(x)g(x) + 9h^2(x) \ge 0$ οπότε

$25\int_3^5 g^2(x)dx - 30\int_3^5 h(x)g(x)dx + 9\int_3^5 h^2(x)dx \ge 0 \Leftrightarrow 25\cdot 9 + 9\cdot 25 \ge 30\int_3^5 h(x)g(x)dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 450 \ge 30\int_3^5 h(x)g(x)dx \Leftrightarrow \int_3^5 h(x)g(x)dx \le 15$.

6.258. $\int_2^4 f^2(x)dx + \frac{14}{3} = \int_2^4 xf(x)dx \Leftrightarrow \int_2^4 f^2(x)dx - \int_2^4 xf(x)dx = -\frac{14}{3} \Leftrightarrow$

$\int_2^4 (f^2(x) - xf(x))dx = -\frac{14}{3} \Leftrightarrow \int_2^4 \left(f^2(x) - 2\frac{x}{2}f(x) + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4}\right)dx = -\frac{14}{3} \Leftrightarrow$

$$\int_2^4\left[\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)^2-\frac{x^2}{4}\right]dx=-\frac{14}{3}\Leftrightarrow\int_2^4\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)^2dx-\int_2^4\frac{x^2}{4}dx=-\frac{14}{3}\Leftrightarrow$$

$$\int_2^4\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)^2dx-\left[\frac{x^3}{12}\right]_2^4=-\frac{14}{3}\Leftrightarrow\int_2^4\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)^2dx-\left(\frac{64}{12}-\frac{8}{12}\right)=-\frac{14}{3}\Leftrightarrow$$

$\int_2^4\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)^2dx-\frac{14}{3}=-\frac{14}{3}\Leftrightarrow\int_2^4\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)^2dx=0$. Επειδή $\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)^2\geq 0$ για κάθε $x\in[2,4]$ θα είναι $\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow f(x)-\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow f(x)=\frac{x}{2},\ x\in[2,4]$.

6.259. Αφού η f έχει σύνολο τιμών το $[-2,4]$ τότε για κάθε $x\in[-4,4]$ θα είναι $f(x)\geq -2\Leftrightarrow f(x)+2\geq 0$, $f(x)\leq 4\Leftrightarrow f(x)-4\leq 0$ οπότε $(f(x)+2)(f(x)-4)\leq 0\Leftrightarrow$ $f^2(x)-2f(x)-8\leq 0$ οπότε $\int_2^4 f^2(x)dx-2\int_2^4 f(x)dx-\int_2^4 8dx\leq 0\Leftrightarrow\int_2^4 f^2(x)dx\leq 8\cdot 2=16$.

6.260. α) Είναι $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in[0,1]$

οπότε $\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 xF'(x)dx=[xF(x)]_0^1-\int_0^1 F(x)dx=F(1)-\int_0^1 F(x)dx=$

$$=\int_0^1 F(1)dx-\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1(F(1)-F(x))dx.$$

β) Επειδή από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι

$\int_x^1 f(t)dt\geq 1-x^2\Leftrightarrow[F(t)]_x^1\geq 1-x^2\Leftrightarrow\Leftrightarrow F(1)-F(x)\geq 1-x^2$ οπότε

$$\int_0^1(F(1)-F(x))dx\geq\int_0^1(1-x^2)dx=[x]_0^1-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

οπότε με βάση το (α) ερώτημα θα είναι $\int_0^1 xf(x)dx\geq\frac{2}{3}$.

γ) Είναι $(f(x)-x)^2\geq 0$ οπότε $f^2(x)-2xf(x)+x^2\geq 0$

άρα $\int_0^1 f^2(x)dx\geq 2\int_0^1 xf(x)dx-\int_0^1 x^2dx\geq 2\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=1\Leftrightarrow\int_0^1 f^2(x)dx\geq 1$.

6.261. Θεωρούμε $f(t)=\frac{1}{\ln t}$ στο $[x,2x]$. Είναι $f'(t)=-\frac{1}{t\ln^2 t}<0$ για κάθε $t\in[x,2x]$ με $x>1$ οπότε $f\downarrow$ στο $[x,2x]$ και για $t\in[x,2x]$ είναι $f(2x)\leq f(t)\leq f(x)\Leftrightarrow\frac{1}{\ln 2x}\leq\frac{1}{\ln t}\leq\frac{1}{\ln x}$,

άρα $\int_x^{2x}\frac{1}{\ln 2x}dt\leq\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}dt\leq\int_x^{2x}\frac{1}{\ln x}dt\Leftrightarrow\frac{x}{\ln 2x}\leq\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}dt\leq\frac{x}{\ln x}$.

6.262. α) Για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $[\lambda f(x)+g(x)]^2\geq 0\Leftrightarrow\lambda^2f^2(x)+2\lambda f(x)g(x)+g^2(x)\geq 0$

οπότε $\lambda^2\int_\alpha^\beta f^2(x)dx+2\lambda\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx+\int_\alpha^\beta g^2(x)dx\geq 0$. Η παραπάνω σχέση αποτελεί τριώνυμο ως προς λ που αληθεύει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ και αφού $\int_\alpha^\beta f^2(x)dx\geq 0$ τότε πρέπει

$$\Delta \le 0 \Leftrightarrow 4\left(\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx\right)^2 - 4\int_\alpha^\beta f^2(x)dx\int_\alpha^\beta g^2(x)dx \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_\alpha^\beta f^2(x)dx \cdot \int_\alpha^\beta g^2(x)dx.$$

β) Από το (α) ερώτημα για $f(x) \to \sqrt{f(x)}$, $g(x) \to \sqrt{g(x)}$ έχουμε

$$\int_\alpha^\beta \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 dx \int_\alpha^\beta \left(\sqrt{g(x)}\right)^2 dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx \cdot \int_\alpha^\beta g(x)dx \ge \left(\int_\alpha^\beta \sqrt{f(x)g(x)}dx\right)^2 \ge \left(\int_\alpha^\beta 1dx\right)^2 = (\beta-\alpha)^2$$

6.263. Εστω $\int_2^3 f(x)dx = \lambda \in \mathbb{R}$ αφού $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [2,3]$ τότε $\int_2^3 f(x)dx < 0$.

Η σχέση $\int_2^3 f(x)\left(\int_2^3 f(x)dx\right)dx = 16$ γίνεται $\int_2^3 f(x)\cdot\lambda\cdot dx = 16 \Leftrightarrow \lambda\int_2^3 f(x)dx = 16 \Leftrightarrow$

$\lambda\cdot\lambda = 16 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \lambda^2 = 16 \Rightarrow \lambda = -4$ (αφού $\lambda < 0$).

6.264. Αφού $f(x) > 0$ τότε $\int_0^1 f(x)dx > 0$. Έστω $\int_0^1 f(x)dx = I$ τότε η σχέση

$\int_0^1 f(x)\left(\int_0^1 f(x)dx\right)dx = 2\int_0^1 f(x)dx + 3$ γίνεται $\int_0^1 f(x)\cdot I dx = 2I + 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow I\int_0^1 f(x)dx = 2I + 3 \Leftrightarrow I^2 - 2I - 3 = 0 \Leftrightarrow I = -1$ (απορρίπτεται) ή $I = 3$, άρα $\int_0^1 f(x)dx = 3$.

6.265. Αφού $f(x) > 0$ τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda = 0$, τότε η σχέση

$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)f(t)dx\right]dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$ γίνεται

$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[f(t)\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx\right]dt = \lambda \Leftrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha}\left[f(t)\cdot\lambda\right]dt = \lambda \Leftrightarrow \lambda\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt = \lambda \Leftrightarrow \lambda^2 = \lambda \Leftrightarrow$

$\lambda(\lambda-1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ (απορρίπτεται) ή $\lambda = 1$.

6.266. Εστω $\int_0^1 e^{1-x}f(x)dx = c \in \mathbb{R}$ τότε η σχέση (1) $\int_0^1 e^{1-x}f(x)dx = f(x) + e^x$ γίνεται

$c = f(x) + e^x \Leftrightarrow f(x) = c - e^x \quad (2)$.

Άρα $(1) \Rightarrow \int_0^1 e^{1-x}\left(c - e^x\right)dx = c \Leftrightarrow \int_0^1 ce^{1-x}dx - \int_0^1 e^{1-x}\cdot e^x dx = c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -c\left[e^{1-x}\right]_0^1 - e = c \Leftrightarrow -c(1-e) - e = c \Leftrightarrow ce - 2c = e \Leftrightarrow c = \dfrac{e}{e-2}$. Άρα $f(x) = \dfrac{e}{e-2} - e^x$.

6.267. Είναι $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x f(x)dx = c \in \mathbb{R}$ οπότε η σχέση (1) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x f(x)dx = f(x) + \sigma\upsilon\nu x$ γίνεται

$c = f(x) + \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow f(x) = c - \sigma\upsilon\nu x$. Οπότε $(1) \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x(c - \sigma\upsilon\nu x)dx = c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c\int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x\, dx = c \Leftrightarrow -c\left[\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi/3} - \left[\dfrac{\eta\mu^2 x}{2}\right]_0^{\pi/3} = c \Leftrightarrow -c\left(\dfrac{1}{2} - 1\right) - \dfrac{3}{8} = c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{c}{2} - \dfrac{3}{8} = c \Leftrightarrow 4c - 3 = 8c \Leftrightarrow c = -\dfrac{3}{4}$. Άρα $f(x) = -\dfrac{3}{4} - \sigma\upsilon\nu x$.

6.268. Είναι $f(x)=1+\frac{1}{x}-\int_2^3 xf(x)dx$ (1) και είναι παραγωγίσιμη για $x\neq 0$ με $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$,

άρα $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}+c_1\ ,\ x<0\\ \frac{1}{x}+c_2\ ,\ x>0\end{cases}$. Για $x>0$ η (1) γίνεται $\frac{1}{x}+c_2=1+\frac{1}{x}-\int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+c_2\right)dx\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c_2+\int_2^3(1+c_2x)dx=1\Leftrightarrow c_2+1+c_2\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3=1\Leftrightarrow c_2=0$. Όποτε για $x>0$ $f(x)=\frac{1}{x}$ και

αφού η f είναι περιττή για $x<0$ είναι $f(x)=f\left[-(-x)\right]=-f(-x)=-\frac{1}{(-x)}=\frac{1}{x}$.

Συνεπώς $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$.

6.269. **α)** Η εφαπτομένη στο $M(\xi,f(\xi))$ είναι $y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$ και για να διέρχεται από το $(0,0)$ πρέπει $-f(\xi)=-\xi f'(\xi)$ (1). Έφαρμόζοντας Rolle για την $h(x)=\frac{f(x)}{x}$ στο $[2,6]$ προκύπτει η σχέση (1).

β) Είναι $\int_0^{\xi} xf''(x)dx=\left[xf'(x)\right]_0^{\xi}-\int_0^{\xi} f'(x)dx=\xi f'(\xi)-\left[f(x)\right]_0^{\xi}\overset{(1)}{=}f(\xi)-\left(f(\xi)-f(0)\right)=f(0)$.

γ) Από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi_1\in(2,x)$ και $\xi_2\in(x,6)$, $x\in(2,6)$ τέτοια, ώστε:

$f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{f(x)-4}{x-2}$ και $f'(\xi_2)=\frac{f(6)-f(x)}{6-x}=\frac{12-f(x)}{6-x}$

Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε επειδή $\xi_1<\xi_2$

είναι $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow\frac{f(x)-4}{x-2}<\frac{12-f(x)}{6-x}\Leftrightarrow f(x)<2x$, άρα

$\int_3^5 f(x)dx<\int_3^5 2xdx=\left[x^2\right]_3^5=16$

6.270. **α)** Θέτουμε $\frac{x}{2}=u\Leftrightarrow x=2u$ και $dx=2du$. Για $x=0$ είναι $u=0$, ενώ για $x=2$ είναι $u=1$.

Είναι: $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=\int_0^1 f(u)2du=0$.

β) Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{x}{2},x\right]$, $x\in(0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{x}{2},x\right)$,

οπότε λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει $\xi\in\left(\frac{x}{2},x\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x-\frac{x}{2}}=\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.$$

Όμως $f'(\xi)\geq 2$, οπότε: $\dfrac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\geq 2 \Leftrightarrow f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\geq x$ για κάθε $x\in(0,2]$.

Επειδή η σχέση αληθεύει και για $x=0$, ισχύει ότι: $f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\geq x$ για κάθε $x\in[0,2]$.

γ) Είναι $\int_0^2\left(f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx\geq\int_0^2 xdx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx\geq\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=2\Leftrightarrow$

$\int_0^2 f(x)dx\geq 2$.

6.271. **α)** Για την f εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στο $[0,x]$ με $x\in(0,2]$ οπότε υπάρχει

$\xi_1\in(0,x): f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\Leftrightarrow xf'(\xi_1)=f(x)-f(0)$ (1). Επειδή η f παραγωγίσιμη και

κοίλη στο $[0,2]$ η f' είναι $\downarrow$ οπότε $0<\xi_1<x<2$ άρα $f'(\xi_1)>f'(x)\Leftrightarrow$

$xf'(\xi_1)>xf'(x)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(x)-f(0)>xf'(x)$ οπότε $\int_0^2(f(x)-f(0))dx>\int_0^2 xf'(x)dx\Leftrightarrow$

$\int_0^2 f(x)dx-2f(0)>[xf(x)]_0^2-\int_0^2 f(x)dx\Leftrightarrow 2\int_0^2 f(x)dx>2f(0)+2f(2)\Leftrightarrow$

$\int_0^2 f(x)dx>f(0)+f(2)$.

β) i. Για $x<0$ εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στο $[x,0]$ οπότε υπάρχει $\xi_2\in(x,0): f'(\xi_2)=\dfrac{f(0)-f(x)}{-x}$

όμως $f'(\xi_2)<-1\Leftrightarrow \dfrac{f(0)-f(x)}{-x}<-1\Leftrightarrow f(0)-f(x)<x\Leftrightarrow f(x)>f(0)-x$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(0)-x]=+\infty$ άρα και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

ii. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για f στο $[x,x+1]$ οπότε υπάρχει

$\xi\in(x,x+1): f'(\xi)=f(x+1)-f(x)<-1\Leftrightarrow f(x+1)<f(x)-1$ (2)

iii. Ολοκληρώνοντας την (2) έχουμε: $\int_0^1 f(x+1)dx<\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 1dx\overset{x+1=u}{\Leftrightarrow}$

$\int_1^2 f(u)du<\int_0^1 f(x)dx-1\Leftrightarrow\int_1^2 f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx<-1$.

6.272. $\int_\alpha^\beta(f'(x))^2dx+\alpha^2=f^2(\beta)-\int_\alpha^\beta f^2(x)dx\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta(f'(x))^2dx+f^2(\alpha)-f^2(\beta)+\int_\alpha^\beta f^2(x)dx=0$

$\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta(f'(x))^2dx-\left[f^2(x)\right]_\alpha^\beta+\int_\alpha^\beta f^2(x)dx=0\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta\left[(f'(x))^2-2f(x)f'(x)+f^2(x)\right]dx=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta(f'(x)-f(x))^2dx=0$

Είναι $(f'(x)-f(x))^2\geq 0$ και αν υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)-f(x_0)\neq 0$ τότε

$\int_\alpha^\beta(f'(x)-f(x))^2dx>0$ που είναι άτοπο. Άρα $f'(x)-f(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=ce^x$

και αφού $f(\alpha)=\alpha$ τότε $c=\dfrac{\alpha}{e^\alpha}$ και $f(x)=\dfrac{\alpha}{e^\alpha}e^x\Leftrightarrow f(x)=\alpha e^{x-\alpha}$.

6.273. **α)** Είναι $\int_\alpha^\beta \frac{f'(x)-f(x)}{e^x}dx = \int_\alpha^\beta \frac{f''(x)-f(x)}{e^x}dx = 0 \Leftrightarrow \left[e^{-x}f(x)\right]_\alpha^\beta = \left[e^{-x}f'(x)\right]_\alpha^\beta = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-\beta}f(\beta) = e^{\alpha}f(\alpha)$ και $e^{-\alpha}f'(\alpha) = e^{-\beta}f'(\beta)$ οπότε $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = \frac{f'(\alpha)}{f'(\beta)} \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$

οπότε εφαρμόζεται το Θ. Rolle για την $h(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ στο $[\alpha,\beta]$.

β) Είναι $h'(x) = \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$ και από το Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow (f'(\xi))^2 - f(\xi)f''(\xi) = 0$.

6.274. **α)** Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,x]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0,x)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) = xf'(\xi)$.

β) Είναι $h'(x) = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} + e^x = \frac{1}{x}\left(f'(x) - \frac{f(x)}{x}\right) + e^x$

Είναι $\xi < x$ και αφού $f'\uparrow$ τότε $f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow f'(x) - \frac{f(x)}{x} > 0$

οπότε $h'(x) > 0$ άρα $h\uparrow$ οπότε και 1–1.

γ) Αφού $h(x) = e^x + x^5 + x$ τότε $e^x + x^5 + x = \frac{f(x)}{x} + e^x \Leftrightarrow f(x) = x^6 + x^2$, οπότε

$I = \int_1^{e-1} f(x+1)dx = \int_2^e f(u)du = \int_2^e (x^6+x^2)dx = \left[\frac{x^7}{7}\right]_2^e + \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^e = \frac{e^7}{7} - \frac{128}{7} + \frac{e^3}{3} - \frac{8}{3}$.

6.275. **α)** $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} + e^x = \frac{x-1}{x} + e^x > 0$ αφού $x > 1$, οπότε $f\uparrow$.

β) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$ και

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x - \ln x + e^x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1 - \frac{\ln x}{x} + \frac{e^x}{x}\right)\right] = +\infty$

γ) Το σύνολο τιμών $f(A) = \left(\lim_{x\to1^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (1+e, +\infty)$ και επειδή $1821 \in f(A)$ και η $f\uparrow$ τότε η εξίσωση $f(x) = 1821$ έχει μοναδική λύση στο $(1,+\infty)$

δ) Είναι $I = \int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(x)dx$. Θέτουμε $f^{-1}(x) = u$ οπότε $x = f(u)$ και $dx = f'(u)du$.

Για $x = f(2) \Leftrightarrow f(u) = f(2)$ άρα $u = 2$ ενώ για $x = f(e) \Leftrightarrow f(e) = f(u)$ άρα $u = e$, οπότε

$\Pi = \int_2^e f(x)dx + \int_2^e uf'(u)du = \int_2^e [f(x) + xf'(x)]dx = \int_2^e [xf(x)]'dx = [xf(x)]_2^e =$

$ef(e) - 2f(2) = e^2 - e + e^{e+1} - 4 + 2\ln 2 - 2e^2$, οπότε $\Pi - 2\ln 2 = e^{e+1} - e^2 - e - 4$.

6.276. **α)** $f'(x)\sigma\upsilon\nu x+f(x)\eta\mu x=f(x)\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)\sigma\upsilon\nu x-f(x)(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\dfrac{f(x)\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\dfrac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=ce^x \Leftrightarrow f(x)=ce^x\sigma\upsilon\nu x$.

Για $x=\dfrac{\pi}{3}$ είναι $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=ce^{\frac{\pi}{3}}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{3}}=ce^{\frac{\pi}{3}}\cdot\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow c=2$,

άρα $f(x)=2e^x\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

β) $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}2e^x\sigma\upsilon\nu x dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}2(e^x)'\sigma\upsilon\nu x dx=\left[2e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}2e^x(-\eta\mu x)dx=$

$=2e^{\frac{\pi}{3}}\cdot\dfrac{1}{2}-2e^0\sigma\upsilon\nu 0+\int_0^{\frac{\pi}{3}}2(e^x)'\eta\mu x dx=e^{\frac{\pi}{3}}-2+2\left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-2\int_0^{\frac{\pi}{3}}e^x\sigma\upsilon\nu x dx=$

$=e^{\frac{\pi}{3}}-2+e^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{3}-2I \Leftrightarrow 3I=e^{\frac{\pi}{3}}-2+e^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{3} \Leftrightarrow I=\dfrac{1}{3}\left(e^{\frac{\pi}{3}}-2+e^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{3}\right)$

6.277. **α)** Η f είναι 1–1 γιατί διαφορετικά από Θ. Rolle θα υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ με $f'(\xi)=0$ που είναι άτοπο. Οπότε αφού η f είναι και συνεχής τότε θα είναι γνησίως μονότονη (1ο τεύχος).

β) Είναι $5<10$ και $f(5)<f(10)$ αφού $1<4$ οπότε η $f\uparrow$.

γ) $I=\int_1^4\dfrac{x}{f'(f^{-1}(x))}dx$. Θέτω $u=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$.

Για $x=1$ θα είναι $f(u)=1=f(5)$ άρα $u=5$ ενώ για $x=4$ θα είναι $f(u)=4=f(10)$ άρα $u=10$. Οπότε $I=\int_5^{10}\dfrac{f(u)}{f'(u)}f'(u)du=\int_5^{10}f(u)du$.

δ) Είναι $\int_5^{10}xf'(x)dx=5\Leftrightarrow\left[xf(x)\right]_5^{10}-\int_5^{10}f(x)dx=5\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10f(10)-5f(5)-\int_5^{10}f(x)dx=5\Leftrightarrow 35-\int_5^{10}f(x)dx=5\Leftrightarrow\int_5^{10}f(x)dx=30$

ε) Εστω $g(x)=e^x-x-1$ είναι $g'(x)=e^x-1$

	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$-$		$+$
g	$\searrow$		$\nearrow$

Οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $g(x)\geq g(0)$, $e^x-x-1\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq x+1$ και αφού $f\uparrow$

$f(e^x)\geq f(x+1)$ οπότε $\int_\alpha^\beta f(e^x)dx\geq\int_\alpha^\beta f(x+1)dx$.

6.278. **α)** Εστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ για τα οποία να ισχύει $f(x_1)\geq f(x_2)$ τότε $f^3(x_1)\geq f^3(x_2)$ και $2f(x_1)\geq 2f(x_2)$ οπότε $f^3(x_1)+2f(x_1)\geq f^3(x_2)+2f(x_2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1+3\geq x_2+3\Leftrightarrow x_1\geq x_2$ άτοπο, άρα για κάθε $x_1<x_2$ θα είναι $f(x_1)<f(x_2)$ οπότε $f\uparrow$.

β) Αφού $f\uparrow$ θα είναι και 1–1 οπότε αντιστρέφεται και αν $f(x)=y$ τότε $x=f^{-1}(y)$ και από τη σχέση $f^3(x)+2f(x)=x+3$ (1) προκύπτει $f^{-1}(y)=y^3+2y-3$, $y\in\mathbb{R}$ άρα $f^{-1}(x)=x^3+2x-3$.

γ) Αφού $f\uparrow$ τότε $f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f^{-1}(x)=x\Leftrightarrow x^3+2x-3=x\Leftrightarrow x^3+x-3=0$.

Εστω $g(x)=x^3+x-3$ είναι $g'(x)=3x^2+1>0$ οπότε $g\uparrow$ και

$g(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)=(-\infty,+\infty)$, οπότε η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα άρα και η εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$ έχει μοναδική ρίζα.

δ) $I=\int_{-3}^{0}f(x)dx$. Εστω $f(x)=u$ οπότε $x=f^{-1}(u)\Leftrightarrow x=u^3+2u-3$ και $dx=(3u^2+2)du$.

Για $x=-3$ είναι $f^{-1}(u)=-3=f^{-1}(0)$ άρα $u=0$ ενώ για $x=0$ είναι $f^{-1}(u)=0=f^{-1}(1)$

άρα $u=1$ οπότε $I=\int_0^1 u(3u^2+2)du=\left[\frac{3u^4}{4}+u^2\right]_0^1=\frac{7}{4}$.

ε) Εχουμε $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f^3(x)}{f^{-1}(x)+x}$. Είναι $f^{-1}(x)=x^3+2x-3$ η οποία είναι $\uparrow$ και με σύνολο τιμών

$f^{-1}(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f^{-1}(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(x)\right)=(-\infty,+\infty)$. Εστω $f(x)=u\Leftrightarrow\ x=f^{-1}(u)$ και

$f^{-1}(x)=f^{-1}\left(f^{-1}(u)\right)=f^{-1}(u^3+2u-3)$. Όταν $x\to+\infty$ τότε $f^{-1}(u)\to+\infty$ άρα $u\to+\infty$ και

$$L=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^3}{(u^3+2u-3)^3+2(u^3+2u-3)-3+(u^3+2u-3)}=0.$$

στ) Παραγωγίζουμε στην (1) και έχουμε: $3f^2(x)f'(x)+2f'(x)=1$ (2) και

$6f(x)(f'(x))^2+3f^2(x)f''(x)+2f''(x)=0$

Για $x=x_0$ έχουμε $6f(x_0)f'(x_0)=0$, αφού $f''(x_0)=0$, οπότε $f(x_0)=0$ ή $f'(x_0)=0$, (άτοπο από (2)). Οπότε στην (1) για $x=x_0$ έχουμε $0=x_0+3\Leftrightarrow x_0=-3$.

ζ) Η εξίσωση είναι $x^3+2x-3=e^{1-x}\Leftrightarrow x^3+2x-3-e^{1-x}=0$. Έστω $h(x)=x^3+2x-3-e^{1-x}$ είναι $h'(x)=3x^2+2+e^{1-x}>0$ οπότε η h είναι $\uparrow$ και $h(1)=-1<0$, $h(2)=9-\frac{1}{e}>0$ οπότε έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

6.279. **α)** $f'(x)=\frac{g'(x)-g(x)}{e^x}=\frac{e^xg'(x)-e^xg(x)}{(e^x)^2}\Leftrightarrow f'(x)=\left(\frac{g(x)}{e^x}\right)'\Leftrightarrow f(x)=\frac{g(x)}{e^x}+c$.

Για $x=1$ $f(1)=\frac{ef(1)}{e}+c\Rightarrow c=0$, οπότε $f(x)=g(x)e^{-x}$, $x\geq 0$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=-1$ οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{xg(x)-2x^2e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^xf(x)}{xe^xf(x)-2x^2e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^xf(x)}{e^x\cdot x(f(x)-2x)}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{f(x)-2x}\right]=2\frac{1}{-1}=-2.$$

γ) Επειδή $g(x)>g'(x)\Leftrightarrow e^x f(x)>e^x f'(x)+e^x f(x)\Leftrightarrow e^x f'(x)<0\Leftrightarrow f'(x)<0$

οπότε $xf'(x)\le 0$ άρα $\int_0^1 xf'(x)dx\le 0\Leftrightarrow \left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 f(x)dx\le 0\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx\ge f(1)$.

6.280. α) Από τη σχέση $f^2(x)+2e^x f(x)=3e^{2x}+8e^x+4\Leftrightarrow f^2(x)+2e^x f(x)+e^{2x}=4e^{2x}+8e^x+4\Leftrightarrow$

$\left(f(x)+e^x\right)^2=\left(2e^x+2\right)^2$.

Εστω $h(x)=f(x)+e^x$. Επειδή $2e^x+2\neq 0$ τότε $h^2(x)\neq 0$ και $h(x)\neq 0$. Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε θα διατηρεί πρόσημα και εφόσον $h(0)=f(0)+e^0=4>0$ τότε $h(x)>0$ δηλαδή $h(x)=2e^x+2\Leftrightarrow f(x)+e^x=2e^x+2$ οπότε $f(x)=e^x+2$.

β) $I=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+2}dx=\left[\ln\left(e^x+2\right)\right]_0^1=\ln(e+2)-\ln 3$

γ) $D_{f\circ g}=\left\{x\in D_g / g(x)\in D_f\right\}$ $\left.\begin{matrix}x>0\\ \ln x\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\}x>0$

$D_{f\circ g}=(0,+\infty)$, $(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=x+2$, $x>0$

δ) $L=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot(f\circ g)(x)-\eta\mu^2 x}{(f\circ g)(x)+\eta\mu x-2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot(x+2)-\eta\mu^2 x}{x+2+\eta\mu x-2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+2x-\eta\mu^2 x}{x+\eta\mu x}=$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\left(x+2-\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu x\right)}{x\left(1+\frac{\eta\mu x}{x}\right)}=\frac{0+2-1\cdot 0}{1+1}=1$$

6.281. α) $f''(x)f(x)+\left[f'(x)\right]^2=f(x)f'(x)\Leftrightarrow\left[f'(x)f(x)\right]'=f(x)f'(x)\Leftrightarrow f'(x)f(x)=c_1e^x$

Για $x=0$ είναι $c_1=\frac{1}{2}$ άρα $2f(x)f'(x)=e^x\Leftrightarrow\left(f^2(x)\right)'=\left(e^x\right)'\Leftrightarrow f^2(x)=e^x+c_2$

για $x=0$ προκύπτει $c_2=0$ άρα $f^2(x)=e^x$. Όμως $e^x\neq 0$ άρα $f(x)\neq 0$ και αφού η f συνεχής διατηρεί πρόσημο. Είναι $f(0)=1>0$ άρα $f(x)=\sqrt{e^x}\Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{x}{2}}$

β) Εστω $g(x)=x^{2\kappa}\ln f(x)=x^{2\kappa}\ln e^{\frac{x}{2}}=\frac{x^{2\kappa+1}}{2}$.

Η g είναι περιττή στο $\mathbb{R}$ γιατί $g(-x)=\frac{(-x)^{2\kappa+1}}{2}=-\frac{x^{2\kappa+1}}{2}=-g(x)$.

Οπότε $I=\int_{-\alpha}^{\alpha}g(x)dx=\int_{-\alpha}^{0}g(x)dx+\int_0^{\alpha}g(x)dx=\int_0^{\alpha}g(x)dx-\int_0^{-\alpha}g(x)dx$.

Εστω $x=-u$ και $dx=-du$ για $x=0\Leftrightarrow u=0$ ενώ για $x=-\alpha\Rightarrow u=\alpha$ άρα

$I=\int_0^{\alpha}g(x)dx-\int_0^{\alpha}g(-u)(-du)=\int_0^{\alpha}g(x)dx-\int_0^{\alpha}g(u)du=0$.

6.282. α) Είναι $f''(x)<0$ και αφού f' συνεχής θα είναι $f'\downarrow$ στο $[2,3]$ άρα για $x\le 3$ έχουμε

$f'(x) \geq f'(3) = 1 > 0$ οπότε $f'(x) > 0$ άρα $f \uparrow$ στο $[2,3]$ με σύνολο τιμών $f(A) = [f(2), f(3)] = [0,3]$.

β) Η εφαπτομένη της C_f στο $(3, f(3))$ είναι $y - f(3) = f'(3)(x-3) \Leftrightarrow$

$y - 3 = 1(x-3) \Leftrightarrow y = x$

γ) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[2,x]$, υπάρχει $\xi_1 \in (2,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x,3]$, υπάρχει $\xi_2 \in (x,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(3)-f(x)}{3-x}$

Είναι $\xi_1 < \xi_2$ και $f' \downarrow$ οπότε $f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} > \dfrac{f(3)-f(x)}{3-x}$.

δ) Αν $x \in (2,3)$ τότε $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} > \dfrac{f(3)-f(x)}{3-x} \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x-2} > \dfrac{3-f(x)}{3-x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3f(x) - xf(x) > 3x - 6 - xf(x) + 2f(x) \Leftrightarrow f(x) > 3(x-2)$.

Επιπλέον για $x = 2$ και $x = 3$ είναι $f(x) = 3(x-2)$. Οπότε για κάθε $x \in [2,3]$ θα είναι $f(x) \geq 3(x-2)$.

ε) Είναι $f(x) - 3(x-2) \geq 0$ και η $f(x) - 3(x-2)$ συνεχής στο $[2,3]$ οπότε

$$\int_2^3 [f(x) - 3(x-2)]dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_2^3 f(x)dx \geq \int_2^3 3(x-2)dx = \frac{3}{2}.$$

6.283. α) $\alpha\beta \leq \dfrac{(\alpha+\beta)^2}{4} \Leftrightarrow 4\alpha\beta \leq \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \geq 0$ ισχύει.

β) $\int_4^5 g(x)dx = \int_4^{x_1} g(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx + \int_{x_2}^5 g(x)dx \geq \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx$ αφού $g(x) \geq 0$ οπότε και $\int_4^{x_1} g(x)dx \geq 0$, $\int_{x_2}^5 g(x)dx \geq 0$

γ) Επειδή $f(4) = f(5) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (4,5)$, υπάρχει $x_0 \in (4,5)$ τέτοιο, ώστε η f να παρουσιάζει μέγιστη τιμή M. Δηλαδή $f(x_0) = M$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[4, x_0], [x_0, 5]$ για την f οπότε υπάρχουν

$\rho_1 \in (4, x_0)$, $\rho_2 \in (x_0, 5)$ τέτοια ώστε $f'(\rho_1) = \dfrac{f(x_0) - f(4)}{x_0 - 4} = \dfrac{M}{x_0 - 4}$ και

$f'(\rho_2) = \dfrac{f(5) - f(x_0)}{5 - x_0} = \dfrac{-M}{5 - x_0}$ και $f'(\rho_1) - f'(\rho_2) = \dfrac{M}{x_0 - 4} + \dfrac{M}{5 - x_0} = \dfrac{M}{(x_0-4)(5-x_0)}$ (1)

Από το (α) ερώτημα για $\alpha = x_0 - 4$, $\beta = 5 - x_0$ έχουμε

$(x_0-4)(5-x_0) \leq \dfrac{(x_0 - 4 + 5 - x_0)^2}{4} \Leftrightarrow \dfrac{M}{(x_0-4)(5-x_0)} \geq 4M$

οπότε από (1) $f'(\rho_1) - f'(\rho_2) \geq 4M$.

6.284. α) $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$, $D_f = (0, +\infty)$ με $f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

	0	e	$+\infty$
f'	+		−
f	↗		↘

Η f έχει μέγιστο το $f(e)=e^{\frac{1}{e}}$

β) Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)\le f(e)\Leftrightarrow f(x)\le e^{\frac{1}{e}}=\sqrt[e]{e}$

γ) Αφού $f(x)\le e^{\frac{1}{e}}\Leftrightarrow x^{\frac{1}{x}}\le e^{\frac{1}{e}}\Leftrightarrow$

$\ln x^{\frac{1}{x}}\le \ln e^{\frac{1}{e}}\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}\le\frac{1}{e}\Leftrightarrow e\ln x\le x\Leftrightarrow \ln x^e\le \ln e^x\Leftrightarrow x^e\le e^x$

δ) Είναι $x^{\frac{1}{x}}\le e^{\frac{1}{e}}$ οπότε $\int_e^{2e}x^{\frac{1}{x}}dx\le\int_e^{2e}e^{\frac{1}{e}}dx\Leftrightarrow\int_e^{2e}x^{\frac{1}{e}}dx\le e^{\frac{1}{e}}\cdot e=e^{\frac{1}{e}+1}=e^{\frac{e+1}{e}}$.

ε) Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ οπότε $f(A)=\left(0,e^{\frac{1}{e}}\right]$.

6.285. **α)** $\int_0^2 xf''(x)dx=\left[xf'(x)\right]_0^2-\int_0^2 f'(x)dx=2f'(2)-\left[f(x)\right]_0^2=2f'(2)-f(2)$.

β) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,2]$ $f'(\xi)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}\Rightarrow 2f'(\xi)=f(2)$.

Άρα η σχέση του ερωτήματος (α) γίνεται $\int_0^2 xf''(x)dx=2f'(2)-2f'(\xi)=2\left[f'(2)-f'(\xi)\right]$.

γ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για f' στο $[\xi,2]$ οπότε υπάρχει $\theta\in(\xi,2)\subseteq(0,2)$ τέτοιο ώστε

$f''(\theta)=\frac{f'(2)-f'(\xi)}{2-\xi}\Leftrightarrow(2-\xi)f''(\theta)=f'(2)-f'(\xi)$. Οπότε η σχέση του ερωτήματος (β)

γίνεται $(2-\xi)f''(\theta)=\frac{\int_0^2 xf''(x)dx}{2}\Leftrightarrow\int_0^2 xf''(x)dx=2f''(\theta)(2-\xi)$.

6.286. **α)** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $\int_1^{f(x)}\left(3t^2+4\right)dt=x$ ή $\left[t^3+4t\right]_1^{f(x)}=x$

άρα $f^3(x)+4f(x)-5=x\Leftrightarrow f^3(x)+4f(x)=x+5 \quad (1)$

β) Η f είναι παραγωγίσμη στο $\mathbb{R}$ άρα και η $f^3(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε

παραγωγίζοντας την (1) έχουμε: $3f^2(x)f'(x)+4f'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{3f^2(x)+4}>0$.

Επομένως η f είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ άρα και 1−1.

Ισχύει $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ με $x,y\in\mathbb{R}$ αφού $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Οπότε $y^3+4y=f^{-1}(y)+5\Leftrightarrow f^{-1}(y)=y^3+4y-5$. Άρα $f^{-1}(x)=x^3+4x-5$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) Εστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη $\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow$

$y-f(x_0)=\frac{1}{3f^2(x_0)+4}(x-x_0)\underset{A(-3,0)}{\overset{\delta\iota\varepsilon\rho}{\Rightarrow}}0-f(x_0)=\frac{1}{3f^2(x_0)+4}(-3-x_0)\Leftrightarrow$

$3f^3(x_0)+4f(x_0)=3+x_0\Leftrightarrow 2f^3(x_0)+f^3(x_0)+4f(x_0)=3+x_0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$2f^3(x_0)+x_0+5=3+x_0\Leftrightarrow f^3(x_0)=-1\Leftrightarrow f(x_0)=-1$

και στην (1) για $x=x_0$: $-1-4=x_0+5\Leftrightarrow x_0=-10$.

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y-(-1)=\frac{1}{3(-1)^2+4}(x-(-10)) \Leftrightarrow y=\frac{1}{7}x+\frac{3}{7}$.

δ) Είναι $I=\int_{-5}^{0} f(x)dx$ και $f^{-1}(x)=x^3+4x-5$. Έστω $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)=y^3+4y-5$ και $dx=(3y^2+4)dy$. Για $x=-5$ $f^{-1}(y)=-5=f^{-1}(0)$ άρα $y=0$. Για $x=0$ $f^{-1}(y)=0=f^{-1}(1)$ άρα $y=1$. Οπότε $\int_0^1 y(3y^2+4)dy=\int_0^1(3y^3+4y)dy=\left[\frac{3y^4}{4}\right]_0^1+\left[2y^2\right]_0^1=\frac{11}{4}$.

6.287. α) Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1,x_2]$, οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ και αφού $f'(\xi)\neq 0$ τότε $f(x_1)\neq f(x_2)$. Δείξαμε για $x_1\neq x_2$ ότι $f(x_1)\neq f(x_2)$ οπότε η f είναι 1–1.

β) Στη σχέση $f(x)+f(\alpha-x)=0$ για $x=\frac{\alpha}{2}$ έχουμε $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)+f\left(\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 2f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$ $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=0$ άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζα $\rho=\frac{\alpha}{2}$ και αφού είναι 1–1 θα είναι μοναδική.

γ) Εστω $I_1=\int_0^{\alpha} f(x)dx$ τότε $f(x)=-f(\alpha-x)$ οπότε και

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx=-\int_0^{\alpha} f(\alpha-x)dx \underset{\alpha-x=u}{\overset{\text{θέτω}}{=}} -\int_{\alpha}^{0} f(u)(-du)=-\int_0^{\alpha} f(u)du=-I_1.$$

Οπότε $I_1=-I_1 \Leftrightarrow 2I_1=0 \Leftrightarrow I_1=0$.

6.288. α) Εστω ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $[1,3]$

- Αν ήταν $f(x_0)>0$ τότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,3]$, οπότε $\int_1^3 f(x)dx>0$ (άτοπο)
- Αν ήταν $f(x_0)<0$ τότε $f(x)<0$ για κάθε $x\in[1,3]$, οπότε $\int_1^3 f(x)dx<0$ (άτοπο)

Οπότε η f δεν διατηρεί πρόσημο στο $[1,3]$, δηλαδή υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in[1,3]$ με $f(\xi_1)\cdot f(\xi_2)<0$ οπότε αφού f συνεχής, από Θ. Bolzano υπάρχει $\rho\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq[1,3]$ ώστε $f(\rho)=0$.

β) Εστω ότι η f'' διατηρεί πρόσημο στο $(1,3)$ και είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(1,3)$, άρα η f' θα είναι $\uparrow$ στο $[1,3]$ οπότε και 1–1. Επειδή $f(1)=f(3)=f(\rho)=0$ τότε από Θ. Rolle υπάρχουν $\theta_1\in(1,\rho)$ και $\theta_2\in(\rho,3)$ ώστε $f'(\theta_1)=0$ και $f'(\theta_2)=0$, οπότε $f'(\theta_1)=f'(\theta_2)=0$ και αφού f' είναι 1–1 τότε $\theta_1=\theta_2$ (άτοπο). Συνεπώς η f'' δεν διατηρεί πρόσημο στο $(1,3)$ άρα υπάρχουν $x_1,x_2\in(1,3)$ με $f''(x_1)\cdot f''(x_2)<0$.

6.289. α) Αφού f' συνεχής και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,2]$ τότε η f' διατηρεί πρόσημο. Επειδή $f'(1)>0$ τότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[1,2]$ άρα η $f\uparrow$ στο $[1,2]$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$, άρα με Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(1,2): f'(\xi)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1} \Leftrightarrow$ $f'(\xi)=f(2)$. Συνεπώς η εξίσωση $f'(x)=f(2)$ έχει μία ρίζα το $x_0=\xi\in(1,2)$.

γ) Για $\xi<2 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi)>f'(2) \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} f(2)>f'(2) \Leftrightarrow \dfrac{f(2)}{f'(2)}>1$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_1^2 \frac{dx}{f^2(x)+1} \le 1 \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{1}{f^2(x)+1}dx \le \int_1^2 dx \Leftrightarrow \int_1^2 \left(\frac{1}{f^2(x)+1}-1\right)dx \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 \frac{-f^2(x)}{f^2(x)+1}dx \le 0 \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{f^2(x)}{f^2(x)+1}dx \le 0$$ που ισχύει αφού $\dfrac{f^2(x)}{f^2(x)+1} \ge 0$.

6.290. α) Θεωρούμε την $h(x)=f(x)-xe^{3x}$ είναι $h(x)\ge 0$ και $h(0)=0$ άρα $h(x)\ge h(0)$ και αφού το 0 είναι εσωτερικό το $\mathbb{R}$, από το Θ. Fermat θα είναι $h'(0)=0$.

Όμως $h'(x)=f'(x)-e^{3x}-3xe^{3x}$ άρα $h'(0)=f'(0)-1=0 \Leftrightarrow f'(0)=1$.

β) Αφού $f'(0)=1$ τότε για $x\neq 0$ είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(x)}{x\eta\mu 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(x)}{x^2\dfrac{\eta\mu 3x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2\dfrac{1}{3\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}}\right]=1\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

γ) Επειδή $f(x)\ge xe^{3x}$ τότε $f(x)e^{-2x}\ge xe^{x} \Leftrightarrow (1)\ f(x)e^{-2x}-xe^{x}\ge 0$ οπότε $\int_0^1\left(f(x)e^{-2x}-xe^{x}\right)dx\ge 0$. Θεωρούμε $\varphi(x)=f(x)e^{-2x}-xe^{x}$, τότε $\int_0^1\varphi(x)dx\ge 0$. Έστω ότι υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)\neq 0$, τότε $\varphi(x_0)>0$ από (1) άρα $\int_0^1\varphi(x)dx>0$ το οποίο είναι άτοπο. Οπότε $\varphi(x)=0 \Leftrightarrow f(x)e^{-2x}=xe^{x} \Leftrightarrow f(x)=xe^{3x}$.

6.291. α) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+11}-\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{-20x}{(x^2+11)(x^2+1)}$

	-3		0		3
f'		$+$		$-$	
f	$\ln 2$	$\nearrow$	$\ln 11$	$\searrow$	$\ln 2$

οπότε

$f(0)=\ln 11-\ln 1=\ln 11$,

$f(-3)=f(3)=\ln 20-\ln 10=\ln 2$ οπότε $f(A)=[\ln 2,\ln 11]$

β) Επειδή $\ln 6,\ln 5\in(\ln 2,\ln 11)$ τότε από Θ.Ε.Τ. υπάρχουν $x_1,x_2\in(-3,3)$ τέτοια ώστε $f(x_1)=\ln 5$, $f(x_2)=\ln 6$. Εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. στο $[x_1,x_2]$ ή $[x_2,x_1]$ υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)\subseteq(-3,3)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ή $|f'(x_0)|=\dfrac{\ln 6-\ln 5}{|x_1-x_2|}$

όμως $|x_2-x_1|\le|x_2|+|x_1|<3+3=6$ άρα $|f'(x_0)|>\dfrac{\ln 6-\ln 5}{6} \Leftrightarrow f'(x_0)>\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{6}{5}$.

γ) Για κάθε $x\in[-3,3]$ έχουμε $\ln 2\le f(x)\le \ln 11 \Leftrightarrow e^{\ln 2}\le e^{f(x)}\le e^{\ln 11} \Leftrightarrow 2\le e^{f(x)}\le 11$ οπότε

$$\int_{-3}^{3}2dx\le\int_{-3}^{3}e^{f(x)}dx\le\int_{-3}^{3}11dx \Leftrightarrow 12\le\int_{-3}^{3}e^{f(x)}dx\le 66 \Leftrightarrow 2\le\frac{1}{6}\int_{-3}^{3}e^{f(x)}dx\le 11.$$

6.292. **α)** Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{συν^2x}>0$ άρα $f\uparrow$ στο $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ και $g'(x)=-\dfrac{1}{ημ^2x}<0$, οπότε η $g\downarrow$ στο $(0,\pi)$ άρα f,g είναι 1–1 και αντιστρέφονται.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} εφx=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\left(\dfrac{1}{συνx}ημx\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=+\infty$

και αφού $f\uparrow$ στο $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ τότε $f(A)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ άρα $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$.

Αντίστοιχα $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{ημx}συνx\right)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to\pi^-} g(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-}\left(\dfrac{1}{ημx}συνx\right)=-\infty$

και αφού $g\downarrow$ στο $(0,\pi)$ τότε $g(A)=\mathbb{R}$ άρα $D_{g^{-1}}=\mathbb{R}$.

γ) Εχουμε $I=\int_1^{\sqrt3} f^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)dx$. Θέτω $\dfrac{1}{x}=y \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{y}$ και $dx=-\dfrac{1}{y^2}dy$ για $x=1$ είναι $y=1$ ενώ για $x=\sqrt3$ είναι $y=\dfrac{\sqrt3}{3}$ άρα $I=\int_1^{\frac{\sqrt3}{3}} f^{-1}(y)\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)dy=-\int_1^{\frac{\sqrt3}{3}}\dfrac{f^{-1}(y)}{y^2}dy$.

Θέτουμε $y=f(\omega)$ οπότε $dy=f'(\omega)d\omega$ και για $y=1$είναι $f(\omega)=1\Leftrightarrow εφ\omega=1\Leftrightarrow \omega=\dfrac{\pi}{4}$ ενώ για $y=\dfrac{\sqrt3}{3}$: $f(\omega)=\dfrac{\sqrt3}{3}\Leftrightarrow εφ\omega=\dfrac{\sqrt3}{3}=εφ\dfrac{\pi}{6}$ άρα $\omega=\dfrac{\pi}{6}$. Οπότε

$$I=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{f^{-1}(f(\omega))}{f^2(\omega)}f'(\omega)d\omega=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\omega f'(\omega)}{f^2\omega}d\omega=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\omega\left(\frac{1}{f(\omega)}\right)'d\omega=$$

$$=\left[\omega\frac{1}{f(\omega)}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{f(\omega)}d\omega,\ \text{όμως } \frac{1}{f(\omega)}=g(\omega) \text{ άρα } I=\left[xg(x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}g(x)dx \quad (1).$$

Επίσης $J=\int_1^{\sqrt3} g^{-1}(x)dx=$. Θέτω $x=g(u)$ οπότε $dx=g'(u)du$ και $x=1$, άρα για $g(u)=1\Leftrightarrow σφu=σφ\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow u=\dfrac{\pi}{4}$ και για $g(u)=\sqrt3 \Leftrightarrow σφu=σφ\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow u=\dfrac{\pi}{6}$ και

$$J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}g^{-1}(g(u))g'(u)du=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}ug'(u)du=\left[ug(u)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}g(u)du \quad (2)$$

Από $(1),(2)$ προκύπτει ότι $I=J$.

6.293. **α)** **i.** Στην (1) $f(x+2)=f(x)+4x$ για $x=0$ προκύπτει $f(0)=f(2)$ οπότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0 \quad (3)$.

ii. Παραγωγίζουμε στην (1), οπότε $f'(x+2)=f'(x)+4 \quad (4)$ και για $x=0$: $f'(2)-f'(0)=4$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για f' στο $[0,2]$ οπότε υπάρχει $x_0\in(0,2)$ ώστε

$$f''(x_0)=\frac{f'(2)-f'(0)}{2-0}=\frac{4}{2}=2$$

iii. $\int_\xi^{\xi+2}xf''(x)dx=\left[xf'(x)\right]_\xi^{\xi+2}-\int_\xi^{\xi+2}f'(x)dx=$

$$=(\xi+2)f'(\xi+2)-\xi f'(\xi)-\left[f(\xi+2)-f(\xi)\right]\overset{(1),(3),(4)}{=}$$
$$=(\xi+2)\left[f'(\xi)+4\right]-0-4\xi=4\xi+8-4\xi=8.$$

β) Ολοκληρώνοντας στην (1) έχουμε $\int_0^2 f(x+2)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 4xdx\quad(5)$.

