

## Ολοκληρώματα

136. α) i. Για  $x \neq 0$  από τη σχέση  $f(-x)f'(x) = x$  (1) προκύπτει  $f(-x) \neq 0$ , άρα  $f(x) \neq 0$  και αφού  $n$   $f$  είναι συνεχής διατηρεί πρόσημο. Είναι  $f(0) = 2$ , άρα  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

ii. Στην (1) αντικαθιστώντας όπου  $x$  το  $-x$ , έχουμε:  $f(x)f'(-x) = -x$  (2),

$$\text{οπότε } h'(x) = \frac{-f'(-x)f(x) - f(-x)f'(x)}{f^2(x)} = \frac{x-x}{f^2(x)} = 0.$$

β)  $\frac{f(-x)}{f(x)} = c \Leftrightarrow f(-x) = cf(x)$  και για  $x=0$  είναι  $f(0) = cf(0) \Leftrightarrow c=1$ , άρα  $f(-x) = f(x)$ .

$$(1) \Rightarrow f(x)f'(x) = x \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = 2x \Rightarrow f^2(x) = x^2 + c \stackrel{f(0)=2}{\Rightarrow} c=4,$$

$$\text{άρα } f(x) = x^2 + 4 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 4}.$$

$$\text{Είναι } \left| \frac{\eta\mu(x+2)}{\sqrt{x^2+4}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \leq \frac{\eta\mu(x+2)}{\sqrt{x^2+4}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}.$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \right) \text{ από το Κ.Π είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu(x+2)}{\sqrt{x^2+4}} = 0.$$

γ)  $F'(x) = f(x) = \sqrt{x^2+4}$ ,  $F''(x) = f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} > 0 \Rightarrow F' \uparrow (0, +\infty)$

Από το Θ.Μ.Τ για την  $F$ , υπάρχει  $\xi \in (0, x)$  τέτοιο ώστε:

$$F'(\xi) = \frac{F(x) - F(0)}{x} \Leftrightarrow x f(\xi) = \int_0^x f(t) dt.$$

$$0 < \xi < x \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(0) < f(\xi) < f(x) \Leftrightarrow 2 < f(\xi) < f(x) \Leftrightarrow 2x < x f(\xi) < x f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x < \int_0^x f(t) dt < x f(x).$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) = +\infty \text{ είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = +\infty.$$

137. α) Επειδή  $n$   $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[1, 2]$  έχει ελάχιστο στο  $x=1$  και ισχύει

$f(x) \geq f(1) = 0$  για κάθε  $x \in [1, 2]$ . Λόγω του θεωρήματος Μέσης Τιμής για την  $f$  στο

διάστημα  $[x, 2]$ ,  $x \in [1, 2]$ , υπάρχει  $\xi \in (x, 2)$  τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(x)}{2-x} \Leftrightarrow (2-x)f'(\xi) = 3 - f(x).$$

Η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο  $[1, 2]$  άρα  $n$   $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο

διάστημα αυτό.

$$\text{Είναι: } 1 \leq x < \xi < 2 \text{ άρα } f'(x) < f'(\xi) \Leftrightarrow (2-x)f'(x) < (2-x)f'(\xi) \Leftrightarrow (2-x)f'(x) < 3 - f(x).$$

Πολλαπλασιάζοντας με  $f(x) \geq 0$ , έχουμε:

$$(2-x)f'(x)f(x) \leq 3f(x) - f^2(x) \Leftrightarrow (2-x)f'(x)f(x) - 3f(x) + f^2(x) \leq 0, \text{ οπότε και}$$

$$\int_1^2 (2-x)f'(x)f(x)dx - 3\int_1^2 f(x)dx + \int_1^2 f^2(x)dx < 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 (2-x)\left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)' dx - 3\int_1^2 f(x)dx + \int_1^2 f^2(x)dx < 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{1}{2}(2-x)f^2(x)\right]_1^2 - \int_1^2 (2-x)' \frac{1}{2}f^2(x)dx - 3\int_1^2 f(x)dx + \int_1^2 f^2(x)dx < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}f^2(1) + \frac{1}{2}\int_1^2 f^2(x)dx - 3\int_1^2 f(x)dx + \int_1^2 f^2(x)dx < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\int_1^2 f^2(x)dx < 3\int_1^2 f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 f^2(x)dx < 2\int_1^2 f(x)dx.$$

**β)** Εστω ότι  $f''(x) < 1$  για κάθε  $x \in (1,2)$ . Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ ,  $x \in [1,2]$ .

Είναι  $g'(x) = f'(x) - x$ ,  $g''(x) = f''(x) - 1 < 0 \Rightarrow g' \searrow [1,2]$ .

Από το Θ.Μ.Τ υπάρχει  $\xi_1 \in (1,2)$ :  $f'(\xi_1) = f(2) - f(1) = 3$ .

Είναι  $1 < \xi_1 < 2 \xrightarrow{g' \searrow} g'(\xi_1) < g'(1) \Leftrightarrow f'(\xi_1) - \xi_1 < f'(1) - 1 \Leftrightarrow 3 - \xi_1 < 2 - 1 \Leftrightarrow \xi_1 > 2$   
που είναι άτοπο.

138. **α)** Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $[1,2]$  και παραγωγίσιμη στο  $(1,2)$ , λόγω του θεωρήματος

μέσης τιμής υπάρχει  $\xi \in (1,2)$  τέτοιο ώστε:  $f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 2 - 1 = 1$ .

Όμως  $\lambda_\varepsilon = 1$ , άρα  $f'(\xi) = \lambda_\varepsilon$ , οπότε υπάρχει εφαπτομένη της  $C_f$ , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon$ .

**β)** Εστω  $g(x) = f(x) - 3 + x$ ,  $x \in [1,2]$ . Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[1,2]$  ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι  $g(1) = f(1) - 3 + 1 = 1 - 2 = -1 < 0$  και  $g(2) = f(2) - 3 + 2 = 2 - 1 = 1 > 0$ , δηλαδή  $g(1)g(2) < 0$ , οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano, υπάρχει  $x_0 \in (1,2)$  τέτοιο ώστε:  $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 3 - x_0$ .

**γ)** Η  $f$  είναι συνεχής στα διαστήματα  $[1, x_0]$  και  $[x_0, 2]$  και παραγωγίσιμη στα  $(1, x_0)$  και  $(x_0, 2)$ , οπότε λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχουν  $\xi_1 \in (1, x_0)$  και  $\xi_2 \in (x_0, 2)$

τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} = \frac{3 - x_0 - 1}{x_0 - 1} = \frac{2 - x_0}{x_0 - 1} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(x_0)}{2 - x_0} = \frac{2 - 3 + x_0}{2 - x_0} = \frac{x_0 - 1}{2 - x_0}.$$

$$\text{Άρα } f'(\xi_1)f'(\xi_2) = \frac{2 - x_0}{x_0 - 1} \cdot \frac{x_0 - 1}{2 - x_0} = 1.$$

**δ)**  $\int_1^2 xf''(x)dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^2 x(f'(x))' dx = 0 \Leftrightarrow [xf'(x)]_1^2 - \int_1^2 f'(x)dx = 0 \Leftrightarrow$   
 $2f'(2) - f'(1) - f(2) + f(1) = 0 \Leftrightarrow 2f'(2) - f'(1) = 1 \quad (1).$

Είναι  $xf''(x) + f'(x) = 1 \Leftrightarrow (xf'(x))' - 1 = 0$  ή  $(xf'(x) - x)' = 0$ .

Εστω  $h(x) = xf'(x) - x$ ,  $x \in [1,2]$ .