Θέτω $x+2=u$ οπότε $dx=du$ και η (5) γίνεται $\int_2^4 f(u)du=\int_0^2 f(x)dx+\left[2x^2\right]_0^2\Leftrightarrow$

$\int_2^0 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+8\Leftrightarrow -2\int_0^2 f(x)dx=4$ οπότε $\int_0^2 f(x)dx=-2$.

6.294. α) $h'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$ οπότε η $h\downarrow$ στο $[\alpha,\beta]$

β) i. Είναι $\alpha\le x\le\beta$, τότε $h(\alpha)\ge h(x)\ge h(\beta)$ και προκύπτει

$$\frac{f(\beta)}{\beta}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{f(\alpha)}{\alpha}\Leftrightarrow\frac{f(\beta)}{\beta}x\le f(x)\le\frac{f(\alpha)}{\alpha}x\quad(1)$$

ii. Ολοκληρώνοντας στην (1) προκύπτει $\dfrac{f(\beta)}{\beta}\int_\alpha^\beta xdx\le\int_\alpha^\beta f(x)dx\le\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}\int_\alpha^\beta xdx\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{f(\beta)}{\beta}\cdot\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2}\le\int_\alpha^\beta f(x)dx\le\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2}\Leftrightarrow h(\beta)\le\dfrac{2}{\beta^2-\alpha^2}\int_\alpha^\beta f(x)dx\le h(\alpha)$ και

αφού η h είναι συνεχής, από Θ.Ε.Τ. υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi)=\frac{2}{\beta^2-\alpha^2}\int_\alpha^\beta f(x)dx\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{2\xi}{\beta^2-\alpha^2}\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

6.295. α) Είναι $f'(x)-2xf(x)=0\overset{\cdot e^{-x^2}}{\Leftrightarrow}e^{-x^2}f'(x)-2xe^{-x^2}f(x)=0\Leftrightarrow\left(e^{-x^2}f(x)\right)'=0$ άρα $e^{-x^2}f(x)=c$

και για $x=1$: $e^{-1}f(1)=c\Leftrightarrow c=1$ άρα $e^{-x^2}f(x)=1\Leftrightarrow f(x)=e^{x^2}$.

β) Εστω F αρχική τις f τότε από Θ.Μ.Τ. στο $[0,1]$ υπάρχει

$$x_0\in(0,1):F'(x_0)=\frac{F(1)-F(0)}{1-0}\Leftrightarrow f(x_0)=F(1)-F(0).$$

Επίσης $\int_0^1 f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^1=F(1)-F(0)$ άρα $\int_0^1 f(x)dx=f(x_0)=e^{x_0^2}$

άρα $\ln\left(\int_0^1 f(x)dx\right)=\ln e^{x_0^2}=x_0^2$.

γ) $D_f=\mathbb{R}$ και $f(-x)=e^{(-x)^2}=e^{x^2}=f(x)$ οπότε η f είναι άρτια και

$$\int_{-\alpha}^0 f(x)dx\underset{x=-u}{\overset{\text{θέτω}}{=}}\int_\alpha^0 f(-u)(-du)=\int_0^\alpha f(u)du.$$

6.296. α) Είναι $\left(e^xf(x)+e^xf'(x)\right)+f'(x)=-\eta\mu x\Leftrightarrow\left(e^xf(x)+f(x)\right)'=(\sigma\upsilon\nu x)'$

άρα $(e^x+1)f(x)=\sigma\upsilon\nu x+c$. Για $x=0$ προκύπτει $c=0$, οπότε $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x+1}$.

β) $f(x)+f(-x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x+1}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu(-x)}{e^{-x}+1}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x+1}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\frac{1}{e^x}+1}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x+1}+\dfrac{e^x\sigma\upsilon\nu x}{e^x+1}=$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu x\left(e^x+1\right)}{e^x+1}=\sigma\upsilon\nu x$$

γ) Είναι $\frac{-1}{e^x+1}\le\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x+1}\le\frac{1}{e^x+1}$ και αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x+1}=0$ τότε από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, οπότε ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

δ) Από τη σχέση $f(x)+f(-x)=\sigma\upsilon\nu x$ έχουμε $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(-x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x\,dx$ (1)

Θέτω $-x=u$ οπότε $dx=-du$ και για $x=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow u=-\frac{\pi}{2}$ ενώ για $x=-\frac{\pi}{2}$ είναι $u=\frac{\pi}{2}$

οπότε $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(-x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(u)(-du)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(u)du$ και η (1) γίνεται

$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\left[\eta\mu x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\Leftrightarrow\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=1.$

ε) Είναι $f'(x)=-\frac{\eta\mu x\left(1+e^x\right)+e^x\sigma\upsilon\nu x}{\left(1+e^x\right)^2}<0$ όταν $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $f(0)=\frac{1}{2}$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Άρα η $f\downarrow$ στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ $0\le f(x)\le\frac{1}{2}$ άρα $0\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx\le\frac{\pi}{4}$.

6.297. **α)** Αφού F παράγουσα της f τότε

$2\int_x^1 f(t)dt+x^2\ge1\Leftrightarrow2\left[F(t)\right]_x^1+x^2\ge1\Leftrightarrow2\left(F(1)-F(x)\right)+x^2\ge1,$

οπότε ολοκληρώνοντας

$2\int_0^1F(1)dx-2\int_0^1F(x)dx+\int_0^1x^2dx\ge\int_0^1 1dx\Leftrightarrow2F(1)-2\int_0^1F(x)dx+\frac{1}{3}\ge1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow2F(1)-\frac{2}{3}\ge2\int_0^1F(x)dx$. Άρα $\int_0^1F(x)dx\le F(1)-\frac{1}{3}$ (1)

β) Είναι $\left[xF(x)\right]'=xF'(x)+F(x)\Leftrightarrow\left[xF(x)\right]'=xf(x)+F(x)$,

οπότε και $\int_0^1\left[xF(x)\right]'dx=\int_0^1xf(x)dx+\int_0^1F(x)dx$ (2).

γ) Από (2) έχουμε $\left[xF(x)\right]_0^1=\int_0^1xf(x)dx+\int_0^1F(x)dx\Leftrightarrow F(1)-\int_0^1F(x)dx=\int_0^1xf(x)dx$ (3)

Επίσης από (1) $\Leftrightarrow F(1)-\int_0^1F(x)dx\ge\frac{1}{3}$ (4).

Άρα από (3),(4) προκύπτει ότι $\int_0^1xf(x)dx\ge\frac{1}{3}$.

δ) Είναι $\left(f(x)-x\right)^2\ge0$ για κάθε $x\in[0,1]$ οπότε και $f^2(x)-2xf(x)+x^2\ge0$ άρα

$\int_0^1f^2(x)dx-2\int_0^1xf(x)dx+\int_0^1x^2dx\ge0\Leftrightarrow\int_0^1f^2(x)dx\ge2\int_0^1xf(x)dx-\frac{1}{3}\ge2\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

Άρα $\int_0^1f^2(x)dx\ge\frac{1}{3}$.

Η Συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

6.324. **α)** $g(t)=\dfrac{1}{t^4+1}$ $D_g=\mathbb{R}$ άρα $D_f=\mathbb{R}$

β) $g(t)=\ln t+t^2$ $D_g=(0,+\infty)$ $1\in(0,+\infty)$ άρα $D_f=(0,+\infty)$

γ) $g(t)=\sqrt[4]{t^2-1}$ $D_g=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ $-2\in(-\infty,-1]$ άρα $D_f=(-\infty,-1]$

δ) $g(t)=\dfrac{e^t\eta\mu 2t}{t}$ $D_g=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

αφού $1\in(0,+\infty)$ πρέπει $x^2-1>0$ $x<-1$ ή $x>1$ $D_f=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

ε) $g(t)=\dfrac{t^{10}+1}{t-2}$ $D_g=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

αφού $5\in(2,+\infty)$ πρέπει $x-3>2\Leftrightarrow x>5$ άρα $D_f=(5,+\infty)$

στ) $g(t)=\dfrac{\sqrt{t^2-1}}{\ln(t-2)}$ $D_g=(2,+\infty)$ πρέπει $\dfrac{1}{x}>2\Leftrightarrow\dfrac{1-2x}{x}>0\Leftrightarrow x(1-2x)>0$ $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

άρα $D_f=\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

ζ) $g(t)=\sqrt{9-t^2}$ με $D_g=[-3,3]$ πρέπει

$$\begin{cases}-3\le\sqrt{x-1}\le 3\\ x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}\le 3\\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\le 9\\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 10\\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow 1\le x\le 10$$, άρα $D_f=[1,10]$

η) $g(t)=\sqrt{t^2-4}$ με $D_g=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

- $\left.\begin{array}{l}2x\le -2\\ \dfrac{1}{x}\le -2\end{array}\right|\begin{array}{l}x\le -1\\ -\dfrac{1}{2}\le x<0\end{array}$ δεν συναληθεύουν
- $\left.\begin{array}{l}2x\ge 2\\ \dfrac{1}{x}\ge 2\end{array}\right|\begin{array}{l}x\ge 1\\ 0<x\le\dfrac{1}{2}\end{array}$ δεν συναληθεύουν άρα δεν ορίζεται f

θ) $g(t)=\sqrt{t-8}$ $D_g=[8,+\infty)$ πρέπει $\begin{cases}3x-4\ge 8\\ x\ge 8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 4\\ x\ge 8\end{cases}\Rightarrow x\ge 8$ οπότε $D_f=[8,+\infty)$

6.325. Πρέπει να δικαιολογούμε την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης που ορίζεται από ολοκλήρωμα μέσω της συνέχειας της συνάρτησης που βρίσκεται στο εσωτερικό του ολοκληρώματος.

α) $f'(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2+1}$

β) $f'(x)=\sqrt{1-\eta\mu^2x}\cdot\sigma\upsilon\nu x=|\sigma\upsilon\nu x|\cdot\sigma\upsilon\nu x$

γ) $f(x)=-\int_0^{\sqrt{x-2}}2\ln\sqrt{t^2+4}\,dt$ οπότε $f'(x)=-2\ln\sqrt{x+2}\,\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}=-\dfrac{\ln\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$

δ) $f(x)=\int_x^{2x}\sigma\upsilon\nu^{10}t\,dt=\int_c^{2x}\sigma\upsilon\nu^{10}t\,dt-\int_c^{x}\sigma\upsilon\nu^{10}t\,dt$ άρα $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu^{10}2x-\sigma\upsilon\nu^{10}x$

ε) $f(x)=\int_{e^{-x}}^{e^{x}}\ln^6 u\,du=\int_c^{e^x}\ln^6 u\,du-\int_c^{e^{-x}}\ln^6 u\,du$ άρα $f'(x)=\ln^6 e^x\cdot e^x+\ln^6 e^{-x}e^{-x}=x^6e^x+x^6e^{-x}$

στ) $f(x)=e^{\int_0^x e^t\sigma\upsilon\nu t dt}$, $f'(x)=e^{\int_0^x e^t\sigma\upsilon\nu t dt}\cdot e^x\sigma\upsilon\nu x$ και

$I=\int_0^x e^t\sigma\upsilon\nu t dt=\left[e^t\sigma\upsilon\nu t\right]_0^x-\int_0^x e^t(-\eta\mu t)dt=$

$=e^x\sigma\upsilon\nu x-1+\int_0^x e^t\eta\mu t dt=e^x\sigma\upsilon\nu x-1+\left[e^t\eta\mu t\right]_0^x-\int_0^x e^t\sigma\upsilon\nu t dt\Leftrightarrow$

$I=e^x\sigma\upsilon\nu x+e^x\eta\mu x-1-I\Rightarrow I=\dfrac{e^x\sigma\upsilon\nu x+e^x\eta\mu x-1}{2}$ οπότε $f'(x)=e^{\frac{e^x\sigma\upsilon\nu x+e^x\eta\mu x-1}{2}}\cdot e^x\sigma\upsilon\nu x$

ζ) $f'(x)=-\eta\mu\left(\int_1^x \eta\mu^4 t dt\right)\eta\mu^4 x$

η) $f(x)=\dfrac{1}{x}\int_1^x e^{u^2}du$ οπότε $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\int_1^x e^{u^2}du+\dfrac{1}{x}e^{x^2}=\dfrac{xe^x-\int_1^x e^{u^2}du}{x^2}$

θ) $f(x)=\int_0^x t\sigma\upsilon\nu(x-t)dt$.

Θέτουμε $x-t=u$ οπότε $du=-dt$ και

t	0	x
u	x	0

$f(x)=\int_x^0 (x-u)\sigma\upsilon\nu u(-du)=\int_0^x (x-u)\sigma\upsilon\nu u du=x\int_0^x \sigma\upsilon\nu u du-\int_0^x u\sigma\upsilon\nu u du$ οπότε

$f'(x)=\int_0^x \sigma\upsilon\nu u du+x\sigma\upsilon\nu x-x\sigma\upsilon\nu x=\int_0^x \sigma\upsilon\nu u du=\left[\eta\mu u\right]_0^x=\eta\mu x$

ι) $f(x)=\int_0^x x^2u\eta\mu(xu)du$. Θέτουμε $t=xu$ οπότε $dt=xdu$ και

u	0	x
t	0	x^2

$f(x)=\int_0^{x^2} t\cdot\eta\mu t dt$ και $f'(x)=2x^3\eta\mu x^2$

κ) $f(x)=\int_x^{x^2} e^x\left(\ln t-t^2\right)dt=e^x\int_c^{x^2}\left(\ln t-t^2\right)dt-e^x\int_c^x\left(\ln t-t^2\right)dt$

$f'(x)=e^x\int_c^{x^2}\left(\ln t-t^2\right)dt+e^x\left(\ln x^2-x^4\right)\cdot 2x-e^x\int_c^x\left(\ln t-t^2\right)dt-e^x\left(\ln x-x^3\right)$

λ) $f(x)=\int_0^x e^{tx}dt$, $x>0$. Θέτω $u=tx\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{x}u$ $\dfrac{1}{x}du=dt$ και

t	0	x
u	0	x^2

οπότε $f(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^{x^2} e^u du$

και $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\int_0^{x^2} e^u du+\dfrac{1}{x}e^{x^2}\cdot 2x=-\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}+2e^{x^2}=\dfrac{2x^2e^{x^2}-e^{x^2}+1}{x^2}$

6.326. α) $f'(x)=\int_1^{2+t^2}\dfrac{e^{-u^2}}{1+2u}du$, $f''(t)=\dfrac{e^{-(2+t^2)^2}}{1+2(2+t^2)}\cdot 2t$

β) $f(x)=\int_0^x (x^2-t)\sqrt{t^4+1}dt=x^2\int_0^x\sqrt{t^4+1}dt-\int_0^x t\sqrt{t^4+1}dt$

$f'(x)=2x\int_0^x\sqrt{t^4+1}dt+x^2\sqrt{t^4+1}-x\sqrt{x^4+1}$

$f''(x)=2\int_0^x\sqrt{t^4+1}dt+2x\sqrt{x^4+1}+2x\sqrt{x^4+1}+x^2\dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}-\sqrt{x^4+1}-x\dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}=$

$$=2\int_0^x \sqrt{t^4+1}dt+4x\sqrt{x^4+1}+\frac{2x^5-3x^4-1}{\sqrt{x^4+1}}$$

6.327. Είναι $t(x)=(x-2)\int_0^x \frac{t+2}{t^2+4}dt$ Επειδή $\frac{t+2}{t^2+4}$ συνεχής τότε η f παραγωγίσιμη με

$f'(x)=\int_0^x \frac{t+2}{t^2+4}dt+(x-2)\frac{x^2+2}{x^2+4}$ οπότε $f'(0)=0-2\cdot\frac{2}{4}=-1$

6.328. Είναι $\int_1^{2x} f(t)dt=2e^x(x-6)$ και παραγωγίζοντας

$2f(2x)=2e^x\cdot(x-6)+2e^x \Leftrightarrow f(2x)=e^x(x-6)+e^x$

Για $x=1$ είναι $f(2)=-5e+e=-4e$

6.329. $f(x)=\int_{4x-2}^{x+4}\sqrt{t^2+64}\cdot e^{t-6}dt=\int_c^{x+4}\sqrt{t^2+64}\cdot e^{t-6}dt-\int_c^{4x-2}\sqrt{t^2+64}\cdot e^{t-6}dt$

αφού $\sqrt{t^2+64}\cdot e^{t-6}$ συνεχής τότε f παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων οπότε

$f'(x)=\sqrt{(x+4)^2+64}e^{x-2}-4\sqrt{(4x-2)^2+64}\cdot e^{4x-8}$ και για $x=2$

$f'(2)=\sqrt{100}\cdot e^0-4\cdot\sqrt{100}e^0=10-40=-30$

6.330. Είναι $\int_{x^3}^{2-x} f(t)dt=x^3-6x^2+5 \Leftrightarrow \int_c^{2-x} f(t)dt-\int_c^{x^3} f(t)dt=x^3-6x^2+5$

και αφού η f είναι συνεχής, παραγωγίζοντας έχουμε: $-f(2-x)-f(x^3)\cdot 3x^2=3x^2-12x$

Για $x=1$είναι: $-f(1)-3f(1)=-9 \Leftrightarrow -4f(1)=-9 \Leftrightarrow f(1)=\frac{9}{4}$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο M είναι $y-\frac{9}{4}=\frac{1}{4}(x-1) \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x+2$

6.331. Είναι $f(x)=\int_0^x (t-1)e^t dt \quad (1)$

$f(2)=\int_0^2 (t-1)e^t dt=\left[(t-1)e^t\right]_0^2-\int_0^2 e^t dt=(e^2+1)-\left[e^t\right]_0^2=e^2+1-e^2+1=2$

Παραγωγίζοντας στην (1) αφού η $(t-1)e^t$ είναι συνεχής έχουμε $f'(x)=(x-1)e^x$ οπότε $f'(2)=e^2$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(2,f(2))$ είναι $y-f(2)=f'(2)(x-2)$

$y-2=e^2(x-2) \Leftrightarrow y=e^2x+2-2e^2$

6.332. $f(x)+\int_0^x (x-t)f(t)dt=\alpha x+\beta \Leftrightarrow f(x)+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=\alpha x+\beta$

οπότε παραγωγίζοντας έχουμε: $f'(x)+\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\alpha \Leftrightarrow f'(x)+\int_0^x f(t)dt=\alpha$

και παραγωγίζοντας $f''(x)+f(x)=0 \Leftrightarrow f''(x)=-f(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

6.333. Επειδή η f είναι περιοδική ισχύει (1) $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $g(x)=\int_x^{x+T} f(t)dt=\int_c^{x+T} f(t)dt-\int_c^x f(t)dt$ οπότε

$g'(x)=f(x+T)(x+T)'-f(x)=f(x+T)-f(x)\overset{(1)}{=}f(x)-f(x)=0$ άρα $g(x)=c$, $x\in\mathbb{R}$.

6.334. Επειδή η f είναι περιττή τότε (1) $f(-x)=-f(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Εχουμε $F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt\overset{(1)}{=}-\int_0^{-x} f(-t)dt$. Θέτω $-t=u$ οπότε $dt=-du$ και

t	0	$-x$
u	0	x

άρα $F(-x)=-\int_0^x f(u)(-du)=\int_0^x f(u)du=F(x)$, άρα η F είναι άρτια.

6.335. Είναι $f(x)=\int_{\sigma\varphi x}^{\varepsilon\varphi x}\frac{1}{1+t^2}dt=\int_c^{\varepsilon\varphi x}\frac{1}{1+t^2}dt-\int_c^{\sigma\varphi x}\frac{1}{1+t^2}dt$ και

$$f'(x)=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}-\frac{1}{1+\sigma\varphi^2x}\cdot\left(-\frac{1}{\eta\mu^2x}\right)=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2x}\cdot\left(1+\varepsilon\varphi^2x\right)+\frac{1}{1+\sigma\varphi^2x}\cdot\left(1+\sigma\varphi^2x\right)=2$$

και $g(x)=2\int_{\sigma\upsilon\nu x}^{\eta\mu x}\sqrt{1-t^2}dt=2\int_c^{\eta\mu x}\sqrt{1-t^2}dt-2\int_c^{\sigma\upsilon\nu x}\sqrt{1-t^2}dt$ με

$$g'(x)=2\sqrt{1-\eta\mu^2x}\cdot\sigma\upsilon\nu x-2\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2x}\,(-\eta\mu x)==2|\sigma\upsilon\nu x|\cdot\sigma\upsilon\nu x+2|\eta\mu x|\cdot\eta\mu x\overset{x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{=}$$

$$=2\left(\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2x\right)=2\cdot1=2 \text{ οπότε } f'(x)=g'(x)\Rightarrow f(x)=g(x)+c$$

Για $x=\frac{\pi}{4}$ είναι $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=g\left(\frac{\pi}{4}\right)+c\Leftrightarrow 0=0+c\Leftrightarrow c=0$. Άρα $f(x)=g(x)$.

6.336. Είναι $f(-x)=\int_{-x}^{-2x}\frac{t^4-\sigma\upsilon\nu 2t}{t^2+4}dt$. Θέτουμε $t=-u$ οπότε $dt=-du$ και

t	$-x$	$-2x$
u	x	2x

Άρα $f(-x)=\int_x^{2x}\frac{(-u)^4-\sigma\upsilon\nu(-2u)}{(-u)^2+4}(-du)=-\int_x^{2x}\frac{u^4-\sigma\upsilon\nu 2u}{u^2+4}du=-f(x)$

άρα $f(-x)=-f(x)$ οπότε η f είναι περιττή στο $\mathbb{R}$.

6.337. Είναι $f(x)=\int_x^{x+1}e^{\eta\mu 4\pi t}dt=\int_c^{x+1}e^{\eta\mu 4\pi t}dt-\int_c^x e^{\eta\mu 4\pi t}dt$ οπότε αφού $e^{\eta\mu 4\pi t}$ είναι συνεχής

Παραγωγίζοντας έχουμε: $f'(x)=e^{\eta\mu 4\pi(x+1)}\cdot(x+1)'-e^{\eta\mu 4\pi x}=e^{\eta\mu(4\pi+4\pi x)}-e^{\eta\mu 4\pi x}=$

$=e^{\eta\mu 4\pi x}-e^{\eta\mu 4\pi x}=0$, οπότε $f(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$

6.338. Είναι $f(x)=\int_1^x\frac{1}{t^2+1}dt+\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{1}{t^2+1}dt$ οπότε αφού $\frac{1}{t^2+1}$ είναι συνεχής τότε η f είναι

παραγωγίσιμη και $f'(x)=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{\frac{1+x^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{1+x^2}=0$

οπότε $f(x)=c$ και αφού $f(1)=0$ άρα $f(x)=0$.

6.339. Είναι $f(x)=\int_0^x(x-t)f(t)dt-\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du+1=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt-\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du+1$

και αφού $f(t)$ συνεχής τότε $\int_0^u f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη και παραγωγίζοντας έχουμε:

$f'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)-\int_0^x f(t)dt=0$.

Άρα $f(x)=c$ και αφού $f(0)=1$ τότε $f(x)=1,\ x\in\mathbb{R}$.

6.340. Είναι $f(x)=\int_2^{x+1}\frac{1}{t^2-\lambda t+\lambda}dt+\int_2^{1+\frac{1}{x}}\frac{1}{t^2-\lambda t+\lambda}dt$

και αφού $\frac{1}{t^2-\lambda t+\lambda}$ είναι συνεχής τότε f παραγωγίσιμη.

$$f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2-\lambda(x+1)+\lambda}+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2-\lambda\left(1+\frac{1}{x}\right)+\lambda}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{(x+1)^2-\lambda(x+1)+\lambda}-\frac{1}{(1+x)^2-\lambda x(1+x)+\lambda x^2}=$$

$$=\frac{1}{x^2+2x+1-\lambda x}-\frac{1}{1+2x+x^2-\lambda x}=0.$$

Άρα $f(x)=c$ και αφού $f(2)=0$ τότε $f(x)=0$ για $x>0$.

6.341. Εστω $f(x)=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{e^{\frac{1}{t}}\ln t}{t^2}dt$ και $g(x)=\int_1^x e^t\ln t dt$. Παρατηρούμε ότι $f(1)=g(1)=0$

και $f'(x)=\frac{e^x\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-e^x(-\ln x)=e^x\ln x$ και $g'(x)=e^x\ln x$. Οπότε $f'(x)=g'(x)$ για

$x>0$ άρα $f(x)=g(x)+c$ και για $x=1$ $f(1)=g(1)+c\Leftrightarrow 0=0+c\Leftrightarrow c=0$.

Άρα $f(x)=g(x)$ για $x>0$.

6.342. Εστω $f(x)=\int_1^x\frac{1}{1+t^2}dt$ και $g(x)=-\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+t^2}dt$. Είναι $f(1)=g(1)=0$ και $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

$g'(x)=-\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{\frac{1+x^2}{x^2}}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{1+x^2}$ άρα $f'(x)=g'(x)$ οπότε $f(x)=g(x)+c$ και για

$x=1$ προκύπτει $c=0$ άρα $f(x)=g(x)$.

6.343. **α)** Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $g''(x)=2g(x)g'(x)\Leftrightarrow(g'(x))'=(g^2(x))'\Leftrightarrow$

$g'(x)=g^2(x)+c$ για $x=0$ $g'(0)=g^2(0)+c\Leftrightarrow c=1$. Άρα $g'(x)=g^2(x)+1$.

β) Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι

$f'(x)=h'(g(x))g'(x)-h'(\varepsilon\varphi x)\cdot(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{1+g^2(x)}\cdot\left(g^2(x)+1\right)-\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}\left(1+\varepsilon\varphi^2 x\right)=0$

οπότε $f(x)=c$ και $f(0)=h(g(0))-h(\varepsilon\varphi 0)=h(0)-h(0)=0$. Άρα $f(x)=0$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

6.344. **α)** Είναι $g(x)=\int_\alpha^\beta f(3x-t)dt$. Θέτουμε $3x-t=u$ οπότε $dt=-du$ και

t	α	β
u	$3x-\alpha$	$3x-\beta$

άρα $g(x)=\int_{3x-\alpha}^{3x-\beta} f(u)(-du)=\int_{3x-\beta}^{3x-\alpha} f(u)du=\int_c^{3x-\alpha} f(u)du-\int_c^{3x-\beta} f(u)du$

και $g'(x)=3f(3x-\alpha)-3f(3x-\beta)$ (1)

β) Θα είναι $g'\left(\frac{\beta}{3}\right)=0$ και $f(0)=0$ οπότε στην (1) για $x=\frac{\beta}{3}$ έχουμε

$g'\left(\frac{\beta}{3}\right)=3f(\beta-\alpha)-3f(0)\Leftrightarrow 0=3f(\beta-\alpha)\Leftrightarrow f(\beta-\alpha)=0\Leftrightarrow \beta-\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=\beta$.

Και αν $\alpha=\beta$ τότε $g(x)=\int_\alpha^\alpha f(3x-t)dt=0$

6.345. Είναι $g(x)=\int_\alpha^x \frac{g^2(t)}{f(t)}dt$ και $g(\alpha)=0$, $g(\alpha)=g(\beta)=0$ και $g'(x)=\frac{g^2(x)}{f(x)}$ (1)

Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την g στα διαστήματα $[\alpha,x],[x,\beta]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,x)$ και $\xi_2\in(x,\beta)$ τέτοια ώστε $g'(\xi_1)=\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}=\frac{g(x)}{x-\alpha}$ (2) και

$g'(\xi_2)=\frac{g(\beta)-g(x)}{\beta-x}=\frac{-g(x)}{\beta-x}$ (3)

- Αν $f(x)>0$ τότε (1) $\Rightarrow g'(x)>0$ οπότε $g'(\xi_1)>0\overset{(2)}{\Leftrightarrow} g(x)>0$,

  $g'(\xi_2)>0\overset{(3)}{\Leftrightarrow}-g(x)>0\Leftrightarrow g(x)<0$ άτοπο.
- Αν $f(x)<0$ τότε (1) $\Rightarrow g'(x)<0$ οπότε $g'(\xi_1)<0\overset{(2)}{\Leftrightarrow} g(x)<0$,

  $g'(\xi_2)>0\overset{(3)}{\Leftrightarrow}-g(x)<0\Leftrightarrow g(x)>0$ άτοπο.

  Και αφού $f(x)\neq 0$ τότε η (1) θα ισχύει μόνο όταν $g(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

6.346. **α)** Στη σχέση (1) $\int_1^x f(t)dt=x^3-3\lambda x^2+12x-7$ θέτουμε $x=1$ οπότε

$0=1-3\lambda+12-7\Leftrightarrow 3\lambda=6\Leftrightarrow\lambda=2$

β) Οπότε η (1) γίνεται $\int_1^x f(t)dt=x^3-6x^2+12x-7$ και παραγωγίζοντας έχουμε

$f(x)=3x^2-12x+12$ και $f'(x)=6x-12$.

Εστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής τότε η εξίσωση εφαπτομένης στο M είναι

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ και για να διέρχεται από το $(0,0)$ πρέπει

$-f(x_0)=-x_0f'(x_0) \Leftrightarrow x_0f'(x_0)=f(x_0) \Leftrightarrow x_0(6x_0-12)=3x_0^2-12x_0+12 \Leftrightarrow$

$6x_0^2-12x_0=3x_0^2-12x_0+12 \Leftrightarrow x_0^2=4 \Leftrightarrow x_0=\pm 2$

- Αν $x_0=2$ $f(2)=0$ και $f'(2)=0$ οπότε η εφαπτομένη είναι $y=0$
- Αν $x_0=-2$ $f(-2)=48$ και $f'(-2)=-24$ οπότε η εφαπτομένη είναι $y-48=-24(x+2) \Leftrightarrow y=-24x$

6.347. **α)** Είναι $2\int_0^x f(t)dt+\int_0^{4-x} f(t)dt=x^3-5x^2+6x+\lambda$ (1). Θέτουμε $x=0$ οπότε $\int_0^4 f(t)dt=\lambda$

και $x=4$ οπότε $2\int_0^4 f(t)dt=8+\lambda$, οπότε $2\lambda=8+\lambda \Leftrightarrow \lambda=8$

β) Παραγωγίζοντας την (1) έχουμε: $2f(x)-f(4-x)=3x^2-10x+6$ (2),

οπότε $f(4-x)=2f(x)-(3x^2-10x+6)$ άρα

$\lim_{x\to 1} f(4-x)=\lim_{x\to 1}\left[2f(x)-(3x^2-10x+6)\right] \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(4-x)=2\cdot 3-(-1)=7$

Θέτουμε $4-x=y\to 3$ άρα $\lim_{x\to 3} f(y)=7$.

γ) Θέτουμε στη (2) όπου x το $4-x$ και έχουμε $2f(4-x)-f(x)=3x^2-14x+14$

$(2)\overset{2}{\Rightarrow} -2f(4-x)+4f(x)=6x^2-20x+12$

Με πρόσθεση κατά μέλη $3f(x)=9x^2-34x+26$ $f(x)=\dfrac{9x^2-34x+26}{3}$.

6.348. **α)** Από τη σχέση (1): $1+\int_1^x f(t)dt=\dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow x+x\int_1^x f(t)dt=f(x)$ οπότε αφού $f(t)$ συνεχής

τότε $f(x)=x+x\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη και παραγωγίζοντας την (1) έχουμε

$f(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2} \Leftrightarrow x^2f(x)=xf'(x)-f(x) \Leftrightarrow (x^2+1)\cdot f(x)=xf'(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{x^2+1}{x} \Leftrightarrow$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=x+\dfrac{1}{x}$ άρα $(\ln f(x))'=\left(\dfrac{x^2}{2}+\ln x\right)' \Leftrightarrow \ln f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\ln x+c$

για $x=1$ $\ln f(1)=\dfrac{1}{2}+\ln 1+c \Leftrightarrow c=-\dfrac{1}{2}$

άρα $\ln f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\ln x-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{x^2}{2}+\ln x-\frac{1}{2}}=e^{\ln x}\cdot e^{\frac{x^2-1}{2}}=xe^{\frac{x^2-1}{2}}$

β) Είναι $2\int_1^x xf(t)dt=f(x)-x \Leftrightarrow 2x\int_1^x f(t)dt=f(x)-x \overset{:x>0}{\Leftrightarrow} 2\int_1^x f(t)dt=\dfrac{f(x)}{x}-1$

και παραγωγίζοντας έχουμε: $2f(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2} \Leftrightarrow 2x^2f(x)+f(x)=xf'(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x^2+1)f(x)=xf'(x) \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} \dfrac{f'(x)}{f(x)}=2x+\dfrac{1}{x}$ άρα $\left.\begin{matrix}\ln f(x)=x^2+\ln x+c\\ f(1)=1\end{matrix}\right\}$ $0=1+c \Rightarrow c=-1$

οπότε $\ln f(x)=x^2+\ln x-1 \Leftrightarrow f(x)=e^{x^2+\ln x-1} \Leftrightarrow f(x)=xe^{x^2-1},\ x>0$

6.349. Είναι $x+\int_0^x f(t)dt=(x+1)f(x)$ (1) και αφού f συνεχής, τότε $\int_0^x f(t)dt$ παραγωγίσιμη

και $x\ge 0$ είναι $f(x)=\dfrac{x+\int_0^x f(t)dt}{x+1}$ παραγωγίσιμη.

Παραγωγίζοντας στην (1) έχουμε: $1+f(x)=f(x)+(x+1)f'(x) \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x+1} \Leftrightarrow$

$f(x)=\ln(x+1)+c$. Είναι $f(0)=0 \Leftrightarrow c=0$. Άρα $f(x)=\ln(x+1)$

6.350. **α)** Είναι $f(x)=\int_0^x e^{t-f(t)}dt$, $x\in\mathbb{R}$ επειδή η $e^{t-f(t)}$ είναι συνεχής τότε f παραγωγίσιμη οπότε

$$f'(x)=e^{x-f(x)} \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)=e^x \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} e^{f(x)}=e^x+c \\ f(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow c=0 \text{ οπότε } e^{f(x)}=e^x \Leftrightarrow f(x)=x$$

β) Θέτουμε $g(x)=e^{-x^2}f(x)$ η οποία είναι συνεχής και η σχέση γίνεται:

$$g(x)-2x\int_0^x g(t)dt=2e^{x^2+x} \overset{e^{-x^2}}{\Rightarrow} e^{-x^2}g(x)-2xe^{-x^2}\int_0^x g(t)dt=2e^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{-x^2}\int_0^x g(t)dt\right)'=\left(2e^x\right)' \text{ άρα } e^{-x^2}\int_0^x g(t)dt=2e^x+c \text{ για } x=0 \Rightarrow c=-2$$

άρα $e^{-x^2}\int_0^x g(t)dt=2e^x-2$ οπότε $\int_0^x g(t)dt=\left(2e^x-2\right)e^{x^2}$

και παραγωγίζοντας έχουμε $g(x)=2e^x\cdot e^{x^2}-\left(2e^x-2\right)2xe^{x^2}$

οπότε $e^{-x^2}f(x)=2e^{x^2}\left(e^x-2xe^x+2x\right) \Leftrightarrow f(x)=2e^{2x^2}\left(e^x-2xe^x+2x\right)$

γ) Επειδή $\left(2-\dfrac{1}{t^2}\right)e^{t^2}$ είναι συνεχής τότε η f είναι παραγωγίσιμη οπότε

$$f'(x)=\left(2-\frac{1}{x^2}\right)e^{x^2} \Leftrightarrow f'(x)=\left(\frac{e^{x^2}}{x}\right)' \text{ άρα } \left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{e^{x^2}}{x}+c \\ f(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow c=-e \text{ οπότε } f(x)=\frac{e^{x^2}}{x}-e$$

δ) Αφού f συνεχής τότε $2ue^{u^2+4-f(u)}$ είναι συνεχής οπότε η f είναι παραγωγίσιμη και

παραγωγίζοντας έχουμε $f'(x)=2xe^{x^2+4-f(x)} \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)=2xe^{x^2+4} \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)'=\left(e^{x^2+4}\right)' \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} e^{f(x)}=e^{x^2+4}+c \\ f(0)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow c=0. \text{ Άρα } f(x)=x^2+4$$

6.351. **α)** Είναι $f(x)+x=\int_1^x \dfrac{f(t)}{x}dt \Leftrightarrow f(x)+x=\dfrac{1}{x}\int_1^x f(t)dt \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{x}\int_1^x f(t)dt-x$, αφού f

συνεχής τότε $\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη οπότε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}\int_1^x f(t)dt-x$ (1)

παραγωγίσιμη και η (1) γίνεται $xf(x)+x^2=\int_1^x f(t)dt$ και παραγωγίζοντας έχουμε:

$$f(x)+xf'(x)+2x=f(x)\Leftrightarrow xf'(x)=-2x\overset{:x>0}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l} f'(x)=-2\Leftrightarrow f(x)=-2x+c \\ (1)\;\; x=1\Rightarrow f(1)=-1 \end{array}\right\}c=1$$

άρα $f(x)=-2x+1$

β) Είναι $\int_0^x(1+t^2)f(t)dt-3x=\frac{1}{3}x^3-x^2+f(x)(x^2-2x+3)\;\;(1)$

αφού $(1+t^2)f(t)$ είναι συνεχής τότε $\int_0^x(1+t^2)f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη και από (1) προκύπτει ότι και η f είναι παραγωγίσιμη άρα παραγωγίζοντας την (1) έχουμε

$$(1+x^2)f(x)-3=x^2-2x+f'(x)(x^2-2x+3)+f(x)(2x-2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(1+x^2-2x+2)f(x)-f'(x)(x^2-2x+3)=x^2-2x+3\overset{:x^2-2x+3>0}{\Leftrightarrow}f(x)-f'(x)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}f(x)-e^{-x}f'(x)=e^{-x}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}(e^{-x}f(x))'=(-e^{-x})'\Leftrightarrow e^{-x}f(x)=-e^{-x}+c\\ \text{Στην } (1) \text{ για } x=0 \text{ είναι } f(0)=0\end{array}\right\}\Rightarrow c=1$$

οπότε $e^{-x}f(x)=-e^{-x}+1\Leftrightarrow f(x)=e^x-1$

γ) Είναι $\int_0^x e^t(f(t)+1)dt=(e^x+2)f(x)-3\ln3\;\;(1)$. Επειδή $e^t(f(t)+1)$ είναι συνεχής τότε $\int_0^x e^t(f(t)+1)dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα από (1) η f είναι παραγωγίσιμη και παραγωγίζοντας στην (1) έχουμε: $e^x(f(x)+1)=e^xf(x)+(e^x+2)f'(x)\Leftrightarrow$

$$e^x=(e^x+2)f'(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{e^x}{e^x+2}\Leftrightarrow f(x)=\ln(e^x+2)+c\;\;(2)$$

Στην (1) για $x=0$ προκύπτει $3f(0)-3\ln3=0\Leftrightarrow f(0)=\ln3$ οπότε στην (2) για $x=0$ προκύπτει $c=0$. Άρα $f(x)=\ln(e^x+2)$

δ) Είναι $\int_0^x f(t)dt+\int_0^x\left(\int_1^u f(t)dt\right)du=2e^x-x-2\;\;(1)$. Επειδή $f(t)$ συνεχής τότε $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής οπότε η $\int_0^x\left(\int_1^u f(t)dt\right)du$ είναι παραγωγίσιμη.

Παραγωγίζοντας στην (1) έχουμε: $f(x)+\int_0^x f(t)dt=2e^x-1\Leftrightarrow f(x)=2e^x-1-\int_0^x f(t)dt\;\;(2)$

οπότε και η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και παραγωγίζοντας στην (2) έχουμε $f'(x)=2e^x-f(x)\Leftrightarrow f'(x)+f(x)=2e^x\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^xf'(x)+e^xf(x)=2e^{2x}\Leftrightarrow(e^xf(x))'=(e^{2x})'\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}e^xf(x)=e^{2x}+c\\ f(0)=1\end{array}\right\}\Rightarrow c=0,$$

άρα $f(x)=e^x$

ε) $\int_\alpha^x e^{-t}f(t)dt=e^{-x}-e^{-\alpha}-e^{-x}f(x)\;\;(1)$ αφού $e^{-t}f(t)$ είναι συνεχής τότε $\int_\alpha^x e^{-t}f(t)$ είναι παραγωγίσιμη οπότε από (1) προκύπτει ότι και η f θα είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Παραγωγίζοντας στην (1) έχουμε:

$\cancel{e^{-x}f(x)} = -e^{-x} + \cancel{e^{-x}f(x)} - e^{-x}f'(x) \Leftrightarrow e^{-x}f'(x) = -e^{-x} \Leftrightarrow f'(x) = -1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} f(x) = -x + c \\ (1) \text{ για } x = \alpha \quad f(\alpha) = 0 \end{array}\right\} c = \alpha \text{ άρα } f(x) = \alpha - x$$

στ) Είναι $\int_0^x f(t)dt - 2\int_0^{-x} f(t)dt = x^3 - \frac{x^2}{2}$ (1). Επειδή η f είναι συνεχής τότε $\int_0^x f(t)dt$ και $\int_0^{-x} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες άρα παραγωγίζοντας στην (1) έχουμε:

$f(x) + 2f(-x) = 3x^2 - x$ (2). Στην (2) θέτουμε $x \to -x$ και έχουμε:

$f(-x) + 2f(x) = 3x^2 + x \Leftrightarrow -2f(-x) - 4f(x) = -6x^2 - 2x \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2f(-x) + f(x) = 3x^2 - x$.

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $-3f(x) = -3x^2 - 3x \Leftrightarrow f(x) = x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$.

6.352. **α)** Είναι $\int_\alpha^x (x-t)f(t)dt = 2x^4 \Leftrightarrow x\int_\alpha^x f(t)dt - \int_\alpha^x tf(t)dt = 2x^4$ (1). Επειδή η $f(t)$ και $tf(t)$ είναι συνεχείς τότε οι συναρτήσεις $\int_\alpha^x f(t)dt$, $\int_\alpha^x tf(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες.

Παραγωγίζοντας την (1) έχουμε: $\int_\alpha^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = 8x^3 \Leftrightarrow \int_\alpha^x f(t)dt = 8x^3$

και παραγωγίζοντας πάλι : $f(x) = 24x^2$.

β) Στην (1) για $x = \alpha$ προκύπτει $2\alpha^4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

6.353. **α)** Είναι $\int_\alpha^x (x-t)f(t)dt = (x-2)e^x + e \Leftrightarrow x\int_\alpha^x f(t)dt - \int_\alpha^x tf(t)dt = (x-2)e^x + e$ (1)

Επειδή $f(t)$, $tf(t)$ είναι συνεχείς τότε $\int_\alpha^x f(t)dt$, $\int_\alpha^x tf(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες και παραγωγίζοντας την (1) έχουμε $\int_\alpha^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = e^x + (x-2)e^x \Leftrightarrow$

(2) $\int_\alpha^x f(t)dt = e^x(x-1)$ και παραγωγίζοντας πάλι $f(x) = e^x(x-1) + e^x \Leftrightarrow f(x) = xe^x$

β) Στην (2) για $x = \alpha$ έχουμε $e^\alpha(\alpha - 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$

6.354. **α)** Είναι $f(x) = 3\int_0^x \left(\int_0^1 x^2 f(t)dx\right)dt + 1 \Leftrightarrow$

$$f(x) = 3\int_0^x \left(f(t)\int_0^1 x^2 dx\right)dt + 1 = 3\int_0^x \left(f(t)\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\right)dt + 1$$

$$= 3\int_0^x f(t)\frac{1}{3}dt + 1 \Leftrightarrow f(x) = \int_0^x f(t)dt + 1 \quad (1)$$

και επειδή η f είναι συνεχής τότε $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα και $f(x)$ παραγωγίσιμη και παραγωγίζοντας την (1) έχουμε

$$f'(x) = f(x) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} f(x) = ce^x \\ (1) \Leftrightarrow f(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow c = 1, \text{ άρα } f(x) = e^x$$

β) Είναι $f(x)=2\int_1^x\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x f(t)dx\right)dt=2\int_1^x\left(f(t)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x dx\right)dt=$

$$=2\int_1^x\left(f(t)\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)dt=2\int_1^x f(t)dt \Leftrightarrow (1)\quad f(x)=2\int_1^x f(t)dt$$

και επειδή προκύπτει ότι η f είναι συνεχής είναι και παραγωγίσιμη, άρα

$$f'(x)=\left(2\int_1^x f(t)dt\right)' \Rightarrow f'(x)=2f(x)\overset{\cdot e^{-2x}}{\Leftrightarrow} e^{-2x}f'(x)-2e^{-2x}f(x)=0 \Leftrightarrow \left(e^{-2x}f(x)\right)'=0\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}&e^{-2x}f(x)=c\\&(1)\Leftrightarrow f(1)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow c=0 \quad \text{οπότε } f(x)=0$$

γ) Είναι $f(x)=\int_0^x e^{-2x}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2t}f(t)\sigma\upsilon\nu x dx\right)dt=\int_0^x e^{-2x}\left(e^{2t}f(t)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x dx\right)dt=$

$$=\int_0^x e^{-2x}\left(e^{2t}f(t)\cdot 1\right)dt=e^{-2x}\int_0^x e^{2t}f(t)dt \Leftrightarrow f(x)=e^{-2x}\int_0^x e^{2t}f(t)dt \quad (1)$$

οπότε η f είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων e^{-2x}, $\int_0^x e^{2t}f(t)dt$ αφού γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής. Από $(1)\Leftrightarrow e^{2x}f(x)=\int_0^x e^{2t}f(t)dt$

και παραγωγίζοντας έχουμε $\left(e^{2x}f(x)\right)'=e^{2x}f(x)$

άρα $\left.\begin{aligned}&e^{2x}f(x)=c\cdot e^x\\&f(0)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow c=0$, οπότε $e^{2x}f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0$

δ) $f(x)=2\int_0^x\left(e^x+1\right)\left(\int_0^1 xf(t)dx\right)dt=2\int_0^x\left(e^x+1\right)\left(f(t)\int_0^1 xdx\right)dt=$

$$=2\int_0^x\left(e^x+1\right)\left(f(t)\cdot\frac{1}{2}\right)dt=2\left(e^x+1\right)\frac{1}{2}\int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow f(x)-\left(e^x+1\right)\int_0^x f(t)dt=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-\left(e^x+x\right)}\left(\int_0^x f(t)dt\right)'-\left(e^x+1\right)e^{-\left(e^x+x\right)}\int_0^x f(t)dt=0\Leftrightarrow\left(e^{-\left(e^x+x\right)}\int_0^x f(t)dt\right)'=0$$

άρα $\left.\begin{aligned}&e^{-\left(e^x+x\right)}\int_0^x f(t)dt=c\\&\text{για } x=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow c=0$, οπότε $\int_0^x f(t)dt=0$ άρα $f(x)=0$

6.355. α) Είναι $f(x)=2e^{2x}-\int_0^x e^t f(x-t)dt$. Θέτουμε $u=x-t$ οπότε $dt=-du$ και

t	0	x
u	x	0

άρα $f(x)=2e^{2x}-\int_x^0 e^{x-u}f(u)(-du)=2e^{2x}-\int_0^x\frac{e^x}{e^u}f(u)du\Leftrightarrow$

$$f(x)=2e^{2x}-e^x\int_0^x\frac{f(u)}{e^u}du \overset{e^{-x}}{\Leftrightarrow} e^{-x}f(x)=2e^x-\int_0^x\frac{f(u)}{e^u}du \quad (1)$$

Επειδή $\frac{f(u)}{e^u}$ είναι συνεχής τότε $\int_0^x\frac{f(u)}{e^u}du$ είναι παραγωγίσιμη οπότε από την (1) και $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Παραγωγίζοντας την (1) έχουμε $-e^{-x}\cancel{f(x)}+e^{-x}f'(x)=2e^{x}-\dfrac{\cancel{f(x)}}{\cancel{e^{x}}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-x}f'(x)=2e^{x}\Leftrightarrow f'(x)=2e^{2x}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}f(x)=e^{2x}+c\\ f(0)=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow c=1$, άρα $f(x)=e^{2x}+1$

β) Είναι $f(x)=e^{-x}+\int_0^x\dfrac{f(x-t)}{e^{t}}dt$. Θέτω $x-t=u$ οπότε $dt=-du$ και

t	0	x
u	x	0

άρα $f(x)=e^{-x}+\int_x^0\dfrac{f(u)}{e^{x-u}}(-du)=e^{-x}+\int_x^0\dfrac{e^{u}f(u)}{e^{x}}du\Leftrightarrow f(x)=e^{-x}+\dfrac{1}{e^{x}}\int_0^x e^{u}f(u)du$

από την οποία σχέση προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη και $e^{x}f(x)=1+\int_0^x e^{u}f(u)du$

και παραγωγίζοντας έχουμε $\left(e^{x}f(x)\right)'=e^{x}f(x)$

άρα $\left.\begin{matrix}e^{x}f(x)=ce^{x}\\ f(0)=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=1$, άρα $e^{x}f(x)=e^{x}\Leftrightarrow f(x)=1$

γ) $\int_0^x f(t)dt=e^{x}+\int_0^x\left(\int_0^t e^{-u}f(t-u)du\right)dt$. Θέτω $t-u=w$ οπότε $du=-dw$ και

u	0	t
w	t	0

οπότε $\int_0^x f(t)dt=e^{x}+\int_0^x\left(\int_t^0 e^{w-t}f(w)(-dw)\right)dt\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\int_0^x f(t)dt=e^{x}+\int_0^x\left(\int_0^t\dfrac{e^{w}}{e^{t}}f(w)dw\right)dt\Leftrightarrow\int_0^x f(t)dt=e^{x}+\int_0^x\dfrac{1}{e^{t}}\left(\int_0^t e^{w}f(w)dw\right)dt$

και παραγωγίζοντας έχουμε: $f(x)=e^{x}+\dfrac{1}{e^{x}}\int_0^x e^{w}f(w)d(w)\Leftrightarrow e^{x}f(x)=e^{2x}+\int_0^x e^{w}f(w)$

και παραγωγίζοντας $e^{x}f(x)+e^{x}f'(x)=2e^{2x}+e^{x}f(x)\Leftrightarrow e^{x}f'(x)=2e^{2x}\Leftrightarrow f'(x)=2e^{x}$

Άρα $\left.\begin{matrix}f(x)=2e^{x}+c\\ f(0)=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow c=-1$ άρα $f(x)=2e^{x}-1$

6.356. Είναι $ημ\left(\int_0^x f(t)dt\right)=x$ (1) και επειδή η f είναι συνεχής τότε η $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη

άρα και $ημ\left(\int_0^x f(t)dt\right)$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Παραγωγίζοντας στην (1) έχουμε: $συν\left(\int_0^x f(t)dt\right)\cdot f(x)=1$ (2) οπότε από $(2)\Rightarrow f(x)\neq 0$

άρα αφού η f είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο και από την (2) έχουμε

$συν^2\left(\int_0^x f(t)dt\right)\cdot f^2(x)=1\Leftrightarrow\left[1-ημ^2\left(\int_0^x f(t)dt\right)\right]\cdot f^2(x)=1\Leftrightarrow\left(1-x^2\right)f^2(x)=1$

και αφού $x\in(-1,1)$ τότε $f^2(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$.

Αφού η f διατηρεί πρόσημο και $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ τότε $f(x)>0$ άρα $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

6.357. **α)** Είναι $f(x)=\ln x-\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{f(xt)}{t}dt$, $x>0$. Θέτω $u=xt$ οπότε $du=xdt$ και

t	$\frac{1}{x}$	1
u	1	x

Άρα $f(x)=\ln x-\int_{1}^{x}\frac{f(u)}{\frac{u}{x}}\frac{1}{x}du\Leftrightarrow f(x)=\ln x-\int_{1}^{x}\frac{f(u)}{u}du$ (1) και αφού η f είναι συνεχής

τότε η $\int_{1}^{x}\frac{f(u)}{u}du$ είναι παραγωγίσιμη άρα και η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Παραγωγίζοντας την (1) έχουμε:

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=1\Leftrightarrow (xf(x))'=(x)'\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} xf(x)=x+c \\ f(1)=0 \end{array}\right\} c=-1 \text{ άρα } xf(x)=x-1\Leftrightarrow f(x)=1-\frac{1}{x}$$

β) Είναι $4\int_{0}^{1}f(tx)dt=f(x)$. Θέτω $u=tx$ οπότε $du=xdt$ και

t	0	1
u	0	x

άρα $4\int_{0}^{x}f(u)\frac{1}{x}du=f(x)\Leftrightarrow \frac{4}{x}\int_{0}^{x}f(u)du=f(x)\Leftrightarrow 4\int_{0}^{x}f(u)du=xf(x)$ και αφού η $f(u)$ συνεχής τότε $\int_{0}^{x}f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη άρα και η f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

συνεπώς: $4f(x)=f(x)+xf'(x)\Leftrightarrow 3f(x)=xf'(x)\Leftrightarrow f'(x)-\frac{3}{x}f(x)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{-3\ln x}f'(x)-\frac{3}{x}e^{-3\ln x}f(x)=0\Leftrightarrow \left(e^{-3\ln x}f(x)\right)'=0 \text{ άρα } \left.\begin{array}{r} e^{-3\ln x}f(x)=c \\ f(1)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow c=1$$

Άρα $\frac{f(x)}{e^{3\ln x}}=1\Leftrightarrow f(x)=e^{3\ln x}=e^{\ln x^3}\Leftrightarrow f(x)=x^3$

6.358. **α)** Είναι $f(x)=\lambda x+x\int_{0}^{1}f(xt)dt\Leftrightarrow f(x)=\lambda x+\int_{0}^{1}f(xt)xdt$.

Θέτω $u=xt$ οπότε $du=xdt$ και

t	0	1
u	0	x

άρα $f(x)=\lambda x+\int_{0}^{x}f(u)du$ (1)

Επειδή $f(u)$ συνεχής τότε η $\int_{0}^{x}f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη άρα και από (1) η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

β) Παραγωγίζω στην (1) και έχουμε

$$f'(x)=\lambda+f(x)\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=\lambda\Leftrightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=\lambda e^{-x}\Leftrightarrow \left(e^{-x}f(x)\right)'=\left(-\lambda e^{-x}\right)'$$

$$\text{άρα } \left.\begin{array}{r} e^{-x}f(x)=-\lambda e^{-x}+c \\ \text{και από } (1)\ f(0)=0 \end{array}\right\} c=\lambda,$$

άρα $e^{-x}f(x)=-\lambda e^{-x}+\lambda\overset{\cdot e^{x}}{\Leftrightarrow}f(x)=\lambda e^{x}-\lambda\Leftrightarrow f(x)=\lambda\left(e^{x}-1\right)$

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lambda(e^x-1)}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lambda e^x}{1}=\lambda$ άρα $\lambda=1$

6.359. Είναι $\int_0^{f(x)}f^{-1}(t)dt+2\int_0^x f(t)dt=2x$.

Θέτω $f^{-1}(t)=u$ οπότε $t=f(u)$ και $dt=f'(u)du$ είναι

t	0	f(x)
u	0	x

άρα $\int_0^x uf'(u)du+2\int_0^x f(t)dt=2x\Leftrightarrow\left[uf(u)\right]_0^x-\int_0^x f(u)du+2\int_0^x f(t)dt=2x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xf(x)+\int_0^x f(t)dt=2x$ και παραγωγίζοντας έχουμε:

$f(x)+xf'(x)+f(x)=2\Leftrightarrow xf'(x)+2f(x)=2\overset{\cdot x>0}{\Rightarrow}x^2f'(x)+2xf(x)=2x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(x^2f(x)\right)=\left(x^2\right)'\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x^2f(x)=x^2+c\\ f(1)=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow c=-1\Leftrightarrow x^2f(x)=x^2-1\Leftrightarrow f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$

6.360. Είναι $f(x)=x+\int_x^{x^2}\dfrac{x}{t}f\left(\dfrac{t}{x}\right)dt$. Θέτω $u=\dfrac{t}{x}$ οπότε $du=\dfrac{1}{x}dt$ και

t	x	x^2
u	1	x

άρα $f(x)=x+\int_1^x\dfrac{x}{ux}f(u)\cdot xdu\Leftrightarrow(1)\ f(x)=x+x\int_1^x\dfrac{f(u)}{u}du$ και αφού η f είναι συνεχής

τότε $\int_1^x\dfrac{f(u)}{u}du$ είναι παραγωγίσιμη και από (1) και η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη.

Από την (1) έχουμε $\dfrac{f(x)}{x}=1+\int_1^x\dfrac{f(u)}{u}$ και παραγωγίζοντας $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\dfrac{f(x)}{x}$

άρα $\left.\begin{matrix}\dfrac{f(x)}{x}=ce^x\\ \text{Από την }(1)\text{ είναι }f(1)=1\end{matrix}\right\}c=\dfrac{1}{e}$, άρα $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{e^x}{e}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{xe^x}{e}\Leftrightarrow f(x)=xe^{x-1}$

6.361. Είναι $f(x)-\int_0^x f(t)\varepsilon\varphi tdx=x$. Αφού η $f(t)\varepsilon\varphi t$ είναι συνεχής τότε η συνάρτηση $\int_0^x f(t)\varepsilon\varphi tdt$ είναι παραγωγίσιμη άρα και η συνάρτηση $f(x)=x+\int_0^x f(t)\varepsilon\varphi tdt$ είναι παραγωγίσιμη και παραγωγίζοντας έχουμε $f'(x)=1+f(x)\varepsilon\varphi x\Leftrightarrow f'(x)-f(x)\varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)-\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}f(x)=1\Leftrightarrow f'(x)\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x f(x)=\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\left(f(x)\sigma\upsilon\nu x\right)'=\left(\eta\mu x\right)'$

άρα $\left.\begin{matrix}f(x)\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x+c\\ \text{είναι }f(0)=0\end{matrix}\right\}c=0$ άρα $\sigma\upsilon\nu x f(x)=\eta\mu x\Leftrightarrow f(x)=\varepsilon\varphi x$

6.362. **α)** Είναι $f(x)=\int_0^x \frac{f(t)(e^t-1)}{e^t-t}dt+1$

Εστω $g(x)=e^x-x$, $x\in\mathbb{R}$ είναι $g'(x)=e^x-1$

οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$g(x)\ge g(0)=1>0$ άρα $g(x)>0 \Leftrightarrow e^x-x>0$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η συνάρτηση

$\frac{f(t)(e^t-1)}{e^t-t}$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$, άρα $D_f=\mathbb{R}$

	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$-$		$+$
g	$\searrow$		$\nearrow$

β) Αφού η f συνεχής τότε η $\int_0^x \frac{f(t)(e^t-1)}{e^t-t}dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα και η ανάρτηση

$f(x)=\int_0^x \frac{f(t)(e^t-1)}{e^t-t}dt+1$ είναι παραγωγίσιμη και παραγωγίζοντας έχουμε

$f'(x)=\frac{f(x)(e^x-1)}{e^x-x} \Leftrightarrow f'(x)(e^x-x)-f(x)(e^x-1)=0$ άρα $\left(\frac{f(x)}{e^x-x}\right)'=0$

άρα $\frac{f(x)}{e^x-x}=c \Leftrightarrow f(x)=c(e^x-x)$ $f(0)=1$ οπότε $c=1$ και $f(x)=e^x-x$

γ) Όπως διαπιστώσαμε στο (α) ερώτημα $e^x-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

6.363. Είναι $f(x)=\int_0^x (e^t-1)e^{-f(t)}dt$. Αφού η f συνεχής τότε και $(e^t-1)e^{-f(t)}$ είναι συνεχής άρα η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x (e^t-1)e^{-f(t)}dt$ είναι παραγωγίσιμη και παραγωγίζοντας έχουμε:

$$f'(x)=(e^x-1)e^{-f(x)} \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)=e^x-1 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)'=\left(e^x-x\right)' \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} e^{f(x)}=e^x-x+c \\ f(0)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c=0$$

οπότε $e^{f(x)}=e^x-x \Leftrightarrow f(x)=\ln(e^x-x)$ αφού $e^x-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

6.364. **α)** Είναι $f(x)=e^x+\int_0^x e^{x-t}f(t)dt \Leftrightarrow f(x)=e^x+e^x\int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt \overset{:e^x\neq 0}{\Leftrightarrow} (1)\ \frac{f(x)}{e^x}=1+\int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt$

επειδή $\frac{f(t)}{e^t}$ είναι συνεχής τότε η $\int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt$ είναι παραγωγίσιμη και από την (1) έχουμε

$$\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'=\frac{f(x)}{e^x} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \frac{f(x)}{e^x}=ce^x \\ f(0)=1 \end{matrix}\right\} c=1 \text{ οπότε } f(x)=e^{2x}$$

β) Είναι $f(x)=1+2\int_0^x e^{t-x}f(t)dt \Leftrightarrow f(x)=1+\frac{2}{e^x}\int_0^x e^t f(t)dt \Leftrightarrow e^x f(x)=e^x+2\int_0^x e^t f(t)dt \quad (1)$

Αφού η f συνεχής τότε η $\int_0^x e^t f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα παραγωγίζοντας στην (1)

έχουμε: $e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x+2e^x f(x) \Leftrightarrow e^x f'(x)-e^x f(x)=e^x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x f'(x)-e^x f(x)}{\left(e^x\right)^2}=e^{-x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'=\left(-e^{-x}\right)' \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} \dfrac{f(x)}{e^x}=-e^{-x}+c \\ f(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow c=2$$

Άρα $\dfrac{f(x)}{e^x}=-e^{-x}+2 \Leftrightarrow f(x)=2e^x-1$

6.365. **α)** Είναι $f(x)=\int_{2-x}^{x}\dfrac{e^{-x}f(t)}{f(t)+f(2-t)}dt$ οπότε (1) $f(2)=\dfrac{1}{e^2}\int_0^2\dfrac{f(t)}{f(t)+f(2-t)}dt$

Θέτω $2-t=u$ και $dt=-du$ και

t	0	2
u	2	0

άρα $f(2)=\dfrac{1}{e^2}\int_2^0\dfrac{f(2-u)}{f(2-u)+f(u)}(-du) \Leftrightarrow f(2)=-\dfrac{1}{e^2}\int_2^0\dfrac{f(2-u)}{f(2-u)+f(u)}du$ (2)

Προσθέτοντας (1) και (2) έχουμε:

$$f(2)+f(2)=\frac{1}{e^2}\int_0^2\frac{f(t)}{f(t)+f(2-t)}dt+\frac{1}{e^2}\int_0^2\frac{f(2-u)}{f(u)+f(2-u)}du \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2f(2)=\frac{1}{e^2}\int_0^2\frac{f(t)+f(2-t)}{f(t)+f(2-t)}dt \Leftrightarrow 2f(2)=\frac{1}{e^2}\int_0^2 1dt \Leftrightarrow 2f(2)=\frac{2}{e^2} \Leftrightarrow f(2)=\frac{1}{e^2}$$

β) Είναι $f(x)=\dfrac{1}{e^x}\int_{2-x}^{x}\dfrac{f(t)}{f(t)+f(2-t)}dt \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x f(x)=\int_c^x\dfrac{f(t)}{f(t)+f(2-t)}dt-\int_c^{2-x}\dfrac{f(t)}{f(t)+f(2-t)}dt$ (3) αφού η f είναι συνεχής οι συναρτήσεις στη σχέση (3) είναι παραγωγίσιμες και παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\left(e^x f(x)\right)'=\frac{f(x)}{f(x)+f(2-x)}+\frac{f(2-x)}{f(2-x)+f(x)}=1 \Leftrightarrow \left(e^x f(x)\right)'=(x)' \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} e^x f(x)=x+c \\ f(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow c=1 \text{ οπότε } e^x f(x)=x-1 \text{ άρα } f(x)=\frac{x-1}{e^x}$$

6.366. Είναι $f(x)=\int_0^x f(t)dt+x\int_0^1 f(x)dx+1$ (1). Αφού η f είναι συνεχής τότε η $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη οπότε από (1) έχουμε ότι και η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Παραγωγίζοντας την (1) έχουμε: $f'(x)=f(x)+\int_0^1 f(x)dx$ (2)

Είναι $\int_0^1 f(x)dx=\lambda\in\mathbb{R}$ οπότε από (2) έχουμε:

$$f'(x)-f(x)=\lambda \Leftrightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=\lambda e^{-x} \Leftrightarrow \left(e^{-x}f(x)\right)'=\left(-\lambda e^{-x}\right)' \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{-x}f(x)=-\lambda e^{-x}+c \\ f(0)=1 \end{array}\right\} c=\lambda+1$$

οπότε $e^{-x}f(x)=-\lambda e^{-x}+\lambda+1 \Leftrightarrow f(x)=\lambda e^{x}-\lambda+e^{x}=\lambda\left(e^{x}-1\right)+e^{x}$

Άρα $f(x)=\left(e^{x}-1\right)\int_0^1 f(x)dx+e^{x}$ (3)

Στην (3) για $x=1$ $f(1)=(e-1)\int_0^1 f(x)dx+e$ και

Στην (1) για $x=1$ $f(1)=\int_0^1 f(t)dt+\int_0^1 f(x)dx+1$

οπότε $(e-1)\lambda+e=2\lambda+1 \Leftrightarrow \lambda=\dfrac{1-e}{e-3}$. Άρα $f(x)=\left(e^{x}-1\right)\dfrac{1-e}{e-3}+e^{x}$

6.367. Παραγωγίζοντας στη σχέση $x=\int_0^{f(x)}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}dx$ έχουμε:

$$1=\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f'(x)=\sqrt{1+f^2(x)} \Leftrightarrow \left(f'(x)\right)^2=1+f^2(x)$$

και αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε $2f'(x)f''(x)=2f(x)f'(x)$ (2)

Από την (1) προκύπτει ότι $f'(x)\neq 0$ άρα από (2) έχουμε:

$$f''(x)=f(x) \Leftrightarrow f''(x)+f'(x)=f'(x)+f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(f'(x)+f(x)\right)'=f'(x)+f(x) \Leftrightarrow f'(x)+f(x)=ce^{x}$$

Για $x=0$ $f'(0)+f(0)=c \Leftrightarrow c=1$ άρα $f'(x)+f(x)=e^{x} \Leftrightarrow e^{x}f'(x)+e^{x}f(x)=e^{2x} \Leftrightarrow$

$$\left(e^{x}f(x)\right)'=\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} e^{x}f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+c_1 \\ f(0)=0 \end{array}\right\} c_1=-\frac{1}{2}$$

Άρα $e^{x}f(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

6.368. **α)** Είναι $f(x)=\int_0^x \dfrac{t}{f(t)}dt+1$ (1). Θέτουμε στην (1) $x=0$ οπότε $f(0)=1$

β) Αφού $f(x)\neq 0$ και η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε η f θα διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f(0)=1>0$ τότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Αφού η f είναι συνεχής τότε η συνάρτηση $\int_0^x \dfrac{t}{f(t)}dt$ θα είναι παραγωγίσιμη άρα από την (1) και η $f(x)$ θα είναι παραγωγίσιμη και παραγωγίζοντας την (1) έχουμε:

$$f'(x)=\frac{x}{f(x)} \Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=2x \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)'=\left(x^2\right)' \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} f^2(x)=x^2+c \\ f(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow c=1$$

Άρα $f^2(x)=x^2+1$ και αφού $f(x)>0$ και συνεχής τότε $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

δ) Είναι $D_f=\mathbb{R}$ και $f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}=\sqrt{x^2+1}=f(x)$ άρα η f είναι άρτια και $I=\int_{-\alpha}^{0}f(x)dx$

Θέτω $x=-u$ οπότε $dx=-du$ και

x	$-\alpha$	0
u	α	0

άρα $I=\int_{\alpha}^{0}f(-u)(-du)=\int_{0}^{\alpha}f(-u)du\overset{f\ \text{άρτια}}{=}\int_{0}^{\alpha}f(x)dx$

6.369. Είναι $f(-x)=-f(x)$ (1) και $f(x)\cdot\int_{0}^{-x}f(t)dt=x^2+x$ (2)

α) Αφού η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε οι συναρτήσεις $\int_0^x f(t)dt$, $\int_0^{-x}f(t)dt$ θα είναι παραγωγίσιμες οπότε και $g(x)=\int_0^x f(t)dt\cdot\int_0^{-x}f(t)dt-x^2+2$ είναι παραγωγίσιμη και παραγωγίζοντας έχουμε:

$g'(x)=f(x)\int_0^{-x}f(t)dt-f(-x)\int_0^x f(t)dt-2x$ (3)

Στην (2) αν θέσω όπου $x\to-x$ έχουμε $f(-x)\int_0^x f(t)dt=x^2-x$ (4)

Οπότε η (3) με βάση (2) και (4) γίνεται: $g'(x)=x^2+x-\left(x^2-x\right)-2x=2x-2x=0$

οπότε $g(x)=c$ και $g(0)=2$, άρα $g(x)=2$, $x\in\mathbb{R}$

β) Αφού $g(x)=2\Leftrightarrow\int_0^x f(t)dt\cdot\int_0^{-x}f(t)dt-x^2+2=2\Leftrightarrow\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x}f(t)dt=x^2$, $x\in\mathbb{R}$

γ) Θεωρούμε την $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt\cdot\int_0^{-x}f(t)dt+2x^3-1$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ και

$\varphi(0)=-1<0$

$\varphi(1)=\int_0^1 f(t)dt\cdot\int_0^{-1}f(t)dt+1\overset{(\beta)}{=}1^2+1=2>0$ άρα $\varphi(0)\cdot\varphi(1)<0$ οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(\xi)=0\Leftrightarrow\int_0^{\xi}f(t)dt\cdot\int_0^{-\xi}f(t)dt=1-2\xi^3$

6.370. α) Είναι $f(x)=\int_x^{x^2}\frac{x}{x^2+t^2}=\int_x^{x^2}\frac{x}{x^2\left(1+\frac{t^2}{x^2}\right)}dt\Leftrightarrow f(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}dt$

Θέτουμε $u=\frac{t}{x}$ οπότε $du=\frac{1}{x}dt$ και

t	x	x^2
u	1	x

άρα $f(x)=\int_1^x\frac{1}{1+u^2}du$. Επειδή η συνάρτηση $\frac{1}{1+u^2}$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ τότε και η $\int_1^x\frac{1}{1+u^2}du$ είναι παραγωγίσιμη.

β) Παρατηρούμε $f(1)=0$ και $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}>0$ άρα η $f\uparrow$ οπότε η ρίζα $x=1$ είναι μοναδική.

γ) Είναι $g(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$ και

$$g'(x)=f'(x)+f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$$

άρα $g(x)=c$, $g(1)=2f(1)=0$ οπότε $g(x)=0$

δ) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)=\dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}<0$ άρα f κοίλη στο $(0,+\infty)$

ε) Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για f στο $[1,x]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(1,x)$, $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{f(x)}{x-1}$

όμως $1<\xi<x\overset{f'\downarrow}{\Rightarrow}f'(1)>f'(\xi)>f'(x)\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}>\dfrac{f(x)}{x-1}>\dfrac{1}{1+x^2}\overset{x-1>0}{\Leftrightarrow}\dfrac{x-1}{2}>f(x)>\dfrac{x-1}{1+x^2}$

στ) Είναι $h(x)=2\int_0^{f(x)}f^{-1}(t)dt$ οπότε $h'(x)=2f^{-1}(f(x))f'(x)\Leftrightarrow h'(x)=2xf'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$

άρα $h(x)=\ln\left(1+x^2\right)+c$

6.371. **α)** Εχουμε $f(x)=\int_0^x\sqrt{4+f^2(t)}dt$. Για $x=0$ είναι $f(0)=0$.

Για $x>0$ αφού $4+f^2(t)>0$ οπότε $\sqrt{4+f^2(t)}>0$ θα είναι $\int_0^x\sqrt{4+f^2(t)}dt>0$

Άρα για κάθε $x\geq0$ θα είναι $f(x)\geq0$.

β) Επειδή $f(t)$ είναι συνεχής τότε και η συνάρτηση $\sqrt{4+f^2(t)}$ θα είναι συνεχής άρα η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x\sqrt{4+f^2(t)}dt$ θα είναι παραγωγίσιμη και παραγωγίζοντας έχουμε $f'(x)=\sqrt{4+f^2(x)}$ (1). Αφού η f παραγωγίσιμη τότε και η $\sqrt{4+f^2(x)}$ είναι παραγωγίσιμη άρα από την (1) και $f'(x)$ παραγωγίσιμη άρα η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη. Από (1) έχουμε $\left[f'(x)\right]^2=4+f^2(x)$ και παραγωγίζοντας σ' αυτή τη σχέση έχουμε $2f'(x)f''(x)=2f(x)f'(x)$ (2). Από τη σχέση (1) είναι $f'(x)>0$ οπότε από τη $(2)\Leftrightarrow f''(x)=f(x)$

γ) Είναι $f''(x)=f(x)\Leftrightarrow f''(x)+f'(x)=f'(x)+f(x)\Leftrightarrow$

$\left(f'(x)+f(x)\right)'=f'(x)+f(x)\Leftrightarrow f'(x)+f(x)=ce^x$

Είναι $f(0)=0$ και από (1) $f'(0)=2$ οπότε $c=2$

Άρα $f'(x)+f(x)=2e^x\Leftrightarrow e^xf'(x)+e^xf(x)=2e^{2x}$

$\left(e^xf(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)'\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}e^xf(x)=e^{2x}+c_1\\ f(0)=0\end{matrix}\right\}c_1=-1$. Οπότε $e^xf(x)=e^{2x}-1\Leftrightarrow f(x)=e^x-e^{-x}$

Η C_f τέμνει τον $y'y$ στο $(0,0)$

δ) Εστω ότι το σημείο Μ $(x(t),y(t))$. Για $t=t_0$ έχουμε $x(t_0)=0$, $y(t_0)=0$

$x'(t_0)=5m/s$

Είναι $y(t)=e^{x(t)}-e^{-x(t)}$ οπότε $y'(t)=e^{x(t)}x'(t)+e^{-x(t)}x'(t)$ για $t=t_0$

$y'(t_0)=e^{x(t_0)}x'(t_0)+e^{-x(t_0)}x'(t)=e^0\cdot 5+e^0\cdot 5=10m/s$

6.372. **α)** Στη σχέση (1) $2f(2x)-f(x)=2x$ θέτω $x=0$ οπότε $f(0)=0$

β) Στην (1) για $x=1$ έχουμε $2f(2)-f(1)=2$ (2). Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την f στα διαστήματα $[0,1]$ και $[1,2]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(0,1)$ και $\xi_2\in(1,2)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=f(1)-f(0)$ και $f'(\xi_2)=f(2)-f(1)$

Άρα $f'(\xi_1)+2f'(\xi_2)=f(1)-f(0)+2f(2)-2f(1)=2f(2)-f(1)\overset{(2)}{=}2$

γ) Είναι $G(x)=\int_1^2 f(xt)+dt-x^2+5$, $x\in\mathbb{R}$. Θέτω $u=xt$ οπότε $du=xdt$ και

t	1	2
u	x	2x

άρα (3) $G(x)=\int_x^{2x} f(u)du-x^2+5\Leftrightarrow G(x)=\int_c^{2x} f(u)du-\int_c^{x} f(u)du-x^2+5$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $G'(x)=2f(2x)-f(x)-2x\overset{(1)}{=}2x-2x=0$ οπότε $G(x)=c$ και αφού $G(0)=5$ τότε $G(x)=5$, $x\in\mathbb{R}$

δ) Αφού $G(x)=5$ τότε από την (3) προκύπτει ότι $\int_x^{2x} f(u)du=x^2$ (4)

Στην (4) για $x=1$ είναι $\int_1^2 f(u)du=1$ και για $x=2$ είναι $\int_2^4 f(u)du=4$

οπότε $\int_1^2 f(u)du+\int_2^4 f(u)du=5\Leftrightarrow\int_1^4 f(u)du=5$

6.373. **α)** Εχουμε $f(x)=1+\int_{2x+1}^{3x}\frac{f(t-2x)}{x}dt=1+\frac{1}{x}\int_{2x+1}^{3x} f(t-2x)dt$

Θέτουμε $u=t-2x$ οπότε $dt=du$ και

t	2x+1	3x
u	1	x

οπότε $f(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^x f(u)du$ και αφού η f είναι συνεχής τότε η συνάρτηση

$f(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^x f(u)du$ (1) είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

β) Από $(1)\Leftrightarrow xf(x)=x+\int_1^x f(u)du$ και παραγωγίζοντας

$$f(x)+xf'(x)=1+f(x)\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} f(x)=\ln x+c \\ (1)\Rightarrow f(1)=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow c=1 \text{ άρα } f(x)=\ln x+1$$

γ) $f'(x)=\frac{1}{x}>0$ οπότε η $f\uparrow$ στο $(0,+\infty)$ και $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ άρα η f κοίλη στο $(0,+\infty)$

δ) Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την f στα διαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ και $\xi_2\in(\beta,\gamma)$ ώστε $f'(\xi_1)=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$ και $f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$

Είναι $\xi_1<\xi_2$ και $f'\downarrow$ οπότε $f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$

$\dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}>\dfrac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$ πολλαπλασιάζω με $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)>0$

$(\beta-\gamma)\big(f(\alpha)-f(\beta)\big)>(\alpha-\beta)\big(f(\beta)-f(\gamma)\big)$

ε) Η εξίσωση $f\left(x^3+1\right)=f(3x)$ εφόσον $D_f=(0,+\infty)$ για να ορίζεται πρέπει

$$\left.\begin{matrix}x^3+1>0\\3x>0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x>-1\\x>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow x>0$$

Επειδή η f είναι $\uparrow$ θα είναι και 1–1 οπότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$x^3+1=3x\Leftrightarrow x^3-3x+1=0$.

Θεωρούμε

$g(x)=x^3-3x+1,\ g'(x)=3x^2-3$,

$g(-1)=3$, $g(1)=-1$ και $g(0)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ οπότε η παραπάνω συνάρτηση έχει μια ρίζα στο $(0,1)$ και μία ρίζα στο $(1,+\infty)$. Άρα έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

	$-\infty$ -1	1	$+\infty$
g'	+	−	+
g	↗	↘	↗

6.374. α) Αφού f συνεχής τότε και η συνάρτηση $ue^{-f(u)}$ είναι συνεχής για κάθε $u\in\mathbb{R}$, επομένως η συνάρτηση $\int_0^x ue^{-f(u)}du$ είναι παραγωγίσιμη άρα και (1) $f(x)=4\int_0^x ue^{-f(u)}du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

β) Παραγωγίζοντας την (1) προκύπτει $f'(x)=4xe^{-f(x)}\Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)}=4x\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}\right)'=\left(2x^2\right)'$

οπότε $\left.\begin{matrix}e^{f(x)}=2x^2+c\\(1)\Rightarrow f(0)=0\end{matrix}\right\}$ άρα $c=1$. Συνεπώς $e^{f(x)}=2x^2+c\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(2x^2+1\right)$

γ) Είναι $f'(x)=\dfrac{4x}{2x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(2x^2+1\right)\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(2x^2+1\right)\right]=+\infty$, $\quad f(0)=0$

Άρα το σύνολο τιμών είναι $f(A)=[0,+\infty)$

	$-\infty$ 0	$+\infty$
f'	−	+
f	↘	↗

δ) $f''(x)=\dfrac{4\left(2x^2+1\right)-4x\cdot4x}{\left(2x^2+1\right)^2}=\dfrac{4-8x^2}{\left(2x^2+1\right)^2}$

Η f κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt2}{2}\right]$ και $\left[\dfrac{\sqrt2}{2},+\infty\right)$ και κυρτή στο $\left[-\dfrac{\sqrt2}{2},\dfrac{\sqrt2}{2}\right]$

	$-\infty$ $-\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$+\infty$
f''	−	+	−
f	$\frown$	$\smile$	$\frown$

ε) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x^{2014}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)}{2014x^{2013}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{4x}{2x^2+1}}{2014x^{2013}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{2014x^{2012}}\cdot\dfrac{4}{x^2+1}\right] = +\infty$

6.375. **α)** Αν $x\in(0,1)$ η $g(x)=x\ln x$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών, για $x\in(1,+\infty)$ η $g(x)=e^{x-1}-1$ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x\ln x)=0=g(1)$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(e^{x-1}-1\right)=e^0-1=0$

οπότε η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$

β) Αν $x\in(0,1)$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x\ln x}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\ln x+1}{1}=1$

Αν $x\in(1,+\infty)$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^{x-1}}{1}=e^0=1$

Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $g'(1)=1$

γ) Αν $x\in(0,1]$ $f(x)=\int_{\frac{1}{2}}^{x} g(t)dt=\int_{\frac{1}{2}}^{x} t\ln t dt=\int_{\frac{1}{2}}^{x}\left(\dfrac{t^2}{2}\right)'\ln t dt=$

$$=\left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_{\frac{1}{2}}^{x}-\int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{t^2}{2}\frac{1}{t}dt=\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{1}{8}\ln 2-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{16}\quad(1)$$

Αν $x\in(1,+\infty)$ τότε $f(x)=\int_{\frac{1}{2}}^{x} g(t)dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1} g(t)dt+\int_{1}^{x} g(t)dt=$

$$=f(1)+\int_1^x\left(e^{t-1}-1\right)dt\overset{(1)}{=}\frac{1}{8}\ln 2-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\left[e^{t-1}\right]_1^x-\left[t\right]_1^x=$$

$$=\frac{1}{8}\ln 2-\frac{3}{16}+e^{x-1}-1-x+1=\frac{1}{8}\ln 2-\frac{3}{16}+e^{x-1}-x$$

Οπότε $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{8}\ln 2,\ x\in(0,1]\\ e^{x-1}-x-\dfrac{3}{16}+\dfrac{1}{8}\ln 2,\ x\in(1,+\infty)\end{cases}$

δ) Για $x\in(1,+\infty)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x-1}-x-\dfrac{3}{16}+\dfrac{1}{8}\ln 2\right)=+\infty$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{e^{x-1}}{x}-1\right)\right]=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x-1}}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x-1}}{1}=+\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

6.376. **α)** Η συνάρτηση $e^u\left(\dfrac{1}{u}+\ln u\right)$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και τα όρια ολοκλήρωσης 1 και $f(x)$ ορίζονται στο $\mathbb{R}$. Επειδή $1\in(0,+\infty)$ για να ορίζεται η συνάρτηση $\int_1^{f(x)} e^u\left(\dfrac{1}{u}+\ln u\right)du$ πρέπει $f(x)\in(0,+\infty)$. Άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $\int_1^{f(x)}\left(e^u\frac{1}{u}+e^u\ln u\right)du = e^u\left[x+\ln\left(x^2+1\right)\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_1^{f(x)}\left[e^u\ln u\right]'du = e^{f(x)}\left[x+\ln\left(x^2+1\right)\right] \Leftrightarrow \left[e^u\ln u\right]_1^{f(x)} = e^{f(x)}\left[x+\ln\left(x^2+1\right)\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{f(x)}\ln f(x) = e^{f(x)}\left[x+\ln\left(x^2+1\right)\right] \Leftrightarrow \ln f(x) = x+\ln\left(x^2+1\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln f(x) = \ln e^x + \ln\left(x^2+1\right) \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln\left[e^x\left(x^2+1\right)\right] \Leftrightarrow f(x) = e^x\left(x^2+1\right)$

γ) Θεωρούμε την $h(x)=f(x)-4$ συνεχής στο $[0,1]$ με $h(0)=f(0)-4=-3<0$ και

$h(1)=f(1)-4=2e-4>0$ οπότε $h(0)\cdot h(1)<0$ και από Θ. Bolzano υπάρχει

$\rho \in (0,1): h(\rho)=0 \Leftrightarrow f(\rho)=4$.

Επίσης $f'(x)=e^x\left(x^2+1\right)+e^x 2x = e^x\left(x^2+2x+1\right) = e^x(x+1)^2 \geq 0$

οπότε η $f\uparrow$ άρα και το ρ μοναδικό.

δ) Για $x=\rho$ η εξίσωση γίνεται: $g\left(f(\rho)+\rho-4\right) = f\left(g(\rho)\right)+g(\rho)-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(4+\rho-4) = f\left(g(\rho)\right)+g(\rho)-4 \Leftrightarrow g(\rho) = f\left(g(\rho)\right)+g(\rho)-4 \Leftrightarrow f\left(g(\rho)\right)=4 \Leftrightarrow$

$= f\left(g(\rho)\right) = f(\rho) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} g(\rho)=\rho$ οπότε η γραφική παράσταση της g τέμνει τη διχοτόμο της 1ης γωνίας των αξόνων σ' ένα τουλάχιστο σημείο.

ε) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1,2]$ οπότε υπάρχει

$\xi \in (1,2): f'(\xi) = \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} \Leftrightarrow f'(\xi) = 5e^2-2e$

6.377. **α)** Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, $0 \in \mathbb{R}$ και η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επίσης η $(g\circ f)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}, 0 \in \mathbb{R}$ άρα και η $\int_0^x (g\circ f)(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ παραγωγίζοντας τη σχέση $\int_0^{f(x)} g(t)dt + \int_0^x (g\circ f)(t)dt = 2 \quad (1)$

Εχουμε $g\left(f(x)\right)f'(x) + (g\circ f)(x) = 0 \Leftrightarrow (g\circ f)(x)\left(f'(x)+1\right)=0 \quad (2)$

Επειδή η $g\circ f$ είναι 1–1 και $(g\circ f)(0)=0$ τότε για $x\neq 0$ θα είναι $(g\circ f)(x)\neq 0$,

οπότε από τη (2) θα είναι $f'(x)+1=0 \Leftrightarrow f'(x)=-1$ για $x \neq 0$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\int_0^{f(x)+x} g(t)dt$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ αφού

$g(t)$ συνεχής και $\left(f(x)+x\right)$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε $\varphi'(x) = g\left(f(x)+x\right)\left(f'(x)+1\right)$

Για $x=0 \quad \varphi'(0) = g\left(f(0)\right)\left(f'(0)+1\right) = 0\left(f'(0)+1\right) = 0$

Για $x \neq 0 \quad \varphi'(x) = g\left(f(x)+x\right)\left(f'(x)+1\right) = 0$ από το (α) ερώτημα.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R} \quad \varphi'(x)=0$ άρα $\varphi(x)=c$

Στην (1) για $x=0 \int_0^{f(0)} g(t)dt = 2$ άρα $\varphi(0)=2$ οπότε και $\varphi(x)=2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς $\int_0^{f(x)+x} g(t)dt = 2$

6.378. α) Οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς και δεν μηδενίζονται στο $[0,+\infty)$ άρα διατηρούν σταθερό πρόσημο σ' αυτό. Επίσης για $x=0$ είναι $f(0)=g(0)=\frac{1}{2}>0$ άρα $f(x)>0$ και $g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

β) Αφού $f(u)$, $g(u)$ συνεχείς στο $[0,+\infty)$ τότε και οι συναρτήσεις $\int_0^x f(u)du$ και $\int_0^x g(u)du$ είναι παραγωγίσιμες. Οπότε και η συνάρτηση $2+\int_0^x f(u)du=\frac{1}{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη και αφού η $\frac{1}{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη τότε και η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}$ αφού $g(x)>0$ θα είναι παραγωγίσιμη. Όμοια και η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη. Επομένως:

$$\left(2+\int_0^x f(u)du\right)=\left(\frac{1}{g(x)}\right)'\Leftrightarrow f(x)=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\Leftrightarrow\frac{g'(x)}{g(x)}=-f(x)g(x)\quad(1)\quad\text{και}$$

$$\left(2+\int_0^x g(u)du\right)'=\left(\frac{1}{f(x)}\right)'\Leftrightarrow g(x)=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=-f(x)g(x)\quad(2)$$

Από (1) και (2) έχουμε $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{g'(x)}{g(x)}\Leftrightarrow(\ln f(x))'=(\ln g(x))'\Leftrightarrow\ln f(x)=\ln g(x)+c$

για $x=0$ είναι $\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{1}{2}+c\Leftrightarrow c=0$. Οπότε $\ln f(x)=\ln g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)$, $x\in[0,+\infty)$

γ) Αφού $f(x)=g(x)$ τότε η σχέση $2+\int_0^x f(u)du=\frac{1}{g(x)}$ γίνεται $2+\int_0^x f(u)du=\frac{1}{f(x)}$

οπότε παραγωγίζοντας $f(x)=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}\Leftrightarrow f^{-3}(x)f'(x)=-1\Leftrightarrow\left(\frac{f^{-2}(x)}{-2}\right)'=(-x)'\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{f^{-2}(x)}{-2}=-x+c_1\Leftrightarrow\frac{1}{f^2(x)}=2x-2c_1$ και για $x=0$ $\quad\frac{1}{\frac{1}{4}}=-2c_1\Leftrightarrow c_1=-2$

άρα $\frac{1}{f^2(x)}=2x+4\Leftrightarrow f^2(x)=\frac{1}{2x+4}$ και αφού $f(x)>0$ τότε $f(x)=g(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+4}}$

6.379. α) Είναι $D_f=\mathbb{R}$ οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$ και

$f(-x)=\int_x^{-x}\frac{5t^4}{1+e^{f(t)}}dt=-\int_{-x}^{x}\frac{5t^4}{1+e^{f(t)}}dt=-f(x)$ άρα η f είναι περιττή.

β) Εχουμε $I=\int_0^{10}f(x-5)dx$. Θέτω $u=x-5$ οπότε $du=dx$ και

x	0	10
u	–5	5

Άρα $I=\int_{-5}^{5}f(u)du\overset{f\,\text{περιττή}}{=}-\int_{-5}^{5}f(u)du$. Θέτω $-u=\varphi$ οπότε $du=-d\varphi$ και

u	–5	5
φ	5	–5

άρα $I=-\int_5^{-5}f(\varphi)(-d\varphi)=-\int_5^{-5}f(\varphi)d\varphi=-I$ συνεπώς $I=-I\Leftrightarrow 2I=0\Leftrightarrow I=0$

γ) Είναι $f(x)=\int_c^x \frac{5t^4}{1+e^{f(t)}}dt-\int_c^{-x} \frac{5t^4}{1+e^{f(t)}}dt$ επειδή $\frac{5t^4}{1+e^{f(t)}}$ είναι συνεχής τότε η f είναι παραγωγίσιμη αφού οι συναρτήσεις $\int_c^x \frac{5t^4}{1+e^{f(t)}}dt$, $\int_c^{-x} \frac{5t^4}{1+e^{f(t)}}dt$ είναι παραγωγίσιμες.

δ) Είναι $f'(x)=\frac{5x^4}{1+e^{f(x)}}-\frac{5(-x)^4}{1+e^{f(-x)}}(-x)'=\frac{5x^4}{1+e^{f(x)}}+\frac{5x^4}{1+e^{-f(x)}}=$

$$=\frac{5x^4}{1+e^{f(x)}}+\frac{5x^4e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}=\frac{5x^4\left(1+e^{f(x)}\right)}{1+e^{f(x)}}=5x^4$$

οπότε $f'(x)=5x^4$ άρα $f(x)=x^5+c$ αφού $f(0)=0$ τότε $c=0$. Οπότε $f(x)=x^5$.

6.407. Θεωρούμε την $g(x)=\int_0^x f(t)dt-x^3-2x^2$ η οποία, αφού η f παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής στο $[0,2]$, οπότε και η $\int_0^x f(t)dt$ παραγωγίσιμη στο $[0,2]$, οπότε και η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=f(x)-3x^2-4x$. $g(0)=0$, $g(2)=\int_0^2 f(t)dt-8-8=16-16=0$ οπότε $g(0)=g(2)$. Άρα από Θ.Rolle υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)-3x_0^2-4x_0=0$. Επίσης η συνάρτηση $h(x)=f(x)-3x^2-4x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$ γιατί $h'(x)=f'(x)-6x-4<0$ οπότε η ρίζα x_0 που βρήκαμε είναι μοναδική.

6.408. Στη σχέση $\int_2^{20} f(5x)dx=2\int_1^5 f(10x)dx$ (1) Θέτουμε $u=5x$ οπότε $du=5dx$ και

x	2	20
u	10	100

και $w=10x$ οπότε $dw=10dx$ και

x	1	5
w	10	50

Οπότε η (1) γίνεται: $\frac{1}{5}\int_{10}^{100} f(u)du=\frac{2}{10}\int_{10}^{50} f(w)dw\Leftrightarrow\int_{10}^{100} f(u)du=\int_{10}^{50} f(u)du\quad(2)$

Θεωρούμε την $g(x)=\int_{10}^x f(u)du$, $x\in[50,100]$ η οποία αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε $g(x)=\int_{10}^x f(u)du$ θα είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε και στο $[50,100]$ με $g'(x)=f(x)$. Επίσης από τη (2) θα είναι $g(50)=g(100)$ οπότε για την g ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle άρα υπάρχει $p\in(50,100)$ τέτοιο ώστε $g'(p)=0\Leftrightarrow f(p)=0$. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(50,100)$

6.409. Θεωρούμε τη $g(t)=\int_\alpha^t f(x)dx+\int_\beta^t f(x)dx$, $t\in[\alpha,\beta]$. Αφού η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε οι συναρτήσεις $\int_\alpha^t f(x)dx$ και $\int_\beta^t f(x)dx$ θα είναι παραγωγίσιμες στο $[\alpha,\beta]$ άρα και συνεχείς. Επίσης $g(\alpha)=\int_\beta^\alpha f(x)dx=-\int_\alpha^\beta f(x)dx$, $g(\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$

άρα $g(\alpha)\cdot g(\beta)=-\left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right)^2\le 0$

- Αν $g(\alpha)\cdot g(\beta)=0$ τότε $\xi=\alpha$ ή $\xi=\beta$ ρίζες της εξίσωσης $g(t)=0$.
- Αν $g(\alpha)\cdot g(\beta)<0$ τότε από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$g(\xi)=0\Leftrightarrow\int_\alpha^\xi f(x)dx+\int_\beta^\xi f(x)dx=0\Leftrightarrow\int_\alpha^\xi f(x)dx=\int_\xi^\beta f(x)dx$

6.410. **α)** Είναι $g(x)=x^2-5x+1-\int_0^{x^2-5x} f(t)dt$ άρα $g(-3)=25-\int_0^{24} f(t)dt<0$ γιατί είναι $f(t)\ge 2$ οπότε $\int_0^{24}(f(t)-2)dt\ge 0\Leftrightarrow\int_0^{24} f(t)dt-48\ge 0\Leftrightarrow-\int_0^{24} f(t)dt\le -48$.

$25-\int_0^{24} f(t)dt\le -23<0$ και $g(0)=1>0$. Οπότε $g(-3)\cdot g(0)<0$

β) Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση $\int_0^{x^2-5x} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής. Επειδή $g(-3)g(0)<0$ τότε από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (-3,0)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$g'(x)=2x-5-f(x^2-5x)\cdot(2x-5)=(2x-5)\left[1-f(x^2-5x)\right]$

Επειδή $f(x)\geq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα είναι και $f(x^2-5x)\geq 2 \Leftrightarrow 1-f(x^2-5x)\leq -1<0$

Από το διπλανό πίνακα διαπιστώνουμε ότι $g\uparrow$ στο $[-3,0]$ άρα η ρίζα x_0 που βρήκαμε είναι μοναδική.

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$2x-5$	$-$		$+$
$1-f^2(x^2-5x)$	$-$		$-$
g'	$+$		$-$
g	$\nearrow$		$\searrow$

6.411. Από τη σχέση $\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(t)dt = 2\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\alpha} f(t)dt$ έχουμε $\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(t)dt - \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\alpha} f(t)dt = \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\alpha} f(t)dt \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(t)dt + \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(t)dt = \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\alpha} f(t)dt \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\alpha} f(t)dt \quad (1)$

Θεωρούμε την $g(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ η οποία αφού f είναι συνεχής τότε $g(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$

$g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(t)dt \overset{(1)}{=} -\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$, $g(\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$. Οπότε $g(\beta)\cdot g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\leq 0$

- Αν $g(\beta)\cdot g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$ τότε $\xi=\beta$ και $\xi=\frac{\alpha+\beta}{2}$ ρίζες της εξίσωσης $g(x)=0$.
- Αν $g(\beta)\cdot g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<0$ τότε από Θ. Balzano υπάρχει $\xi\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$.

Συνεπώς υπάρχει $\xi\in\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$, $\int_{\alpha}^{\xi} f(t)dt=0$.

6.412. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(t)=\int_{\alpha}^{t} g(x)h(x)dx+\theta\int_{\beta}^{t} g(x)\cdot h(x)dx$, $x\in[\alpha,\beta]$ η οποία αφού $g(x)$, $h(x)$ είναι συνεχής τότε οι συναρτήσεις $\int_{\alpha}^{t} g(x)h(x)dx$, $\int_{\beta}^{t} g(x)h(x)dx$ είναι παραγωγίσιμες οπότε η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

Εχουμε $f(\alpha)=\theta\int_{\beta}^{\alpha} g(x)h(x)dx=-\theta\int_{\alpha}^{\beta} g(x)h(x)dx>0$ γιατί αφού $g(x)\cdot h(x)<0$ και $\alpha<\beta$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)h(x)dx<0$ και $-\theta<0$.

Επίσης $f(\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}g(x)h(x)dx<0$. Άρα $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Επίσης $f'(x)=g(t)h(t)+\theta g(t)h(t)=g(t)h(t)(1+\theta)<0$ οπότε η $f\downarrow$ άρα το x_0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(t)=0$.