Η  $h$  είναι συνεχής στο  $[1, 2]$  ως άθροισμα και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο  $(1, 2)$  με  $h'(x) = xf''(x) + f'(x) - 1$ . Είναι  $h(1) = f'(1) - 1$  και  $h(2) = 2f'(2) - 2$ . Από την σχέση (1), έχουμε:  $2f'(2) - f'(1) = 1 \Leftrightarrow 2f'(2) = f'(1) + 1 \Leftrightarrow 2f'(2) - 2 = f'(1) - 1 \Leftrightarrow h(2) = h(1)$ . Οπότε λόγω του θεωρήματος Rolle, η εξίσωση  $h(x) = 0 \Leftrightarrow xf''(x) + f'(x) = 1$ , έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο  $(1, 2)$ .

$$139. \text{ α) } f(1-x) = \ln \frac{e^{1-x} + e}{e^{1-x} + 1} = \ln \frac{\frac{e}{e^x} + e}{\frac{e}{e^x} + 1} = \ln \frac{e \frac{1+e^x}{e^x}}{\frac{e+e^x}{e^x}} = \ln \left( e \frac{1+e^x}{e+e^x} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(1-x) = \ln e + \ln \frac{1+e^x}{e+e^x} = 1 + \ln \left( \frac{e+e^x}{1+e^x} \right)^{-1} = 1 - \ln \frac{e+e^x}{1+e^x} = 1 - f(x).$$

$$\text{β) Είναι } e^x + e > e^x + 1 \Leftrightarrow \frac{e^x + e}{e^x + 1} > 1 \Leftrightarrow \ln \frac{e^x + e}{e^x + 1} > \ln 1 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

$$\text{Από τη σχέση } f(1-x) = 1 - f(x), \text{ προκύπτει: } \int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 1 dx - \int_0^1 f(x) dx \quad (1).$$

Θέτουμε  $1-x = u$ , τότε  $dx = -du$ . Για  $x=0$  είναι  $u=1$ , ενώ για  $x=1$  είναι  $u=0$ .

$$\text{Η σχέση (1) γίνεται: } -\int_1^0 f(u) du = \int_0^1 1 dx - \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 1 - \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \int_0^1 f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}. \text{ Άρα } E = \frac{1}{2}.$$

$$\text{γ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x + e}{e^x + 1} \stackrel{\frac{e^x + e}{e^x + 1} = u}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0, \text{ άρα η ευθεία } y = 0, \text{ δηλαδή ο άξονας } x'x, \text{ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της } C_f \text{ στο } +\infty.$$

$$140. \text{ α) } \text{Θέτουμε } \frac{x}{2} = u \Leftrightarrow x = 2u \text{ και } dx = 2du. \text{ Για } x=0 \text{ είναι } u=0, \text{ ενώ για } x=2 \text{ είναι } u=1.$$

$$\text{Είναι: } \int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_0^1 f(u) 2du = 0.$$

$$\text{β) Η } f \text{ είναι συνεχής στο διάστημα } \left[\frac{x}{2}, x\right], x \in (0, 2] \text{ και παραγωγίσιμη στο } \left(\frac{x}{2}, x\right), \text{ οπότε}$$

λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει  $\xi \in \left(\frac{x}{2}, x\right)$  τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{x - \frac{x}{2}} = \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.$$

$$\text{Όμως } f'(\xi) \geq 2, \text{ οπότε: } \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \geq 2 \Leftrightarrow f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) \geq x \text{ για κάθε } x \in (0, 2].$$

Επειδή η σχέση αληθεύει και για  $x=0$ , ισχύει ότι:  $f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) \geq x$  για κάθε  $x \in [0,2]$ .

$$\gamma) \text{ Είναι } \int_0^2 \left( f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) \right) dx \geq \int_0^2 x dx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx \geq \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 2 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx \geq 2.$$

141. α) Θέτουμε  $xt = u$ , τότε  $xdt = du$ . Για  $t=0$  είναι  $u=0$  και για  $t=1$  είναι  $u=x$ .

Τότε  $f(x) = \lambda x + \int_0^x f(u) du$  (1). Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , η συνάρτηση  $\int_0^x f(u) du$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , οπότε η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$\beta) \text{ Είναι } f'(x) = \left( \lambda x + \int_0^x f(u) du \right)' = \lambda + f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = \lambda \Leftrightarrow e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = \lambda e^{-x} \Leftrightarrow (e^{-x} f(x))' = (-\lambda e^{-x})' \Leftrightarrow e^{-x} f(x) = -\lambda e^{-x} + c \Leftrightarrow f(x) = -\lambda + ce^x.$$

$$\text{Η (1) για } x=0 \text{ γίνεται } f(0) = \lambda \cdot 0 + \int_0^0 f(u) du = 0.$$

$$\text{Όμως } f(0) = -\lambda + c, \text{ άρα } -\lambda + c = 0 \Leftrightarrow c = \lambda \text{ και } f(x) = -\lambda + \lambda e^x = \lambda(e^x - 1).$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda(e^x - 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda e^x}{1} = \lambda. \text{ Άρα } \lambda = 1.$$