6.413. **α)** Θεωρούμε $g(x)=e^x-x-1,\ x\in\mathbb{R}$

$g'(x)=e^x-1>0\Leftrightarrow x>0$

Άρα $g(x)\geq g(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$e^x-x-1\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq x+1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$-$		$+$
g	$\searrow$		$\nearrow$

β) Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=\int_0^x f(t)dt-3e^x+2,\ x\in[0,1]$

$h(0)=-1<0$, $h(1)=\int_0^1 f(t)dt-3e+2>0$ γιατί αφού $f(t)>3e-2$

τότε $\int_0^1 f(t)dt>\int_0^1(3e-2)\Leftrightarrow\int_0^1 f(t)dt>3e-2$. Άρα $h(0)\cdot h(1)<0$ από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$. Αφού η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ τότε η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=f(x)-3e^x$. Γνωρίζουμε ότι

$f(x)<3+3x\Leftrightarrow f(x)<3(1+x)$ (1) και $1+x\leq e^x$ (2). Οπότε από (1) και (2)

$f(x)<3e^x\Leftrightarrow f(x)-3e^x<0$ άρα $h'(x)<0$ οπότε η $h\downarrow$ στο $[0,1]$ οπότε η ρίζα x_0 που βρήκαμε είναι μοναδική.

6.414. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=(x-2)\int_1^x f(t)dt+(x-1)\int_2^x f(t)dt$ όπου $x\in[1,2]$.

Η g είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $[1,2]$ με

$g'(x)=\int_1^x f(t)dt+(x-2)f(x)+\int_2^x f(t)dt+(x-1)f(x)$.

Επιπλέον $g(1)=g(2)=0$ οπότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε

$g'(\xi)=0\Leftrightarrow\int_1^{\xi}f(t)dt+(\xi-2)f(\xi)+\int_2^{\xi}f(t)dt+(\xi-1)f(\xi)=0$

$\int_1^{\xi}f(t)dt+\int_2^{\xi}f(t)dt=-f(\xi)(\xi-2+\xi-1)\Leftrightarrow\int_1^{\xi}f(t)dt+\int_2^{\xi}f(t)dt=(3-2\xi)f(\xi)$

6.415. Γνωρίζουμε ότι $f(\alpha)\cdot\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx<0$.

Εστω $f(\alpha)>0$ (1) τότε $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx<0$ (2) οπότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)<0$ γιατί αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\geq 0$ άτοπο οπότε αφού f συνεχής στο $[0,x_0]$ και $f(\alpha)\cdot f(x_0)<0$ από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,x_0)\subseteq(\alpha,\beta):f(\xi_1)=0$.

Επίσης θεωρούμε $h(t)=\int_{\alpha}^{t}f(x)dx$. Είναι $h(\alpha)=0$ και $h(\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx<0$ από (2).

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\left[\alpha,\beta\right]$ με $h'(t)=f(t)$ και $h'(\alpha)=f(\alpha)>0$ από (1) οπότε

$\lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}>0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{h(x)}{x-\alpha}>0$ οπότε υπάρχει x_1 κοντά στο α ώστε $\dfrac{h(x_1)}{x_1-\alpha}>0$

δηλαδή $h(x_1)>0$.

Αφού η h είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής στο $\left[x_1,\beta\right]$ με $h(x_1)\cdot h(\beta)<0$ οπότε από

Θ. Bolzano υπάρχει $\xi_2\in(x_1,\beta)\subseteq(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $h(\xi_2)=0\Leftrightarrow\int_\alpha^{\xi_2}f(x)dx=0$.

Όμοια αποδεικνύονται αν υποθέσω $f(\alpha)<0$ άρα $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$.

6.416. Θεωρούμε την $g(x)=\int_\beta^x f(t)dt$, $x\in\left[\alpha,\beta\right]$ η οποία αφού η f είναι συνεχής τότε η

$g(x)=\int_\beta^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=f(x)$.

Επίσης $g(\beta)=0$, $g(\alpha)=-\int_\alpha^\beta f(t)dt=0$ και $g'(\alpha)=f(\alpha)$, $g'(\beta)=f(\beta)$ οπότε αφού

$f(\alpha)\cdot f(\beta)>0\Leftrightarrow g'(\alpha)g'(\beta)>0$. Άρα $g'(\alpha)$, $g'(\beta)$ είναι ομόσημοι.

- Έστω $g'(\alpha)>0$ και $g'(\beta)>0$ οπότε $g'(\alpha)>0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}>0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{g(x)}{x-\alpha}>0$

  τότε υπάρχει x_1 κοντά στο α με $x_1>\alpha$ τέτοιο ώστε $\dfrac{g(x_1)}{x_1-\alpha}>0\Leftrightarrow g(x_1)>0$.

- Επίσης $g'(\beta)>0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\beta^-}\dfrac{g(x)-g(\beta)}{x-\beta}>0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\beta^-}\dfrac{g(x)}{x-\beta}>0$ οπότε υπάρχει x_2 κοντά στο β

  με $x_2<\beta$ τέτοιο ώστε $\dfrac{g(x_2)}{x_2-\beta}>0\Leftrightarrow g(x_2)<0$.

Αφού η g είναι παραγωγίσιμη θα είναι συνεχής στο $\left[x_1,x_2\right]\subseteq(\alpha,\beta)$ και $g(x_1)\cdot g(x_2)<0$

αφού από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2,)\subseteq(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0\Leftrightarrow\int_\beta^\xi f(t)dt=0$

6.417. α) Επειδή $f(t)$ είναι συνεχής στο $\left[1,2\right]$ τότε η συνάρτηση $\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο

$\left[1,2\right]$ άρα και η $g(x)=(2-x)\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων

συναρτήσεων και $g'(x)=-\int_1^x f(t)dt+(2-x)f(x)$ (1).

β) Είναι $g(1)=0=g(2)$, οπότε για τη g εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο $\left[1,2\right]$, δηλαδή υπάρχει

$\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0$ (2)

γ) $(2)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}-\int_1^\xi f(t)dt+(2-\xi)f(\xi)=0\Leftrightarrow(2-\xi)f(\xi)=\int_1^\xi f(t)dt$

6.418. α) Αφού η g είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$ τότε και οι συναρτήσεις $\int_\alpha^x g(t)dt$, $\int_\alpha^{\alpha+\beta-x}g(t)dt$

θα είναι παραγωγίσιμες στο $\left[\alpha,\beta\right]$ οπότε η συνάρτηση $h(x)=\int_\alpha^x g(t)dt+\int_\alpha^{\alpha+\beta-x}g(t)dt$ θα

είναι παραγωγίσιμη στο $\left[\alpha,\beta\right]$ άρα και συνεχής, με $h'(x)=g(x)-g(\alpha+\beta-x)$.

Επίσης $h(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta}g(t)dt$ και $h(\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}g(t)dt$ δηλαδή $h(\alpha)=h(\beta)$. Οπότε εφαρμόζεται για την h το Θεώρημα Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

β) Οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta):h'(\xi)=0\Leftrightarrow g(\xi)-g(\alpha+\beta-\xi)=0\Leftrightarrow g(\xi)=g(\alpha+\beta-\xi)$

γ) Εστω $I=\int_{\alpha}^{\beta}g(\alpha+\beta-x)dt$. Θέτω $u=\alpha+\beta-x$ οπότε $dx=-du$ και

x	α	β
u	β	α

$I=\int_{\beta}^{\alpha}g(u)(-du)=\int_{\alpha}^{\beta}g(u)du=\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$

6.419. Θεωρούμε την $g(x)=(1-x)\int_{2}^{x}f(t)dt$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ αφού $\int_{2}^{x}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη επειδή η f είναι συνεχής. Είναι $g'(x)=-\int_{2}^{x}f(t)dt+(1-x)f(x)$.
Επίσης $g(1)=g(2)=0$ οπότε σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow-\int_{2}^{\xi}f(t)dt+(1-\xi)f(\xi)\Leftrightarrow(1-\xi)f(\xi)=\int_{2}^{\xi}f(t)dt$.

6.420. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt-\frac{x^3}{3}$ η οποία αφού η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ τότε η $\int_{0}^{x}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα και η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ με $g'(x)=f(x)-x^2$. Επίσης $g(0)=0$, $g(2)=\int_{0}^{2}f(t)dt-\frac{8}{3}=\frac{8}{3}-\frac{8}{3}=0$. Άρα $g(0)=g(2)$ οπότε από το Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε: $g'(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=\xi^2$

6.421. Θεωρούμε την $h(t)=\int_{\alpha}^{t}f(x)dx-\int_{\alpha}^{t}g(x)dx$, $t\in[\alpha,\beta]$. Αφού f,g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ τότε και οι συναρτήσεις $\int_{\alpha}^{t}f(x)dx$, $\int_{\alpha}^{t}g(x)dx$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $h'(t)=f(t)-g(t)$. Επίσης $h(\alpha)=0$, $h(\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx=0$ οπότε $h(\alpha)=h(\beta)$ και από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=g(\xi)$

6.422. Θεωρούμε $g(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt-\int_{0}^{x}t\eta\mu t dt$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ αφού οι συναρτήσεις $f(t)$, $t\eta\mu t$ είναι συνεχείς στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Είναι $g'(x)=f(x)-x\eta\mu x$ και $g(0)=0$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}t\eta\mu t dt=1-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}t(-\sigma\upsilon\nu t)'dt=1+\left[t\sigma\upsilon\nu t\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(-\sigma\upsilon\nu t)dt=$$

$$=1-\left[\eta\mu t\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=1-\eta\mu\frac{\pi}{2}=0$$

Οπότε $g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ άρα σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=\xi\eta\mu\xi$.

6.423. Θεωρούμε $g(x)=\eta\mu x\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}f(t)dt$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ αφού f είναι συνεχής με $g'(x)=\sigma\upsilon\nu x\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}f(t)dt+\eta\mu x\cdot f(x)$. Είναι $g(0)=0$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ άρα $g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)$, οπότε σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε:

$g'(\xi)=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\xi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\xi}f(t)dt+\eta\mu\xi f(\xi)=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\eta\mu\xi f(\xi)=\sigma\upsilon\nu\xi\int_{\xi}^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt$ και επειδή $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τότε $\sigma\upsilon\nu\xi\neq 0$ άρα από (1) έχουμε: $\frac{\eta\mu\xi}{\sigma\upsilon\nu\xi}f(\xi)=\int_{\xi}^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\xi\cdot f(\xi)=\int_{\xi}^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt$.

6.424. **α)** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ άρα και συνεχής, οπότε έχει αρχική.

Εστω F η αρχική της f στο $[1,2]$ οπότε ισχύει $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in[1,2]$.

Οπότε $\int_1^2 f(x)dx=F(2)-F(1)$ άρα $F(2)-F(1)=1$.

Η συνάρτηση F είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_1\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $F'(x_1)=\frac{F(2)-F(1)}{2-1}\Leftrightarrow F'(x_1)=1$ άρα $f(x_1)=1$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,x_1]$ με $f(1)\cdot f(x_1)=(-1)\cdot 1<0$ οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi\in(1,x_1)\subseteq(1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$.

β) Θεωρούμε την $h(x)=\int_1^x f(t)dt-\frac{2}{3}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ άρα και συνεχης, και ισχύουν $h(1)=-\frac{2}{3}<0$, $h(2)=\int_1^2 f(t)dt-\frac{2}{3}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}>0$ άρα $h(1)\cdot h(2)=-\frac{2}{9}<0$ οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει $\rho\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $h(\rho)=0$, δηλαδή η εξίσωση $\int_1^x f(t)dt=\frac{2}{3}$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(1,2)$.

γ) Εστω ότι δεν ισχύει το ζητούμενο, τότε για κάθε $x\in[1,2]$ θα είναι $f'(x)<3\Leftrightarrow f'(x)-3<0$.

Θεωρούμε την $g(x)=f(x)-3x$ και $g'(x)=f'(x)-3<0$ οπότε η $g\downarrow$ άρα για $x\geq 1$ θα είναι $g(x)\leq g(1)\Leftrightarrow f(x)-3x\leq f(1)-3\Leftrightarrow f(x)-3x+4\leq 0$ οπότε

$$\int_1^2 (f(x)-3x+4)dx\leq 0\Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx-3\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2+4[x]_1^2\leq 0\Leftrightarrow 1-\frac{9}{2}+4\leq 0\Leftrightarrow \frac{1}{2}\leq 0 \text{ άτοπο.}$$

Οπότε υπάρχει $x_0\in[1,2]$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)\geq 3$.

6.425. Θεωρούμε την $h(x)=(x-1)\int_{\alpha}^{x}g(t)dt-x\int_{\beta}^{x}g(t)dt$ η οποία αφού η g είναι συνεχής τότε οι συναρτήσεις $\int_{\alpha}^{x}g(t)dt$, $\int_{\beta}^{x}g(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες οπότε και η h είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ άρα και συνεχής.

Επίσης $h(\alpha)=-\alpha\int_{\beta}^{\alpha}g(t)dt=\alpha\int_{\alpha}^{\beta}g(t)dt$, $h(\beta)=(\beta-1)\int_{\alpha}^{\beta}g(t)dt$ οπότε

$h(\alpha)\cdot h(\beta)=\alpha(\beta-1)\left(\int_{\alpha}^{\beta}g(t)dt\right)^2\le 0$ αφού $\alpha>0$ $\beta-1<0$.

- Αν $h(\alpha)\cdot h(\beta)=0$ τότε $x_0=\alpha$ ή $x_0=\beta$ ρίζες της $h(x)=0$.
- Αν $h(\alpha)\cdot h(\beta)<0$ τότε από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$.

Τελικά υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow(x_0-1)\int_{\alpha}^{x_0}g(t)dt-x_0\int_{\beta}^{x_0}g(t)dt=0\Leftrightarrow$

$(x_0-1)\int_{\alpha}^{x_0}g(t)dt-x_0\int_{\beta}^{x_0}g(t)dt$.

6.426. Θεωρούμε τη $g(x)=(x-3)\int_1^x\sqrt{t^2+1}dt$. Αφού η $\sqrt{t^2+1}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση $\int_1^x\sqrt{t^2+1}dt$ είναι παραγωγίσιμη οπότε και η $g(x)=(x-3)\int_1^x\sqrt{t^2+1}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=\int_1^x\sqrt{t^2+1}dt+(x-3)\sqrt{x^2+1}$ οπότε είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[1,3]$. Επίσης $g(1)=g(3)=0$ άρα από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow\int_1^{\xi}\sqrt{t^2+1}dt+(\xi-3)\sqrt{\xi^2+1}=0\Leftrightarrow\int_1^{\xi}\sqrt{t^2+1}dt=(3-\xi)\sqrt{\xi^2+1}$.

6.427. Θεωρούμε την $g(x)=f(x)-\int_2^x f(t)dt$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[2,4]$ με

$g'(x)=f'(x)-f(x)$ επίσης $g(2)=f(2)=0$, $g(4)=f(4)-\int_2^4 f(t)dt=f(4)-f(4)=0$.

Άρα $g(2)=g(4)$ οπότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(2,4)$ τέτοιο ώστε

$g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=f(\xi)$.

6.428. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=\int_{\alpha}^x f(t)dt-\frac{1}{2}x$ η οποία αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f(x)-\frac{1}{2}$.

Επίσης $g(\alpha+1)=\int_{\alpha}^{\alpha+1}f(t)dt-\frac{1}{2}(\alpha+1)=1-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1-\alpha}{2}$ και

$g(\alpha+3)=\int_{\alpha}^{\alpha+3}f(t)dt-\frac{1}{2}(\alpha+3)=\int_{\alpha}^{\alpha+1}f(t)dt+\int_{\alpha+1}^{\alpha+3}f(t)dt-\frac{\alpha+3}{2}=1+1-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}$.

Οπότε $g(\alpha+1)=g(\alpha+3)$ και αφού η g είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $[\alpha+1,\alpha+3]$ τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha+1,\alpha+3)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{1}{2}$.

6.429. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_0^x g(t)dt+\int_0^x h(t)dt-\frac{x^2}{2}$ η οποία αφού οι συναρτήσεις f, g, h είναι συνεχείς στο $[0,1]$ τότε η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $\varphi'(x)=f(x)+g(x)+h(x)-x$.

Επίσης $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=\int_0^1 f(t)dt+\int_0^1 g(t)dt+\int_0^1 h(t)dt-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{2}=0$

Αφού η $\varphi(0)=\varphi(1)$ οπότε στο Θ. Rolle υπάρχει

$\xi\in(0,1):\varphi'(\xi)=0\Leftrightarrow\varphi(\xi)+g(\xi)+h(\xi)=\xi$

6.430. Η ζητούμενη σχέση $\int_1^{\xi} f(t)dt=\int_1^3 f(t)dt+\frac{1}{2}\int_3^5 f(t)dt$ γίνεται:

$\int_1^{\xi} f(t)dt=\int_1^3 f(t)dt+\frac{1}{2}\int_3^1 f(t)dt+\frac{1}{2}\int_1^5 f(t)dt\Leftrightarrow\int_1^{\xi} f(t)dt=\frac{1}{2}\int_1^3 f(t)dt+\frac{1}{2}\int_1^5 f(t)dt$.

Θεωρούμε την $g(x)=\int_1^x f(t)dt$ η οποία αφού η f είναι συνεχής στο $[1,5]$ τότε η

$g(x)=\int_1^x f(t)dt$ θα είναι παραγωγίσιμη στο $[1,5]$ άρα θα είναι και συνεχής στο $[1,5]$.

Οπότε η g θα έχει μέγιστη (M) και ελάχιστη τιμή (m) στο $[1,5]$ άρα για κάθε $x\in[1,5]$ θα είναι $m\le g(x)\le M$. Οπότε για $x=3$ έχουμε $m\le g(3)\le M$ και $m\le g(5)\le M$.

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει $2m\le g(3)+g(5)\le 2M\Leftrightarrow m\le\frac{g(3)+g(5)}{2}\le M$,

οπότε σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ. υπάρχει $\xi\in[1,5]$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=\frac{1}{2}g(3)+\frac{1}{2}g(5)$ δηλαδή

$\int_1^{\xi} f(t)dt=\frac{1}{2}\int_1^3 d(t)dt+\frac{1}{2}\int_1^5 f(t)dt$

6.431. Θεωρούμε την $g(x)=\int_{\alpha}^x f(t)dt$ η οποία αφού η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε η g είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Οπότε θα παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[\alpha,\beta]$. Για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ θα είναι $m\le g(x)\le M$ οπότε

$m\le g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\le M\Leftrightarrow\frac{2}{3}m\le\frac{2}{3}g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\le\frac{2}{3}M$ (1) και

$m\le g(\beta)\le M\Leftrightarrow\frac{1}{3}m\le\frac{1}{3}g(\beta)\le\frac{1}{3}M$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει $m\le\frac{2}{3}g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\frac{1}{3}g(\beta)\le M$ άρα από Θ.Ε.Τ. υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε

$$g(\xi)=\frac{2}{3}g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\frac{1}{3}g(\beta)\Leftrightarrow\int_{\alpha}^{\xi} f(t)dt=\frac{2}{3}\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(t)dt+\frac{1}{3}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_{\alpha}^{\xi} f(t)dt=\frac{2}{3}\left(\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{3}} f(t)dt+\frac{1}{3}\int_{\frac{\alpha+\beta}{3}}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(t)dt\right)+\frac{1}{3}\left(\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(t)dt+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(t)dt\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{3}} f(t)dt+\frac{2}{3}\int_{\frac{\alpha+\beta}{3}}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(t)dt+\frac{1}{3}\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(t)dt+\frac{1}{3}\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(t)dt.$$

6.432. **α)** Αφού η f είναι συνεχής στο $[0,4]$ τότε η $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ θα είναι παραγωγίσιμη στο $[0,4]$ με $F'(x)=f(x)>0$ οπότε η συνάρτηση F είναι $\uparrow$ στο $[0,4]$

β) Είναι $0<1<4$ οπότε $F(0)<F(1)<F(4)$

$0<2<4$ οπότε $F(0)<F(2)<F(4)$

$0<3<4$ οπότε $F(0)<F(3)<F(4)$

άρα $F(0)<\dfrac{F(1)+F(2)+F(3)}{3}<F(4)$ και σύμφωνα με Θ.Ε.Τ. υπάρχει $x_0(0,4)$ τέτοιο

ώστε $F(x_0)=\frac{1}{3}(F(1)+F(2)+F(3))\Leftrightarrow \int_0^{x_0} f(t)dt=\frac{1}{3}\int_0^1 f(t)dt+\frac{1}{3}\int_0^2 f(t)dt+\frac{1}{3}\int_0^3 f(t)dt=$

$=\frac{1}{3}\int_0^1 f(t)dt+\frac{1}{3}\left(\int_0^1 f(t)dt+\int_1^2 f(t)dt\right)+\frac{1}{3}\left(\int_0^1 f(t)dt2\int_1^1 f(t)dt+\int_2^3 f(t)dt\right)=$

$=\int_0^1 f(t)dt+\frac{2}{3}\int_1^2 f(t)dt+\frac{1}{3}\int_2^3 f(t)dt$

6.433. Θεωρούμε $g(x)=\int_p^x f(t)dt$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ αφού η $f(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, με $g'(x)=f(x)$. Για την g ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[p,x]$ τότε υπάρχει $\xi\in(p,x)$ δηλ. $\xi>p$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi)=\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{\int_p^x f(t)dt}{x-p}\Leftrightarrow (x-p)f(\xi)=\int_p^x f(t)dt$$

6.434. Θεωρούμε τις $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$ και $G(x)=\int_0^x g(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $F(0)=G(0)=0$ και $F(3)=G(3)$ από υπόθεση. Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=F(x)-G(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $[0,3]$ με $\varphi'(x)=F'(x)-G'(x)=f(x)-g(x)$ και θα είναι $\varphi(0)=\varphi(2)$ οπότε από Θ. Rolle υπάρχει $x_0\in(0,3)$ τέτοιο ώστε $\varphi'(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$. Εστω η συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ για $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ (1) και $g(x_1)>g(x_2)\Leftrightarrow -g(x_1)<-g(x_2)$ (2) οπότε από (1), (2) έχουμε $f(x_1)-g(x_1)<f(x_2)-g(x_2)$ άρα $h(x_1)<h(x_2)$ οπότε η h είναι $\uparrow$ οπότε το x_0 είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $h(x)=0$

6.435. Η $g(x)=2+\int_0^x (t-1)f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ αφού η f είναι συνεχής με $g'(x)=(x-1)f(x)$ και $g'(1)=0$, $g'(2)=f(2)=0$. Άρα $g'(1)=g'(2)$ και αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε $g'(x)=(x-1)f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[1,2]$. Οπότε σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $g''(x_0)=0$

6.436. **α)** Στη σχέση $\int_1^x f(t)dt=\int_{\frac{1}{x}}^x x^2tf'(xt)dt+(x^2-2x+2)e^x-2e$ (1)

Θέτουμε $u=x\cdot t$ οπότε $du=xdt$ και

t	$\frac{1}{x}$	1
u	1	x

Άρα η σχέση (1) γίνεται $\int_1^x f(t)dt = \int_1^x uf'(u)du + (x^2-2x+2)e^x - 2e \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_1^x f(t)dt = [uf(u)]_1^x - \int_1^x f(u)du + (x^2-2x+2) - 2e \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\int_1^x f(t)dt = xf(x) - \cancel{f(1)} + (x^2-2x+2)e^x - 2e \quad (2)$

Παραγωγίζοντας στη σχέση (2) έχουμε:

$2f(x) = xf'(x) + f(x) + (2x-2)e^x + (x^2-2x+2)e^x \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = -x^2e^x$

Η $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} + e^x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$g'(x) = \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2} + e^x = \dfrac{-x^2e^x}{x^2} + e^x = 0$ άρα $g(x) = c$

β) Δηλαδή $\dfrac{f(x)}{x} + e^x = c \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \dfrac{f(x)}{x} = c - e^x \\ f(1) = -e \end{matrix}\right\} \Rightarrow c = 0$, οπότε $\dfrac{f(x)}{x} = -e^x \Leftrightarrow f(x) = -xe^x$, $x > 0$

6.437. α) Η συνάρτηση $g(x) = 2 + \dfrac{1}{x}\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ αφού η $f(t)$ είναι συνεχής με $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\int_\alpha^x f(t)dt + \dfrac{1}{x}f(x)$. Επίσης $g(\alpha) = 2$, $g(\beta) = 2 + \dfrac{1}{\beta}\int_\alpha^\beta f(t)dt = 2$ οπότε $g(\alpha) = g(\beta)$, άρα σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0$, δηλαδή η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $(x_0, g(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

β) Εχουμε $g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x_0^2}\int_\alpha^{x_0} f(t)dt + \dfrac{1}{x_0}f(x_0) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x_0}\int_\alpha^{x_0} f(t)dt + f(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 + f(x_0) = 2 + \dfrac{1}{x_0}\int_\alpha^{x_0} f(t)dt$, άρα $2 + f(x_0) = g(x_0)$

6.438. α) Από τη σχέση $f(x) = x - 1 + \int_0^x g(t)dt \quad (1)$ θέτοντας $x = 0$ έχουμε $f(0) = -1 < 0$ και για $x = 4$ έχουμε $f(4) = 3 + \int_0^4 g(t)dt > 0$ γιατί αφού $g(t) \geq -\dfrac{3}{4}$ και η g δεν είναι σταθερή τότε $\int_0^4 g(t)dt > \int_0^4 \left(-\dfrac{3}{4}\right)dt \Leftrightarrow \int_0^4 g(t)dt > -3$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,4]$ και $f(0)\cdot f(4) < 0$ τότε από Θ. Bolzano υπάρχει $p \in (0,4) : f(p) = 0$. Παραγωγίζοντας στην (1) έχουμε $f'(x) = 1 + g(x)$, αφού $g(x) \geq -\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow 1 + g(x) \geq 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4} > 0$ οπότε $f'(x) > 0$. Άρα η f είναι $\uparrow$ οπότε το $p \in (0,4)$ είναι μοναδικό ώστε να ισχύει $f(p) = 0 \Leftrightarrow p - 1 + \int_1^p g(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^p g(t)dt = 1 - p$

β) Για τη συνάρτηση $\varphi(x)=\int_0^x g(t)dt$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0,p]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(0,p)$ τέτοιο ώστε

$$\varphi'(\xi)=\frac{\varphi(p)-\varphi(0)}{p-0}\Leftrightarrow g(\xi)=\frac{\int_0^p g(t)dt}{p}\Leftrightarrow pg(\xi)=-\int_0^p g(t)dt=0$$

6.439. **α)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt=\int_1^{x+1}f(t)dt-\int_1^x f(t)dt$ η οποία αφού η f είναι συνεχής τότε η g θα είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=f(x+1)-f(x),\ x\in[0,1]$.

Επιπλέον $g(0)=\int_0^1 f(t)dt$, $g(1)=\int_1^2 f(t)dt$ άρα $g(0)=g(1)$

Οπότε για την g ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0,1]$ άρα υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0+1)=f(x_0)$ οπότε η f δεν είναι $1-1$.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\int_1^{\frac{1}{x}}f(xt)dt$ έχει λύση στο $(0,2)$

Για $x\neq 0$: $xf(x)=x\int_1^{\frac{1}{x}}f(xt)dt$ και θέτουμε $u=xt$ οπότε $du=xdt$ και

t	1	$\frac{1}{x}$
u	x	1

άρα η εξίσωση γίνεται $xf(x)=\int_x^1 f(u)du\Leftrightarrow xf(x)-\int_x^1 f(u)du=0\Leftrightarrow\left(x\int_x^1 f(u)du\right)'=0$

Θεωρούμε $h(x)=x\int_x^1 f(u)du$, $x\in[0,1]$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ και $h(0)=0$, $h(1)=0$ οπότε $h(0)=h(1)$ οπότε σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=0$.

γ) Θεωρούμε την $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt-3\int_0^1 f(t)dt$, $x\in[0,2]$ η οποία αφού η f είναι συνεχής τότε η φ θα είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής.

$\varphi(0)=-\frac{3}{2}\int_0^1 f(t)dt$,

$$\varphi(2)=\int_0^2 f(t)dt-3\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^2 f(t)dt-\frac{3}{2}\int_0^1 f(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt$$

Οπότε $\varphi(0)\cdot\varphi(2)=-\frac{3}{4}\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2\leq 0$

- Αν $\varphi(0)\cdot\varphi(2)=0$ τότε $\xi_1=0$ ή $\xi_1=2$ ρίζες της $\varphi(x)=0$
- Αν $\varphi(0)\cdot\varphi(2)=0$ τότε από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi_1\in(0,2)$ τέτοιο $\varphi(\xi_1)=0$

Τελικά υπάρχει $\xi_1\in[0,2]$: $\varphi(\xi_1)=0\Leftrightarrow\int_1^{\xi_1}f(t)dt=3\int_0^1 f(t)dt$

6.440. Θεωρούμε την $g(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ αφού η $f(t)$ είναι συνεχής και $g'(x)=f(x)$. Για την g ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ οπότε υπάρχουν $x_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $x_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοια ώστε

$$g'(x_1)=\frac{g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-g(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}=f(x_1) \quad \text{και} \quad g'(x_2)=\frac{g(\beta)-g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}=f(x_2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει: $f(x_1)+f(x_2)=\dfrac{g(\beta)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}=\dfrac{2\int_\alpha^\beta f(t)dt}{\beta-\alpha}$

6.441. **α)** Επειδή η συνάρτηση $\sqrt{-t^2-t+6}$ είναι συνεχής στο $[-3,2]$ και $0\in[-3,2]$, για να ορίζεται η g πρέπει $f(x)\in[-3,2]$. Άρα $-3\le f(x)\le 2 \Leftrightarrow \begin{matrix} f(x)+3\ge 0 \\ f(x)-2\le 0 \end{matrix}$

οπότε $(f(x)+3)(f(x)-2)\le 0 \Leftrightarrow f^2(x)+f(x)-6\le 0 \Leftrightarrow f^2(x)\le -f(x)+6$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\int_0^x f^2(t)dt+x^2-9x+2$, $x\in[0,1]$. Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $h(0)=2>0$, $h(1)=\int_0^1 f^2(t)dt-6\le 0$ γιατί αφού $f^2(t)\le -f(t)+6$ τότε

$\int_0^1 f^2(t)dt\le -\int_0^1 f(t)dt+\int_0^1 6dt \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(t)dt\le 6$

- Οπότε αν $\int_0^1 f^2(t)dt=6$ τότε 1 ρίζα της $h(x)=0$
- Αν $\int_0^1 f^2(t)dt\ne 6$ τότε $\int_0^1 f^2(t)dt-6<0$ και από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$.

Τελικά υπάρχει $x_0\in(0,1]$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$.

6.442. **α)** Θεωρούμε $g(x)=\int_0^x f(t)dt-2+x$, $x\in[0,2]$ η οποία είναι παραγωγίσιμη, αφού η f είναι συνεχής οπότε η g θα είναι και συνεχής στο $[0,2]$.

$g(0)=-2<0$, $g(2)=\int_0^2 f(t)dt=2>0$, οπότε $g(0)\cdot g(2)<0$ άρα σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0\Leftrightarrow \int_1^\xi f(t)dt=2-\xi \quad (1)$

β) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την $h(x)=\int_0^x f(t)dt$ στα διαστήματα $[0,\xi]$ και $[\xi,2]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(0,\xi): h'(\xi_1)=f(\xi_1)=\dfrac{h(\xi)-h(0)}{\xi}\overset{(1)}{=}\dfrac{2-\xi}{\xi}$ και $\xi_2\in(\xi,2)$:

$h'(\xi_2)=f(\xi_2)=\dfrac{h(2)-h(\xi)}{2-\xi}=\dfrac{2-(2-\xi)}{2-\xi}=\dfrac{\xi}{2-\xi}$ οπότε $f(\xi_1)\cdot f(\xi_2)=\dfrac{2-\xi}{\xi}\cdot\dfrac{\xi}{2-\xi}=1$

6.443. **α)** Εχουμε $\int_0^{2x} f(t)dt=2xf(x) \quad (1)$. Αφού f συνεχής τότε η συνάρτηση $\int_0^{2x} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη οπότε για $x>0$ $(1)\Rightarrow f(x)=\dfrac{\int_0^{2x} f(t)dt}{2x}$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Παραγωγίζοντας την (1) έχουμε $2f(2x)=2xf'(x)+2f(x)$. Οπότε για $x>0$

$f'(x)=\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$ (2) η οποία είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(x)=\dfrac{\left(2f'(2x)-f'(x)\right)x-\left(f(2x)-f(x)\right)}{x^2}$

β) Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την f στο $[x,2x]$ οπότε υπάρχει $x_0\in(x,2x)$ τέτοιο ώστε

$f'(x_0)=\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}\overset{(2)}{=}f'(x)$. Επειδή η f' είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $[x,x_0]$ και $f'(x)=f'(x_0)$ τότε από Θ. Rolle υπάρχει $p\in(x,x_0)$ τέτοιο ώστε $f''(p)=0$

6.444. Είναι $f(x)=\int_3^{x^2-6x}\dfrac{1-e^t}{1+e^t}dt$. Επειδή η συνάρτηση $\dfrac{1-e^t}{1+e^t}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $3\in\mathbb{R}$ τότε πρέπει $x^2-6x\in\mathbb{R}$ άρα $D_f=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x)=\dfrac{1-e^{x^2-6x}}{1+e^{x^2-6x}}\cdot(2x-6)$ οπότε πρέπει $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow\left(1-e^{x^2-6x}\right)(2x-6)\geq 0$

Είναι $2x-6\geq 0\Leftrightarrow x\geq 3$, $1-e^{x^2-6x}\geq 0\Leftrightarrow e^{x^2-6x}\leq e^0$, $x^2-6x\leq 0\Leftrightarrow x\in[0,6]$

		0	3	6	
$1-e^{x^2-6x}$	$-$	$+$	$+$	$-$	
$2x-6$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	
	↗	↘	↗	↘	

6.445. Εχουμε $f(x)=\int_{2-x}^{e^x}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$. Η συνάρτηση $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $e^x\in\mathbb{R}$, $2-x\in\mathbb{R}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε $D_f=\mathbb{R}$. Επίσης $f(x)=\int_c^{e^x}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt-\int_c^{2-x}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$ και

$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(e^x\right)^2}}e^x+\dfrac{1}{\sqrt{1+(2-x)^2}}>0$ οπότε η $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

6.446. **α)** Επειδή η $f(t)=\dfrac{t^2+1}{e^t}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε η $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη με $F'(x)=f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}>0$ οπότε η $F\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση γίνεται: $\int_{e^x}^{1-x}f(t)dt=0\Leftrightarrow\int_0^{1-x}f(t)dt-\int_0^{e^x}f(t)dt=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\int_0^{1-x}f(t)dt=\int_0^{e^x}f(t)dt\Leftrightarrow F(1-x)=F\left(e^x\right)$ και επειδή η $F\uparrow$ άρα και $1-1$ τότε $1-x=e^x\Leftrightarrow e^x+x-1=0$. Θεωρώ $g(x)=e^x+x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $g(0)=0$ και $g'(x)=e^x+1>0$ οπότε $g\uparrow$ άρα το $x=0$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

6.447. Η συνάρτηση $\frac{1-\ln t}{t^2}$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Αφού $e\in(0,+\infty)$ τότε η $f(x)=\int_e^x \frac{1-\ln t}{t^2}dt$ ορίζεται στο $(0,+\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

Εχουμε $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow 1-\ln x\ge 0 \Leftrightarrow x\le e$.

Άρα για τη μονοτονία της f έχουμε το διπλανό πίνακα.

Παρατηρούμε ότι η f έχει μέγιστο για $x=e$ την τιμή $f(e)=0$

	0	e	$+\infty$
f'	+		−
f	$\nearrow$		$\searrow$

6.448. Η συνάρτηση $f(x)=\int_2^x (t-2)e^t dt$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με $f'(x)=(x-2)e^{-x}$. Παρατηρούμε ότι $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow x-2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 2$.

Άρα για τη μονοτονία της f έχουμε το διπλανό πίνακα

Η f είναι $\downarrow$ στο $(-\infty,2]$, $\uparrow$ στο $[2,+\infty)$ και έχει ολικό ελάχιστο για $x=2$ το $f(2)=0$. Επίσης η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=e^{-x}-(x-2)e^{-x}=e^{-x}(3-x)$ και $f''(x)\ge 0 \Leftrightarrow 3-x\ge 0 \Leftrightarrow x\le 3$.

	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	−		+
f	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα για την κυρτότητα της f έχουμε το διπλανό πίνακα

Η f είναι κυρτή $(-\infty,3]$, κοίλη στο $[3,+\infty)$ και παρουσιάζει σημείο καμπής στο $A(3,f(3))$

	$-\infty$	3	$+\infty$
f'	+		−
f	$\cup$		$\cap$

Είναι $f(3)=\int_2^3 (t-2)e^{-t}dt=\int_2^3 (t-2)\left(-e^{-t}\right)' dt=$

$$=-\left[(t-2)e^{-t}\right]_2^3+\int_2^3 e^{-t}dt=\frac{e-2}{e^3}$$

Άρα το σημείο καμπής της f είναι το $\left(3,\frac{e-2}{e^3}\right)$

6.449. Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τότε $\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt>0 \Leftrightarrow \int_\alpha^{x_2} f(t)dt-\int_\alpha^{x_1} f(t)dt>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_\alpha^{x_1} f(t)dt<\int_\alpha^{x_2} f(t)dt$ άρα $F(x_1)<F(x_2)$ οπότε η $F\uparrow$

6.450. **α)** Εχουμε $g(x)=\int_\alpha^\beta f(x+t)dx$. Θέτουμε $u=x+t$ οπότε $du=dt$ και

t	α	β
u	$x+\alpha$	$x+\beta$

άρα $g(x)=\int_{x+\alpha}^{x+\beta} f(u)du=\int_c^{x+\beta} f(u)du-\int_c^{x+\alpha} f(u)du$. Επειδή η $f(u)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε οι συναρτήσεις $\int_c^{x+\beta} f(u)du$, $\int_c^{x+\alpha} f(u)du$ είναι παραγωγίσιμες οπότε και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=f(x+\beta)-f(x+\alpha)$. Αφού η f συνεχής και 1−1 τότε θα είναι γνησίως μονότονη αφού $\alpha<\beta$ τότε $x+\alpha<x+\beta$

- Αν η $f\uparrow$ τότε $f(x+\alpha)<f(x+\beta)$ οπότε $g'(x)>0$ άρα $g\uparrow$
- Αν η $f\downarrow$ τότε $f(x+\alpha)>f(x+\beta)$ οπότε $g'(x)<0$ άρα $g\downarrow$

Επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως μονότονη και δεν έχει ακρότατα.

6.451. **α)** Είναι $f(x)=\int_1^x \frac{t-1}{e^t+1}dt$ και επειδή η συνάρτηση $\frac{t-1}{e^t+1}$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $1,x\in\mathbb{R}$, η f ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\frac{x-1}{e^x+1}$

Είναι $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$ οπότε η f είναι ↘ στο $(-\infty,1]$ και είναι ↗ στο $[1,+\infty)$ και έχει ολικό ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=0$

	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	↘		↗

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\geq f(1)\Leftrightarrow f(x)\geq 0$

6.452. **α)** Είναι $f(x)=\frac{x^2}{\ln x}$ με $D_f=(0,1)\cup(1,+\infty)$ και $f'(x)=\frac{2x\ln x-x^2\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=\frac{x(2\ln x-1)}{\ln^2 x}$

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow 2\ln x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq\sqrt{e}$

Η f είναι ↘ στα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,\sqrt{e}]$ ενώ είναι ↗ στο διάστημα $[\sqrt{e},+\infty)$ και έχει τοπ. ελάχιστο για $x=\sqrt{e}$ το $f(\sqrt{e})=2e$.

	0		1		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f'		$-$		$-$		$+$	
f		↘		↘		↗	

β) Είναι $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\ln x}\cdot x^2\right)=0\cdot 0=0$, $\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{\ln x}\cdot x^2\right)=-\infty$ γιατί $\ln x<0$ και $\lim_{x\to 1}(\ln x)=0$ και $\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}\cdot x^2\right)=+\infty$. Οπότε όταν $x\in(0,1)$ τότε $f(x)<0$ ενώ για κάθε $x\in(1,+\infty)$ τότε $f(x)\geq f(\sqrt{e})=2e>0$

γ) Θεωρούμε $g(x)=\int_5^x f(t)dt$, $x>1$. Είναι $g'(x)=f(x)>0$ όταν $x>1$, άρα g↗ στο $(1,+\infty)$ και αφού $g(5)=0$ τότε το $x_0=5$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

6.453. Εχουμε $g(x)=\int_1^x \frac{\lambda t^2-10t+\lambda}{t^2+4}dt$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $1,x\in\mathbb{R}$, με $g'(x)=\frac{\lambda x^2-10x+\lambda}{x^2+4}$. Αφού η g έχει ακρότατο στο $x_0=3$ τότε σύμφωνα με το Θ. Fermat πρέπει $g'(3)=0\Leftrightarrow\frac{9\lambda-30+\lambda}{13}=0\Leftrightarrow 10\lambda=30\Leftrightarrow\lambda=3$.

Τότε $g'(x)=\frac{3x^2-10x+3}{x^2+4}=\frac{3(x-3)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{x^2+4}\geq 0\Leftrightarrow x\leq\frac{1}{3}$ ή $x\geq 3$.

Η g είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$, $[3,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{3},3\right]$. Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0=3$.

6.454. Αφού η συνάρτηση $\left(x+x^{2013}+x^{2015}+x^{2017}\right)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $1, t\in\mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $f(t)=\int_1^t\left(x+x^{2013}+x^{2015}+x^{2017}\right)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(t)=t+t^{2013}+t^{2015}+t^{2017}$. Επίσης η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(t)=1+2013t^{2012}+2015t^{2014}+2017t^{2016}>0$.

Οπότε η f είναι κυρτή και δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

6.455. Είναι $f(x)=\int_0^{2008}e^{-(x+t)^2}dt$. Θέτω $u=x+t$ οπότε $du+dt$ και

t	0	2008
u	x	2008+x

Άρα $f(x)=\int_x^{2008+x}e^{-u^2}du=\int_c^{2008+x}e^{-u^2}du-\int_c^{x}e^{-u^2}du$

Επειδή η e^{-u^2} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x)=e^{-(2008+x)^2}-e^{-x^2}$ και $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow e^{-(2008+x)^2}\geq e^{-x^2}\Leftrightarrow -(2008+x)^2\geq -x^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2008^2+2\cdot 2008x+x^2\leq x^2\Leftrightarrow 2008(2008+2x)\leq 0\Leftrightarrow x\leq -1004$

Άρα η μονοτονία της f φαίνεται στο διπλανό πίνακα.
Παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=-1004$
το $f(-1004)=0$

	$-\infty$	-1004	$+\infty$
f'	+		−
f	↗		↘

6.456. **α)** Είναι $f(x)=\int_0^2|t-x|dt$, $x\in\mathbb{R}$. Θέτω $u=t-x$ οπότε $du=dt$ και

t	0	2
u	−x	2−x

Άρα $f(x)=\int_{-x}^{2-x}|u|du=\int_c^{2-x}|u|du-\int_c^{-x}|u|du$

Επειδή $|u|$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε οι συναρτήσεις $\int_c^{2-x}|u|du$, $\int_c^{-x}|u|du$ είναι παραγωγίσημες στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=|2-x|(-1)-|-x|(-1)=|x|-|2-x|$

β) Είναι $f'(x)=|x|-|2-x|$

- Αν $x\leq 0$ τότε $f'(x)=-x-2+x=-2<0$ οπότε η f είναι ↓
- Αν $0<x<2$ τότε $f'(x)=x-2+x=2(x-1)$ οπότε

  αν $0<x\leq 1$ τότε $f'(x)<0$ άρα η f είναι ↓

  αν $1<x<2$ τότε $f'(x)>0$ άρα η f είναι ↑
- Αν $x\geq 2$ τότε $f'(x)=x+2-x=2>0$ άρα η f είναι ↑

Συνεπώς η f είναι ↓ στο $(-\infty,1]$ και ↑ στο $[1,+\infty)$

6.457. Είναι $g(x)=\int_1^{-x}xf(t)dt=x\int_1^{-x}f(t)dt$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμή στο $\mathbb{R}$ θα είναι και συνεχής οπότε η συνάρτηση $\int_1^{-x}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Άρα η $g(x)=x\int_1^{-x}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=x\int_1^{-x}f(t)dt-xf(-x)$.

Οπότε $g'(-1)=\int_1^1 f(t)dt-(-1)f(1)=f(1)=0$ άρα η g έχει κρίσιμο σημείο στο $x=-1$.

6.458. Είναι $g(x)=e^{\int_0^x f(t)dt}-\ln x$, $x>0$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμή στο $\mathbb{R}$ θα είναι και συνεχής άρα και η συνάρτηση $\int_0^x f(t)dt$ θα είναι παραγωγίσιμή στο $\mathbb{R}$. Οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=e^{\int_0^x f(t)dt}f(x)-\dfrac{1}{x}$

Επίσης η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με: $g''(x)=e^{\int_0^x f(t)dt}f^2(x)+e^{\int_0^x f(t)dt}f'(x)+\dfrac{1}{x^2}>0$

Οπότε η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε θα έχει το πολύ μία ρίζα.

6.459. Η συνάρτηση $g(x)=\int_0^{f(x)} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμή στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f(f(x))f'(x)$

- Για $x>0$, αφού $f'\uparrow$, θα είναι $f'(x)>f'(0)\Leftrightarrow f'(x)>0$ και αφού $f\uparrow$ τότε $f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$ και $f(f(x))>f(0)=0$ οπότε $g'(x)>0$
- Για $x<0$ θα έχουμε $f'(x)<f'(0)\Leftrightarrow f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow$ και $f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0\Leftrightarrow f(f(x))<f(0)\Leftrightarrow f(f(x))<0$ οπότε $f(f(x))f'(x)>0$

Άρα η $g'(x)>0$ οπότε $g\uparrow$ σ' όλο το $\mathbb{R}$.

6.460. **α)** Είναι $\int_1^x f(t)dt=g(x)+3x^2+2x \quad (1)$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής οπότε και η $\int_1^x f(t)dt$ θα είναι παραγωγίσιμη και παραγωγίζοντας την (1) έχουμε: $f(x)=g'(x)+6x+2\Leftrightarrow g(x)=f(x)-(6x+2) \quad (2)$

Επειδή η $C_{g'}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ των $x'x$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)=0$ άρα από (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(6x+2)\right]=0$ οπότε η $y=6x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

β) Στην (1) για $x=1$ προκύπτει $g(1)=-5$ και

για $x=2$ είναι $\int_1^2 f(t)dt=g(2)+12+4\Leftrightarrow 11=g(2)+16\Leftrightarrow g(2)=-5$

Οπότε $g(1)=g(2)$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ άρα από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$ και από (2) προκύπτει $f(\xi)=6\xi+2$

6.461. Είναι $f(x)=\int_x^{x^2}\ln t^2dt=\int_1^{x^2}\ln t^2dt-\int_1^x\ln t^2dt$ και επειδή η συνάρτηση $\ln t^2$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και η συνάρτηση x^2 είναι παραγωγίσιμη στο διαστημα αυτό τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με: $f'(x)=\ln\left(x^2\right)^2 2x-\ln x^2\overset{x>0}{=}8x\ln x-2\ln x=(8x-2)\ln x$

Οπότε για την μονοτονία της f έχουμε το διπλανό πίνακα

x	0		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$8x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x$		$-$		$-$	0	$+$	
f'		$+$		$-$		$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f είναι $\uparrow$ στα διαστήματα $\left(0,\frac{1}{4}\right]$

και $[1,+\infty)$ και $\downarrow$ στο διάστημα $\left[\frac{1}{4},1\right]$.

Εχει τοπικό μέγιστο για $x=\frac{1}{4}$

το $f\left(\frac{1}{4}\right)=\int_{\frac{1}{14}}^{\frac{1}{16}}\ln t^2 dt=\frac{3}{8}-\frac{1}{4}\ln\frac{1}{4}$ και

τοπικό ελάχιστο για $x=1$, $f(1)=0$

6.462. Επειδή οι συναρτήσς $f(t), tf(t)$ είναι συνεχείς στο $(1,+\infty)$ τότε και η συνάρτηση

$h(x)=\dfrac{\int_1^x f(t)dt}{\int_1^x tf(t)dt}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Είναι $h'(x)=\dfrac{f(x)\int_1^x tf(t)dt-xf(x)\int_1^x f(t)dt}{\left(\int_1^x tf(t)dt\right)^2}=\dfrac{f(x)\left[\int_1^x tf(t)dt-x\int_1^x f(t)dt\right]}{\left(\int_1^x tf(t)dt\right)^2}$

Για $1\le t<x \overset{f(t)>0}{\Rightarrow} tf(t)<xf(t)$ οπότε $\int_1^x tf(t)dt<\int_1^x xf(t)dt \Leftrightarrow \int_1^x tf(t)dt<x\int_1^x f(t)dt$

άρα $h'(x)<0$ οπότε η $h\downarrow$ στο $(1,+\infty)$.

6.463. Οι συναρτήσεις $t^{\nu}f(t)$, $t^{\nu-1}f(t)$ είναι συνεχείς στο $[0,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση

$g(x)=\dfrac{\int_0^x t^{\nu}f(t)dt}{\int_0^x t^{\nu-1}f(t)dt}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$g'(x)=\dfrac{x^{\nu}f(x)\int_0^x t^{\nu-1}f(t)dt-x^{\nu-1}f(x)\int_0^x t^{\nu}f(t)dt}{\left(\int_0^x t^{\nu-1}f(t)dt\right)^2}=\dfrac{x^{\nu-1}f(x)\left[\int_0^x t^{\nu-1}f(t)dt-\int_0^x t^{\nu}f(t)dt\right]}{\left(\int_0^x t^{\nu-1}f(t)dt\right)^2}$

Είναι $0\le t<x \overset{\cdot t^{\nu-1}}{\Rightarrow} t^{\nu}<xt^{\nu-1} \overset{\cdot f(t)>0}{\Leftrightarrow} t^{\nu}f(t)<t^{\nu-1}f(t)$ οπότε

$\int_0^x t^{\nu}f(t)dt<x\int_0^x t^{\nu-1}f(t)dt \Leftrightarrow x\int_0^x t^{\nu-1}f(t)dt-\int_0^x t^{\nu}f(t)dt>0$

οπότε $g'(x)>0$ αρά η $g\uparrow$ στο $(0,+\infty)$.

6.464. Δίνεται ότι $3xf(x^3)-2f(x^2)=\ln x$ (1), $x>0$

α) Εχουμε $g(x)=\int_{x^2}^{x^3} f(t)dt=\int_{c}^{x^3} f(t)dt-\int_{c}^{x^2} f(t)dt$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ τότε οι συναρτήσεις $\int_{c}^{x^3} f(t)dt$, $\int_{c}^{x^2} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες οπότε και g παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=f(x^3)3x^2-f(x^2)2x=x\left(3xf(x^3)-2f(x^2)\right)\overset{(1)}{=}x\ln x$

Είναι $g'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\ln x\geq 0 \overset{x>0}{\Rightarrow} \ln x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$

	0	1	$+\infty$
g'		$-$	$+$
g		$\searrow$	$\nearrow$

Η g είναι $\downarrow$ στο $(0,1]$ και $\uparrow$ στο $[1,+\infty)$ και έχει ολικό ελάχιστο για $x=1$ το $g(1)=0$.

β) Εστω $h(x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2-1}{4}$, $x>0$.

Είναι $h'(x)=x\ln x+\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}-\frac{2x}{4}=x\ln x$. Άρα $h'(x)=g'(x)$ για κάθε $x>0$.

$$\left.\begin{aligned} h(x)&=g(x)+c\\ \text{και } h(1)&=g(1)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow c=0. \text{ Άρα } g(x)=h(x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2-1}{4},\ x>0$$

6.465. Εχουμε $f(x)=\int_0^x \frac{g(t)}{x^2}dt \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{x^2}\int_0^x g(t)dt$. Αφού η g παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ θα είναι και συνεχής οπότε και η συνάρτηση $\int_0^x g(t)dt$ θα είναι παραγωγίσιμη.

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=-\frac{2}{x^3}\int_0^x g(t)dt+\frac{1}{x^2}g(x)=-\frac{1}{x^3}\left(2\int_0^x g(t)dt-xg(x)\right)$$

Εστω $h(x)=2\int_0^x g(t)dt-xg(x)$ και

$$h'(x)=2g(x)-g(x)-xg'(x)=g(x)+xg'(x)=x\left(\frac{g(x)}{x}-g'(x)\right)$$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την g στο $[0,x]$, τότε υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε

$g'(\xi)=\frac{g(x)-g(0)}{x}=\frac{g(x)}{x}$, $\xi<x$ και $g'\downarrow$ άρα $g'(\xi)>g'(x)\Leftrightarrow \frac{g(x)}{x}>g'(x)$

άρα $h'(x)>0\Rightarrow h\uparrow$. Για $x>0$: $h(x)>h(0)\Rightarrow 2\int_0^x g(t)dt-xg(x)>0$ οπότε

$f'(x)=-\frac{1}{x^3}\left(2\int_0^x g(t)dt-xg(x)\right)<0$ στο $(0,+\infty)$ άρα η f $\downarrow$ στο $(0,+\infty)$.

6.466. **α)** Αφού f′ συνεχής και $f'(x)\neq 0$ τότε η f′ διατηρεί πρόσημο στο $(0,+\infty)$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$ για την f οπότε υπάρχει $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}=2>0$$ οπότε $f'(x)>0$ για κάθε $x>0$ άρα $f\uparrow$ στο $(0,+\infty)$

οπότε η f θα είναι και 1–1. Για να ορίζεται η $g(x)=\int_2^{f(x)}\frac{1}{1-f(x)}dt$ πρέπει

$1-f(t)\neq 0 \Leftrightarrow f(t)\neq f(1) \overset{f\,1-1}{\Rightarrow} x\neq 1$ άρα η συνάρτηση $\frac{1}{1-f(t)}$ ορίζεται στο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

επειδή $2\in(1,+\infty)$ και για $x>1$ $f(x)>f(1)\Rightarrow f(x)\in(1,+\infty)$ τότε $Dg=(1,+\infty)$

β) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $g'(x)=\frac{1}{1-f(f(x))}f'(x)$

και $f(x)>1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(f(x))>f(1)\Leftrightarrow f(f(x))>1\Leftrightarrow 1-f(f(x))<0$ οπότε $g'(x)<0$

άρα η g είναι $\downarrow$.

6.467. α) Είναι $f(x)=\int_1^x t(2\ln t+1)dt$. Επειδή η συνάρτηση $t(2\ln t+1)$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$

τότε $f(x)=\int_0^x t(2\ln t+1)dt$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=x(2\ln x+1)$.

β) Είναι $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow x(2\ln x+1)\geq 0\Leftrightarrow \ln x\geq -\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\geq\frac{1}{\sqrt{e}}$

Η f έχει ολικό ελάχιστο για $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ το

	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{e}}} t(2\ln t+1)dt=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{e}}}\left(\frac{t^2}{2}\right)'(2\ln t+1)dt=$$

$$=\left[\frac{t^2}{2}(2\ln t+1)\right]_1^{\frac{1}{\sqrt{e}}}-\int_1^{\frac{1}{\sqrt{e}}}\frac{t^2}{2}\frac{2}{t}dt=-\frac{1}{2e}$$

γ) Η $f'(x)=x(2\ln x+1)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

με $f''(x)=2\ln x+1+2=2\ln x+3$ και

$f''(x)\geq 0\Rightarrow 2\ln x+3\geq 0\Leftrightarrow x\geq e^{-\frac{3}{2}}$

Η f έχει Σ.Κ. για $x=e^{-\frac{3}{2}}$

	0	$e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	$\frown$		$\smile$

$$f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)=\int_1^{e^{-\frac{3}{2}}} t(2\ln t+1)dt=\left[\frac{t^2}{2}(2\ln t+1)\right]_1^{e^{-\frac{3}{2}}}-\int_1^{e^{-\frac{3}{2}}}tdt=-\frac{3}{2e^3}$$

δ) Η εξίσωση γίνεται $\int_{e^{-\frac{3}{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{e}}}x(2\ln x+1)=\frac{1}{e^3}-e^{x+5}\Leftrightarrow\int_{e^{-\frac{3}{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{e}}}\left(\frac{x^2}{2}\right)'(2\ln x+1)dt=\frac{1}{e^3}-e^{x+5}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{x^2}{2}(2\ln x+1)\right]_{e^{-\frac{3}{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{e}}}-\int_{e^{-\frac{3}{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{e}}}xdx=\frac{1}{e^3}-e^{x+5}\Leftrightarrow 0-\frac{e^{-3}}{2}(-2)-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{e^{-\frac{3}{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{e}}}=\frac{1}{e^3}-e^{x+5}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cancel{\frac{1}{e^3}}-\frac{1}{2e}+\frac{1}{2e^3}=\cancel{\frac{1}{e^3}}-e^{x+5}\Leftrightarrow e^{x+5}=\frac{1}{2e}+\frac{1}{2e^3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x+5}=\frac{e^2-1}{2e^3}\Leftrightarrow x+5=\ln\frac{e^2-1}{2e^3}\Leftrightarrow x=\ln\frac{e^2-1}{2e^3}-5$$

6.468. **α)** Είναι $f(x)=\int_0^x e^{-x}g(t)dt=e^{-x}\int_0^x g(t)dt$ η οποία αφού η g είναι συνεχής τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f'(x)=-e^{-x}\int_0^x g(t)dt+e^{-x}g(x)=e^{-x}\left(g(x)-\int_0^x g(t)dt\right)>0$ οπότε η $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$.

β) Για $x\geq 0$ είναι $f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow f(x)\geq 0\Leftrightarrow e^{-x}\int_0^x g(t)dt\geq 0\Leftrightarrow \int_0^x g(t)dt\geq 0$

Αφού $g(x)>\int_0^x g(t)dt\geq 0$ τότε $g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

6.469. **α)** Είναι $g'(x)=x^2\int_1^x f'(x^2t)dt$. Θέτω $u=x^2t$ οπότε $du=x^2dt$ και

t	1	x
u	x^2	x^3

Είναι $g'(x)=\int_{x^2}^{x^3} f'(u)du=\left[f(u)\right]_{x^2}^{x^3}=f(x^3)-f(x^2)$

β) Αφού $f'(x)>0$ τότε η $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$. Οπότε

$g'(x)>0\Leftrightarrow f(x^3)-f(x^2)>0\Leftrightarrow f(x^3)>f(x^2)\Leftrightarrow x^3>x^2\Leftrightarrow x^2(x-1)>0\Leftrightarrow x>1$

Είναι

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
g'	$-$	$-$	$+$	
g	↘	↘	↗	

Άρα $g\downarrow$ στο $(-\infty,1]$ και $\uparrow$ στο $[1,+\infty)$

γ) Είναι $g'(0)=f(0)-f(0)=0$ και $g'(1)=f(1)-f(1)=0$.

Επίσης η g' είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $g''(x)=3x^2f'(x^3)-2xf'(x^2)$

άρα από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε: $g''(\xi)=0$

$3\xi^2f'(\xi^3)-2\xi f'(\xi^3)=0\Leftrightarrow 3\xi^2f'(\xi^3)=2\xi f'(\xi^3)$ και αφού $\xi\in(0,1)$ τότε $3\xi^2\neq 0$

Άρα $f'(\xi^3)=\dfrac{2\xi f'(\xi^2)}{3\xi^2}=\dfrac{2f'(\xi^2)}{3\xi}$.

6.470. **α)** Είναι $g(x)=\int_0^x(1-t^2)f(t)dt$, $x\in[1,1]$.

Επειδή η συνάρτηση $(1-t^2)f(t)$ είναι συνεχής στο $[-1,1]$ τότε η $g(x)=\int_0^x(1-t^2)f(t)dt$ είναι παραγωγισιμη στο $[-1,1]$ με $g'(x)=(1-x^2)f(x)$

β) Επειδή $g'(x)=(1-x^2)f(x)$ και $1-x^2>0$ όταν $x\in(-1,1)$ τότε

αν $f(x)>0\Rightarrow g'(x)>0$ άρα $g\uparrow$ στο $[-1,1]$

αν $f(x)<0\Rightarrow g'(x)<0$ άρα $g\downarrow$ στο $[-1,1]$

Συνεπώς η g είναι γνησίος μονότονη.

γ) Επειδή f άρτια είναι $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in[-1,1]$.

Εχουμε: $g(-x)=\int_0^{-x}(1-t^2)f(t)dt$. Θέτουμε $t=-u$ οπότε $dt=-du$ και

t	0	$-x$
u	0	x

Άρα $g(-x)=\int_0^x(1-u^2)f(-u)(-du)=-\int_0^x(1-u^2)f(u)du=-g(x)$.

Άρα η g είναι περιττή.

6.471. α) Εχουμε $f(x)>x\int_{\frac{1}{x}}^{1}f(xt)dt\quad(1)$. Θέτουμε $u=xt$ οπότε $du=xdt$ και

t	$\frac{1}{x}$	1
u	1	x

Άρα η σχέση (1) γίνεται: $f(x)>\int_1^x f(u)du \Leftrightarrow f(x)>\int_1^x f(t)dt\quad(2)$

Η συνάρτηση $g(x)=e^{-x}\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$$g'(x)=-e^{-x}\int_1^x f(t)dt+e^{-x}f(x)=e^{-x}\left(f(x)-\int_1^x f(t)dt\right)\overset{(2)}{>}0 \text{ άρα η } g \text{ είναι } \uparrow$$

β) Για $x\geq 1$ είναι $g(x)\geq g(1)\Leftrightarrow e^{-x}\int_1^x f(t)dt\geq 0$ οπότε $\int_1^x f(t)dt\geq 0$

Άρα η (2) γίνεται $f(x)>\int_1^x f(t)dt\geq 0\Rightarrow f(x)>0$ για κάθε $x\geq 1$

6.472. α) Αφού η f είναι συνεχής τότε έχει αρχική στο $\mathbb{R}$ και έστω F η αρχική της, δηλαδή $F'(x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Οπότε $g(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt=\left[F(t)\right]_x^{x+1}=F(x+1)-F(x)$

και $g'(x)=F'(x+1)-F'(x)=f(x+1)-f(x)$

Όμως η f είναι $\downarrow$ και αφού $x+1>x$ τότε $f(x+1)<f(x)\Leftrightarrow f(x+1)-f(x)<0$

άρα $g'(x)<0$ οπότε η $g\downarrow$.

β) Επίσης αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε η $g'(x)=f(x+1)-f(x)$ είναι παραγωγίσημη

με $g''(x)=f'(x+1)-f'(x)<0$ αφού $x+1>x$ και f κοίλη δηλαδή $f'\downarrow$ στο $\mathbb{R}$.

Οπότε και η g είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\int_{x^2+3}^{x^2+4}f(t)dt+\int_5^4 f(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι

$h(1)=h(-1)=0$ και $h(x)=F(x^2+4)-F(x^2+3)-(F(5)-F(4))$

και παραγωγίζονται $h'(x)=F'(x^2+4)2x-F'(x^2+3)2x=2x\left(f(x^2+4)-f(x^2+3)\right)$

αφού $x^2+4>x^2+3$ και η $f\downarrow$ τότε $f(x^2+4)<f(x^2+3)$

Οπότε το πρόσημο της h' και η μονοτονία της h δίνονται στο διπλανό πίνακα. Από τον πίνακα διαπιστώνουμε ότι το -1 είναι μοναδική ρίζα της $h(x)=0$ στο $(-\infty,0)$ και το 1 μοναδική ρίζα της $h(x)=0$ στο $(0,+\infty)$ άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες.

	$-\infty$	0	$+\infty$
h'	+		−
h	$\nearrow$		$\searrow$

6.473. Η συνάρτηση $g(x)=\int_\alpha^x \frac{g^2(t)}{f(t)}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $g'(x)=\frac{g^2(x)}{f(x)}\quad(1)$

Η g είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ οπότε η g θα παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[\alpha,\beta]$, M και m αντίστοιχα. Αν η g παρουσιάζει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στα άκρα α,β τότε $m=M$ και η g είναι σταθερή. Αν παρουσιάσει ακρότητα σε εσωτερικά σημεία $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ τότε από Θ. Fermat θα είναι $g'(x_1)=0$, $g'(x_2)=0$. Από (1) προκύπτει ότι $g(x_1)=g(x_2)=0$ άρα $m=M$ οπότε η g είναι σταθερή.

6.474. α) Είναι $f(x)=\int_1^x\frac{\ln(1+t)}{t}dt$, $x\geq1$. Επειδή η συνάρτηση $\frac{\ln(1+t)}{t}$ είναι συνεχής $[1,+\infty)$ τότε και η συνάρτηση $f(x)=\int_1^x\frac{\ln(1+t)}{t}dt$ θα είναι παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$ με

$f'(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}>0$ για κάθε $x\geq1$, άρα $f\uparrow$ στο $[1,+\infty)$.

β) Θέλουμε να δείξουμε ότι $\frac{\ln^2x}{2}\leq f(x)\leq\ln2\ln x+\frac{\ln^2x}{2}$ (1).

Θεωρούμε $h(x)=f(x)-\frac{\ln^2x}{2}$, $x\geq1$

$h'(x)=f'(x)-\frac{2\ln x}{2x}=\frac{\ln(x+1)}{x}-\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln(x+1)-\ln x}{x}>0$, αφού $x+1>x$ και $\ln x\uparrow$ άρα

$h\uparrow$ οπότε για $x\geq1$ είναι $h(x)\geq h(1)\Leftrightarrow f(x)-\frac{\ln^2x}{2}\geq0\Leftrightarrow f(x)\geq\frac{\ln^2x}{2}$

Επίσης, θεωρούμε την $g(x)=f(x)-\ln2\ln x-\frac{\ln^2x}{2}$

$$g'(x)=f'(x)-\frac{\ln2}{x}-\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln(x+1)-\ln2-\ln x}{x}=\frac{\ln(x+1)-\ln(2x)}{x}=\frac{\ln\frac{x+1}{2x}}{x}$$

Για κάθε $x>1\Leftrightarrow x+x>x+1\Leftrightarrow 2x>x+1\Leftrightarrow\frac{x+1}{2x}<1$ άρα $\ln\frac{x+1}{2x}<0$, οπότε $g'(x)=0$ $g\downarrow$

Για κάθε $x\geq1$ είναι $g(x)\leq g(1)\Leftrightarrow g(x)\leq0\Leftrightarrow f(x)\leq\ln2\ln x+\frac{\ln^2x}{2}$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2x}{2}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln2\ln x+\frac{\ln^2x}{2}\right)=+\infty$ άρα από την (1) και με το κτιτήριο παρεμβολής προκύπτει $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Για $x\in(1,+\infty)$ από $(1)\Leftrightarrow\frac{\ln^2x}{2x}\leq\frac{f(x)}{x}\leq\ln2\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln^2x}{2x}$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2x}{2x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x\frac{1}{x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln2\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln^2x}{2x}\right]=0$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

6.475. α) Θεωρούμε την $h(x)=\int_0^x e^{et+1}dt-e\int_0^x\sqrt{t^2+1}dt$, $x\geq0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με

$h'(x)=e^{ex+1}dt-e\sqrt{x^2+1}$ και $h''(x)=e^{ex+1}e-\dfrac{ex}{\sqrt{x^2+1}}=e\left(e^{ex+1}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)>0$ γιατί

$0\le x^2<x^2+1\Leftrightarrow x<\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}<1$. Επίσης $x\ge 0\Leftrightarrow ex+1\ge 1\Leftrightarrow e^{ex+1}\ge e^1>1$.

Οπότε $h''(x)>0$ και για $x>0$ είναι $h'(x)>h'(0)=0\Leftrightarrow h'(x)>0$, άρα $h\uparrow$ και για $x\ge 0$ είναι $h(x)\ge h(0)$.

β) Εστω $g(u)=\int_1^u e^{t^2}dt$ η οποία, αφού η e^t είναι συνεχής τότε η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(u)=e^{u^2}>0$ άρα $g\uparrow$. Επίσης θεωρούμε $h(x)=x-e\ln x$, $x>0$.

$h'(x)=1-\dfrac{e}{x}=\dfrac{x-e}{x}$ οπότε για κάθε $x>0$

θα είναι $h(x)\ge h(e)\Leftrightarrow x-e\ln x\ge 0\Leftrightarrow x\ge e\ln x$

Αφού $x\ge e\ln x$ και $g\uparrow$ τότε $g(x)\ge g(e\ln x)$.

$\int_1^x e^{t^2}dt\ge \int_1^{e\ln x} e^{t^2}dt$

	0	e	$+\infty$
h'	$-$		$+$
h	↘		↗

γ) Εστω $g(u)=\int_0^u \eta\mu^{100}t\,dt$, $u\in\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(u)=\eta\mu^{100}u>0$ για κάθε $u\ne k\pi$, $k\in z$ οπότε $g\uparrow$ στο $\mathbb{R}$. Επίσης θεωρούμε $h(x)=e^x-1-xe^x$, $x\in\mathbb{R}$.

$h'(x)=e^x-e^x-xe^x=-xe^x\ge 0\Leftrightarrow x\le 0$.

Οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα είναι $h(x)\le h(0)$

$e^x-1-xe^x\le 0\Leftrightarrow e^x\le 1+xe^x$

και επειδή η g είναι $\uparrow$ τότε

$g(e^x)\le g(1+xe^x)\Leftrightarrow$

$\int_0^{e^x}\eta\mu^{100}t\,dt\le\int_0^{1+xe^x}\eta\mu^{100}t\,dt$

	$-\infty$	0	$+\infty$
h'	$+$		$-$
h	↗		↘

δ) Θεωρούμε των $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}-1+\int_{e^2}^x\dfrac{dt}{\ln t}$, $x\in(e^2,+\infty)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\frac{2x\ln x-x^2\frac{1}{x}}{\ln^2 x}+\frac{1}{\ln x}=\frac{2x\ln x-x+\ln x}{\ln^2 x}=\frac{x(2\ln x-1)+\ln x}{\ln^2 x}>0$$

αφού $x>e^2\Leftrightarrow \ln x>2\Leftrightarrow 2\ln x>4\Leftrightarrow 2\ln x-1>3>0$. οπότε

$$x>e^2\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(e^2)\Leftrightarrow f(x)>\frac{e^4}{2}-1>0\Leftrightarrow\frac{x^2}{\ln x}>1-\int_{e^2}^x\frac{dt}{\ln t}$$

6.476. Θεωρούμε την $g(x)=xf(x)-\int_0^x f(t)dt$, $x\ge 0$. $g'(x)=f(x)+xf'(x)-f(x)=xf'(x)>0$ για κάθε $x>0$, οπότε $g\uparrow$ στο $[0,+\infty)$. Για κάθε $x>0\Leftrightarrow g(x)>g(0)$.

$xf(x)-\int_0^x f(t)dt>0\Leftrightarrow f(x)>\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$

6.477. Θεωρούμε την $g(x)=\int_0^x tf(t)dt-x\int_0^x f(t)dt$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$.

Αφού οι συναρτήσεις $tf(t)$ και $f(t)$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ η g είναι παραγωγίσιμη με

$g'(x)=xf(x)-xf(x)-\int_0^x f(t)dt=-\int_0^x f(t)dt<0$ αφού $f(t)>0$, άρα $\int_0^x f(t)dt>0$ για $x>0$,

οπότε η $g\downarrow$ στο $[0,+\infty)$. Για $x>0$ θα είναι $g(x)<g(0)\Leftrightarrow \int_0^x tf(t)dt<x\int_0^x f(t)dt$.

6.478. Θεωρούμε $g(x)=\int_1^x f(t)dt$, $x\in[1,2]$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ θα είναι και συνεχής οπότε η $g(x)=\int_1^x f(t)dt$ θα είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=f(x)$

Επίσης $\left.\begin{aligned} g(1)&=0\\ g(2)&=\int_1^2 f(t)dt=0\end{aligned}\right\} g(1)=g(2)$.

Οπότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=0$. Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[1,2]$ τότε η $f\uparrow$ στο $[1,2]$ οπότε: $1<\xi<2$ άρα $f(1)<f(\xi)<f(2)\Leftrightarrow f(1)<0<f(2)$ οπότε $f(1)\cdot f(2)<0$.

6.479. Θεωρούμε $g(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_0^{6-x} f(t)dt-2\int_0^3 f(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f(x)-f(6-x)$.

Επειδή $f'(x)=e^{x^2}>0$ τότε $f\uparrow$ άρα

$g'(x)>0\Leftrightarrow f(x)-f(6-x)>0\Leftrightarrow f(x)>f(6-x)\Leftrightarrow x>6-x\Leftrightarrow x>3$

Οπότε το πρόσημο της g φαίνεται στο διπλανό πίνακα

	$-\infty$	3	$+\infty$
g'	$-$		$+$
g	$\searrow$		$\nearrow$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)\geq g(3)\Leftrightarrow g(x)\geq 0\Leftrightarrow$

$\int_0^x f(t)dt+\int_0^{6-x} f(t)dt\geq 2\int_0^3 f(t)dt$

6.480. Εστω $h(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2-\int_0^x f^3(t)dt,\ x\in[0,1]$

Είναι $h'(x)=2\left(\int_0^x f(t)dt\right)f(x)-f^3(x)=f(x)\left(2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)\right)$

Αφού $f'(x)>0$ τόπε η f είναι $\uparrow$, άρα για $x>0$ θα είναι $f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$.

Εστω $g(x)=2\int_0^x f(t)dt-f^2(x),\ x\in[0,1]$. Είναι

$g'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)(1-f'(x))>0\Rightarrow g\uparrow[0,1]$

Για κάθε $0<x<1\overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x)>g(0)=0\Rightarrow h'(x)>0\Rightarrow h\uparrow[0,1]$

$1>0\overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(1)>h(0)\Leftrightarrow\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2-\int_0^1 f^3(t)dt>0\Leftrightarrow\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2>\int_0^1 f^3(t)dt$

6.481. Εστω $g(x)=\left(\int_1^x f^2(t)dt\right)^2-\frac{2}{3}f^3(x)$, $x>1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη $\mathbb{R}$ με

$g'(x)=2\int_1^x f^2(t)dt\cdot f^2(x)-2f^2(x)f'(x)=2f^2(x)\left(\int_1^x f^2(t)dt-f'(x)\right)$

Εστω $\varphi(x)=\int_1^x f^2(t)dt-f'(x)$ τότε $\varphi'(x)=f^2(x)-f''(x)>0$ άρα $\varphi\uparrow$

για $x>1$: $\varphi'(x)>\varphi(1)\Leftrightarrow\int_1^x f^2(t)dt-f'(x)>0$ άρα $g'(x)>0$ οπότε $g\uparrow$

για $x>1$ θα είναι $g(x)>g(1)\Leftrightarrow\left(\int_1^x f^2(t)dt\right)^2>\frac{2}{3}f^3(x)$.

6.482. α) Εστω $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}e^4=\int_2^x e^{t^2}dt-\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}e^4$, $x\geq 0$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $g'(x)=e^{x^2}-e^{2x}$

Είναι $g'(x)>0\Leftrightarrow e^{x^2}-e^{2x}>0\Leftrightarrow e^{x^2}>e^{2x}\Leftrightarrow x^2>2x\Leftrightarrow x(x-2)>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x>2$

Οπότε το πρόσημο της g' και η μονοτονία της g φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

	0		2		$+\infty$
g'		$-$		$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$	

Για κάθε $x\geq 0$ θα είναι $g(x)\geq g(2)\Leftrightarrow$

$f(x)-\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}e^4\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^4$.

β) $I=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(x)'f(x)dx=\left[xf(x)\right]_0^2-\int_0^2 xf'(x)dx=2f(2)-\int_0^2 xe^{x^2}dx=$

$=0-\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^2=-\frac{1}{2}\left(e^4-1\right)=\frac{1-e^4}{2}$

6.483. α) Είναι $f(x)=\frac{2x}{\ln x}-\int_\alpha^x\frac{dt}{\ln t}$, $x\geq\alpha$, $\alpha>e^2$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,+\infty)$ με

$f'(x)=\frac{2\ln x-2}{\ln^2 x}-\frac{1}{\ln x}=\frac{\ln x-2}{\ln^2 x}>0$ γιατί $x\geq\alpha>e^2$ άρα $\ln x>\ln e^2\Leftrightarrow\ln x>2$

οπότε η $f\uparrow$ στο $[\alpha,+\infty)$.

β) Για $e^2<\alpha<\beta$ θα είναι $f(\alpha)<f(\beta)\Leftrightarrow\frac{2\alpha}{\ln\alpha}<\frac{2\beta}{\ln\beta}-\int_\alpha^\beta\frac{dt}{\ln t}\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta\frac{dt}{\ln t}<\frac{2\beta}{\ln\beta}-\frac{2\alpha}{\ln\alpha}$.

6.484. α) Εστω $h(x)=\int_1^x f(t)dt-(x-1)f(x)$, $x\in[1,2]$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με

$h'(x)=\cancel{f(x)}-\cancel{f(x)}-(x-1)f'(x)=-(x-1)f'(x)>0$ για κάθε $x>1$άρα $h\uparrow$.

Για $x>1$ θα είναι $h(x)>h(1)\Leftrightarrow\int_1^x f(t)dt-(x-1)f(x)>0\Leftrightarrow\int_1^x f(t)dt>(x-1)f(x)$.

β) Είναι $g(x)=\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt=\frac{\int_1^x f(t)dt}{x-1}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2]$

με $g'(x)=\frac{f(x)(x-1)-\int_1^x f(t)dt}{(x-1)^2}<0$ (από **α** ερώτημα), άρα η $g\downarrow$ στο $(1,2]$.

γ) Για $1<x\leq 2$ αφού η $g\downarrow$ θα είναι $g(x)\geq g(2)\Leftrightarrow\frac{\int_1^x f(t)dt}{x-1}\geq\int_1^2 f(t)dt$.

6.485. Θεωρούμε την $g(x)=\int_0^x(\sigma\upsilon\nu t)^{1821}dt+x$, $x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=(\sigma\upsilon\nu x)^{1821}+1\geq 0$ γιατί $\sigma\upsilon\nu x\geq -1\Leftrightarrow(\sigma\upsilon\nu x)^{1821}\geq -1\Leftrightarrow(\sigma\upsilon\nu x)^{1821}+1\geq 0$ άρα η $g\uparrow$. Είναι $2\pi>0$ άρα $g(2\pi)>g(0)\Leftrightarrow\int_0^{2\pi}(\sigma\upsilon\nu t)^{1821}dt+2\pi>0$.

6.486. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=\int_0^x\frac{4}{t^4+1}dt$ η οποία αφού η συνάρτηση $\frac{4}{t^4+1}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε η g είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε και στο διάστημα $[1,2]$. Είναι $g'(x)=\frac{4}{x^4+1}$, και $g''(x)=\frac{-16x^3}{(x^4+1)^2}<0$ όταν $x\in[1,2]$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την g στο $[1,2]$ οπότε υπάρχει

$$\xi\in(1,2):g'(\xi)=\frac{g(2)-g(1)}{2-1}\Leftrightarrow g'(\xi)=g(2)-g(1)$$

Είναι $1<\xi<2$ και αφού $g'\downarrow$ τότε $g'(1)>g'(\xi)>g'(2)\Leftrightarrow 2>g(2)-g(1)>\frac{4}{17}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{4}{17}<\int_0^2\frac{4}{t^4+1}dt-\int_0^1\frac{4}{t^4+1}dt<2.$$

6.487. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f(x)$. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την g στα $[x-1,x]$ και $[x,x+1]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(x-1,x)$ και $\xi_2\in(x,x+1)$ τέτοια ώστε

$$g'(\xi_1)=\frac{g(x)-g(x-1)}{x-x+1}\Leftrightarrow f(\xi_1)=\int_\alpha^x f(t)dt-\int_\alpha^{x-1}f(t)dt\Leftrightarrow f(\xi_1)=\int_{x-1}^x f(t)dt\quad(1)\text{ και}$$

$$g'(\xi_2)=\frac{g(x+1)-g(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow f(\xi_2)=\int_\alpha^{x+1}f(t)dt-\int_\alpha^x f(t)dt\Leftrightarrow f(\xi_2)=\int_x^{x+1}f(t)dt\quad(2)$$

Είναι $x-1<\xi_1<x<\xi_2<x+1$ και αφού η f είναι $\uparrow$ τότε

$$f(\xi_1)<f(x)<f(\xi_2)\overset{(1)}{\underset{(2)}{\Leftrightarrow}}\int_{x-1}^x f(t)dt<f(x)<\int_x^{x+1}f(t)dt.$$

6.488. **α)** Θεωρούμε την $g(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ η οποία αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=f(x)$. Άρα η g είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ οπότε εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ., υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $g'(\xi)=\frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{\int_\alpha^\beta f(t)dt}{\beta-\alpha}$.

Είναι $\xi>\alpha\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(\xi)>f(\alpha)\Leftrightarrow\frac{\int_\alpha^\beta f(t)dt}{\beta-\alpha}>f(\alpha)\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta f(t)dt>f(\alpha)(\beta-\alpha)$.

β) Είναι $\int_0^{1821}f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^2 f(t)dt+...+\int_{1820}^{1821}f(t)dt\overset{(\alpha)}{>}$

$$> f(0)(1-0)+f(1)(2-1)+...+f(1820)(1821-1820)=$$
$$= f(0)+f(1)+...f(1820)$$

6.489. Θεωρούμε $g(x)=\int_0^x\left(e^t-\alpha^t\ln\alpha+2\beta^t\ln\beta+3\gamma^t\ln\gamma\right)dt$.

Είναι $g(0)=0$ άρα $g(x)\geq g(0)$ οπότε η g παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 (εσωτερικό του $\mathbb{R}$).

Επίσης $g'(x)=e^x-\alpha^x\ln\alpha+2\beta^x\ln\beta+3\gamma^x\ln\gamma$ οπότε άπο Θ. Fermat είναι $g'(0)=0\Leftrightarrow$

$1-\ln\alpha+2\ln\beta+3\ln\gamma=0\Leftrightarrow \ln e+2\ln\beta+3\ln\gamma=\ln\alpha\Leftrightarrow \ln\left(e\beta^2\gamma^3\right)=\ln\alpha\Leftrightarrow \alpha=e\beta^2\gamma^3$.

6.490. Εστω $g(x)=\int_0^x f(t)dt+2e^x-xe^x-2$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $g(0)=0$ άρα $g(x)\leq g(0)$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f(x)+2e^x-e^x-xe^x=f(x)+e^x-xe^x$

Οπότε η g έχει μέγιστο στο 0 άρα από Θ. Fermat είναι $g'(0)=0\Leftrightarrow$

$f(0)+e^0=0\Leftrightarrow f(0)=-1$.

6.491. Θεωρούμε την $g(x)=\int_0^x f(t)dt-xe^{-x}\geq 0$ και $g(0)=0$ άρα $g(x)\geq g(0)$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f(x)-e^{-x}+xe^{-x}$. Αφού η g παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 σύμφωνα με το Θ. Fermat είναι $g'(0)=0\Leftrightarrow f(0)-1=0\Leftrightarrow f(0)=1$. Οπότε η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $A(0,f(0))$ είναι $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-1=1\cdot x\Leftrightarrow y=x+1$

6.492. Θεωρούμε $g(x)=\int_x^{x^3} f(t)dt-x^3+x=\int_\alpha^{x^3} f(t)dt-\int_\alpha^x f(t)dt-x^3+x$. Είναι $g(x)\geq 0$ και παρατηρούμε ότι $g(-1)=0$, $g(1)=0$ και $g(0)=0$. Άρα $g(x)\geq g(-1)$, $g(x)\geq g(1)$ και $g(x)\geq g(0)$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f(x^3)3x^2-f(x)-3x^2+1$.

Αφού η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1=-1$, $x_2=1$ και $x_3=0$ τότε σύμφωνα με το Θ. Fermat θα είναι:

$g'(-1)=0\Leftrightarrow 3f(-1)-f(-1)-3+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad f(-1)=1$

$g'(1)=0\Leftrightarrow 3f(1)-f(1)-3+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad f(1)=1$

$g'(0)=0\Leftrightarrow -f(0)+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad f(0)=1$

Εχουμε $f(-1)=f(0)=f(1)=1$ οπότε αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στα διαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$, οπότε από Θ. Rolle υπάρχουν $\xi_1\in(-1,0)$ και $\xi_2\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$. Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\xi_1,\xi_2]$ από Θ. Rolle υπάρχουν $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(-1,1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$. Άρα η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει μια τουλάχιστο λύση στο $(-1,1)$.

6.493. Θεωρούμε $g(x)=\int_x^{x^2} f(t)dt-x^2+x=\int_c^{x^2} f(t)dt-\int_c^x f(t)dt-x^2+x$, $x,c\in\mathbb{R}$. Είναι $g(x)\leq 0$

και παρατηρούμε ότι $g(1)=g(0)=0$. Άρα $g(x)\le g(1)$ και $g(x)\le g(0)$. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f(x^2)2x-f(x)-2x+1$ και αφού στα $x_1=0$ και $x_2=1$ παρουσιάζει μέγιστο τότε σύμφωνα με το Θ. Fermat είναι $g'(1)=0$ και $g'(0)=0$ Δηλαδή:

$$g'(1)=2f(1)-f(1)-2+1=0 \Leftrightarrow f(1)=1$$

$$g'(0)=-f(0)+1=0 \Leftrightarrow f(0)=1$$

Οπότε $f(0)=f(1)$ και η f παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $[0,1]$, συνεπώς σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$. Άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(\xi,f(\xi))$ είναι παράλληλη με τον $x'x$.

6.494. Είναι $\int_2^x f(t)dt\le x^2-4 \Leftrightarrow \int_2^x f(t)dt-x^2+4\le 0$

α) Θεωρούμε τη $g(x)=\int_2^x f(t)dt-x^2+4$, $x\in\mathbb{R}$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη άρα θα είναι και συνεχής τότε η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=f(x)-2x$. Παρατηρούμε επίσης ότι $g(2)=0$ και $g(-2)=0$. Άρα $g(x)\le g(2)$ και $g(x)\le g(-2)$ οπότε σύμφωνα με το Θ.

Fermat είναι: $\left.\begin{array}{r} g'(2)=0 \\ g'(-2)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} f(2)-4=0\Leftrightarrow f(2)=4 \\ f(-2)+4=0\Leftrightarrow f(-2)=-4 \end{array}$

Η f είναι συνεχής στο $[-2,2]$ και $f(2)f(-2)=-16<0$ άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi_1\in(-2,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_1)=0$.

β) Θεωρούμε την $h(x)=f(x)-2x$ η οποία είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε και στο διάστημα $[-2,2]$ με $h'(x)=f'(x)-2$. Επίσης $h(-2)=f(-2)+4=-4+4=0$ και $h(2)=f(2)-4=4-4=0$ άρα $h(-2)=h(2)$. Οπότε σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει $\xi_2\in(-2,2)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi_2)=0\Leftrightarrow f'(\xi_2)=2$.

6.495. Είναι $\int_0^x f(t)dt\ge\int_0^x (x-t)f(t)dt \Leftrightarrow \int_0^x f(t)dt-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt\ge 0$ (1)

Θεωρούμε την $g(x)=\int_0^x f(t)dt-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$ η οποία αφού η f είναι συνεχής τότε η g είναι παραγωγίσιμη με

$$g'(x)=f(x)-\int_0^x f(t)dt-xf(x)+xf(x)=f(x)-\int_0^x f(t)dt$$

Επίσης $g(0)=0$ άρα από (1) θα είναι $g(x)\ge g(0)$ οπότε η g έχει ελάχιστο στο 0 και από το Θ. Fermat είναι: $g'(0)=0\Leftrightarrow f(0)-\int_0^0 f(t)dt=0\Leftrightarrow f(0)=0$

6.496. **α)** Η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x te^{-t}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=xe^{-x}$

Είναι $f'(x)\ge 0\Leftrightarrow xe^{-x}\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0$.

Οπότε το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f

	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	↘		↗

φαίνεται στο διπλανό πίνακα

	$-\infty$ 1	$+\infty$
f'	$+$	$-$
f		

Η f είναι $\downarrow$ στο $(-\infty,0]$ και $\uparrow$ στο $[0,+\infty)$ και έχει ελάχιστο για $x=0$ το $f(0)=0$.

Επίσης $f''(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow e^{-x}(1-x)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1$.

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,1]$ και κοίλη στο $[1,+\infty)$ και παρουσιάζει σημείο καμπής για $x=1$ το $f(1)=\int_0^1 te^{-t}dt=\left[-te^{-t}\right]_0^1-\int_0^1 -e^{-t}dt=-\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right)=1-\frac{2}{e}$

β) Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $x_0=1$ είναι $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y-1+\frac{2}{e}=\frac{1}{e}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{1}{e}x+1-\frac{3}{e}$. Επειδή η f είναι κοίλη στο $[1,+\infty)$ τότε θα είναι $f(x)\leq y$ για κάθε $x\geq 1$, δηλαδή $\int_0^x te^{-t}dt\leq \frac{1}{e}x+1-\frac{3}{e}\Leftrightarrow e\int_0^x te^{-t}dt\leq x+e-3$.

6.497. Η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ αφού η F είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $F'(x)=f(x)$. Θεωρούμε $t_1,t_2\in[\alpha,\beta]$

- Αν $t_1=t_2$ τότε ισχύει $F\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)=\frac{F(t_1)+F(t_2)}{2}$
- Αν $t_1\neq t_2$ και έστω $t_1<t_2$ τότε εξαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $\left[t_1,\frac{t_1+t_2}{2}\right],\left[\frac{t_1+t_2}{2},t_2\right]$ οπότε υπάρχει $\xi_1\in\left(t_1,\frac{t_1+t_2}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{t_1+t_2}{2},t_2\right)$ τέτοια ώστε

$$F'(\xi_1)=\frac{F\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)-F(t_1)}{\frac{t_2-t_1}{2}}\Leftrightarrow f(\xi_1)=\frac{F\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)-F(t_1)}{\frac{t_2-t_1}{2}}$$

$$F'(\xi_2)=\frac{F(t_2)-F\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)}{\frac{t_2-t_1}{2}}\Leftrightarrow f(\xi_2)=\frac{F(t_2)-F\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)}{\frac{t_2-t_1}{2}}.$$

Επειδή $\xi_1<\xi_2$ και η $f\uparrow$ στο $[\alpha,\beta]$ τότε

$$f(\xi_1)<f(\xi_2)\Leftrightarrow \frac{F\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)-F(t_1)}{\frac{t_2-t_1}{2}}<\frac{F(t_2)-F\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)}{\frac{t_2-t_1}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2F\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)<F(t_1)+F(t_2)\Leftrightarrow F\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)<\frac{F(t_1)+F(t_2)}{2}$$

Όμοια αποδεικνύεται και αν $t_1>t_2$. Συνεπώς για κάθε $t_1,t_2\in[\alpha,\beta]$ ισχύει

$$F\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)\leq\frac{F(t_1)+F(t_2)}{2}.$$

6.498. Είναι $F(x)=\int_0^x f\left(te^{-x}\right)dt$. Θέτουμε $u=te^{-x}\Leftrightarrow t=u\cdot e^x$ και $dt=e^x du$.

t	0	xe^x
u	0	x

Άρα $F(x)=\int_0^x f(u)e^x du=e^x\int_0^x f(u)du$ η οποία αφού η f είναι συνεχής τότε η $F(x)$ θα είναι παραγωγίσιμη με $F'(x)=e^x\int_0^x f(u)du+e^x f(x)>0$ για $f(x)>0$ και για $x>0$ είναι $\int_0^x f(u)du>0$. Οπότε για $x>0$ είναι $F\uparrow$, άρα $33<1821\Leftrightarrow F(33)<F(1821)$.

6.499. Είναι $\int_{\alpha+x}^{\beta+x} f(t)dt\le\int_\alpha^\beta f(t)dt\Leftrightarrow\int_\alpha^{\beta+x} f(t)dt-\int_\alpha^{\alpha+x} f(t)dt-\int_\alpha^\beta f(t)dt\le 0\quad(1)$.

Θεωρούμε $g(x)=\int_\alpha^{\beta+x} f(t)dt-\int_\alpha^{\alpha+x} f(t)dt-\int_\alpha^\beta f(t)dt$.

Παρατηρούμε ότι $g(0)=0$ άρα από την (1) θα είναι $g(x)\le g(0)$. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f(\beta+x)-f(\alpha+x)$ και αφού παρουσιάζει μέγιστο στο 0 τότε με το Θ. Fermat θα είναι $g'(0)=0\Leftrightarrow f(\beta)-f(\alpha)=0\Leftrightarrow f(\beta)=f(\alpha)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ οπότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $f'(\xi)=0$.

6.500. **α)** Είναι $\int_\alpha^\beta f(t)dt\ge\int_\alpha^\beta f(x+t)dt$. Θεωρούμε $u=x+t$ οπότε $du=dt$.

t	α	β
u	$x+\alpha$	$x+\beta$

Άρα $\int_\alpha^\beta f(t)dt\ge\int_{x+\alpha}^{x+\beta} f(u)du\Leftrightarrow\int_\alpha^{x+\beta} f(u)du-\int_\alpha^{x+\alpha} f(u)du-\int_\alpha^\beta f(t)dt\le 0$.

Θεωρούμε την $g(x)=\int_\alpha^{x+\beta} f(u)du-\int_\alpha^{x+\alpha} f(u)du-\int_\alpha^\beta f(t)dt$ με $x\in[\alpha,\beta]$.

Παρατηρούμε ότι $g(0)=0$ άρα $g(x)\le g(0)$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $g'(x)=f(x+\beta)-f(x+\alpha)$. Επειδή η g έχει μέγιστο στο $x_0=0$ τότε από Θ. Fermat θα είναι $g'(0)=0\Leftrightarrow f(\beta)=f(\alpha)$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στι $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)=f(\beta)$ τότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

6.501. **α)** Είναι $\int_{\frac{1}{x}}^1 g(xt)dt+f(x)<g(x)+\int_1^x\frac{f(t)}{x}dt$ για $x\ge 1$. Οπότε

$$\int_{\frac{1}{x}}^1 g(xt)dt+f(x)<g(x)+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt\Leftrightarrow x\int_{\frac{1}{x}}^1 g(xt)dt+xf(x)<xg(x)+\int_1^x f(t)dt\quad(1)$$

Θέτουμε $u=xt$ οπότε $du=xdt$

t	$\frac{1}{x}$	1
u	1	x

Άρα από την (1) έχουμε:

$$\int_1^x g(u)du+xf(x)<xg(x)+\int_1^x f(t)dt\Leftrightarrow\int_1^x g(t)dt-\int_1^x f(t)dt<xg(x)-xf(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\big(g(x)-f(x)\big)>\int_1^x\left[g(t)-f(t)\right]dt\quad(2).$$

β) Από την (2) για $x\ge 1$ θα είναι $g(x)-f(x)>\frac{1}{x}\int_1^x\left[g(t)-f(t)\right]dt\quad(3)$. Θεωρούμε την $h(x)=\frac{1}{x}\int_1^x\left[g(t)-f(t)\right]dt$ η οποία είναι παραγωγίσιμη αφού g,f είναι συνεχείς.

Είναι $h'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_1^x\left[g(t)-f(t)\right]dt+\frac{1}{x}\left(g(x)-f(x)\right)=$

$$=\frac{x\left(g(x)-f(x)\right)-\int_1^x\left[g(t)-f(t)\right]dt}{x^2}>0$$

Οπότε η h είναι $\uparrow$ στο $[1,+\infty)$. Για $x\geq 1$ θα είναι $h(x)\geq h(1)\Leftrightarrow h(x)\geq 0$

οπότε από την (3) θα έχουμε $g(x)-f(x)>0\Leftrightarrow g(x)>f(x)$.

6.502. Θεωρούμε την $g(x)=e^{-x}\int_0^x f(t)dt$ η οποία αφού η f είναι συνεχής τότε η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=e^{-x}f(x)-e^{-x}\int_0^x f(t)dt=e^{-x}\left(f(x)-\int_0^x f(t)dt\right)<0$, οπότε η g είναι $\downarrow$ στο $[0,+\infty)$. Για $x\geq 0$ θα είναι $g(x)\leq g(0)\Leftrightarrow e^{-x}\int_0^x f(t)dt\leq 0\Leftrightarrow\int_0^x f(t)dt\leq 0$

και από τη σχέση $f(x)<\int_0^x f(t)dt\leq 0$ θα είναι $f(x)<0$.

6.503. **α)** Είναι $g(x)=\int_0^{xe^{-x}} f\left(te^x\right)dt=\frac{1}{e^x}\int_0^{xe^{-x}} f\left(te^x\right)e^x dt$.

Θέτουμε $u=te^x$ οπότε $du=e^x dt$

t	0	xe^{-x}
u	0	x

Άρα $g(x)=e^{-x}\int_0^x f(u)du$ η οποια είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x)=e^{-x}f(x)-e^{-x}\int_0^x f(u)du=e^{-x}\left(f(x)-\int_0^x f(u)du\right)$$

Θεωρούμε $h(x)=f(x)-\int_0^x f(u)du$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=f'(x)-f(x)>0$

οπότε $h\uparrow$ και $h(0)=0$ άρα

για $x>0\Leftrightarrow h(x)<h(0)=0$

για $x<0\Leftrightarrow h(x)<h(0)=0$

Οπότε για το πρόσημο της g' έχουμε

το διπλανό πίνακα.

	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$-$		$+$
g	$\searrow$		$\nearrow$

β) Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα είναι $g(x)\geq g(0)\Leftrightarrow g(x)\geq 0$

γ) Η εξίσωση $g(x)=0=g(0)$ έχει μοναδική λύση τη $x=0$, αφού $g(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$.