142. α) i. Επειδή η  $h(x)$  είναι συνεχής και  $h(x) \neq 0$  τότε η  $h(x)$  θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ . Στη σχέση (1)  $h(x) + h(4-x) = 2$  θέτουμε όπου  $x=2$  οπότε

$$2h(2) = 2 \Leftrightarrow h(2) = 1 > 0 \text{ άρα } h(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Εστω  $A(x) = \int_0^x f(t) dt$  και  $B(x) = \int_x^2 f(t) dt$  τότε έχουμε  $\int_{B(x)}^{A(x)} h(t) dt > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \{0,2\}$ .

- Αν υπάρχει  $x_0 \in \mathbb{R} - \{0,2\}$  ώστε  $A(x_0) = B(x_0)$  τότε  $\int_{B(x_0)}^{A(x_0)} h(t) dt = 0$  (άτοπο).

- Αν υπάρχει  $x_0 \in \mathbb{R} - \{0,2\}$  ώστε  $A(x_0) < B(x_0)$  τότε  $\int_{B(x_0)}^{A(x_0)} h(t) dt < 0$  (άτοπο).

Επομένως  $A(x) > B(x)$  για κάθε  $x_0 \in \mathbb{R} - \{0,2\}$  δηλαδή  $\int_0^x f(t) dt > \int_x^2 f(t) dt$ .

ii. Οι συναρτήσεις  $A(x) = \int_0^x f(t) dt$  και  $B(x) = \int_x^2 f(t) dt$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$  άρα και συνεχείς και αφού  $A(x) > B(x)$  τότε  $\lim_{x \rightarrow 0} A(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0} B(x)$  οπότε

$$A(0) \geq B(0) \Leftrightarrow 0 \geq \int_0^2 f(t) dt \quad (2). \text{ Επίσης και } \lim_{x \rightarrow 2} A(x) \geq \lim_{x \rightarrow 2} B(x) \text{ δηλαδή}$$

$$A(2) \geq B(2) \Leftrightarrow \int_0^2 f(t) dt \geq 0 \quad (3).$$

$$\text{Από (2), (3) προκύπτει } \int_0^2 f(t) dt = 0$$

iii. Είναι  $A(x) \geq B(x) \Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt \geq \int_x^2 f(t) dt \Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt + \int_2^x f(t) dt \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Θεωρούμε την  $\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt + \int_2^x f(t) dt$ . Παρατηρούμε ότι  $\varphi(0) = \varphi(2) = 0$  οπότε για

κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $\varphi(x) \geq \varphi(0)$  και  $\varphi(x) \geq \varphi(2)$ . Η  $\varphi$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $\varphi'(x) = 2f(x)$  οπότε από Θ. Fermat θα είναι  $\varphi'(0) = 0$  και  $\varphi'(2) = 0$ . Άρα  $f(0) = f(2) = 0$

iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = x \cdot B(x)$ ,  $x \in [0, 2]$ . Είναι  $g(0) = g(2) = 0$  και η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[0, 2]$  με  $g'(x) = B(x) + xB'(x) = \int_x^2 f(t) dt - xf(x)$  οπότε από Θ. Rolle υπάρχει  $\xi_1 \in (0, 2)$  τέτοιο ώστε  $g'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow \int_{\xi_1}^2 f(t) dt - \xi_1 f(\xi_1) = 0$ .

Άρα η εξίσωση  $\int_x^2 f(t) dt = xf(x)$  έχει τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, 2)$ .