6.504. **α)** Θεωρούμε $f(x)=e^{x^3}-x^3-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(0)=0$ και $f'(x)=3x^2e^{x^3}-3x^2=3x^2\left(e^{x^3}-1\right)$

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow 3x^2\left(e^{x^3}-1\right)\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{x^3}\geq 1\Leftrightarrow x^3>0\Leftrightarrow x\geq 0$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow f(x)\geq 0$

Οπότε η f έχει μοναδική ρίζα την $x=0$

	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

β) Θεωρούμε την $g(x)=\int_{\alpha}^{x}\frac{e^{t^3}}{t^3+1}dt-x+\alpha$, $x>0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=\frac{e^{x^3}}{x^3+1}-1=\frac{e^{x^3}-x^3-1}{x^3+1}>0$ για $x>0$ άρα η $g\uparrow$ στο $(0,+\infty)$ και αφού $\alpha<\beta$ τότε $g(\alpha)<g(\beta)\Leftrightarrow 0<\int_{\alpha}^{\beta}\frac{e^{t^3}}{t^3+1}dt-\beta+\alpha\Leftrightarrow\int_{\alpha}^{\beta}\frac{e^{t^3}}{t^3+1}dt>\beta-\alpha$.

6.505. **α)** Η συνάρτηση $f(x)=\int_{1}^{x}t^8e^{t^2}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=x^8e^{x^2}>0$ για κάθε $x\neq 0$, άρα $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση γίνεται

$\int_{\ln x}^{x-1}t^8e^{t^2}dt=0\Leftrightarrow\int_{1}^{x-1}t^8e^{t^2}dt-\int_{1}^{\ln x}t^8e^{t^2}dt=0\Leftrightarrow\int_{1}^{x-1}t^8e^{t^2}dt=\int_{1}^{\ln x}t^8e^{t^2}dt$.

Άρα $f(x-1)=f(\ln x)$ και επειδή η f είναι $\uparrow$ θα είναι και 1–1 οπότε $x-1=\ln x$ (1).

Θεωρούμε $g(x)=\ln x-x+1$, $x>0$. Είναι $g(1)=0$

και $g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$

	0	1	$+\infty$
g'	+	–	
g	↗	↘	

άρα για κάθε $0<x<1$ είναι $g(x)<g(1)=0$

και για κάθε $x=1$ είναι $g(x)<g(1)=0$,

άρα η $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της (1).

6.506. **α)** Είναι $\int_{1}^{x}f(t)dt=\int_{4}^{x}\varphi(u)du$ (1) και $\varphi(x)=\int_{1}^{x}\frac{4g(t)}{g^2(t)+4}dt$ (2).

Επειδή $f(t)$ και $\varphi(u)$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ τότε και η συναρτήσεις $\int_{1}^{x}f(t)dt$, $\int_{4}^{x}\varphi(u)du$ είναι παραγωγίσιμες, οπότε παραγωγίζοντας την (1) έχουμε $f(x)=\varphi(x)$ (3).

Όμως αφού η $g(t)$ είναι συνεχής, τότε η $\int_{1}^{x}\frac{4g(t)}{g^2(t)+4}dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα η φ είναι παραγωγίσιμη, οπότε από την (3) και η f θα είναι παραγωγίσιμη με

$f'(x)=\varphi'(x)=\frac{4g(x)}{g^2(x)+4}$. Πρέπει $|f'(x)|\leq 1\Leftrightarrow\left|\frac{4g(x)}{g^2(x)+4}\right|\leq 1\Leftrightarrow 4|g(x)|\leq|g(x)|^2+4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(|g(x)|-2)^2\geq 0$ που ισχύει.

β) Αν $\alpha=\beta$ τότε ισχύει $|f(\beta)-f(\alpha)|=|\beta-\alpha|$. Αν $\alpha\neq\beta$ και έστω $\alpha<\beta$, τότε εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ όμως $|f'(\xi)|\leq 1$ άρα $\left|\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right|\leq 1\Leftrightarrow|f(\beta)-f(\alpha)|\leq|\beta-\alpha|$.

γ) Θεωρούμε την $h(x)=f(x)-4x$ η οποία είναι συνεχής στο $[-1,1]$,

$h(1)=f(1)-4\overset{(3)}{=}\varphi(1)-4=0-4=-4<0$ και $h(-1)=f(-1)+4\overset{(3)}{=}\varphi(-1)+4>0$

γιατί $|f'(t)|\le 1$. $\left|\dfrac{4g(t)}{g^2(t)+4}\right|\le 1\Leftrightarrow \dfrac{4g(t)}{g^2(t)+4}\ge -1$ οπότε $\int_1^{-1}\dfrac{4g(t)}{g^2(t)+4}dt\ge\int_1^{-1}(-1)dt$

$\varphi(-1)\ge 2\Leftrightarrow \varphi(-1)+4\ge 6>0$, άρα και από Θ. Bolzano $h(-1)h(1)<0$ οπότε η εξίσωση $h(x)=0$ έχει τουλάχιστων μια ρίζα στο $(-1,1)$ και επειδή $h'(x)=f'(x)-4<0$, αφού $|f'(x)|\le 1$ τότε η ρίζα είναι μοναδική.

δ) Είναι $I=\int_4^{16}f\left(\dfrac{t}{4}\right)dt$. Θέτω $u=\dfrac{t}{4}$ οπότε $du=\dfrac{1}{4}dt$

t	4	16
u	1	4

οπότε $I=\int_1^4 f(u)4du\overset{(1)}{=}4\int_4^4\varphi(u)du=0$.

6.507. α) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα είναι και συνεχής, οπότε και η συνάρτηση $\int_2^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f(x)$ και αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε και η $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $g''(x)=f'(x)>0$, επομένως η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) Είναι $g(2)=\int_2^2 f(t)dt=0$ και $g'(2)=f(2)=2$ άρα η εξίσωση εφαπτομένης της C_g στο $x_0=2$ είναι $y-g(2)=g'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=2(x-2)$. Αφού η g είναι κυρτή, σε κάθε σημείο η εφαπτομένη θα είναι κάτω από τη C_g με εξαίρεση το σημείο επαφής, άρα $g(x)\ge 2(x-2)$.

γ) Η ζητούμενη ανισότητα για $\xi>2$ γίνεται: $\dfrac{\int_0^2 f(t)dt}{2}<\dfrac{\int_2^\xi f(t)dt}{\xi-2}\Leftrightarrow\dfrac{\int_0^2 g'(t)dt}{2}<\dfrac{\int_2^\xi g'(t)dt}{\xi-2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{[g(t)]_0^2}{2-0}<\dfrac{[g(t)]_2^\xi}{\xi-2}\Leftrightarrow\dfrac{g(2)-g(0)}{2-0}<\dfrac{g(\xi)-g(2)}{\xi-2}$. Εφαρμόζουμε για τη g το Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[0,2]$ και $[2,\xi]$ οπότε υπάρχουν $x_1\in(0,2)$ και $x_2\in(2,\xi)$ τέτοια ώστε $g'(x_1)=\dfrac{g(2)-g(0)}{2}$, $g'(x_2)=\dfrac{g(\xi)-g(2)}{\xi-2}$. Επειδή g κυρτή, είναι $g'\uparrow$ οπότε για $x_1<x_2$ θα είναι $g'(x_1)<g'(x_2)\Leftrightarrow\dfrac{g(2)-g(0)}{2}<\dfrac{g(\xi)-g(2)}{\xi-2}$.

δ) i) Θεωρούμε τη $\varphi(x)=\int_2^x\left[\int_2^u f(t)dt\right]du-(x-2)^2$.

Είναι $\varphi'(x)=\int_2^x f(t)dt-2(x-2)=g(x)-2(x-2)\ge 0$, οπότε $\varphi'(x)>0$ για κάθε $x>2$.

άρα για $x\ge 2$ είναι $\varphi(x)\ge\varphi(2)=0\Leftrightarrow\int_2^x\left[\int_2^4 f(t)dt\right]du\ge(x-2)^2$.

ii) Θεωρούμε τη $h(x)=\int_2^x(x-t)f(t)dt-(x-2)^2=x\int_2^x f(t)dt-\int_2^x tf(t)dt-(x-2)^2$

η οποια είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$h'(x)=\int_2^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)-2(x-2)=g(x)-2(x-2)>0$ για κάθε $x>2$ (από **β** ερώτημα).

Άρα η $h\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ οπότε για $x\geq 2\Leftrightarrow h(x)\geq h(2)=0\Leftrightarrow \int_2^x (x-t)f(t)dt\geq (x-2)^2$

6.508. **α)** Είναι $g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$. Θέτουμε $u=xt\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} t=\frac{u}{x}$ και $dt=\frac{du}{x}$.

t	0	1
u	0	x

Τότε $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du$.

β) Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε η $\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη οπότε και g είναι

παραγωγίσιμη με $g'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)du+\frac{1}{x}f(x)=\frac{1}{x}\left(f(x)-\frac{\int_0^x f(u)du}{x}\right)$. Θεωρούμε την

$\varphi(x)=\int_0^x f(u)du$ η οποία είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $[0,x]$ με $\varphi'(x)=f(x)$

οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(0,x)$: $\varphi'(\xi)=\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{\int_0^x f(u)du}{x}$.

Είναι $\xi<x$ και αφού η $f\downarrow$ τότε $f(\xi)>f(x)\Leftrightarrow \frac{\int_0^x f(u)du}{x}>f(x)\Leftrightarrow f(x)-\frac{\int_0^x f(u)du}{x}<0$,

άρα $g'(x)<0$ στο $(0,+\infty)$ οπότε η g είναι $\downarrow$ στο $(0,+\infty)$.

γ) Είναι $x+1>x>0$ οπότε αφού $g\downarrow$ θα είναι

$g(x+1)<g(x)\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}\int_0^{x+1} f(t)dt<\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\Leftrightarrow x\int_0^{x+1} f(t)dt<(x+1)\int_0^x f(t)dt$.

δ) Είναι $g(1)=\int_0^1 f(t)dt$ και

$g(2)=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(t)dt+\int_1^2 f(t)dt\right)=\frac{1}{2}2\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt$.

Οπότε $g(1)=g(2)$ και αφού η g είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $[1,2]$

τότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(1,2)$: $g'(\xi)=0\Leftrightarrow \frac{1}{\xi}\left(f(\xi)-\frac{\int_0^\xi f(u)du}{\xi}\right)=0\Leftrightarrow$

$f(\xi)=\frac{\int_0^\xi f(u)du}{\xi}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{1}{\xi}\int_0^\xi f(u)du\Leftrightarrow f(\xi)=g(\xi)$.

6.509. **α)** Είναι $g(x)=\int_x^{x^2}\frac{u^2-1}{u^3+u}du=\int_1^{x^2}\frac{u^2-1}{u^3+u}du-\int_1^x\frac{u^2-1}{u^3+u}du$. Επειδή η συνάρτηση $\frac{u^2-1}{u^3+u}$ είναι

συνεχής στο $(0,+\infty)$ τότε οι συναρτήσεις $\int_1^{x^2}\frac{u^2-1}{u^3+u}du$, $\int_1^x\frac{u^2-1}{u^3+u}du$ είναι παραγωγίσιμες

άρα και η g είναι παραγωγίσιμε στο $(0,+\infty)$ με

$g'(x)=\frac{x^4-1}{x^6+x^2}2x-\frac{x^2-1}{x^3+x}=\frac{2(x^4-1)}{x(x^4+1)}-\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}=\frac{2(x^4-1)(x^2+1)-(x^2-1)(x^4+1)}{x(x^4+1)(x^2+1)}=$

$$=\frac{x^6+3x^4-3x^2-1}{x\left(x^4+1\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)+3x^2\left(x^2-1\right)}{x\left(x^4+1\right)\left(x^2+1\right)}=$$

$$=\frac{(x-1)(x+1)\left[\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)+3x^2\right]}{x\left(x^4+1\right)\left(x^2+1\right)}$$

.

	0	1	$+\infty$
g'		$-$	$+$
g		$\searrow$	$\nearrow$

β) Αφού $x>0$ τότε $g'(x)>0 \Leftrightarrow (x-1)>0 \Leftrightarrow x>1$.

Οπότε η g είναι $\downarrow$ στο $(0,1]$ και $\uparrow$ στο $[1,+\infty)$

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$ το $g(1)=0$.

γ) Για κάθε $x>0$ και

$g(x)\geq g(1)=0 \Leftrightarrow \int_1^{x^2}\frac{u^2-1}{u^3+u}du-\int_1^{x}\frac{u^2-1}{u^3+u}du\geq 0 \Leftrightarrow \int_1^{x^2}\frac{u^2-1}{u^3+u}du\geq \int_1^{x}\frac{u^2-1}{u^3+u}du$ και η εξίσωση $g(x)=0$ θα έχει μοναδική λύση τη $x=1$.

δ) Είναι $g(t)=\int_t^{t^2}\frac{x^2-1}{x^3+x}dx$ και αφού $g\uparrow$ στο $(1,+\infty)$ για $2<3$ θα είναι $g(2)<g(3)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_2^{4}\frac{x^2-1}{x^3+x}dx<\int_3^{9}\frac{x^2-1}{x^3+x}dx$.

ε) Θεωρούμε την $h(x)=g(x)-2x+x^2$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,2]$ και

$h(1)=g(1)-1=-1<0$, $h(2)=g(2)>0$ γιατί $g(2)>g(1)=0$.

Οπότε $h(1)\cdot h(2)<0$ και από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τέτοιο ώστε

$h(\xi)=0 \Leftrightarrow g(\xi)=2\xi-\xi^2 \Leftrightarrow \int_\xi^{\xi^2}\frac{x^2-1}{x^3+x}dx=2\xi-\xi^2$.

στ) Η g είναι $\uparrow$ στο $[2,3]$ οπότε $g(2)<g(3)$ και $g(2)<\frac{g(2)+g(3)}{2}<g(3)$, οπότε από Θ.Ε.Τ. υπάρχει $\xi\in(2,3)$ το οποίο είναι μοναδικό αφού η $g\uparrow$ στο $[2,3]$, άρα και 1–1 με

$g(\xi_1)=\frac{g(2)+g(3)}{2}\Leftrightarrow 2\int_{\xi_1}^{\xi_1^2}\frac{x^2-1}{x^3+x}dx=\int_2^{4}\frac{x^2-1}{x^3+x}dx+\int_3^{9}\frac{x^2-1}{x^3+x}dx$.

6.510. **α)** Η συνάρτηση $f(x)=\int_1^x e^{\frac{1}{t}}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ αφού η $e^{\frac{1}{t}}$ είναι συνεχής και

$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}>0$ άρα η $f\uparrow$. Επειδή $e^{-1}<1$ τότε $f\left(e^{-1}\right)<f(1)\Leftrightarrow \int_1^{e^{-1}}e^{\frac{1}{t}}dt<0\Leftrightarrow \int_{e^{-1}}^{1}e^{\frac{1}{t}}dt>0$.

β) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1,2]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}\Leftrightarrow e^{\frac{1}{\xi}}=\int_1^2 e^{\frac{1}{t}}dt \quad (1)$.

Όμως $1<\xi<2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<\frac{1}{\xi}<1 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}}<e^{\frac{1}{\xi}}<e \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \sqrt{e}<\int_1^2 e^{\frac{1}{t}}dt<e$

γ) Εστω $h(x)=\int_1^x f(t)dt$ με $h'(x)=f(x)$ αφού η $f\uparrow$ τότε: $x>1\Leftrightarrow f(x)>f(1)=0$,

οπότε $f(x)>0$ στο $(3,+\infty)$ και $h'(x)>0$ δηλαδή η $h\uparrow$.

Εστω $g(x)=\ln x-x-2,\ x\in(3,+\infty)$. Είναι $g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}<0$ άρα $g\downarrow$.
Για $x>3$ θα είναι $g(x)<g(3)\Leftrightarrow \ln x-x-2<\ln 3-5<0$. Άρα $\ln x<x+2\Leftrightarrow x+2>\ln x$
και αφού $h\uparrow$ τότε $h(x+2)>h(\ln x)\Leftrightarrow \int_1^{x+2}f(t)dt>\int_1^{\ln x}f(t)d(t)$.

δ) Η εξίσωση $\int_1^{e^{2x}}e^{\frac{1}{t}}dt=\int_1^{2-e^x}e^{\frac{1}{t}}dt$ γίνεται ισοδύναμα $f\left(e^{2x}\right)=f\left(2-e^x\right)$ αφού η f ορίζεται στο $(0,+\infty)$ τότε η συνάρτηση $f\left(e^{2x}\right)$, $f\left(2-e^x\right)$ για να ορίζονται πρέπει $x\in(-\infty,\ln 2)$ και αφού η $f\uparrow$ άρα και 1–1 η εξίσωση γίνεται $e^{2x}=2-e^x\Leftrightarrow e^{2x}+e^x-2=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left(e^x+2\right)\left(e^x-1\right)=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow e^x=e^0\Leftrightarrow x=0$.

ε) $f(1)=0$ και $f'(1)=e^{\frac{1}{1}}=e$, οπότε η εξίσωση εφαπτομένης στο $x_0=1$ είναι
$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=ex-e$. Η $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με
$f''(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}<0$, άρα η f κοίλη οπότε $f(x)\le y$ για κάθε σημείο και το ίσον ισχύει μόνο για $x=1$, άρα $f(x)\le ex-e$.

στ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[x-1,x]$ και $[x,x+1]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(x-1,x)$ και $\xi_2\in(x,x+1)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=f(x)-f(x-1)$ και
$f'(\xi_2)=f(x+1)-f(x)$ αφού $\xi_1<\xi_2$ και $f'\downarrow$ τότε $f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Leftrightarrow$
$f(x)-f(x-1)>f(x+1)-f(x)\Leftrightarrow \int_{x-1}^{x}e^{\frac{1}{t}}dt>\int_x^{x+1}e^{\frac{1}{t}}dt$.

6.511. **α)** Είναι $f(x)=\alpha x+\beta x\int_3^x tdt+15$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$
με $f'(x)=\alpha+\beta\int_3^x tdt+\beta x^2$. Επειδή $f(x)\le f(3)$ τότε από Θ. Fermat θα είναι
$f'(3)=0\Leftrightarrow\alpha+9\beta=0$ και $f(3)=-12\Leftrightarrow 3\alpha+15=-12$, άρα $\beta=1$ και $\alpha=-9$.

β) i) Οπότε $f(x)=-9x+x\int_3^x tdt+15$, $f'(x)=-9x+\int_3^{x^3}tdt+x^2$, $f''(x)=x+2x=3x>0$
όταν $x>0$, άρα f κυρτή και σε κάθε σημείο η C_f είναι πάνω από την εφαπτομένη.

ii) Αφού η f κυρτή τότε $f'\uparrow$.

iii) $f(x)=-9x+x\int_3^x tdt+15=-9x+x\left[\frac{t^2}{2}\right]_3^x+15=-9x+x\left(\frac{x^2}{2}-\frac{9}{2}\right)+15\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^3}{2}-\frac{27}{2}x+15$.

6.512. Είναι $f(x)\cdot\int_1^{\frac{1}{x}}f(t)dt=\frac{1}{x}-\alpha\quad(1)$, $0<\alpha<48$, $x>0$.

α) Η συνάρτηση $g(x)=\int_1^x f(t)dt\cdot\int_1^{\frac{1}{x}}f(t)dt+\alpha x+\frac{\alpha}{x}-5\alpha$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$g'(x)=f(x)\int_1^{\frac{1}{x}}f(t)dt-\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)\int_1^x f(t)dt+\alpha-\frac{\alpha}{x^2}$ (2). Στην (1) θέτουμε όπου x το $\frac{1}{x}$

οπότε $f\left(\frac{1}{x}\right)\int_1^x f(t)=x-\alpha$ (3). Άρα (2) με βάση την (1) και (3) γίνεται:

$g'(x)=\frac{1}{x}-\cancel{\alpha}-\frac{1}{x^2}(x-\alpha)+\cancel{\alpha}-\frac{\alpha}{x^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+\frac{\alpha}{x^2}-\frac{\alpha}{x^2}=0$. Οπότε $g(x)=c$.

β) Είναι $g(1)=-3\alpha$ άρα $g(x)=-3\alpha \Leftrightarrow \int_1^x f(t)dt\cdot\int_1^{\frac{1}{x}}f(t)dt+\alpha x+\frac{\alpha}{x}-5\alpha=-3\alpha \Leftrightarrow$

$\int_1^x f(t)dt\cdot\int_1^{\frac{1}{x}}f(t)dt=2\alpha-\alpha x-\frac{\alpha}{x}$.

γ) Θεωρούμε την $h(x)=\int_1^x f(t)dt\cdot\int_1^{\frac{1}{x}}f(t)dt+x^5-2x^2$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,2]$ και

$h(1)=-1<0$, $h(2)=\int_1^2 f(t)dt\cdot\int_1^{\frac{1}{2}}f(t)dt+32-8\overset{(\beta)}{=}2\alpha-2\alpha-\frac{\alpha}{2}+24=\frac{48-\alpha}{2}>0$,

οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε

$h(\xi)=0\Leftrightarrow\int_1^{\xi}f(t)dt\cdot\int_1^{\frac{1}{\xi}}f(t)dt+\xi^5=2\xi^2$.

6.513. **α)** Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ τότε και η συνάρτηση $\frac{u+1}{u\left(e^{f(u)}+1\right)}$ θα είναι συνεχής

άρα η συνάρτηση $f(x)=\int_1^x\frac{u+1}{u\left(e^{f(u)}+1\right)}du$ θα είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$f'(x)=\frac{x+1}{x\left(e^{f(x)}+1\right)}\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}+1\right)f'(x)=\frac{x+1}{x}\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}+f(x)\right)'=(x+\ln x)'$

άρα $e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x+c$ και αφού $f(1)=0$ τότε $c=0$ άρα $e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x$ (1).

β) Θεωρούμε την $g(x)=e^x+x$ η οποία είναι $\uparrow$ αφού $g'(x)=e^x+1>0$, άρα η g είναι 1–1.

$(1)\Leftrightarrow e^{f(x)}+f(x)=e^{\ln x}+\ln x$ δηλαδή $g(f(x))=g(\ln x)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}f(x)=\ln x$.

γ) Είναι $h(x)=f(x)f\left(\frac{e^2}{x}\right)=\ln x\ln\left(\frac{e^2}{x}\right)=\ln x(2-\ln x)=2\ln x-\ln^2 x$, $x>0$ και

$h'(x)=\frac{2}{x}-\frac{2\ln x}{x}=\frac{2(1-\ln x)}{x}$

Είναι $h'(x)\geq 0\Leftrightarrow 1-\ln x\geq 0\Leftrightarrow x\leq e$,

οπότε η συνάρτηση h έχει μέγιστο για $x=e$ το $h(e)=1$.

	0	e	$+\infty$
h'	+		−
h	↗		↘

δ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[2,5]$ και $[5,7]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(2,5)$ και $\xi_2\in(5,7)$ τέτοια ώστε:

$f'(\xi_1)=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}\Leftrightarrow f'(\xi_1)=\frac{\ln\frac{5}{2}}{3}$ και $f'(\xi_2)=\frac{f(7)-f(5)}{7-5}\Leftrightarrow f'(\xi_2)=\frac{\ln\frac{7}{5}}{2}$

Επειδή $f'(x)=\frac{1}{x}$ και $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ άρα η f κοίλη οπότε $f'\downarrow$.

$$\xi_1<\xi_2 \Leftrightarrow f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Leftrightarrow \frac{\ln\frac{5}{2}}{3}>\frac{\ln\frac{7}{5}}{2}\Leftrightarrow 2\ln\frac{5}{2}>3\ln\frac{7}{5}.$$

6.514. Είναι $f(x)=\int_3^x \sqrt{u^2-2u}\,du$

α) Πρέπει $u^2-2u\geq 0 \Leftrightarrow u(u-2)\geq 0$, $u\in(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$.

Επειδή $3\in[2,+\infty)$ τότε $D_f=[2,+\infty)$

β) Επειδή $\sqrt{u^2-2u}$ είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ τότε η $f(x)=\int_3^x\sqrt{u^2-2u}\,du$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\sqrt{x^2-2x}$ είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x>2$, άρα $f\uparrow$ στο $[2,+\infty)$.

γ) Είναι $f(3)=0$ και αφού $f\uparrow$ τότε η $x=3$ είναι μοναδική ρίζα της f.

- Αν $2\leq x<3$ τότε $f(x)<f(3)\Leftrightarrow f(x)<0$
- Αν $x>3$ τότε $f(x)>f(3)\Leftrightarrow f(x)>0$.

δ) Είναι $h(x)=\int_4^x\left(\int_3^t e^t\sqrt{u^2-2u}\,du\right)dt=\int_4^x\left(e^t\int_3^t\sqrt{u^2-2u}\,du\right)dt$ και

$h'(x)=e^x\int_3^x\sqrt{u^2-2u}\,du=e^xf(x)$ οπότε:

- Αν $2<x<3$ τότε $f(x)<0$ άρα $h'(x)<0$
- Αν $x>3$ τότε $f(x)>0$ άρα $h'(x)>0$.

ε) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την h στα διαστήματα $[2,3]$ και $[3,4]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(2,3)$ και $\xi_2\in(3,4)$ τέτοια ώστε: $h'(\xi_1)=\frac{h(3)-h(2)}{3-2}\Leftrightarrow e^{\xi_1}f(\xi_1)=h(3)-h(2)$ (1)

και $h'(\xi_2)=\frac{h(4)-h(3)}{4-3}\Leftrightarrow e^{\xi_2}f(\xi_2)=h(4)-h(3)$ (2). Προσθέτοντας (1),(2) κατά μέλη έχουμε: $e^{\xi_1}f(\xi_1)+e^{\xi_2}f(\xi_2)=h(4)-h(2)=\int_2^4 e^tf(t)\,dt$.

στ) Είναι $\int_4^x\left(e^{t-4}\frac{f(t)}{f(4)}\right)dt\geq x-4\Leftrightarrow\int_4^x\left(\frac{e^t}{e^4}\frac{f(t)}{f(4)}\right)dt\geq x-4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1}{e^4f(4)}h(x)\geq x-4\Leftrightarrow h(x)\geq e^4f(4)(x-4)$.

Θεωρούμε $\varphi(x)=h(x)-e^4f(4)(x-4)$ είναι $\varphi'(x)=h'(x)-e^4f(4)=exf(x)-e^4f(4)$ και $\varphi''(x)=e^x\left(f(x)+f'(x)\right)>0$ για $x>3$,

άρα $\varphi\uparrow$ και $\varphi'(4)=0$ οπότε για φ' έχουμε το διπλανό πίνακα. Για κάθε $x>3$ είναι

$\varphi(x)\geq\varphi(4)=0\Leftrightarrow\int_4^x\left(e^{t-4}\frac{f(t)}{f(4)}\right)dt\geq x-4$.

x	3	4	$+\infty$
φ'	$-$		$+$
φ	$\searrow$		$\nearrow$

6.515. **α)** Η συνάρτηση $h(x)=\int_0^x\left(\int_1^u f(t)dt\right)du+2x^2+3x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ γιατί η $f(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση $\int_1^u f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής, συνεπώς η συνάρτηση $h(x)=\int_0^x\left(\int_1^u f(t)dt\right)du$ θα είναι παραγωγίσιμη. Άρα

$h'(x)=\int_1^x f(t)dt+4x+3$. Επειδή $h(x)\le 0$ και $h(0)=0$ οπότε $h(x)\le h(0)$ και το 0 εσωτερικό του $\mathbb{R}$. Από Θ. Fermat θα είναι $h'(0)=0$ άρα $\int_1^0 f(t)dt+3=0\Leftrightarrow\int_0^1 f(t)dt=3$.

β) Θεωρούμε τη $g(x)=\int_0^x\left(2f(t)-\frac{1}{t+2}\right)dt-2=2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x\frac{1}{t+2}dt-2$ η οποία είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε και στο διάστημα $[0,1]$.

Επίσης: $g(0)=-2<0$,

$g(1)=2\int_0^1 f(t)dt-\int_0^1\frac{1}{t+2}dt-2=2\cdot 3-\left[\ln|t+2|\right]_0^1-2=4-\ln 3+\ln 2=$

$=\ln\frac{2e^4}{3}>\ln 1>0$ γιατί $2e^4>3$.

Οπότε $g(0)\cdot g(1)<0$ άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $\theta\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$g(\theta)=0\Leftrightarrow\int_0^\theta\left(2f(t)-\frac{1}{t+2}\right)dt=2$.

γ) Θεωρούμε τη $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt-5x^2+2x$ η οποία είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\varphi'(x)=f(x)-10x+2$. Είναι: $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=\int_0^1 f(t)dt-5+2=3-5+2=0$.

Άρα $\varphi(0)=\varphi(1)$ οπότε σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$\varphi'(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=10\xi-2$.

6.516. **α)** Είναι $h(x)=\int_{6-x}^x f(t)dt=\int_c^x f(t)dt-\int_c^{6-x} f(t)dt$.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής οπότε η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=f(x)+f(6-x)$. Επίσης η $h'(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $h''(x)=f'(x)-f'(6-x)$.

Οπότε $h''(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=f'(6-x)\overset{f'\,1-1}{\Leftrightarrow}x=6-x\Leftrightarrow x=3$.

β) Είναι $h''(x)>0\Leftrightarrow f'(x)>f'(6-x)\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}x>6-x\Leftrightarrow x>3$.

Οπότε για το πρόσημο της h'' και την κυρτότητα της h έχουμε το διπλανό πίνακα. Η h είναι κοίλη στο $(-\infty,3]$ και κυρτή στο $[3,+\infty)$ και παρουσιάζει Σ.Κ. στο $x_0=3$ το $h(3)=0$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
h''	$-$		$+$
h		Σ.Κ.	

γ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την h στα διαστήματα $[3,4],[4,5]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(3,4)$ και $\xi_2\in(4,5)$ τέτοια ώστε:

$h'(\xi_1)=h(4)-h(3)=\int_2^4 f(t)dt$ και $h'(\xi_2)=h(5)-h(4)=\int_1^5 f(t)dt-\int_2^4 f(t)dt$.

Επειδή η h είναι κυρτή στο $[3,+\infty)$ και $\xi_2>\xi_1>3$ τότε η h' θα είναι γνησίως αύξουσα

οπότε $h'(\xi_2)>h'(\xi_1)\Leftrightarrow \int_1^5 f(t)dt-\int_2^4 f(t)dt>\int_2^4 f(t)dt \Leftrightarrow \int_1^5 f(t)dt>2\int_2^4 f(t)dt$.

6.517. α) Εχουμε $f(x)>x\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(xt)dt \quad (1)$. Θέτουμε $u=xt$ οπότε $du=xdt$ και

t	$\frac{1}{x}$	1
u	1	x

οπότε η σχέση (1) γίνεται $f(x)>\int_1^x f(u)du \quad (2)$.

Η συνάρτηση $g(x)=e^{-x}\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$ με

$g'(x)=e^{-x}f(x)-e^{x}\int_1^x f(t)dt=e^{-x}\left(f(x)-\int_1^x f(t)dt\right)>0$ από τη σχέση (2).

Άρα $g'(x)>0$, οπότε η g είναι $\uparrow$ στο $[1,+\infty)$.

β) Για $x\ge 1$ θα είναι $g(x)\ge g(1)\Rightarrow e^{-x}\int_1^x f(t)dt\ge 0$, οπότε $\int_1^x f(t)dt\ge 0 \quad (4)$.

Άρα από (2) και (4) είναι $f(x)>\int_1^x f(t)dt\ge 0$, άρα $f(x)>0$.

γ) Είναι $\eta\mu^2 x\int_0^x e^{t^2+1}dt+f(x)(\sigma\upsilon\nu x+1)=0\Leftrightarrow (1-\sigma\upsilon\nu^2 x)\int_0^x e^{t^2+1}dt+f(x)(\sigma\upsilon\nu x+1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)\int_0^x e^{t^2+1}dt+f(x)(\sigma\upsilon\nu x+1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu x+1)\left[(1-\sigma\upsilon\nu x)\int_0^x e^{t^2+1}dt+f(x)\right]=0 \quad (5)$.

Όμως $1-\sigma\upsilon\nu x\ge 0$, $e^{t^2+1}>0$ άρα $\int_0^x e^{t^2+1}dt>0$ και $f(x)>0$,

οπότε $(1-\sigma\upsilon\nu x)\int_0^x e^{t^2+1}dt+f(x)>0$, άρα από (5) πρέπει $\sigma\upsilon\nu x+1=0$.

6.518. α) Είναι $f(x)=\int_0^x \frac{1}{u^2+1}du$. Επειδή η $\frac{1}{u^2+1}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $0\in\mathbb{R}$ τότε $D_f=\mathbb{R}$.

Επίσης $f'(x)=\frac{1}{x^2+1}>0$, οπότε η $f\uparrow$ και για $x<0$ θα είναι $f(x)<f(0)=0$ ενώ για $x>0$ θα είναι $f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$.

β) Είναι $f''(x)=\frac{-2x}{x^2+1}$.

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
f''	+	−
f	∪	∩

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$, κοίλη στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει σημείο καμπής στο $(0,0)$.

γ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x,0]$ με $x<0$ οπότε υπάρχει $\xi\in(x,0)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{f(x)}{x}$, όμως η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ άρα η $f'\uparrow$ στο $(-\infty,0]$,

συνεπώς για $x<\xi<0$ είναι $f'(x)<f'(\xi)<f'(0)\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1}<\frac{f(x)}{x}<1\overset{\cdot x<0}{\Leftrightarrow}\frac{x}{x^2+1}>f(x)>x$.

δ) Είναι $f(\varepsilon\varphi x)=x\Leftrightarrow f(\varepsilon\varphi x)-x=0\Leftrightarrow \int_0^{\varepsilon\varphi x}\frac{1}{u^2+1}du-x=0$ με $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\int_0^{\varepsilon\varphi x}\frac{du}{u^2+1}-x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Είναι $h'(x)=\frac{1}{\varepsilon\varphi^2 x+1}\cdot(\varepsilon\varphi x)'-1=\sigma\upsilon\nu^2 x\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-1=0$. Οπότε $h(x)=c$ και αφού $h(0)=0$ τότε $h(x)=0$, δηλαδή $f(\varepsilon\varphi x)=x$ και για $x=\frac{\pi}{6}$ $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$.

Όρια Ολοκληρωμάτων

6.534. α) $\lim\limits_{x\to 2}\int_{2x}^{x+2}\left(\eta\mu^7 t+\sigma\upsilon\nu^8 t\right)dt=\int_4^4\left(\eta\mu^7 t+\sigma\upsilon\nu^8 t\right)dt=0$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\int_{x}^{x+\pi} t\sigma\upsilon\nu t dt=\int_0^{\pi} t\sigma\upsilon\nu t dt=\int_0^{\pi} t\left(\eta\mu t\right)' dt=\left[t\eta\mu t\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\eta\mu t dt=\left[\sigma\upsilon\nu t\right]_0^{\pi}=-2$.

6.535. α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}\int_{x+1}^{4x-5}\dfrac{dt}{1+t^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\int_0^{4x-5}\dfrac{dt}{1+t^2}-\int_0^{x+1}\dfrac{dt}{1+t^2}}{x-2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{4}{1+\left(4x-5\right)^2}-\dfrac{1}{1+\left(x+1\right)^2}}{1}=\frac{4}{10}-\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\int_0^x\left(\sqrt{1+\eta\mu t}-1\right)dt=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left(\sqrt{1+\eta\mu t}-1\right)dt}{x^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\eta\mu x}-1}{2x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{1+\eta\mu x}}}{2}=\frac{1}{4}$$

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}\int_1^x\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi u}{2}du=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi u}{2}du}{\left(x-1\right)^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi x}{2}}{2\left(x-1\right)}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\dfrac{\pi}{2}\eta\mu\dfrac{\pi x}{2}}{2}=-\dfrac{\pi}{4}$

δ) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\ln\left(x-1\right)}\int_1^x\dfrac{dt}{1+t^4}=0$, γιατί $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\ln\left(x-1\right)}=0$, αφού $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln\left(x-1\right)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to 1^+}\int_1^x\dfrac{dt}{1+t^4}=0$

ε) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^5}\eta\mu^5\left(\sqrt{t}\right)dt}{x^6}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{5\cancel{x^4}\eta\mu^5\left(\sqrt{x^5}\right)}{6x^{\cancel{5}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{5\eta\mu^5\left(\sqrt{x^5}\right)}{6x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{25\sigma\upsilon\nu^4\left(\sqrt{x^5}\right)\eta\mu\left(\sqrt{x^5}\right)\frac{5}{2}x\sqrt{x}}{6}=0$$

στ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5}{x^5}\int_0^x\eta\mu^4 t dt=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\int_0^x\eta\mu^4 t dt}{x^5}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\eta\mu^4 x}{5x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^4=1.$

6.536. α) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+h}\dfrac{\eta\mu x}{x}dx=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+h}\dfrac{\eta\mu x}{x}dx}{h}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+h\right)}{\frac{\pi}{4}+h}}{1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$

β) Εστω $f\left(x\right)=2\int_1^x te^{\frac{2}{t}}dt,\ x\geq 2$. Από το Θ.Μ.Τ, υπάρχει $\xi\in\left(2,x\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f'\left(\xi\right)=\frac{f\left(x\right)-f\left(2\right)}{x-2}=\frac{2\int_1^x te^{\frac{2}{t}}dt-f\left(2\right)}{x-2}.$$

Είναι $f'(x)=2xe^{\frac{2}{x}}$, $f''(x)=2e^{\frac{2}{x}}-2\cancel{x}e^{\frac{2}{x}}\frac{2}{x^{\cancel{2}}}=2e^{\frac{2}{x}}\left(1-\frac{2}{x}\right)=2e^{\frac{2}{x}}\frac{x-2}{x}\geq 0\Leftrightarrow x\geq 2$

Για κάθε $x>2$ είναι $f''(x)>0\Rightarrow f'\uparrow[2,+\infty)$, οπότε $2<\xi<x\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(2)<f'(\xi)<f'(x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4e<\frac{2\int_1^x te^{\frac{2}{t}}dt-f(2)}{x-2}<2xe^{\frac{2}{x}}\Leftrightarrow 4e(x-2)+f(2)<2\int_1^x te^{\frac{2}{t}}dt<2xe^{\frac{2}{x}}(x-2)+f(2).$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[4e(x-2)+f(2)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}4ex=+\infty$, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}2\int_1^x te^{\frac{2}{t}}dt=+\infty$

γ) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x \ln t dt-1}{\int_0^x te^t dt-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x (t)'\ln t dt-1}{\int_0^x t(e^t)'dt-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[t\ln t\right]_1^x-\int_1^x \cancel{t}\frac{1}{\cancel{t}}dt}{\left[te^t\right]_0^x-\int_0^x e^t dt}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln x-x+1}{xe^x-e^x+1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\ln x-1)+1}{e^x(x-1)+1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x-1+\cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}}{e^x(x-1)+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{xe^x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{xe^x+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x(x+1)}=0$$

δ) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x\left(\sqrt{t}+2\eta\mu t\right)dt\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}-2\sigma\upsilon\nu t\right]_0^x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2\sigma\upsilon\nu x+2\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3x^2}-2\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}+\frac{2}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3\sqrt{x}}-2\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}+\frac{2}{x^2}\right)=0,$$

γιατί $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right|=\frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{x^2}\leq\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow-\frac{1}{x^2}\leq\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\leq\frac{1}{x^2}$ και από Κ.Π. είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=0$

6.537. Εστω $xt=u\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} t=\frac{u}{x}$ και $dt=\frac{1}{x}du$. Για $t=0$ είναι $u=0$ και για $t=1$ είναι $u=x$.

$$\lim_{x\to 0}\int_0^1 f(xt)dt=\lim_{u\to 0}\int_0^x f(u)\frac{1}{x}du=\lim_{u\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{f(x)}{1}=f(0)=1.$$

6.538. $$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{e^{x+1}}{\ln(3+t^2)}dt=\lim_{x\to+\infty}e^{x+1}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{\ln(3+t^2)}dt=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{\ln(3+t^2)}dt}{e^{-x-1}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\frac{1}{\ln\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}}{-e^{-x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{x+1}}{x^2}\frac{1}{\ln\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}\right)=+\infty$$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+1}}{x^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+1}}{2x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+1}}{2}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln\left(3+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{1}{\ln3}$

6.539. $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\eta\mu x-\alpha x}\displaystyle\int_0^x\dfrac{t^2}{t^2+\beta}dt\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x\dfrac{t^2}{t^2+\beta}dt}{\eta\mu x-\alpha x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x^2}{x^2+\beta}}{\sigma\upsilon\nu x-\alpha}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\left(x^2+\beta\right)\left(\sigma\upsilon\nu x-\alpha\right)}$

Είναι $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2+\beta\right)\left(\sigma\upsilon\nu x-\alpha\right)=\beta\left(1-\alpha\right)$, οπότε αν $\beta\left(1-\alpha\right)\neq0$, τότε

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\left(x^2+\beta\right)\left(\sigma\upsilon\nu x-\alpha\right)}=0$, οπότε για να είναι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\left(x^2+\beta\right)\left(\sigma\upsilon\nu x-\alpha\right)}=-2$ πρέπει

$\beta\left(1-\alpha\right)=0\Leftrightarrow\beta=0$ ή $\alpha=1$.

Αν $\beta=0$, τότε $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\left(x^2+\beta\right)\left(\sigma\upsilon\nu x-\alpha\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(\sigma\upsilon\nu x-\alpha\right)}=\dfrac{1}{1-\alpha}$, $\alpha\neq1$.

Πρέπει $\dfrac{1}{1-\alpha}=-2\Leftrightarrow1=-2+2\alpha\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{3}{2}$.

Αν $\alpha=1$, τότε $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\left(x^2+\beta\right)\left(\sigma\upsilon\nu x-1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\left(\sigma\upsilon\nu x+1\right)}{\left(x^2+\beta\right)\left(\sigma\upsilon\nu x-1\right)\left(\sigma\upsilon\nu x+1\right)}=$

$$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\left(\sigma\upsilon\nu x+1\right)}{\left(x^2+\beta\right)\left(\sigma\upsilon\nu^2x-1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\left(\sigma\upsilon\nu x+1\right)}{-\left(x^2+\beta\right)\eta\mu^2x}=$$

$$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sigma\upsilon\nu x+1\right)}{-\left(x^2+\beta\right)\dfrac{\eta\mu^2x}{x^2}}=\dfrac{2}{-\beta},\ \beta\neq0$$

Πρέπει $\dfrac{2}{-\beta}=-2\Leftrightarrow\beta=1$.

6.540. Η συνάρτηση $\left(2t+1\right)e^t$ είναι συνεχής στο $\left[0,1\right)$, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη, οπότε και συνεχής στο διάστημα αυτό. Στο $\left(1,2\right]$ η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Για να είναι η f συνεχής στο $\left[0,2\right]$ πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0=1$, δηλαδή:

$\lim\limits_{x\to1^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^+}f\left(x\right)=f\left(1\right)=\beta^2-3\beta+e+3$.

Είναι $\lim\limits_{x\to1^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^-}\displaystyle\int_0^x\left(2t+1\right)e^tdt=\int_0^1\left(2t+1\right)e^tdt=\int_0^1\left(2t+1\right)\left(e^t\right)'dt=$

$$=\left[\left(2t+1\right)e^t\right]_0^1-\int_0^1 2e^tdt=3e-1-2\left[e^t\right]_0^1=3e-1-2e+2=e+1$$

$\lim\limits_{x\to1^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\left(\alpha-3\beta\right)\eta\mu\left(x-1\right)}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\alpha-3\beta}{x-3}\dfrac{\eta\mu\left(x-1\right)}{x-1}=\dfrac{\alpha-3\beta}{-2}=\dfrac{3\beta-\alpha}{2}$

Είναι $\begin{cases}\beta^2-3\beta+e+3=e+1\\ \beta^2-3\beta+e+3=\dfrac{3\beta-\alpha}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta^2-3\beta+2=0\\ 2\beta^2-6\beta+2e+6=3\beta-\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=1 \text{ ή } \beta=2\\ 2\beta^2-9\beta+2e+6=-\alpha\end{cases}$

Αν $\beta=1$, τότε $2-9+2e+6=-\alpha\Leftrightarrow\alpha=1-2e$ και

αν $\beta=2$, τότε $8-18+2e+6=-\alpha\Leftrightarrow\alpha=4-2e$.

6.541. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^3+x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)}{x}\dfrac{1}{3x+2}\right]$

Εστω $\dfrac{f(x)}{x}\dfrac{1}{3x+2}=g(x)\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x}=g(x)(3x+2)$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[g(x)(3x+2)\right]=2$, άρα $f'(0)=2$.

6.542. **α)** Επειδή η συνάρτηση $h(u)=\dfrac{e^u}{\sqrt{u}}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών τότε η συνάρτηση $f(t)=\int_1^{3t}\dfrac{e^u}{\sqrt{u}}du$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(t)=\dfrac{e^{3t}}{\sqrt{3t}}\cdot(3t)'=\dfrac{3e^{3t}}{\sqrt{3t}}$ (1). Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη είναι και συνεχής οπότε η συνάρτηση $g(x)=\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=f(x)$ και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη έχουμε

$g''(x)=f'(x)\overset{(1)}{=}\dfrac{3e^{3x}}{\sqrt{3x}}$. Άρα $g''(1)=\dfrac{3e^3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}e^3$.

β) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}g''(x)-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}\dfrac{3e^{3x}}{\sqrt{3x}}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{3}e^{3x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\sqrt{3}e^{3x}-\sqrt{3}\right)'}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)'}=$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{3}e^{3x}-3}{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}=\lim_{x\to 0^+}\left(6\sqrt{3}e^{3x}\sqrt{x+1}\right)=6\sqrt{3}.$$

6.543. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_1^{x^2+1}(1-x)g(t-1)dt}{e^x-x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-x)\int_1^{x^2+1}g(t-1)dt}{e^x-x-1}$.

Επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η x^2-1 είναι παραγωγίσιμη, η συνάρτηση $\int_1^{x^2-1}g(t-1)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε και η $(1-x)\int_1^{x^2-1}g(t-1)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Ακόμη, η συνάρτηση e^x-x-1 είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\left(e^x-x-1\right)'=e^x-1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-x)\int_1^{x^2+1}g(t-1)dt}{e^x-x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[(1-x)\int_1^{x^2+1}g(t-1)dt\right]'}{\left(e^x-x-1\right)'}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\int_1^{x^2+1}g(t-1)dt+(1-x)g\left(x^2+1-1\right)2x}{e^x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{\int_1^{x^2+1}g(t-1)dt}{e^x-1}+2(1-x)g\left(x^2\right)\frac{x}{e^x-1}\right]$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_1^{x^2+1} g(t-1)dt}{e^x-1} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_1^{x^2+1} g(t-1)dt\right)'}{\left(e^x-1\right)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xg\left(x^2\right)}{e^x} = 0$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-1} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^x} = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0}2(1-x)g\left(x^2\right) = 2g(0) = -2$,

άρα $\lim\limits_{x\to 0}\left[-\dfrac{\int_1^{x^2+1} g(t-1)dt}{e^x-1} + 2(1-x)g\left(x^2\right)\dfrac{x}{e^x-1}\right] = -0-2 = -2$.

6.544. $\lim\limits_{x\to 0}f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2x}\int_0^x f(t)dt - \dfrac{1}{2}\right)$ (1).

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2x}\int_0^x f(t)dt = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{2x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2} = \dfrac{f(0)}{2}$,

άρα $(1) \Rightarrow f(0) = \dfrac{f(0)}{2} - \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow f(0) = -1$.

6.545. α) $\lim\limits_{x\to 0}g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1} = f(0) = g(0) \Leftrightarrow g$ συνεχής στο $x_0 = 0$.

β) Για $x > 0$ είναι $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt + \dfrac{f(x)}{x}$.

Στο $x_0 = 0$ είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt - f(0)}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt - xf(0)}{x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{2x} = \frac{1}{2}f'(0)$$

6.546. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x \left[2-f(t)\right]dt}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\left[2-f(x)\right] = 2-f(0)$,

άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}\int_0^x \left[2-f(t)\right]dt = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[f(x)\dfrac{\int_0^x \left[2-f(t)\right]dt}{x}\right] = f(0)\left(2-f(0)\right) = 2f(0)-f^2(0)$

Πρέπει $2f(0)-f^2(0) \le 1 \Leftrightarrow f^2(0)-2f(0)+1 \ge 0 \Leftrightarrow \left(f(0)-1\right)^2 \ge 0$ που ισχύει.

6.547. Θέτουμε $x+\beta-t = u$, τότε $dt = -du$. Για $t = \beta \Rightarrow u = x$ και για $t = x \Rightarrow u = \beta$.

Τότε $\lim\limits_{x\to \beta}\int_\beta^x \dfrac{f(x+\beta-t)}{(x-\beta)(x+\beta-t)}dt = \lim\limits_{x\to \beta}\dfrac{\int_\beta^x \frac{f(u)}{u}du}{x-\beta} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to \beta}\dfrac{\frac{f(x)}{x}}{1} = \dfrac{f(\beta)}{\beta} = 1 \Leftrightarrow f(\beta) = \beta$

Τότε από τη σχέση $\alpha f(\beta) = \beta f(\alpha)$, προκύπτει $f(\alpha) = \alpha$

Από το ΘΜΤ για την f, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta): f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha}=1$.

6.548. α) $\int_0^x f(t)dt<f(x)\Leftrightarrow f(x)-\int_0^x f(t)dt>0\Leftrightarrow\left(\int_0^x f(t)dt\right)'-\int_0^x f(t)dt>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-x}\left(\int_0^x f(t)dt\right)'-e^{-x}\int_0^x f(t)dt>0\Leftrightarrow\left(e^{-x}\int_0^x f(t)dt\right)'>0$

Εστω η συνάρτηση $g(x)=e^{-x}\int_0^x f(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=\left(e^{-x}\int_0^x f(t)dt\right)'>0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\geq 0$ είναι $g(x)\geq g(0)=0\Leftrightarrow e^{-x}\int_0^x f(t)dt\geq 0\overset{e^{-x}>0}{\Leftrightarrow}\int_0^x f(t)dt\geq 0$. Όμως από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f(x)>\int_0^x f(t)dt\geq 0$, δηλαδή $f(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$.

β) Εστω $F(u)=\int_0^u f(t)dt$, $u\geq 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,x]$, $x>0$, η F είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο διάστημα αυτό με $F'(u)=f(u)$. Λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi)=\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}\Leftrightarrow\int_0^x f(t)dt=xf(\xi),$$

$f(\xi)>0$, άρα υπάρχει $\alpha>0$ τέτοιο ώστε $f(\xi)>\alpha$, επομένως $\int_0^x f(t)dt=xf(\xi)>\alpha x$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha x)=+\infty$, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt=+\infty$

6.549. α) Εστω $f(u)=\int_2^u \frac{1}{\ln t}dt$, $u>1$. Η συνάρτηση $\frac{1}{\ln t}$ είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό, άρα η f είναι συνεχής στο $[x,2x]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,2x)$ με $f'(u)=\frac{1}{\ln u}$. Λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχει $\xi\in(x,2x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(2x)-f(x)}{2x-x}=\frac{1}{x}\left(\int_2^{2x}\frac{1}{\ln t}dt-\int_2^{x}\frac{1}{\ln t}dt\right)=\frac{1}{x}\left(\int_2^{2x}\frac{1}{\ln t}dt+\int_x^{2}\frac{1}{\ln t}dt\right)=\frac{1}{x}\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}dt.$$

Είναι $f''(u)=\left(\frac{1}{\ln u}\right)'=-\frac{1}{\ln^2 u}(\ln u)'=-\frac{1}{u\ln u}<0$ για κάθε $u>1$, άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$. Είναι

$$x<\xi<2x\overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(\xi)>f'(2x)\Leftrightarrow\frac{1}{\ln 2x}<\frac{1}{x}\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}dt<\frac{1}{\ln x}\Leftrightarrow\frac{x}{\ln 2x}<\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}dt<\frac{x}{\ln x}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln 2x} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{2}{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ και $\int_x^{2x}\dfrac{1}{\ln t}dt>\dfrac{x}{\ln 2x}$, άρα και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\dfrac{1}{\ln t}dt=+\infty$.

β) Είναι: $\int_x^{2x}\dfrac{\eta\mu t}{t}dt=\int_x^{1}\dfrac{\eta\mu t}{t}dt+\int_1^{2x}\dfrac{\eta\mu t}{t}dt=\int_1^{2x}\dfrac{\eta\mu t}{t}dt-\int_1^{x}\dfrac{\eta\mu t}{t}dt$.

Εστω $f(u)=\int_1^{u}\dfrac{\eta\mu t}{t}dt$, $u\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Η συνάρτηση $\dfrac{\eta\mu t}{t}$ είναι συνεχής στο $[x,2x]$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $[x,2x]$ με $f'(u)=\dfrac{\eta\mu u}{u}$, άρα λόγω του θεωρήματος Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi\in(x,2x)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(2x)-f(x)}{x}\Leftrightarrow x\cdot\frac{\eta\mu\xi}{\xi}=\int_1^{2x}\frac{\eta\mu t}{t}dt-\int_1^{x}\frac{\eta\mu t}{t}dt=\int_x^{2x}\frac{\eta\mu t}{t}dt.$$

Είναι: $0<x<\xi<2x<\dfrac{\pi}{2}$ άρα $\eta\mu x<\eta\mu\xi<\eta\mu 2x$ και $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{\xi}>\dfrac{1}{2x}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2x}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{x}$ οπότε και

$$\eta\mu x\cdot\frac{1}{2x}<\eta\mu\xi\cdot\frac{1}{\xi}<\eta\mu 2x\cdot\frac{1}{x}\Leftrightarrow x\cdot\eta\mu x\cdot\frac{1}{2x}<x\cdot\frac{\eta\mu\xi}{\xi}<x\cdot\eta\mu 2x\cdot\frac{1}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\eta\mu x}{2}<\int_x^{2x}\frac{\eta\mu t}{t}dt<\eta\mu 2x.$$

Είναι: $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\eta\mu x}{2}=0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\eta\mu 2x=0$ άρα και $\lim\limits_{x\to0^+}\int_x^{2x}\dfrac{\eta\mu t}{t}dt=0$.

γ) Εστω $f(u)=\int_1^{u}\dfrac{e^{t^2}}{t^3}dt$,

Τότε: $\int_x^{2x}\dfrac{e^{t^2}}{t^3}dt=\int_x^{1}\dfrac{e^{t^2}}{t^3}dt+\int_1^{2x}\dfrac{e^{t^2}}{t^3}dt=\int_1^{2x}\dfrac{e^{t^2}}{t^3}dt-\int_1^{x}\dfrac{e^{t^2}}{t^3}dt=f(2x)-f(x)$

Η συνάρτηση $\dfrac{e^{t^2}}{t^3}$ είναι συνεχής στο $[x,2x]$, $x>0$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό με $f'(u)=\dfrac{e^{u^2}}{u^3}$, οπότε είναι και συνεχής στο διάστημα $[x,2x]$.

Λόγω του θεωρήματος Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi\in(x,2x)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(2x)-f(x)}{x}\Leftrightarrow x\cdot\frac{e^{\xi^2}}{\xi^3}=f(2x)-f(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{t^2}}{t^3}dt.$$

Είναι: $0<x<\xi<2x\Leftrightarrow x^2<\xi^2<4x^2\Leftrightarrow e^{x^2}<e^{\xi^2}<e^{4x^2}$ και $x^3<\xi^3<8x^3\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{8x^3}<\frac{1}{\xi^3}<\frac{1}{x^3},\text{ άρα }\frac{e^{x^2}}{8x^3}<\frac{e^{\xi^2}}{\xi^3}<\frac{e^{4x^2}}{x^3}\Leftrightarrow\frac{e^{x^2}}{8x^2}<x\cdot\frac{e^{\xi^2}}{\xi^3}<\frac{e^{4x^2}}{x^2}.$$

Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2}}{8x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2xe^{x^2}}{16x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2}}{8}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{4x^2}}{x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8xe^{4x^2}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}4e^{4x^2}=+\infty$,

οπότε και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\dfrac{e^{t^2}}{t^3}dt=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\dfrac{e^{\xi^2}}{\xi^3}=+\infty$.

δ) $f(u)=\int_0^{u}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$, $u\in[x,x+1]$. Από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$:

$$f'(\xi)=f(x+1)-f(x)=\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt.$$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ f''(x)=-\frac{1}{1+x^2}\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}<0\Rightarrow f'\downarrow(0,+\infty)$$

$$x<\xi<x+1\overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(\xi)>f'(x+1)\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}<\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt<\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}=0$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt=0$.

ε) Εστω $f(u)=\int_0^u\frac{e^t}{t^2+1}dt$, $u\in[x,x+1]$, $x>0$. Από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$:

$$f'(\xi)=f(x+1)-f(x)=\int_x^{x+1}\frac{e^t}{t^2+1}dt.$$

$$f'(x)=\frac{e^x}{x^2+1},\ f''(x)=\frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}>0 \text{ για κάθε } x\neq1, \text{ άρα } f'\uparrow\mathbb{R}.$$

$$x<\xi<x+1\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(\xi)<f'(x+1)\Leftrightarrow\frac{e^x}{x^2+1}<\int_x^{x+1}\frac{e^t}{t^2+1}dt<\frac{e^{x+1}}{1+(x+1)^2}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\frac{e^t}{t^2+1}dt=+\infty$

στ) Εστω $f(u)=\int_1^u t^3e^tdt$. Από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi\in(1,x)$, $x>1$:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow f'(\xi)(x-1)=f(x)$$

$$f'(x)=x^3e^x,\ f''(x)=e^x(x^3+3x^2)>0\Rightarrow f'\uparrow[1,+\infty).$$

$$1<\xi<x\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(1)<f'(\xi)<f'(x)\Leftrightarrow e<f'(\xi)<x^3e^x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e(x-1)<(x-1)f'(\xi)<(x-1)x^3e^x\Leftrightarrow e(x-1)<f(x)<(x-1)x^3e^x.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}e(x-1)=+\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

6.550. α) $\int_x^{x+1}e^{t^2+x}dt=\int_x^{x+1}e^{t^2}e^xdt=e^x\int_x^{x+1}e^{t^2}dt=e^x\left(\int_x^0e^{t^2}dt+\int_0^{x+1}e^{t^2}dt\right)=e^x\left(-\int_0^xe^{t^2}dt+\int_0^{x+1}e^{t^2}dt\right)$

Εστω $f(u)=\int_0^ue^{t^2}dt$, $u\in[x,x+1]$. Επειδή η συνάρτηση e^{t^2} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι συνεχής στο $[x,x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$ με $f'(u)=e^{u^2}$. Λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=\int_0^{x+1}e^{t^2}dt-\int_0^xe^{t^2}dt=\int_0^{x+1}e^{t^2}dt+\int_x^0e^{t^2}dt=\int_x^{x+1}e^{t^2}dt.$$

Είναι $f''(u)=2ue^{u^2}$ και όταν $x>0$ είναι $f''(u)>0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[x,x+1]$. Είναι $x<\xi<x+1\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(\xi)<f'(x+1)\Leftrightarrow e^{x^2}<\int_x^{x+1}e^{t^2}dt<e^{(x+1)^2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^x e^{x^2} < e^x \int_x^{x+1} e^{t^2}dt < e^x e^{x^2+2x+1} \Leftrightarrow e^{x^2+x} < \int_x^{x+1} e^{t^2+x}dt < e^{x^2+3x+1}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x^2+x} \overset{x^2+x=u}{=} \lim\limits_{u\to+\infty}e^u=+\infty$ και επειδή $\int_x^{x+1}e^{t^2+x}dt > e^{x^2+x}$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}e^{t^2+x}dt=+\infty$.

β) Όταν $x<0$ τότε $f''(u)<0$ άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x,x+1]$.

Είναι $x<\xi<x+1 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(\xi)>f'(x+1) \Leftrightarrow e^{(x+1)^2} < \int_x^{x+1}e^{t^2}dt < e^{x^2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^x e^{x^2+2x+1} < e^x\int_x^{x+1}e^{t^2}dt < e^x e^{x^2} \Leftrightarrow e^{x^2+3x+1} < \int_x^{x+1}e^{t^2+x}dt < e^{x^2+x}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+3x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x^2+3x+1} \overset{x^2+3x+1=u}{=} \lim\limits_{u\to+\infty}e^u=+\infty$ και επειδή $\int_x^{x+1}e^{t^2+x}dt > e^{x^2+3x+1}$, είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^{x+1}e^{t^2+x}dt=+\infty$.

6.551. α) Είναι $\int_x^{2x}t^t dt=\int_x^1 t^t dt+\int_1^{2x}t^t dt=\int_1^{2x}t^t dt-\int_1^x t^t dt$. Εστω $f(u)=\int_1^u t^t dt$, $u\in[x,2x]$, $x>0$.

Επειδή η συνάρτηση t^t είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ οπότε είναι συνεχής στο $[x,2x]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,2x)$ με $f'(u)=u^u$.

Λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχει $\xi\in(x,2x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(2x)-f(x)}{2x-x}=\frac{1}{x}\left(\int_1^{2x}t^t dt-\int_1^x t^t dt\right)=\frac{1}{x}\left(\int_1^{2x}t^t dt+\int_x^1 t^t dt\right)=\frac{1}{x}\int_x^{2x}t^t dt$$

Είναι $f''(u)=\left(u^u\right)'=\left(e^{\ln u^u}\right)'=\left(e^{u\ln u}\right)'=e^{u\ln u}(\ln u+1)$

$$f''(u)\ge 0 \Leftrightarrow e^{u\ln u}(\ln u+1)\ge 0 \Leftrightarrow \ln u+1\ge 0 \Leftrightarrow \ln u\ge -1 \Leftrightarrow u\ge\frac{1}{e}.$$

Όταν $0<x<\frac{1}{e}$ τότε $f''(u)<0$ και f' γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x,2x]$.

x	0		1/e		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f'		↘		↗	

Είναι $x<\xi<2x \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(\xi)>f'(2x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2x)^{2x} < \frac{1}{x}\int_x^{2x}t^t dt < x^x \Leftrightarrow x(2x)^{2x} < \int_x^{2x}t^t dt < x^{x+1}$$

Επειδή $x^{x+1}=e^{\ln x^{x+1}}=e^{(x+1)\ln x}$ και $\lim\limits_{x\to0}(x+1)\ln x=-\infty$,

είναι $\lim\limits_{x\to0}x^{x+1}=\lim\limits_{x\to0}e^{(x+1)\ln x} \overset{(x+1)\ln x=u}{=} \lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0$.

Όμοια $x(2x)^{2x}=xe^{2x\ln 2x}$ και $\lim\limits_{x\to0}2x\ln 2x=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln 2x}{\dfrac{1}{2x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2x}}{-\dfrac{1}{2x^2}}=\lim\limits_{x\to0}(-x)=0$

άρα $\lim\limits_{x\to0}(2x)^{2x}=\lim\limits_{x\to0}e^{2x\ln 2x} \overset{2x\ln 2x=u}{=} \lim\limits_{u\to0}e^u=1$, άρα $\lim\limits_{x\to0}x(2x)^{2x}=\lim\limits_{x\to0}xe^{2x\ln 2x}=0$,

οπότε και $\lim\limits_{x\to0}\int_x^{2x}t^t dt=0$.

β) Όταν $x>\frac{1}{e}$ τότε $f''(u)>0$ και f' γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x,2x]$. Είναι

$$x<\xi<2x \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(\xi)<f'(2x) \Leftrightarrow x^x<\frac{1}{x}\int_x^{2x} t^t dt<(2x)^{2x} \Leftrightarrow x^{x+1}<\int_x^{2x} t^t dt<x(2x)^{2x}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\ln x^{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(x+1)\ln x}=\lim\limits_{u\to+\infty} e^u=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\ln x=+\infty$ και

επειδή $\int_x^{2x} t^t dt>x^{x+1}$, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x} t^t dt=+\infty$.

6.552. Εστω $F(u)=\int_0^u f(t)dt$, $u>0$. Λόγω του Θ.Μ.Τ για την F υπάρχει $\xi\in(x,2x)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi)=\frac{F(2x)-F(x)}{x} \Leftrightarrow xf(\xi)=\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt$$

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>f'(0)=0 \Rightarrow f\uparrow[0,+\infty)$

$$x<\xi<2x \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(\xi)<f(2x) \Leftrightarrow xf(x)<xf(\xi)<xf(2x) \Leftrightarrow xf(x)<\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt<xf(2x).$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to0^+}(xf(x))=0=\lim\limits_{x\to0^+}(xf(2x))$, είναι και $\lim\limits_{x\to0^+}\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt=0$.

6.553. Εστω $F(u)=\int_0^u f(t)dt$, $u>0$. Λόγω του Θ.Μ.Τ για την F υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi)=\frac{F(x)-F(0)}{x} \Leftrightarrow f(\xi)=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{f(t)}{t}dt$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(\xi)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x\frac{f(t)}{t}dt\right)=0$$

Είναι $x<\xi<2x$ και όταν $x\to+\infty$ είναι $\xi\to+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\xi(x))=0 \overset{u=\xi(x)}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} f(u)$.

6.554. **α)** Είναι $u^4\geq0 \Leftrightarrow u^4+x^4\geq x^4 \Leftrightarrow \frac{1}{u^4+x^4}\leq\frac{1}{x^4}$ και επειδή $0\leq\eta\mu^2(ux)\leq1$,

ισχύει ότι: $\frac{\eta\mu^2(ux)}{u^4+x^4}\leq\frac{1}{x^4} \Leftrightarrow f(u)\leq\frac{1}{x^4}$.

β) Είναι $0\leq f(u)\leq\frac{1}{x^4}$ και για $x>0$ έχουμε $0\leq xf(u)\leq\frac{1}{x^3}$ και

$0\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(u)du\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x^3}du=\frac{\pi}{2x^3}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi}{2x^3}=0$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(u)du=0$.

γ) Επειδή η συνάρτηση $f(u)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση $\int_0^x f(u)du$ είναι

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\left(\int_0^x f(u)du\right)'=f(x)$, οπότε:

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1}=\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu^2(x\cdot x)}{x^4+x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu^2x^2}{2x^4}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\eta\mu x^2}{x^2}\right)^2\right) \underset{u\to0}{\overset{x^2=u}{=}} \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\eta\mu u}{u}\right)^2\right)=\frac{1}{2}.$$

6.555. **α)** f κυρτή $\Rightarrow f'\uparrow \mathbb{R}$.

$x>0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0)=0 \Rightarrow f\uparrow[0,+\infty)$ και για $x<0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(0)=0 \Rightarrow f\downarrow(-\infty,0]$

$x>0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0)=0$ και για $x<0 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0)=0$.

β) $g'(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $g''(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

Από το Θ.Μ.Τ για την f, υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{f(x)}{x}$

$0<\xi<x \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(0)<f'(\xi)<f'(x) \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}<f'(x) \Leftrightarrow xf'(x)-f(x)>0 \Rightarrow g''(x)>0$

άρα η g είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\dfrac{f(t)}{t}dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\big(g(x+1)-g(x)\big)$

Από το Θ.Μ.Τ. για την g, υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=g(x+1)-g(x)$

$x<\xi<x+1 \overset{g'\uparrow}{\Leftrightarrow} g'(x)<g'(\xi)<g'(x+1) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}<g(x+1)-g(x)<\dfrac{f(x+1)}{x+1}$

Από το ΘΜΤ για την f υπάρχει $\xi_1\in(1,x)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow f(x)=f'(\xi_1)(x-1)+f(1)$

$\xi_1>1 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1)>f'(1)>0 \Rightarrow f'(\xi_1)(x-1)+f(1)>f'(1)(x-1)+f(1)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(1)(x-1)+f(1)\right]=+\infty$, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f'(\xi_1)(x-1)+f(1)\big)=+\infty$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{1}=+\infty$, οπότε από το Κ.Π είναι και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\dfrac{f(t)}{t}dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\big(g(x+1)-g(x)\big)=+\infty$

δ) Για $x>2$ είναι $f(x)\geq\dfrac{x^2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} \Leftrightarrow f(x)\geq x^2$, άρα $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)\geq\lim\limits_{x\to2^+}x^2 \Leftrightarrow f(2)\geq4$ (1)

Για $x<2$ είναι $f(x)\leq x^2$ και $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)\leq\lim\limits_{x\to2^-}x^2 \Leftrightarrow f(2)\leq4$ (2).

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει $f(2)=4$

6.556. **α)** $f'(x)=\left(\int_0^x(2t+1)e^{-f(t)}dt\right)'=(2x+1)e^{-f(x)} \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)}=2x+1 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)'=\left(x^2+x\right)' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{f(x)}=x^2+x+c$. Είναι $f(0)=\int_0^0(2t+1)e^{-f(t)}dt=0 \Leftrightarrow 1=c$, άρα

$e^{f(x)}=x^2+x+1 \Leftrightarrow f(x)=\ln\left(x^2+x+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$

β) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt+\lambda x}{x^3+\lambda^2x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+\lambda}{3x^2+\lambda^2}=\dfrac{1}{\lambda}=1 \Leftrightarrow \lambda=1$

γ) Εστω $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $x\in[1,2]$. Από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi\in(1,2)$:

$$F'(\xi)=\frac{F(2)-F(1)}{2-1}\Leftrightarrow f(\xi)=\int_0^2 \ln(x^2+x+1)dx-\int_0^1 \ln(x^2+x+1)dx$$

$f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}>0$ για κάθε $x\in[1,2]$, άρα η f είναι ↑ στο $[1,2]$.

$$1<\xi<2\Leftrightarrow f(1)<f(\xi)<f(2)\Leftrightarrow \ln3<\int_0^2 \ln(x^2+x+1)dx-\int_0^1 \ln(x^2+x+1)dx<\ln7.$$

δ) Από το ΘΜΤ για την F, υπάρχει $\xi_1\in(x,2x)$, $x>0$:

$$F'(\xi_1)=\frac{F(2x)-F(x)}{x}\Leftrightarrow xf(\xi_1)=\int_x^{2x}\ln(t^2+t+1)dt$$

$$x<\xi_1<2x\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(\xi_1)<f(2x)\Leftrightarrow x\ln(x^2+x+1)<xf(\xi_1)<x\ln(4x^2+2x+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\ln(x^2+x+1)<\int_x^{2x}\ln(t^2+t+1)dt<x\ln(4x^2+2x+1).$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln(x^2+x+1)\right]=+\infty$, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\ln(t^2+t+1)dt=+\infty$.

6.557. α) $$f'(x)=\frac{1}{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\frac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{\cancel{e^x+1}}{e^x-1}\frac{2e^x}{(e^x+1)^{\cancel{2}}}=\frac{2e^x}{(e^x-1)(e^x+1)}>0\Rightarrow f\uparrow(0,+\infty).$$

β) $$\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{e^x+1}=0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}=1,$$

άρα $$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}\overset{\frac{e^x-1}{e^x+1}=u}{\underset{u\to0^+}{=}}\lim_{u\to0^+}\ln u=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}\overset{\frac{e^x-1}{e^x+1}=u}{\underset{u\to1}{=}}\lim_{u\to1}\ln u=0,$$

άρα $f(A)=(-\infty,0)$

γ) Εστω $F(x)=\int_1^x f(t)dt$, τότε $\int_x^{x+1}f(t)dt=F(x+1)-F(x)$

Από το Θ.Μ.Τ για την F, υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi)=F(x+1)-F(x)$.

$$x<\xi<x+1\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(\xi)<f(x+1)\Leftrightarrow$$

$$f(x)<F(x+1)-F(x)<f(x+1)\Leftrightarrow f(x)<\int_x^{x+1}f(t)dt<f(x+1)$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x+1)\overset{x+1=u}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=0$, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}f(t)dt=0$.

6.558. α) $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}>0\Rightarrow f\uparrow\mathbb{R}$, $f''(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}<0\Rightarrow f'\downarrow[0,+\infty)$.

Από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi_1\in(0,x)$, $x>0$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\Leftrightarrow xf'(\xi_1)=f(x)$

Επειδή $f'(\xi_1)>0$, υπάρχει $\alpha>0$ τέτοιος ώστε $f'(\xi_1)>\alpha\Leftrightarrow xf'(\xi_1)>\alpha x\Leftrightarrow f(x)>\alpha x$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha x)=+\infty$, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ και επειδή $f(0)=0$,

είναι $f([0,+\infty))=[0,+\infty)$.

β) Από το Θ.Μ.Τ για την f υπάρχει $\xi_2 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_2) = f(2) - f(1) = \int_0^2 \frac{1}{t^2+1}dt - \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt = \int_1^2 \frac{1}{t^2+1}dt.$$

$$1 < \xi_2 < 2 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(1) > f'(\xi_2) > f'(2) \Leftrightarrow \frac{1}{5} < \int_1^2 \frac{1}{t^2+1}dt < \frac{1}{2}$$

γ) Εστω $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x),\ x \neq 0$.

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) + f'(x) = -\frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{\cancel{x^2}}\frac{1}{\frac{x^2+1}{\cancel{x^2}}} + \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow h(x) = c$$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} \frac{e^x}{t^2+1}dt = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(f(x+1) - f(x)\right)\right]$.

Από το Θ.Μ.Τ για την f, υπάρχει

$$\xi_3 \in (x, x+1) : f'(\xi_3) = f(x+1) - f(x) \Leftrightarrow f'(\xi_3) = \int_x^{x+1} \frac{1}{t^2+1}dt$$

$$x < \xi_3 < x+1 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\xi_3) > f'(x+1) \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} < \int_x^{x+1} \frac{1}{t^2+1}dt < \frac{1}{1+(x+1)^2} \Leftrightarrow.$$

$$\frac{e^x}{1+x^2} < e^x \int_x^{x+1} \frac{1}{t^2+1}dt < \frac{e^x}{1+(x+1)^2}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+x^2} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} \frac{e^x}{t^2+1}dt = +\infty$.

Εμβαδά

6.585. **α)** $f(x)=x(x-1)(x+1)$. Είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$ και $f(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$, οπότε:

$$E(\Omega)=-\int_{-2}^{-1}f(x)dx+\int_{-1}^{0}f(x)dx-\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx=5.$$

β) $f(x)=x^2-8x+12=(x-2)(x-4)$. Είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$ και $f(x)<0\quad \forall x\in(2,4)$, άρα $E(\Omega)=\int_0^2 f(x)dx-\int_2^4 f(x)dx=16$.

γ) $f(x)=x\left(x-2\sqrt{2}\right)$. Είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup\left(2\sqrt{2},+\infty\right)$, άρα

$$E(\Omega)=-\int_0^{2\sqrt{2}}f(x)dx=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

δ) Είναι $f(x)>0\quad \forall x\in(0,\pi)$ και $f(x)<0\quad \forall x\in(\pi,2\pi)$, οπότε:

$$E(\Omega)=\int_0^{\pi}f(x)dx-\int_{\pi}^{2\pi}f(x)dx=4\pi$$

6.586. Είναι $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)=2\Rightarrow f$ συνεχής στο 1.

Για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι $f(x)>0$ και για κάθε $x\in(-1,0)$ είναι $f(x)<0$.

$$E(\Omega)=-\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx+\int_1^e f(x)dx=2e+2.$$

6.587. Για $x<0: f(x)=0\Leftrightarrow x(x+2)=0\Leftrightarrow x=-2$ και για $x>0$:

$f(x)=0\Leftrightarrow 2x\left(x^2+1\right)=0\Leftrightarrow x=0$ που απορρίπτεται ή $x^2=-1$ που είναι αδύνατο.

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=0\Rightarrow f$ συνεχής στο 0.

$$E(\Omega)=-\int_{-2}^{0}f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx=-\int_{-2}^{0}\left(x^2+2x\right)dx+\int_0^1\left(4x^3+2x\right)dx=\frac{10}{3}$$

6.588. $f(x)\ge0\Leftrightarrow x(x-\lambda)\ge0\Leftrightarrow x\in(-\infty,0]\cup[\lambda,+\infty)$ αν $\lambda>0$ ή $x\in(-\infty,\lambda]\cup[0,+\infty)$ αν $\lambda<0$.

Για $\lambda>0$ είναι $E(\Omega)=-\int_0^{\lambda}f(x)dx=-\int_0^{\lambda}\left(x^2-\lambda x\right)dx=-\left[\frac{x^3}{3}-\lambda\frac{x^2}{2}\right]_0^{\lambda}=\frac{\lambda^3}{6}$

Πρέπει $\frac{\lambda^3}{6}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\lambda^3=8\Leftrightarrow\lambda=2$.

Για $\lambda<0$ είναι $E(\Omega)=-\int_{\lambda}^{0}f(x)dx=\int_0^{\lambda}\left(x^2-\lambda x\right)dx=-\frac{\lambda^3}{6}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\lambda=-2$

6.589. $f'(x)=e^x-1\ge0\Leftrightarrow x\ge0$. Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow[0,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(0)=1$, άρα $f(x)\ge1>0\quad\forall x\in\mathbb{R}$.

$$E(\Omega)=\int_0^1\left(e^x-x\right)dx=\left[e^x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=e-\frac{1}{2}-1=e-\frac{3}{2}.$$

6.590. $f'(x)=-\ln x<0$ για κάθε $x>1$, άρα $f\downarrow[1,+\infty)$. Για κάθε $x\geq 1$ είναι $f(x)\leq f(1)=0$, οπότε

$$E(\Omega)=-\int_1^e f(x)dx=-\int_1^e(x-1-\ln x)dx=-\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^e+\int_1^e \ln x(x)'\,dx=$$

$$=-\frac{e^2}{2}+e+\frac{1}{2}-1+\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e x\frac{1}{x}dx=-\frac{e^2}{2}+e-\frac{1}{2}+e-e+1=-\frac{e^2}{2}+e+\frac{1}{2}$$

6.591. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x-x_0}{x-x_0}=1\Leftrightarrow f'(x_0)=1$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$, άρα και $f'(x)=1,\ x\in\mathbb{R}$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E(\Omega)=\int_{-1}^1 f'(x)dx=\left[f(x)\right]_{-1}^1=f(1)-f(-1)=1-(-1)=2$

6.592. $f(1)=0,\ f'(1)=0$. f κοίλη $\Rightarrow f'\downarrow[0,2]$, άρα

για $0<x<1\overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(1)=0$ και για $1<x<2\overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(1)=0$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E(\Omega)=\int_0^2|f'(x)|dx=\int_0^1 f'(x)dx-\int_1^2 f'(x)dx=f(1)-f(0)-f(2)+f(1)\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=-\big(f(0)+f(2)\big)=3$$

6.593. $E(\Omega)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(3x^2-2x\int_0^1 f(x)dx+5\right)dx\Leftrightarrow$

$$E(\Omega)=\left[x^3-x^2\int_0^1 f(x)dx+5x\right]_0^1=1-E(\Omega)+5\Leftrightarrow 2E(\Omega)=6\Leftrightarrow E(\Omega)=3.$$

6.594. Είναι $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0\Leftrightarrow f$ συνεχής στο 0.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=0$, άρα ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f.

Εστω $\lambda<0$. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τους άξονες και την ευθεία $x=\lambda$ είναι $E_1=-\int_\lambda^0 xe^x dx=(\lambda-1)e^\lambda+1$

$\lim\limits_{\lambda\to-\infty}(\lambda-1)e^\lambda=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\dfrac{\lambda-1}{e^{-\lambda}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-\lambda}}=0$, άρα $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}E_1=1$.

Εστω $k>0$. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τους άξονες και την ευθεία $x=k$ είναι $E_2=\int_0^k xe^{-x}dx=-(k+1)e^{-k}+1$.

$\lim\limits_{k\to+\infty}(k+1)e^{-k}=\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{k+1}{e^k}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{1}{e^k}=0$, άρα $\lim\limits_{k\to+\infty}E_2=1$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E(\Omega)=E_1+E_2=2$.

6.595. α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x-1}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0\Rightarrow y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη.

Αν $\lambda\in(0,1)$, τότε $E(\lambda)=\int_\lambda^1\dfrac{\ln x-1}{x}dx=\int_\lambda^1(\ln x-1)(\ln x-1)'\,dx\Leftrightarrow$

$$E(\lambda)=\left[\frac{(\ln x-1)^2}{2}\right]_\lambda^1=\frac{1}{2}-\frac{(\ln\lambda-1)^2}{2}=\frac{2n\lambda-\ln^2\lambda}{2}=\frac{\ln\lambda(2-\ln\lambda)}{2}.$$

Αν $\lambda>1$, τότε $E(\lambda)=\int_1^\lambda\dfrac{\ln x-1}{x}dx=-\int_\lambda^1\dfrac{\ln x-1}{x}dx=\dfrac{\ln\lambda(\ln\lambda-2)}{2}$.

β) i. $\lim\limits_{\lambda\to0}\left[\lambda^2\cdot E(\lambda)\right]=\lim\limits_{\lambda\to0}\left[\lambda^2\dfrac{\ln\lambda(2-\ln\lambda)}{2}\right]=\lim\limits_{\lambda\to0}\dfrac{2\ln\lambda-\ln^2\lambda}{\frac{2}{\lambda^2}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{\lambda\to0}\dfrac{\frac{2}{\lambda}-\frac{2\ln\lambda}{\lambda}}{-\frac{4}{\lambda^3}}=$

$$=\lim_{\lambda\to0}\frac{\ln\lambda-1}{\frac{2}{\lambda^2}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{\lambda\to0}\frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{4}{\lambda^3}}=\lim_{\lambda\to0}\frac{-\lambda^2}{4}=0$$

ii. $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[\lambda^2\cdot E(\lambda)\right]=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[\lambda^2\dfrac{\ln\lambda(\ln\lambda-2)}{2}\right]=+\infty$.

6.596. α) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0=f(0)$

β) $\int_\lambda^1 x\ln x\,dx=\int_\lambda^1\left(\dfrac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx=\left[\dfrac{x^2}{2}\ln x\right]_\lambda^1-\int_\lambda^1\dfrac{x^{\cancel{2}}}{2}\dfrac{1}{\cancel{x}}dx=$

$$=-\frac{\lambda^2\ln\lambda}{2}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_\lambda^1=\frac{\lambda^2(1-2\ln\lambda)-1}{4},\ \lambda\in(0,1)$$

$$E(\Omega)=\lim_{\lambda\to0^+}\left(-\int_\lambda^1 x\ln x\,dx\right)=\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\lambda^2(2\ln\lambda-1)+1}{4}=\frac{1}{4}\ \text{γιατί}$$

$$\lim_{\lambda\to0^+}\lambda^2(2\ln\lambda-1)=\lim_{\lambda\to0^+}\frac{2\ln\lambda-1}{\frac{1}{\lambda^2}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\frac{2}{\lambda}}{-\frac{2}{\lambda^3}}=\lim_{\lambda\to0^+}\left(-\lambda^2\right)=0$$

6.597. $y^2=9x\Leftrightarrow y=\pm3\sqrt{x}$.

$$E_1=\int_0^1 3\sqrt{x}\,dx=\left[3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{4}{3},\ E(\Omega)=2E_1=\frac{8}{3}.$$

6.598. Είναι $F'(x)=f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}>0 \Rightarrow F\uparrow \mathbb{R}$, $0\le x\le 1 \overset{F\uparrow}{\Rightarrow} F(x)\le F(1)=0$

$$E(\Omega)=-\int_0^1 F(x)dx=-\int_0^1 x'F(x)dx=-\left[xF(x)\right]_0^1+\int_0^1 xF'(x)dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx=\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$$

6.599. $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1 4dx \underset{\substack{x=0\Rightarrow u=1\\ x=1\Rightarrow u=0}}{\overset{\substack{1-x=u\\ dx=-du}}{\Leftrightarrow}} \int_0^1 f(x)dx-\int_1^0 f(u)du=4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^1 f(x)dx=4 \Leftrightarrow E(\Omega)=2$$

6.600. $f''(x)+f''(4-x)=2 \Leftrightarrow f'(x)-f'(4-x)=2x+c_1$

Για $x=2$ είναι $f'(2)-f'(2)=4+c_1 \Leftrightarrow c_1=-4$,

άρα $f'(x)-f'(4-x)=2x-4 \Leftrightarrow f(x)+f(4-x)=x^2-4x+c_2$

Για $x=2$ είναι $f(2)+f(2)=-4+c_2 \Leftrightarrow c_2=6$,

άρα $f(x)+f(4-x)=x^2-4x+6$, $x\in\mathbb{R}$.

$$\int_1^3 f(x)dx+\int_1^3 f(4-x)dx=\int_1^3\left(x^2-4x+6\right)dx \underset{\substack{x=1\Rightarrow u=3\\ x=3\Rightarrow u=1}}{\overset{\substack{4-x=u\\ dx=-du}}{\Leftrightarrow}}$$

$$\int_1^3 f(x)dx-\int_3^1 f(u)du=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+6x\right]_1^3 \Leftrightarrow 2\int_1^3 f(x)dx=\frac{14}{3} \Leftrightarrow 2E(\Omega)=\frac{14}{3} \Leftrightarrow E(\Omega)=\frac{7}{3}.$$

6.601. **α)** $\displaystyle\int_0^4 f'(x)dx=6-2f(0) \Leftrightarrow \left[f(x)\right]_0^4=6-2f(0) \Leftrightarrow f(4)-f(0)=6-2f(0) \Leftrightarrow f(4)=6-f(0)$

Για $x=4$ είναι $f(4)=\lambda-f(0) \Leftrightarrow 6-\cancel{f(0)}=\lambda-\cancel{f(0)} \Leftrightarrow \lambda=6$

β) $\displaystyle f(x)=6-f(4-x) \Rightarrow \int_0^4 f(x)dx=\int_0^4 6dx-\int_0^4 f(4-x)dx \underset{\substack{x=0\Rightarrow u=4\\ x=4\Rightarrow u=0}}{\overset{\substack{4-x=u\\ dx=-du}}{\Leftrightarrow}}$

$$\int_0^4 f(x)dx=24+\int_4^0 f(u)du \Leftrightarrow \int_0^4 f(x)dx=24-\int_0^4 f(x)dx \Leftrightarrow$$

$2\displaystyle\int_0^4 f(x)dx=24 \Leftrightarrow \int_0^4 f(x)dx=12$, άρα $E(\Omega)=12$.

6.602. $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^1 f(x)f(t)dx\right)dt=\int_0^1 f(u)du \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)\left(\int_0^1 f(x)dx\right)dt=\int_0^1 f(u)du \Leftrightarrow$

$$\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 f(u)du \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$E^2(\Omega)=E(\Omega) \Leftrightarrow E^2(\Omega)-E(\Omega)=0 \Leftrightarrow E(\Omega)\left(E(\Omega)-1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$E(\Omega)=1$ ή $E(\Omega)=0$ που είναι αδύνατο.

6.603. **α)** $f'(x)\sigma\upsilon\nu x+f(x)\eta\mu x=f(x)\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)\sigma\upsilon\nu x+f(x)\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\dfrac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=ce^x\Leftrightarrow f(x)=ce^x\sigma\upsilon\nu x.$$

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=e^{\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow ce^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{2}=e^{\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow c=2$, άρα $f(x)=2e^x\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

β) $E(\Omega)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}2\sigma\upsilon\nu x\left(e^x\right)'dx=\left[2\sigma\upsilon\nu x e^x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}2\eta\mu x e^x dx\Leftrightarrow$

$$E(\Omega)=e^{\frac{\pi}{3}}-2+\int_0^{\frac{\pi}{3}}2\eta\mu x\left(e^x\right)'dx=e^{\frac{\pi}{3}}-2+\left[2\eta\mu x e^x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}2\sigma\upsilon\nu x e^x dx\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=e^{\frac{\pi}{3}}-2+\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{3}}-E(\Omega)\Leftrightarrow 2E(\Omega)=e^{\frac{\pi}{3}}\left(1+\sqrt{3}\right)-2\Leftrightarrow E(\Omega)=\frac{e^{\frac{\pi}{3}}\left(1+\sqrt{3}\right)-2}{2}$$

6.604. **α)** $F(x)=\int_0^x t\left(\int_1^{x^2}e^x f(u)du\right)dt=\int_0^x e^x t\left(\int_1^{x^2}f(u)du\right)dt=e^x\int_1^{x^2}f(u)du\int_0^x tdt\Leftrightarrow$

$$F(x)=e^x\int_1^{x^2}f(u)du\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x=\frac{x^2e^x}{2}\int_1^{x^2}f(u)du.$$

β) $F(2)=10e^2\Leftrightarrow 2\cancel{e^2}\int_1^4 f(u)du=10\cancel{e^2}\Leftrightarrow\int_1^4 f(x)dx=5\Leftrightarrow E(\Omega)=5.$

6.605. $f(x)=x-\int_1^x\dfrac{xf(t)}{t}dt\Leftrightarrow f(x)=x-x\int_1^x\dfrac{f(t)}{t}dt\overset{x\neq0}{\Leftrightarrow}\dfrac{f(x)}{x}=1-\int_1^x\dfrac{f(t)}{t}dt\quad(1)$. Άρα

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(1-\int_1^x\frac{f(t)}{t}dt\right)'\Leftrightarrow\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=-\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=-xf(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xf'(x)=(x+1)f(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=1+\frac{1}{x}\Leftrightarrow\left(\ln f(x)\right)'=\left(x+\ln x\right)'\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ln f(x)=x+\ln x+c\Leftrightarrow f(x)=e^{x+\ln x+c}=xe^xe^c$$

Η (1) για $x=1$ γίνεται $f(1)=1$, άρα

$ee^c=1\Leftrightarrow 1+c=0\Leftrightarrow c=-1$ και $f(x)=xe^xe^{-1}=xe^{x-1}$, $x>0$.

$$E(\Omega)=\int_1^2 xe^{x-1}dx=\int_1^2 x\left(e^{x-1}\right)'dx=\left[xe^{x-1}\right]_1^2-\int_1^2 e^{x-1}dx\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=2e-1-\left[e^{x-1}\right]_1^2=2e-1-e+1=e.$$

6.606. Θέτουμε $xt=u\Rightarrow xdt=du$. Για $t=0\Rightarrow u=0$ και για $t=1\Rightarrow u=x$.

$$f(x)=1-3\int_0^1 x^3t^2f(xt)dt\Leftrightarrow f(x)=1-3\int_0^1 x^2t^2f(xt)xdt\Leftrightarrow f(x)=1-3\int_0^x u^2f(u)du\quad(1)$$

$$f'(x)=\left(1-3\int_0^x u^2f(u)du\right)'=-3x^2f(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=3x^2\Leftrightarrow\left(\ln f(x)\right)'=\left(x^3\right)'\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ln f(x)=x^3+c\Leftrightarrow f(x)=e^{x^3+c}.$$

Η (1) για $x=0$ γίνεται $f(0)=1$, άρα $e^c=1\Leftrightarrow c=0$, οπότε $f(x)=e^{x^3}$, $x\in\mathbb{R}$.

$$E(\Omega)=\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 x^2e^{x^3}dx=\left[\frac{1}{3}e^{x^3}\right]_0^1=\frac{e-1}{3}$$

6.607. **α)** Εστω $g(x)=f(x)-x^2$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $g'(x)=f'(x)-2x$, $g''(x)=f''(x)-2>0\Rightarrow g'\uparrow\mathbb{R}$

Για κάθε $x>0$ είναι $g'(x)>g'(0)=0\Rightarrow g\uparrow[0,+\infty)$.

Για κάθε $x\geq 0$ είναι $g(x)\geq g(0)=1\Leftrightarrow f(x)\geq x^2+1$.

Επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$ είναι:

$$\int_0^1 f(x)dx>\int_0^1(x^2+1)dx=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}\Leftrightarrow E>\frac{4}{3}$$

β) $$\int_0^\lambda f(x)dx>\int_0^\lambda(x^2+1)dx=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^\lambda=\frac{\lambda^3}{3}+\lambda\Leftrightarrow E(\lambda)>\frac{\lambda^3}{3}+\lambda$$

Είναι $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{\lambda^3}{3}+\lambda\right)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^3}{3}=+\infty$, άρα και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=+\infty$.

γ) Είναι $f(x)\geq x^2+1\overset{x>0}{\Leftrightarrow} xf(x)\geq x^3+x$. Επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$ είναι:

$$\int_0^2 xf(x)dx>\int_0^2(x^3+x)dx\Leftrightarrow\int_0^2 g(x)dx>\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_0^2=4+2=6\Leftrightarrow E_1>6$$

6.608. Από το ΘΜΤ υπάρχουν $\xi_1\in(0,x)$, $x\in(0,3)$ και $\xi_2\in(x,3)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{f(x)-1}{x}\text{ και }f(\xi_2)=\frac{f(3)-f(x)}{3-x}=\frac{7-f(x)}{3-x}$$

$$\xi_1<\xi_2\overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow}f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Leftrightarrow\frac{f(x)-1}{x}>\frac{7-f(x)}{3-x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3f(x)-\cancel{xf(x)}-3+x>7x-\cancel{xf(x)}\Leftrightarrow f(x)>2x+1.$$

$$\int_1^2 f(x)dx>\int_1^2(2x+1)dx\Leftrightarrow E(\Omega)>\left[x^2+x\right]_1^2=4+2-1-1=4.$$

6.609. Εστω $g(x)=f(x)-2x$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $g'(x)=f'(x)-2<0\Rightarrow g\downarrow\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\geq 0$ είναι $g(x)\leq g(0)=1\Leftrightarrow f(x)-2x\leq 1\Leftrightarrow f(x)\leq 2x+1$.

Επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$ είναι:

$$\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1(2x+1)dx\Leftrightarrow E(\Omega)<\left[x^2+x\right]_0^1=2$$

6.610. **α)** $f'(x)-2f(x)>2\Leftrightarrow e^{-2x}f'(x)-2e^{-2x}f(x)>2e^{-2x}$. Εστω $g(x)=f(x)e^{-2x}+e^{-2x}$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $g'(x)=e^{-2x}f'(x)-2e^{-2x}f(x)-2e^{-2x}>0\Rightarrow g\uparrow\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\geq 0$ είναι

$$g(x)\geq g(0)\Leftrightarrow f(x)e^{-2x}+e^{-2x}\geq 2\Leftrightarrow f(x)+1\geq 2e^{2x}\Leftrightarrow f(x)\geq 2e^{2x}-1,\ x\in\mathbb{R}.$$

β) $\int_0^{\lambda} f(x)dx \geq \int_0^{\lambda}\left(2e^{2x}-1\right)dx \Leftrightarrow E(\lambda) \geq \left[e^{2x}-x\right]_0^{\lambda} = e^{2\lambda}-\lambda-1$

Είναι $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(e^{2\lambda}-\lambda-1\right) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[\lambda\left(\frac{e^{2\lambda}}{\lambda}-1-\frac{1}{\lambda}\right)\right] = +\infty$, γιατί $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{e^{2\lambda}}{\lambda} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{2e^{2\lambda}}{1} = +\infty$,

οπότε και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda) = +\infty$.

6.611. α) $f'(x) = \left(\int_1^x \frac{t}{f(t)}dt+2\right)' = \frac{x}{f(x)} \Leftrightarrow f'(x)f(x) = x \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)' = \left(x^2\right)' \Leftrightarrow f^2(x) = x^2+c$.

Επειδή $f(1) = \int_1^1 \frac{t}{f(t)}dt+2 = 2$, είναι $2^2 = 1^2+c \Leftrightarrow c = 3$, άρα $f^2(x) = x^2+3$, $x\in\mathbb{R}$.

Επειδή $f(x)\neq 0$ και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή $f(1) = 2 > 0$ είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $f(x) = \sqrt{x^2+3}$, $x\in\mathbb{R}$

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$ και $f(-x) = \sqrt{(-x)^2+3} = \sqrt{x^2+3} = f(x)$

γ) $E(\Omega) = \int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx$

Είναι $\int_{-2}^{0} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(-x)dx \underset{\substack{x=-2\Rightarrow u=2\\ x=0\Rightarrow u=0}}{\overset{\substack{-x=u\\ dx=-du}}{=}} -\int_2^0 f(u)du = \int_0^2 f(x)dx$

6.612. α) $f'(x) = 12x^2+2 > 0 \Rightarrow f\uparrow\mathbb{R} \Rightarrow f$ 1–1

β) $E(\Omega) = \int_{-6}^{0}\left|f^{-1}(x)\right|dx$.

$f^{-1}(x) \geq 0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}(x)\right) \geq f(0) \Leftrightarrow x \geq -6$, οπότε $E(\Omega) = \int_{-6}^{0} f^{-1}(x)dx$.

Θέτουμε $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$ και $dx = f'(u)du$.

Για $x=-6$ είναι $f(u) = -6 = f(0) \Leftrightarrow u = 0$ και για $x = 0$ είναι $f(u) = 0 = f(1) \Leftrightarrow u = 1$.

Άρα $E(\Omega) = \int_0^1 uf'(u)du = \left[uf(u)\right]_0^1 - \int_0^1 f(u)du = \cancel{f(1)}^{\,0} - \int_0^1\left(4u^3+2u-6\right)du =$

$= -\left[u^4+u^2-6u\right]_0^1 = 4$

6.613. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^{x^2}+x\cdot 2xe^{x^2} = e^{x^2}\left(1+2x^2\right) > 0$,

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και 1–1 και αντιστρέφεται.

β) $f^{-1}(x) > 0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}(x)\right) > f(0) \Leftrightarrow x > 0$ και $f^{-1}(x) < 0 \Leftrightarrow x < f(0) = 0$.

γ) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \int_0^e f^{-1}(x)dx$. Θέτουμε $f^{-1}(x) = u$.

Τότε $x = f(u)$ και $dx = f'(u)du$.

Για $x = 0$ είναι $f(u) = 0 = f(0) \Leftrightarrow u = 0$ και για $x = e$ είναι $f(u) = e = f(1) \Leftrightarrow u = 1$.