- β) i.** Θεωρούμε την  $\sigma(x) = f^2(x) + B^2(x)$ ,  $x \in [0, 2]$ . Είναι  $\sigma(0) = f^2(0) + B^2(0) = 0$  και  $\sigma(2) = 0$  άρα  $\sigma(0) = \sigma(2) = 0$ . Επίσης η  $\sigma(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[0, 2]$  με  $\sigma'(x) = 2f(x)f'(x) + 2B(x)B'(x) = 2\left[f(x)f'(x) - f(x)\int_x^2 f(t) dt\right]$ .
- Άρα από Θ. Rolle υπάρχει  $\xi_2 \in (0, 2)$  τέτοιο ώστε  $\sigma'(\xi_2) = 0$ . Δηλαδή η εξίσωση  $\sigma'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)f'(x) = f(x)\int_x^2 f(t) dt$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, 2)$
- ii. Εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για τη  $\rho(x) = x^2 f(x)$  στο  $[0, 2]$ . Είναι  $\rho(0) = \rho(2) = 0$  και  $\rho'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x)$  οπότε υπάρχει  $\xi_3 \in (0, 2)$  τέτοιο ώστε  $\rho'(\xi_3) = 0$   $2\xi_3 f(\xi_3) + \xi_3^2 f'(\xi_3) = 0$  αφού  $\xi_3 \in (0, 2)$  τότε  $\xi_3 \neq 0$  άρα  $2f(\xi_3) + \xi_3 f'(\xi_3) = 0$ .
- Άρα η εξίσωση  $2f(x) + xf'(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον λύση στο  $(0, 2)$ .

**γ)** Επειδή  $h(x) > 0$  τότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_0^4 h(x) dx = \int_0^4 [2 - h(4-x)] dx = \int_0^4 2 dx - \int_0^4 h(4-x) dx = 8 - \int_0^4 h(4-x) dx$$

Θέτω  $y = 4 - x$  άρα  $dy = -dx$  και

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline y & 4 & 0 \end{array}$$

$$\text{Οπότε } E = 8 - \int_4^0 h(y)(-du) = 8 - \int_0^4 h(y) dy \Leftrightarrow E = 8 - E \Leftrightarrow E = 4 \text{ τ.μ.}$$

143. **α)** Είναι  $f(x) = \sqrt{x-3} \int_3^x \frac{1}{\ln t} dt$ . Η συνάρτηση  $\frac{1}{\ln t}$  ορίζεται στο  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$  και επειδή

$3 \in (1, +\infty)$ , η συνάρτηση  $h(x) = \int_3^x \frac{1}{\ln t} dt$  ορίζεται στο  $(1, +\infty)$ . Οπότε για την  $f$  πρέπει:

$$\begin{cases} x > 1 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \geq 3 \end{cases} \text{ άρα } x \geq 3 \text{ και } D_f = [3, +\infty).$$

**β)** Η συνάρτηση  $\frac{1}{\ln t}$  είναι συνεχής στο  $[3, +\infty)$  οπότε η  $h(x) = \int_3^x \frac{1}{\ln t} dt$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[3, +\infty)$  και επειδή η  $\sqrt{x-3}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(3, +\infty)$ , η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(3, +\infty)$  ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} \int_3^x \frac{1}{\ln t} dt + \frac{\sqrt{x-3}}{\ln x}. \text{ Στο } x=3 \text{ είναι}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-3} \int_3^x \frac{1}{\ln t} dt}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\int_3^x \frac{1}{\ln t} dt}{\sqrt{x-3}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\left(\int_3^x \frac{1}{\ln t} dt\right)'}{(\sqrt{x-3})'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{2\sqrt{x-3}}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2\sqrt{x-3}}{\ln x} = 0, \end{aligned}$$

$$\text{άρα } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x-3}} \int_3^x \frac{1}{\ln t} dt + \frac{\sqrt{x-3}}{\ln x}, & x > 3 \\ 0, & x = 3 \end{cases}$$

**γ)** Είναι  $h'(x) = \frac{1}{\ln x} > 0$  για  $x > 3$ , οπότε η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[3, +\infty)$ . Για  $x > 3$  είναι  $h(x) > h(3) = 0$ , άρα  $f'(x) > 0$  και  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $[3, +\infty)$ . Η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το  $f(3) = 0$ .