Άρα $E=\int_0^1 uf'(u)du=\left[uf(u)\right]_0^1-\int_0^1 f(u)du=f(1)-\int_0^1 ue^{u^2}du \Leftrightarrow$

$E=e-\left[\frac{1}{2}e^{u^2}\right]_0^1=e-\frac{e-1}{2}=\frac{e+1}{2}$

6.614. **α)** $\left(4f^3(x)+2f(x)-6+x\right)'=0 \Leftrightarrow 12f^2(x)f'(x)+2f'(x)+1=0 \Leftrightarrow$

$f'(x)=-\frac{1}{12f^2(x)+2}<0 \Rightarrow f \downarrow \mathbb{R} \Rightarrow f\ \ 1\text{–}1.$

β) $4f^3(x)+2f(x)-6+x=0 \Leftrightarrow f(x)\left(4f^2(x)+2\right)=6-x$. Επειδή $4f^2(x)+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\leq 6$. Επειδή $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$, έχουμε:

$4f^3(x)+2f(x)-6+x=0 \Rightarrow 4y^3+2y-6+f^{-1}(y)=0 \Leftrightarrow f^{-1}(y)=-4y^3-2y+6$

Είναι $E(\Omega)=\int_0^6 f(x)dx$. Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)=-4y^3-2y+6$ και $dx=\left(-12y^2-2\right)dy$. Για $x=0$ είναι $y=1$ και για $x=6$ είναι $y=0$,

άρα $E(\Omega)=\int_1^0 y\left(-12y^2-2\right)dy=\int_0^1\left(12y^3+2y\right)dy=\left[3y^4+y^2\right]_0^{1}=4$.

6.615. **α)** $f'(x)=\left(\int_0^x \frac{1}{3f^2(t)+1}dt\right)' \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{3f^2(x)+1} \Leftrightarrow 3f'(x)3f^2(x)+f'(x)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(f^3(x)+f(x)\right)'=(x)' \Leftrightarrow f^3(x)+f(x)=x+c$.

Είναι $f(0)=0 \Leftrightarrow c=0$, άρα $f^3(x)+f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$.

β) $f'(x)=\frac{1}{3f^2(x)+1}>0 \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R} \Rightarrow f\ \ 1\text{–}1$

$f(x)=y \Leftrightarrow y^3+y=x \Leftrightarrow f^{-1}(y)=y^3+y$, άρα $f^{-1}(x)=x^3+x$

γ) $f(x)\left(f^2(x)+1\right)=x>0 \Rightarrow f(x)>0$. Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E(\Omega)=\int_0^2 f(x)dx$.

Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)=y^3+y$ και $dx=\left(3y^2+1\right)dy$.

Για $x=0 \Rightarrow y=0$ και για $x=2 \Rightarrow y=1$.

Τότε $E(\Omega)=\int_0^1 y\left(3y^2+1\right)dy=\left[\frac{3}{4}y^4+\frac{1}{2}y^2\right]_0^1=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$.

6.616. $6f'(x)-g(x)f^2(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=6\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

$$E(\Omega)=\int_0^2 g(x)dx=\int_0^2 6\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\left[-\frac{6}{f(x)}\right]_0^2=-\frac{6}{f(2)}+\frac{6}{f(0)}=4$$

6.617. **α)** $h(x)=f(x)-g(x)=x^3+x-2=(x-1)\left(x^2+x+2\right)$

Για κάθε $x<1$ είναι $h(x)<0$ και για κάθε $x>1$ είναι $h(x)>0$.

$$E(\Omega)=-\int_{-1}^1\left(x^3+x-2\right)dx+\int_1^2\left(x^3+x-2\right)dx=\frac{19}{4}$$

β) $h(x)=f(x)-g(x)=2x^2-6x+4=2(x-1)(x-2)<0 \quad \forall x\in(1,2)$

$E(\Omega)=-\int_1^2\left(2x^2-6x+4\right)dx=\dfrac{1}{3}$

γ) $h(x)=f(x)-g(x)=\left(x^2-x\right)e^x=x(x-1)e^x<0 \quad \forall x\in(0,1)$

$E(\Omega)=-\int_1^2\left(x^2-x\right)e^x dx=-\left[\left(x^2-x\right)e^x\right]_1^2+\int_1^2(2x-1)e^x dx=$

$=-2e^2+\left[(2x-1)e^x\right]_1^2-\int_1^2 2e^x dx=3e^2+e$

δ) $h(x)=f(x)-g(x)=2x^2-6x-8=2(x+1)(x-4)<0 \quad \forall x\in(-1,4)$

$E(\Omega)=-\int_{-1}^4\left(2x^2-6x-8\right)dx=\dfrac{125}{3}$

6.618. **α)** $h(x)=f(x)-g(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\,,\ x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

$h'(x)=\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=-x\eta\mu x<0\Rightarrow h\downarrow\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

$0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\overset{h\downarrow}{\Leftrightarrow} h(0)\ge h(x)\ge h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2}\le h(x)\le 0$

$E(\Omega)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(x)dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\eta\mu x)'\,dx-\left[\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$

$=-\left[x\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x dx+1=2-\dfrac{\pi}{2}$

β) $h(x)=f(x)-g(x)=\ln x-2x-2\,,\ x\in[1,e]$.

$h'(x)=\dfrac{1}{x}-2=\dfrac{1-2x}{x}<0\Rightarrow h\downarrow[1,e]$, άρα $h(1)\ge h(x)\ge h(e)\Leftrightarrow -2e-1\le h(x)\le 0$.

$E(\Omega)=-\int_1^e h(x)dx=-\int_1^e(\ln x-2x-2)dx=-\int_1^e \ln x(x)'dx+\left[x^2+2x\right]_1^e\Leftrightarrow$

$E(\Omega)=\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e\dfrac{1}{x}xdx+e^2+2e-1-2=e-e+1+e^2+2e-3=e^2+2e-2$

γ) $h(x)=f(x)-g(x)=\left(x^2-x\right)e^x\le 0 \quad \forall x\in[0,1]$

$E(\Omega)=-\int_0^1\left(x^2-x\right)e^x dx=-\left[\left(x^2-x\right)e^x\right]_0^1+\int_0^1(2x-1)e^x dx\Leftrightarrow$

$E(\Omega)=\left[(2x-1)e^x\right]_0^1-\int_0^1 2e^x dx=3-e$

δ) $h(x)=f(x)-g(x)=2e^x-x^2-2x-2\,,\ x\in[-1,1]$.

$h'(x)=2e^x-2x-2,\ h''(x)=2e^x-2\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0$.

Για κάθε $x\in(-1,0)$ είναι $h'(x)<0\Rightarrow h\downarrow[-1,0]$ και

για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $h'(x)>0\Rightarrow h\uparrow[0,1]$.

Η h έχει ελάχιστο το $h(0)=0$, οπότε $h(x)\ge h(0)=0 \quad \forall x\in[-1,1]$, άρα

$E(\Omega)=\int_{-1}^1 h(x)dx=\int_{-1}^1\left(2e^x-x^2-2x-2\right)dx=\left[2e^x-\dfrac{x^3}{3}-x^2-2x\right]_{-1}^1=\dfrac{6e^2-14e-6}{3e}$

ε) $h(x)=f(x)-g(x)=2e^{-x}+x^2-2+2\eta\mu x$, $x\in[0,\pi]$.

$h'(x)=-2e^{-x}+2x+2\sigma\upsilon\nu x$, $h''(x)=2e^{-x}+2-2\eta\mu x=2e^{-x}+2(1-\eta\mu x)>0\Rightarrow h'\uparrow[0,\pi]$.

Για κάθε $0\le x\le\pi \overset{h'\uparrow}{\Leftrightarrow} h'(0)\le h'(x)\le h'(\pi)\Leftrightarrow 0\le h'(x)\le -2e^{-\pi}+2\pi-2\Rightarrow h\uparrow[0,\pi]$

Άρα $h(0)\le h(x)\le h(\pi)\Leftrightarrow 0\le h(x)\le 2e^{-\pi}+\pi^2-2$.

Είναι $E(\Omega)=\int_0^{\pi}h(x)dx=\int_0^{\pi}\left(2e^{-x}+x^2-2+2\eta\mu x\right)dx=-2e^{-\pi}+\dfrac{\pi^3}{3}-2\pi+6$

6.619. $f''(x)=g''(x)+e^x\Leftrightarrow\left(f'(x)\right)'=\left(g'(x)+e^x\right)'\Leftrightarrow f'(x)=g'(x)+e^x+c$.

Για $x=0$ είναι $f'(0)=g'(0)+1+c\Leftrightarrow c=0$ και

$f'(x)=g'(x)+e^x\Leftrightarrow f'(x)=\left(g(x)+e^x\right)'\Leftrightarrow f(x)=g(x)+e^x+c_1$

Για $x=0$ είναι $f(0)=g(0)+1+c_1\Leftrightarrow c_1=-1$.

Άρα $f(x)-g(x)=e^x-1$. Εστω $h(x)=f(x)-g(x)=e^x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0$

$E(\Omega)=\int_0^1 h(x)dx=\int_0^1\left(e^x-1\right)dx=e-2$

6.620. Είναι $f(x)=6x^2+2x\int_0^1 g(x)dx+10$, άρα και

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(6x^2+2x\int_0^1 g(x)dx+10\right)dx\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx=\left[2x^3+x^2\int_0^1 g(x)dx+10x\right]_0^1\Leftrightarrow$

$\int_0^1 f(x)dx=2+\int_0^1 g(x)dx+10\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 g(x)dx=12\Leftrightarrow$

$\int_0^1\left(f(x)-g(x)\right)dx=12\Leftrightarrow E(\Omega)=12$.

6.621. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0$, άρα η $y=x$

είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Εστω $h(x)=f(x)-g(x)=-\dfrac{1}{x}$, $x>0$. Είναι $E(\Omega)=-\int_e^{e^2}h(x)dx=\int_e^{e^2}\dfrac{1}{x}dx=\left[\ln x\right]_e^{e^2}=2-1=1$

6.622. **α)** $f'(x)=\dfrac{1}{x}\left(f(x)-x^2e^{-x}\right)\Leftrightarrow xf'(x)=f(x)-x^2e^{-x}\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=-x^2e^{-x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=-e^{-x}\Leftrightarrow\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\left(e^{-x}\right)'\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x}=e^{-x}+c\Leftrightarrow f(x)=x\left(e^{-x}+c\right)$

$f(1)=\dfrac{1}{e}+1\Leftrightarrow e^{-1}+c=\dfrac{1}{e}+1\Leftrightarrow c=1$ και $f(x)=x\left(e^{-x}+1\right)$, $x>0$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+1\right)=1$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(e^{-x}+1\right)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$, άρα η $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f.

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x\left(e^{-x}+1\right)=0$ άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

γ) Εστω ευθεία $x=k$, $k>0$. Είναι

$$\int_1^k |f(x)-x|dx=\int_1^k xe^{-x}dx=\left[-xe^{-x}\right]_1^k+\int_1^k e^{-x}dx=-ke^{-k}+e^{-1}-\left[e^{-x}\right]_1^k=-\frac{k+1}{e^k}+\frac{2}{e}$$

$$E(\Omega)=\lim_{k\to+\infty}\left(-\frac{k+1}{e^k}+\frac{2}{e}\right)=\frac{2}{e}, \text{ γιατί } \lim_{k\to+\infty}\frac{k+1}{e^k}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{e^k}=0.$$

6.623. **α)** $f'(x)=2e^{2x}+2>0\Rightarrow f\uparrow\mathbb{R}\Rightarrow f$ 1–1

β) Εστω $g(x)=f(x)-x=e^{2x}+x-1$. Είναι $g'(x)=2e^{2x}+1>0\Rightarrow g\uparrow\mathbb{R}$.

Επειδή $g(0)=0$ το $x=0$ είναι το μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την $y=x$.

Για $x>0\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(0)\Leftrightarrow f(x)>x$ και λόγω συμμετρίας είναι και $f(x)>f^{-1}(x)$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E(\Omega)=\int_0^{e^2+1}\left(f(x)-f^{-1}(x)\right)dx=\int_0^{e^2+1}f(x)dx-\int_0^{e^2+1}f^{-1}(x)dx$

Θέτουμε $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du=\left(2e^{2u}+2\right)du$.

Για $x=0\Rightarrow f(u)=0=f(0)\Leftrightarrow u=0$ και για $x=e^2+1\Rightarrow f(u)=e^2+1=f(1)\Leftrightarrow u=1$

$$E(\Omega)=\int_0^{e^2+1}\left(e^{2x}+2x-1\right)dx-\int_0^1 u\left(2e^{2u}+2\right)du=...=\frac{1}{2}e^{2e^2+2}+e^4+\frac{1}{2}e^2+2$$

6.624. **α)** $f'(x)=1-\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},2\pi\right)$, άρα $f\uparrow(0,2\pi)\Rightarrow f$ 1–1.

β) Λόγω συμμετρίας το ζητούμενο εμβαδό είναι διπλάσιο από το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τη $y=x$.

$f(x)-x=\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$ ή $x=\frac{3\pi}{2}$.

$$E(\Omega)=2\int_0^{2\pi}|\sigma\upsilon\nu x|dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x dx-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x dx+2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sigma\upsilon\nu x dx=8$$

6.625. Επειδή $f(x)\neq x$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ και η $f(x)-x$ είναι συνεχής,

θα είναι $f(x)>x$ ή $f(x)<x$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

Εστω $f(x)>x$, τότε λόγω συμμετρίας είναι $f(x)>x>f^{-1}(x)$, οπότε

$$E=\int_\alpha^\beta\left(f(x)-f^{-1}(x)\right)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta f^{-1}(x)dx$$

Θέτουμε $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$.

Για $x=\alpha\Rightarrow f(u)=\alpha=f(\alpha)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}u=\alpha$ και για $x=\beta\Rightarrow f(u)=\beta=f(\beta)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}u=\beta$

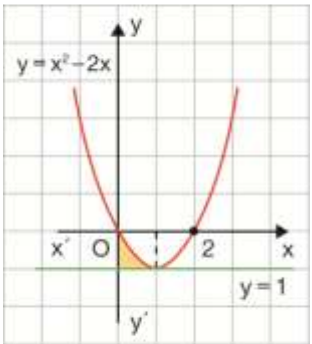
Οπότε $E=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta f^{-1}(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta uf'(u)du\Leftrightarrow$

$$E=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\left[uf(u)\right]_\alpha^\beta+\int_\alpha^\beta f(u)du=2\int_\alpha^\beta f(x)dx-\left(\beta^2-\alpha^2\right)\Leftrightarrow$$

$$E=2\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx-2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\alpha}^{\beta}=2\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx-2\int_{\alpha}^{\beta}xdx=2\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-x)dx.$$

Όμοια αν $f(x)<x$.

6.626. $E(\Omega)=\int_0^1(x^2-2x+1)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_0^1=\frac{1}{3}$



6.627. $f'(x)=\frac{2}{x}$, $f'(1)=2$. Η εφαπτομένη έχει εξίσωση

$y-f(1)=f(1)(x-1)\Leftrightarrow y=2x+1$

Το ζητούμενο χωρίο αποτελείται από το τρίγωνο ΟΑΒ και από το χωρίο E_1.

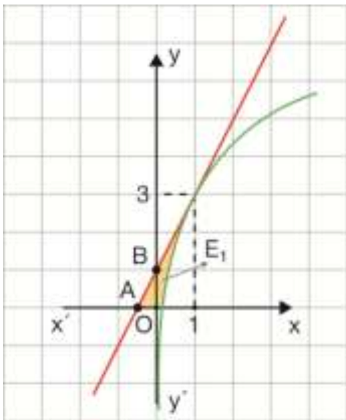
$(OAB)=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{4}$. Αν $k\in(0,1)$, τότε

$$\int_k^1(y-f(x))dx=\int_k^1(2x-2\ln x-2)dx=2k\ln k-k^2+1$$

$$E_1=\lim_{k\to 0^+}\int_k^1(y-f(x))dx=\lim_{k\to 0^+}(2k\ln k-k^2+1)=1$$

γιατί $\lim\limits_{k\to 0^+}k\ln k=\lim\limits_{k\to 0^+}\frac{\ln k}{\frac{1}{k}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{k\to 0^+}\frac{\frac{1}{k}}{-\frac{1}{k^2}}=\lim\limits_{k\to 0^+}(-k)=0$

$$E(\Omega)=(OAB)+E_1=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$$

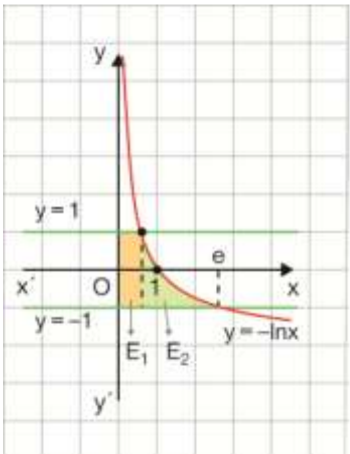


6.628. $E(\Omega)=E_1+E_2=2\cdot 1+\int_{\frac{1}{e}}^{e}(-\ln x+1)dx\Leftrightarrow$

$$E(\Omega)=2-\int_{\frac{1}{e}}^{e}(x)'\ln xdx+e-\frac{1}{e}\Leftrightarrow$$

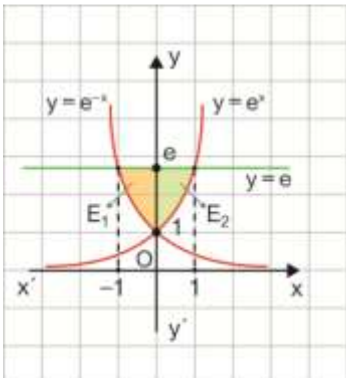
$$E(\Omega)=2+e-\frac{1}{e}-[x\ln x]_{\frac{1}{e}}^{e}+\int_{\frac{1}{e}}^{e}x\frac{1}{x}dx\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=2+e-\cancel{\frac{1}{e}}+\cancel{\frac{1}{e}}+\cancel{e}-\cancel{e}+\frac{1}{e}=2+e+\frac{1}{e}$$



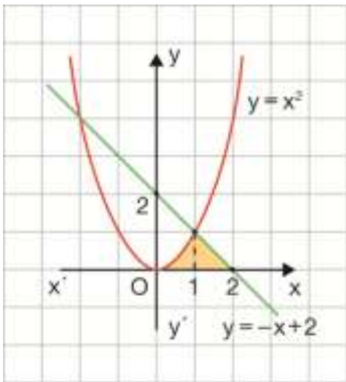
6.629. $E(\Omega)=E_1+E_2=\int_{-1}^{0}(e-e^{-x})+\int_0^1(e-e^x)dx\Leftrightarrow$

$$E(\Omega)=\left[ex+e^{-x}\right]_{-1}^{0}+\left[ex-e^x\right]_0^1=2$$



6.630. $E(\Omega)=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(-x+2)dx=$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2=\frac{4}{3}$$



6.631. $f'(x)=2x$. Εστω $M(x_0,f(x_0))$ σημείο της C_f.

Η εφαπτομένη στο Μ είναι η ευθεία

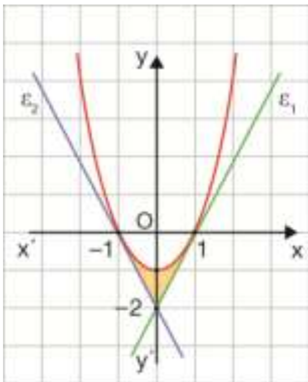
$\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=2x_0x-x_0^2-1.$

Για να διέρχεται από το Α, πρέπει $-2=-x_0^2-1\Leftrightarrow x_0=\pm1.$

Τότε $\varepsilon_1: y=2x-2$ και $\varepsilon_2: y=-2x-2$

$$E(\Omega)=\int_{-1}^0\left(x^2-1-(-2x-2)\right)dx+\int_0^1\left(x^2-1-(2x-2)\right)dx\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=\frac{2}{3}$$



6.632. **α)** Εστω $M(x_0,f(x_0))$. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει εξίσωση:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=\lambda e^{\lambda x_0}x+e^{\lambda x_0}(1-\lambda x_0)$$

Επειδή διέρχεται από το Ο, ισχύει: $e^{\lambda x_0}(1-\lambda x_0)=0\Leftrightarrow x_0=\frac{1}{\lambda}$.

Η εφαπτομένη είναι η $\varepsilon: y=\lambda ex$. $f'(x)=\lambda e^{\lambda x}$, $f''(x)=\lambda^2e^{\lambda x}>0\Rightarrow f$ κυρτή, οπότε η C_f βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E(\lambda)=\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\left(e^{\lambda x}-\lambda ex\right)dx=\left[\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}}-\left[\lambda e\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}}=\frac{e-2}{2\lambda}$

β) $\lim\limits_{\lambda\to0^+}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\frac{e-2}{2\lambda}=+\infty$ και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{e-2}{2\lambda}=0$

6.633. **α)** Αν $\lambda\in(0,1)$, τότε $E(\lambda)=\int_\lambda^1(-\ln x-\ln x)dx=\int_\lambda^1(-2\ln x)(x)'dx=2\lambda(\ln\lambda-1)+2$

Αν $\lambda>1$, τότε $E(\lambda)=\int_1^\lambda\left(\ln x-(-\ln x)\right)dx=-\int_\lambda^1 2\ln xdx=2\lambda(\ln\lambda-1)+2$

β) $\lim\limits_{\lambda\to0^+}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\left[2\lambda(\ln\lambda-1)+2\right]=2$,

γιατί $\lim\limits_{\lambda\to0^+}2\lambda(\ln\lambda-1)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\frac{\ln\lambda-1}{\frac{1}{2\lambda}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{\lambda\to0^+}\frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{1}{\lambda^2}}=\lim\limits_{\lambda\to0^+}(-\lambda)=0$

και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[2\lambda(\ln\lambda-1)+2\right]=+\infty$

6.634. α) $h(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{x^2}+2x$.

Αν $\lambda>1$, τότε $E(\lambda)=\int_1^\lambda h(x)dx=\int_1^\lambda\left(\frac{1}{x^2}+2x\right)dx=\left[-\frac{1}{x}+x^2\right]_1^\lambda=-\frac{1}{\lambda}+\lambda^2$

Αν $\lambda\in(0,1)$, τότε $E(\lambda)=\int_\lambda^1 h(x)dx=\frac{1}{\lambda}-\lambda^2$.

Τέλος αν $\lambda=1$, τότε $E(\lambda)=0$.

β) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}+\lambda^2\right)=+\infty$

6.635. α) $E(\lambda)=\int_\lambda^{\lambda+1}\left(2x+\frac{4}{x}\right)dx=\left[x^2+4\ln x\right]_\lambda^{\lambda+1}=(\lambda+1)^2+4\ln(\lambda+1)+\lambda^2-4\ln\lambda\Leftrightarrow$

$E(\lambda)=2\lambda+1+4\ln\frac{\lambda+1}{\lambda}=2\lambda+1+4\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)$

β) $E'(\lambda)=2+4\frac{1}{1+\frac{1}{\lambda}}\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right)=\frac{2(\lambda+2)(\lambda-1)}{\lambda(\lambda+1)}\geq 0\overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow}\lambda-1\geq 0\Leftrightarrow\lambda\geq 1.$

Για κάθε $\lambda\in(0,1)$ είναι $E'(\lambda)<0\Rightarrow E\downarrow(0,1]$ και για κάθε $\lambda>1$ είναι $E'(\lambda)>0\Rightarrow E\uparrow[1,+\infty)$. Το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο για $\lambda=1$.

6.636. α) $E_1=E_2\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta g(x)dx$. Έστω $h(x)=\int_\alpha^x f(t)dt-\int_\alpha^x g(t)dt$, $x\in[\alpha,\beta]$.

Επειδή οι f,g είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, η h είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, οπότε είναι και συνεχής στο διάστημα αυτό. Επειδή $h(\alpha)=0=h(\beta)$ από το Θ. Rolle υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,\beta):h'(\xi_1)=0\Leftrightarrow f(\xi_1)=g(\xi_1)$.

β) Από το ΘΜΤ για την h, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta):h'(\xi)=\frac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow f(\xi)-g(\xi)=\frac{E_1-E_2}{\beta-\alpha}$

6.637. α) $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x-1}}$, $f'(5)=1$, $f(5)=8$

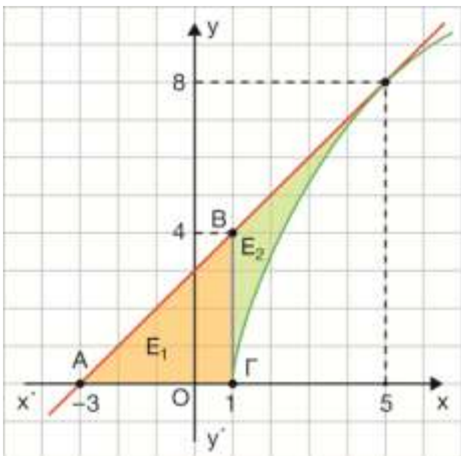
Η εφαπτομένη είναι η

$\varepsilon: y-f(5)=f'(5)(x-5)\Leftrightarrow y=x+3$

$E(\Omega)=(AB\Gamma)+\int_0^5(x+3-f(x))dx\Leftrightarrow$

$E(\Omega)=\frac{4\cdot 4}{2}+\int_0^5\left(x+3-4(x-1)^{\frac{1}{2}}\right)dx\Leftrightarrow$

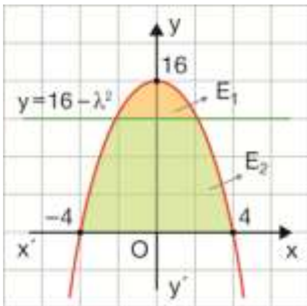
$E(\Omega)=8+\left[\frac{x^2}{2}+3x-\frac{8}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^5=8+\frac{8}{3}=\frac{32}{3}$



β) Επειδή $(AB\Gamma)=8>\frac{1}{2}E(\Omega)$, η ευθεία $x=\lambda$ θα βρίσκεται αριστερά της ευθείας ΒΓ, δηλαδή $\lambda\in(-3,1)$. Τότε

$$\frac{(\lambda+3)^2}{2}=\frac{16}{3}\Leftrightarrow\lambda+3=\pm\sqrt{\frac{32}{3}}\Leftrightarrow\lambda=3\pm\sqrt{\frac{32}{3}}$$. Επειδή $\lambda\in(-3,1)$ είναι $\lambda=3-\sqrt{\frac{32}{3}}$.

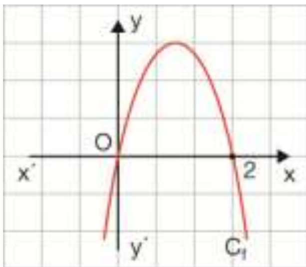
6.638. **α)** $E(\Omega)=\int_{-4}^{4}(16-x^2)dx=\left[16x-\frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{4}=\frac{256}{3}$



β) $E_1=\int_{-\lambda}^{\lambda}(16-x^2-16+\lambda^2)dx=\frac{1}{2}E(\Omega)=\frac{128}{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{4\lambda^3}{3}=\frac{128}{3}\Leftrightarrow\lambda^3=32\Leftrightarrow\lambda=\sqrt[3]{32}=2\sqrt[3]{4}$

6.639. **α)** Είναι $f(x)=2x-x^2=x(2-x)$.

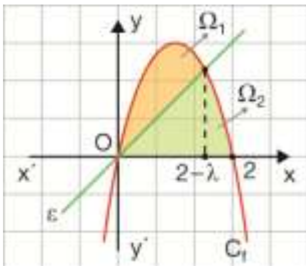


$f(x)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,2)$.

Για το εμβαδόν του χωρίου Ω έχουμε:

$$E(\Omega)=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 2x-x^2dx=\left[x^2\right]_0^2-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}.$$

β) Εστω $\varepsilon: y=\lambda x$ η ζητούμενη ευθεία. Για τα κοινά σημεία των ε, C_f, έχουμε: $2x-x^2=\lambda x\Leftrightarrow 2x-x^2-\lambda x=0\Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow x(2-\lambda-x)=0$ $x=0$ ή $x=2-\lambda$. Η ευθεία ε ορίζει στο Ω τα χωρία Ω_1 και Ω_2. Πρέπει $E(\Omega_1)=E(\Omega_2)=\frac{E(\Omega)}{2}=\frac{2}{3}$.

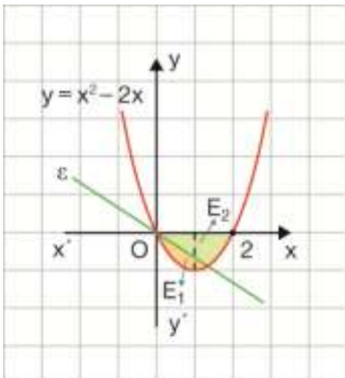
Για το εμβαδόν του χωρίου Ω_1, έχουμε:

$$E(\Omega_1)=\int_0^{2-\lambda}(f(x)-\lambda x)dx=\int_0^{2-\lambda}\left[(2-\lambda)x-x^2\right]dx\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega_1)=(2-\lambda)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2-\lambda}-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2-\lambda}=\frac{(2-\lambda)^3}{2}-\frac{(2-\lambda)^3}{3}=\frac{(2-\lambda)^3}{6}.$$

Είναι $\frac{(2-\lambda)^3}{6}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow(2-\lambda)^3=4\Leftrightarrow 2-\lambda=\sqrt[3]{4}\Leftrightarrow\lambda=2-\sqrt[3]{4}$. Άρα η ε έχει εξίσωση $y=(2-\sqrt[3]{4})x$.

6.640. **α)** $E(\Omega)=-\int_0^2 f(x)dx=-\int_0^2(x^2-2x)dx=\frac{4}{3}$



β) $x^2-2x=\lambda x\Leftrightarrow x(x-2-\lambda)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=\lambda+2$

Η ευθεία ε ορίζει στο Ω τα χωρία Ω_1 και Ω_2.

Πρέπει $E(\Omega_1)=E(\Omega_2)=\frac{E(\Omega)}{2}=\frac{2}{3}$.

Για το εμβαδόν του χωρίου Ω_1, έχουμε:

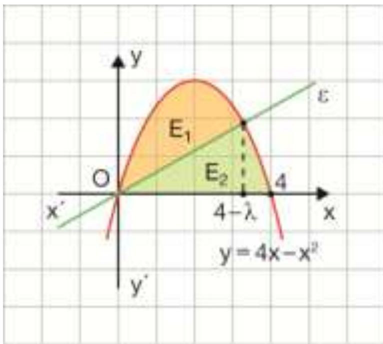
$$E(\Omega_1)=\int_0^{\lambda+2}(\lambda x-f(x))dx=\int_0^{\lambda+2}\left[-x^2+(2+\lambda)x\right]dx\Leftrightarrow$$

$\lambda = 2\sqrt[3]{3} - 2$

6.641. **α)** Για τα κοινά σημεία της C_f με τον $x'x$, έχουμε:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(4-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 4$.

Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,4)$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου Ω είναι:



$E(\Omega) = \int_0^4 f(x)dx = \int_0^4 (4x - x^2) \Leftrightarrow$

$E(\Omega) = \left[2x^2\right]_0^4 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$ τ.μ.

β) Εστω $y = \lambda x$ η ζητούμενη ευθεία. Για τα σημεία τομής της C_f και της ευθείας έχουμε:

$4x - x^2 = \lambda x \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 4 - \lambda$

Είναι $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{E_1 + E_2}{E_2} = \frac{1+3}{3} \Leftrightarrow \frac{E}{E_2} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow E_2 = \frac{3}{4}E$ και $E_1 = \frac{1}{4}E = \frac{1}{4} \cdot \frac{32}{3} = \frac{8}{3}$, όμως

$E_1 = \int_0^{4-\lambda} (4x - x^2 - \lambda x)dx = \int_0^{4-\lambda} \left[(4-\lambda)x - x^2\right]dx \Leftrightarrow$

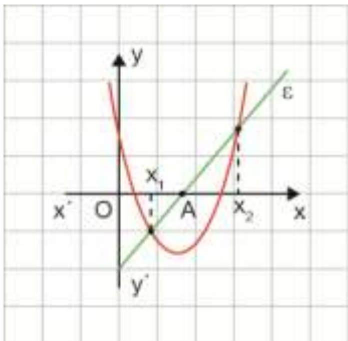
$E_1 = (4-\lambda)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{4-\lambda} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{4-\lambda} = \frac{(4-\lambda)^3}{2} - \frac{(4-\lambda)^3}{3} = \frac{(4-\lambda)^3}{6}$

άρα: $\frac{(4-\lambda)^3}{6} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow (4-\lambda)^3 = 16 \Leftrightarrow 4 - \lambda = \sqrt[3]{16} \Leftrightarrow \lambda = 4 - \sqrt[3]{16}$.

Οπότε, η ζητούμενη ευθεία είναι η $y = \left(4 - \sqrt[3]{16}\right)x$

6.642. Η ευθεία ε έχει εξίσωση:

$y - 0 = \lambda(x-2) \Leftrightarrow y = \lambda x - 2\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.



Για τα σημεία τομής των C_f, ε ισχύει:

$f(x) = \lambda x - 2\lambda \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = \lambda x - 2\lambda \Leftrightarrow$

$x^2 - (\lambda+4)x + 2\lambda + 3 = 0 \quad (1)$

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού ως προς x με

$\Delta = (\lambda+4)^2 - 4(2\lambda+3) = \lambda^2 + 4 > 0$ και οι ρίζες της είναι:

$x_1 = \frac{\lambda + 4 - \sqrt{\lambda^2+4}}{2}$ και $x_2 = \frac{\lambda + 4 + \sqrt{\lambda^2+4}}{2}$.

Εστω $x_1 < x_2$.

Για το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την ε, ισχύει:

$E(\lambda) = \int_{x_1}^{x_2} (\lambda x - 2\lambda - f(x))dx = -\int_{x_1}^{x_2} (x^2 - (\lambda+4)x + 2\lambda + 3)dx =$

$= -\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x_1}^{x_2} + (\lambda+4)\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} - (2\lambda+3)(x_2 - x_1) =$

$= -\frac{1}{3}(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) + \frac{\lambda+4}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - (2\lambda+3)(x_2 - x_1) =$

$$=\left(x_2-x_1\right)\frac{-2\left(x_2^2+x_2x_1+x_1^2\right)+3(\lambda+4)\left(x_2+x_1\right)-6(2\lambda+3)}{6}\quad (1).$$

Η εξίσωση (1) έχει άθροισμα ριζών $x_1+x_2=\lambda+4$ και γινόμενο ριζών $x_1x_2=2\lambda+3$.

Είναι $x_2-x_1=\dfrac{\lambda+4+\sqrt{\lambda^2+4}}{2}-\dfrac{\lambda+4-}{2}=\sqrt{\lambda^2+4}$ άρα

$\left(x_2-x_1\right)^2=\lambda^2+4\Leftrightarrow x_2^2-2x_2x_1+x_1^2=\lambda^2+4\Leftrightarrow x_2^2-2(2\lambda+3)+x_1^2=\lambda^2+4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_2^2+x_1^2=\lambda^2+4\lambda+10$.

Η (1) γίνεται: $E(\lambda)=\dfrac{1}{6}\sqrt{\lambda^2+4}\left[-2\left(\lambda^2+4\lambda+10+2\lambda+3\right)+3(\lambda+4)(\lambda+4)-6(2\lambda+3)\right]\Leftrightarrow$

$E(\lambda)=\dfrac{1}{6}\sqrt{\lambda^2+4}\left(\lambda^2+4\right)=\dfrac{1}{6}\left(\lambda^2+4\right)^{\frac{3}{2}}$.

Είναι $E'(\lambda)=\dfrac{1}{6}\dfrac{3}{2}\left(\lambda^2+4\right)^{\frac{1}{2}}2\lambda=\dfrac{\lambda\sqrt{\lambda^2+4}}{2}\Leftrightarrow$

$E'(\lambda)=0\Leftrightarrow\dfrac{\lambda\sqrt{\lambda^2+4}}{2}=0\Leftrightarrow\lambda=0$

Το $E(\lambda)$ γίνεται ελάχιστο για $\lambda=0$. Τότε η ε έχει εξίσωση $y=0$, δηλαδή είναι ο άξονας $x'x$.

Το εμβαδόν στη περίπτωση αυτή είναι $E(0)=\dfrac{4}{3}$ τ.μ.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

6.643. **α)** Πρέπει $x-t>0\Leftrightarrow x>t$.

$$f(2)=0\Leftrightarrow\frac{\ln(2-t)}{2-t}=0\Leftrightarrow\ln(2-t)=0\Leftrightarrow 2-t=1\Leftrightarrow t=1$$

β) Θέτουμε $x+t=u\Rightarrow dx=du$. Για $x=1\Rightarrow u=t+1$ και για $x=4\Rightarrow u=t+4$.

$$\int_1^4 f(x+t)dx=\int_{t+1}^{t+4}f(u)du=\int_{t+1}^{t+4}f(x)dx$$

γ) $\displaystyle\int_{t+1}^{t+\mu}f(x)dx=\int_1^{\mu}f(x+t)dx=2\Leftrightarrow\int_1^{\mu}\frac{\ln x}{x}dx=2\Leftrightarrow\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^{\mu}=2\Leftrightarrow\frac{\ln^2\mu}{2}=2\Leftrightarrow$

$\ln^2\mu=4\Leftrightarrow\ln\mu=\pm2\Leftrightarrow\mu=e^{\pm2}$. Όμως $\mu>1$, άρα $\mu=e^2$.

δ) $\displaystyle E(\Omega)=\int_{t+1}^{t+4}f(x)dx=\int_1^4 f(x+t)dt=\int_1^4\frac{\ln x}{x}dx=\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^4=\frac{\ln^2 4}{2}$

6.644. **α)** Επειδή $f(x)\geq2>0$ είναι $E(t)=\displaystyle\int_1^{\sqrt{t}}f(x)dx$, οπότε: $\displaystyle\int_1^{\sqrt{t}}f(x)dx=\sqrt{t}\ln^2 t+2$.

Άρα $\displaystyle\left(\int_1^{\sqrt{t}}f(x)dx\right)'=\left(\sqrt{t}\ln^2 t+2\right)'\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f\left(\sqrt{t}\right)\dfrac{1}{2\sqrt{t}}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\ln^2 t+\sqrt{t}\cdot2\ln t\cdot\dfrac{1}{t}\Leftrightarrow f\left(\sqrt{t}\right)=\ln^2 t+4\ln t$.

Εστω $\sqrt{t}=x$, $x\geq1$ τότε: $f(x)=\ln^2 x^2+4\ln x^2=(2\ln x)^2+8\ln x=4\ln^2 x+8\ln x$, $x\in[1,+\infty)$.

β) Είναι $f'(x)=\dfrac{8\ln x}{x}+\dfrac{8}{x}>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

γ) Είναι $f''(x)=-\frac{8\ln x}{x^2}<0$, άρα η f είναι κοίλη στο $[1,+\infty)$ και επομένως κάθε εφαπτομένη της C_f βρίσκεται πάνω από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

6.645. α) $g'(x)=\frac{g(x)}{x}\Leftrightarrow xg'(x)-g(x)=0\Leftrightarrow \frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow\left(\frac{g(x)}{x}\right)'=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{g(x)}{x}=c\Leftrightarrow g(x)=cx$. $g(1)=1\Leftrightarrow c=1$, άρα $g(x)=x$, $x>0$.

β) $f(x)=\int_1^{2x}e^{t^2}dt$, $x>0$. Επειδή η e^{t^2} είναι συνεχής και η $2x$ παραγωγίσιμη, η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=2e^{4x^2}>0\Rightarrow f\uparrow(0,+\infty)$.

γ) $E=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)x'dx=\left[xf(x)\right]_{\frac{1}{2}}^{1}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}xf'(x)dx=f(1)-\int_{\frac{1}{2}}^{1}2xe^{4x^2}dx\Leftrightarrow$

$E=\int_1^2 e^{x^2}dx-\int_{\frac{1}{2}}^{1}2xe^{4x^2}dx$. Έστω $4x^2=u\Rightarrow 8xdx=du$.

Για $x=\frac{1}{2}\Rightarrow u=1$ και για $x=1\Rightarrow u=4$.

Τότε $E=\int_1^2 e^{x^2}dx-\int_1^4 e^u\frac{1}{4}du=\int_1^2 e^{x^2}dx-\frac{1}{4}\left[e^u\right]_1^4\Leftrightarrow E+\frac{1}{4}e^4-\frac{1}{4}e=\int_1^2 e^{x^2}dx$.

6.646. α) $\left(\int_0^x(2+t)f(t)dt\right)'=\left(x^2+8x\right)'\Leftrightarrow(2+x)f(x)=2x+8\Leftrightarrow f(x)=\frac{2x+8}{x+2}$, $x\geq 0$.

β) $E(\Omega)=\int_0^1\frac{2x+8}{x+2}dx=\int_0^1\frac{2x+4+4}{x+2}dx=\int_0^1\left(\frac{2\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}}+\frac{4}{x+2}\right)dx\Leftrightarrow$

$E(\Omega)=\left[2x+4\ln(x+2)\right]_0^1=2+4\ln3-4\ln2=2+4\ln\frac{3}{2}$.

γ) Είναι $f'(x)=-\frac{4}{(x+2)^2}<0\Rightarrow f\downarrow[0,+\infty)$

$2\leq x\leq 4\Leftrightarrow f(4)\leq f(x)\leq f(2)\Leftrightarrow m=\frac{8}{3}\leq f(x)\leq 3=M$

δ) $\frac{8}{3}\leq f(x)\leq 3\Leftrightarrow\frac{8}{3}e^x\leq e^xf(x)\leq 3e^x$, άρα και

$\int_2^4\frac{8}{3}e^xdx\leq\int_2^4 e^xf(x)dx\leq\int_2^4 3e^xdx\Leftrightarrow\frac{8}{3}e^2\left(e^2-1\right)\leq\int_2^4 e^xf(x)dx\leq 3e^2\left(e^2-1\right)$

Είναι $3e^2\left(e^2-1\right)<24e^2\Leftrightarrow e^2-1<8\Leftrightarrow e^2<9$ που ισχύει και

$2\cancel{e^2}<\frac{8}{3}\cancel{e^2}\left(e^2-1\right)\Leftrightarrow 6<8e^2-8\Leftrightarrow e^2>\frac{7}{4}$ που ισχύει.

Άρα $2e^2<\frac{8}{3}e^2\left(e^2-1\right)\leq\int_2^4 e^xf(x)dx\leq 3e^2\left(e^2-1\right)<24e^2$

6.647. α) $\left[f'(x)-f(x)\right]\left(x^2+4\right)=2xf(x)\Leftrightarrow f'(x)\left(x^2+4\right)-f(x)\left(x^2+2x+4\right)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x)-\left(1+\frac{2x}{x^2+4}\right)f(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x-\ln\left(x^2+4\right)}f'(x)-\left(1+\frac{2x}{x^2+4}\right)e^{-x-\ln\left(x^2+4\right)}f(x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{-x-\ln\left(x^2+4\right)}f(x)\right)'=0 \Leftrightarrow e^{-x-\ln\left(x^2+4\right)}f(x)=c \Leftrightarrow f(x)=ce^{x+\ln\left(x^2+4\right)}=ce^x\left(x^2+4\right).$$

Η αρχική για $x=0$ γίνεται: $\left[f'(0)-f(0)\right]4=0 \Leftrightarrow f(0)=f'(0)$.

Επειδή η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι κάθετη στην ε, ισχύει ότι:

$f'(0)\lambda_\varepsilon=-1 \Leftrightarrow -f'(0)=-1 \Leftrightarrow f'(0)=1$, οπότε και $f(0)=1 \Leftrightarrow 4c=1 \Leftrightarrow c=\frac{1}{4}$

άρα $f(x)=\frac{1}{4}e^x\left(x^2+4\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Εστω ότι η $f(x)=\frac{1}{4}e^x\left(x^2+4\right)=-x+4 \Leftrightarrow e^x\left(x^2+4\right)+4x-16=0$ έχει δύο ρίζες x_1,x_2 με $x_1<x_2$. Έστω $g(x)=e^x\left(x^2+4\right)+4x-16$, $x\in\left[x_1,x_2\right]$. Η g είναι συνεχής στο $\left[x_1,x_2\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(x_1,x_2\right)$ με $g'(x)=\frac{1}{4}e^x\left(x^2+2x+4\right)+1$. Επειδή $g\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)$, από το Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in\left(x_1,x_2\right)$ τέτοιο ώστε

$g'(\xi)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}e^\xi\left(\xi^2+2\xi+4\right)+1=0 \Leftrightarrow e^\xi\left(\xi^2+2\xi+4\right)=-4$ που είναι αδύνατο.

γ) i. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{h'(x)}{e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{4}e^x\left(x^2+4\right)}{e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4}{4e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{4e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{4e^x}=0$$

ii. $E(\Omega)=\int_0^1 h(x)dx=\int_0^1 h(x)x'dx=\left[xh(x)\right]_0^1-\int_0^1 xh'(x)dx \Leftrightarrow$

$$E(\Omega)=\int_0^1\frac{1}{4}e^x\left(x^2+4\right)dx-\int_0^1\frac{1}{4}xe^x\left(x^2+4\right)dx=\frac{1}{4}\int_0^1 e^x\left(x^2+4-x^3-4x\right)dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=\frac{1}{4}\int_0^1\left(e^x\right)'\left(x^2+4-x^3-4x\right)dx=...=\frac{7e-16}{4}.$$

6.648. α) $g(x)=\int_0^x\left(\int_1^x 2xuf(t)dt\right)du=\int_0^x\left(2xu\int_1^x f(t)dt\right)du=x\int_1^x f(t)dt\int_0^x 2udu \Leftrightarrow$

$g(x)=x\int_0^x f(t)dt\left[u^2\right]_0^x=x\int_0^x f(t)dt\cdot x^2=x^3\int_1^x f(t)dt$.

β) i. $g(2)=64 \Leftrightarrow 8\int_1^2 f(t)dt=64 \Leftrightarrow \int_1^2 f(t)dt=8 \Leftrightarrow E(\Omega)=8$

ii. Από το Θ.Μ.Τ. για την $F(x)=\int_1^x f(t)dt$, υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε

$F'(\xi)=\frac{F(2)-F(1)}{2-1} \Leftrightarrow f(\xi)=\int_1^2 f(t)dt=8$.

γ) Εστω $h(x)=g(x)-x+1=x^3\int_1^x f(t)dt-x+1$, $x>0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=3x^2\int_1^x f(t)dt+x^3f(x)-1$. Επειδή $g(x)\geq x-1$, είναι $h(x)\geq 0=h(1)$, δηλαδή η h στο $x=1$ έχει ελάχιστο. Από το θ.Fermat είναι $h'(1)=0 \Leftrightarrow f(1)=1$.

6.649. **α)** $f'(x)=\alpha+e^{-x}-xe^{-x}$. $f'(0)=2\Leftrightarrow \alpha+1=2\Leftrightarrow \alpha=1$.

β) i. $f'(x)=1+e^{-x}(1-x)=1+\dfrac{1-x}{e^x}=\dfrac{e^x+1-x}{e^x}$. Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης e^x+1-x. Εστω $g(x)=e^x+1-x$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $g'(x)=e^x-1$ και για $x>0$ είναι $g'(x)>0\Rightarrow g\uparrow[0,+\infty)$ και για $x<0$ είναι $g'(x)<0\Rightarrow g\downarrow(-\infty,0]$. Για $x>0 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(0)=0$ και για $x<0 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(0)=0$, άρα $g(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$, άρα $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0\Rightarrow\ y=x \text{ ασύμπτωτη της } C_f \text{ στο } +\infty.$$

ii. $E(\lambda)=\int_0^{\lambda}|f(x)-x|dx=\int_0^{\lambda}xe^{-x}dx=-\left[xe^{-x}\right]_0^{\lambda}+\int_0^{\lambda}e^{-x}dx=-\lambda e^{-\lambda}-e^{-\lambda}+1\Leftrightarrow$

$E(\lambda)=-e^{-\lambda}(1+\lambda)+1,\ \lambda>0$.

iii. $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(-e^{-\lambda}(1+\lambda)+1\right)=1$, γιατί $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}e^{-\lambda}(1+\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{1+\lambda}{e^{\lambda}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{1}{e^{\lambda}}=0$

6.650. **α)** Επειδή $t\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ και $3\in(2,+\infty)$, είναι $x\in(2,+\infty)$.

β) $f'(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$, $f'(3)=e$, $f(3)=0$, άρα $\varepsilon: y=e(x-3)=ex-3e$

γ) $f''(x)=-\dfrac{1}{(x-2)^2}e^{\frac{1}{x-2}}<0\Rightarrow f$ κοίλη στο $(2,+\infty)$.

δ) Επειδή η f είναι κοίλη, η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της, άρα βρίσκεται κάτω και από την ε, εκτός βέβαια από το σημείο επαφής.
Άρα $f(x)\le ex-3e$, $x\in(2,+\infty)$.

ε) Επειδή στη σχέση $f(x)\le ex-3e$, η ισότητα ισχύει μόνο για $x=3$, έχουμε:

$$\int_3^5 f(x)dx<\int_3^5(ex-3e)dx=\left[e\frac{x^2}{2}-3ex\right]_3^5=2e.$$

στ) Από το ΘΜΤ για την f υπάρχει $\xi\in(3,x)$, $x>3$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\Leftrightarrow f(x)=f'(\xi)(x-3)$$

$$3<\xi<x\overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(\xi)<f'(3)\Leftrightarrow e^{\frac{1}{x-2}}<f'(\xi)<e\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-3)e^{\frac{1}{x-2}}<(x-3)f'(\xi)<e(x-3)\Leftrightarrow(x-3)e^{\frac{1}{x-2}}<f(x)<e(x-3)$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3)e^{\frac{1}{x-2}}=+\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.