$$\begin{aligned} \delta) \int_3^e \frac{h(x)}{x^2} dx &= -\int_3^e h(x) \left(\frac{1}{x}\right)' dx = -\left[\frac{1}{x} h(x)\right]_3^e + \int_3^e \frac{1}{x} h'(x) dx = -\frac{h(e)}{e} + \int_3^e \frac{1}{x \ln x} dx = \\ &= -\frac{h(e)}{e} + \int_3^e \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx = -\frac{h(e)}{e} + [\ln(\ln x)]_3^e = -\frac{h(e)}{e} - \ln(\ln 3) \end{aligned}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( h'(x) \eta\mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\ln x} \eta\mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{\ln x} \right)$$

$$\text{Εστω } \frac{1}{x} = u, \text{ τότε για } x \rightarrow +\infty \text{ είναι } u \rightarrow 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1.$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln x} = 0 \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( h'(x) \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 1 \cdot 0 = 0$$

144. **α)** Για  $x = \kappa$  είναι  $f(\kappa) + f(2\kappa - \kappa) = 2 \Leftrightarrow 2f(\kappa) = 2 \Leftrightarrow f(\kappa) = 1$ . Επειδή  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και η  $f'$  είναι συνεχής, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ . Άρα η  $f$  είναι γνησίως μονότονη οπότε και 1-1.  
Για  $x > \kappa$  είναι  $2x > 2\kappa \Leftrightarrow x > 2\kappa - x$  και αφού  $f(x) < f(2\kappa - x)$  η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[\kappa, +\infty)$ .

**β)** Εχουμε  $f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = f(\kappa) \Leftrightarrow x = \kappa$ .

**γ)** Επειδή η συνάρτηση  $\frac{f(t)}{t}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$ , η  $g$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με  $g'(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{f(0)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x}$  και

$g''(x) = \frac{xf'(x) - f(x) + f(0)}{x^2}$ . Για την  $f$  εφαρμόζεται το θεώρημα Μέσης Τιμής στο  $[0, x]$ ,

οπότε υπάρχει  $\xi \in (0, x)$  τέτοιο ώστε:  $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$ . Επειδή η  $f$  είναι παραγωγίσιμη και

κυρτή στο  $\mathbb{R}$  η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα, οπότε:  $0 < \xi < x \Leftrightarrow f'(0) < f'(\xi) < f'(x)$  ή

$\frac{f(x) - f(0)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) + f(0) > 0$  άρα  $g''(x) > 0$  και  $g$  κυρτή στο  $(0, +\infty)$ .

δ) Είναι  $f(x) + f(2\kappa - x) = 2$ , οπότε

$$\int_0^{2\kappa} f(x) dx + \int_0^{2\kappa} f(2\kappa - x) dx = \int_0^{2\kappa} 2 dx \Leftrightarrow \int_0^{2\kappa} f(x) dx + \int_0^{2\kappa} f(2\kappa - x) dx = 4\kappa.$$

Εστω  $2x - \kappa = u$ , τότε  $dx = -du$  και για  $x = 0$  είναι  $u = 2\kappa$  ενώ για  $x = 2\kappa$  είναι  $u = 0$ .

$$\text{Οπότε } \int_0^{2\kappa} f(x) dx - \int_{2\kappa}^0 f(u) du = 4\kappa \Leftrightarrow \int_0^{2\kappa} f(x) dx + \int_0^{2\kappa} f(x) dx = 4\kappa \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \int_0^{2\kappa} f(x) dx = 4\kappa \Leftrightarrow \int_0^{2\kappa} f(x) dx = 2\kappa.$$

145. α)  $|f(x)| \leq e^{-x} \Leftrightarrow -e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  άρα και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Επειδή η  $f$  είναι συνεχής και  $\downarrow$  στο  $[0, +\infty)$ , έχουμε:  $f([0, +\infty)) = (0, 1]$

β)  $e^x f'(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x) + e^{-x} = 0$ . Επειδή  $f(x) \leq e^{-x}$  έχουμε:  $f(x) - e^{-x} \leq 0$ .

Εστω  $g(x) = f(x) - e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Είναι  $g(x) \leq g(0)$ , δηλαδή η  $g$  έχει μέγιστο στο  $x_0 = 0$ .

Επειδή η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $g'(x) = f'(x) + e^{-x}$ , από το Θ. Fermat, ισχύει ότι:

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) + e^{-0} = 0 \Leftrightarrow f'(0) = -1. \text{ Άρα η εξίσωση } f'(x) + e^{-x} = 0 \text{ έχει ρίζα το } 0,$$

οπότε έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

γ) Επειδή  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in [0, 1]$ , είναι  $E = \int_0^1 f(x) dx$ . Επειδή  $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$  για κάθε

$$x \in \mathbb{R} \text{ είναι: } \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 e^{-x} dx = \frac{e-1}{e}.$$

δ) Εστω  $F(u) = \int_0^u f(t) dt$ ,  $u \in [x, x+1]$ ,  $x \geq 0$ . Προφανώς για την  $F$  ισχύουν οι προϋποθέσεις του

Θ.Μ.Τ., οπότε υπάρχει  $\xi \in (x, x+1)$  τέτοιο ώστε  $F'(\xi) = F(x+1) - F(x) \Leftrightarrow f(\xi) = \int_x^{x+1} f(t) dt$

$$\text{Είναι } x < \xi < x+1 \Leftrightarrow \overset{f \downarrow}{f(x+1)} < f(\xi) < f(x) \Leftrightarrow f(x+1) < \int_x^{x+1} f(t) dt < f(x)$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) \overset{x+1=u}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(u) = 0, \text{ άρα και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt = 0.$$

ε) ι. Αν  $\alpha = \beta$  προφανώς ισχύει η ισότητα. Αν  $\alpha \neq \beta$  και έστω  $\alpha < \beta$ , τότε: Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  με  $f'(x) = -e^{-x}$ . Σύμφωνα με το ΘΜΤ, υπάρχει

$$\xi \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow -e^{-\xi} = \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow e^{-\xi} = \frac{e^\alpha - e^\beta}{\beta - \alpha}.$$

$$\text{Είναι } \alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow -\alpha > -\xi > -\beta \Leftrightarrow e^{-\beta} < e^{-\xi} < e^{-\alpha} \Leftrightarrow e^{-\beta} < \frac{e^\alpha - e^\beta}{\beta - \alpha} < e^{-\alpha} \Leftrightarrow$$

$e^{-\beta}(\beta-\alpha) < e^{-\alpha} - e^{-\beta} < e^{-\alpha}(\beta-\alpha)$ . Αν  $\alpha > \beta$  όμοια.

ii. Εστω  $f(x) = e^{-x} + x - 1, x \in \mathbb{R}$ . Είναι  $f'(x) = -e^{-x} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow -x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Για κάθε  $x > 0$  είναι  $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow [0, +\infty)$

Για κάθε  $x < 0$  είναι  $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow (-\infty, 0]$

Η  $f$  έχει ελάχιστο στο  $x = 0$ , άρα  $f(x) \geq f(0) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Άρα  $f(\eta\mu^2 x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-\eta\mu^2 x} + \eta\mu^2 x - 1 \geq 0$

146. α) Επειδή οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $\mathbb{R}$ , οι συναρτήσεις  $\int_1^x f(t)dt$  και  $\int_0^x g(t)dt$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$ , οπότε:

$$\left(\int_1^x f(t)dt\right)' = \left[x\left(\int_0^x g(t)dt - 1\right)\right]' \Leftrightarrow f(x) = \int_0^x g(t)dt - 1 + xg(x).$$

Είναι  $f(0) = \int_0^0 g(t)dt - 1 + 0g(0) = -1$

$$\text{και } \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\int_0^x g(t)dt - 1 + xg(x) + 1}{x} = \frac{\int_0^x g(t)dt}{x} + g(x).$$

Παρατηρούμε ότι για να υπολογίσουμε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$  πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε

το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x g(t)dt}{x}$ . Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x g(t)dt}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{1} = g(0)$ , οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\int_0^x g(t)dt}{x} + g(x) \right) = g(0) + g(0) = 2g(0), \text{ άρα η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη}$$

στο  $x_0 = 0$  με  $f'(0) = 2g(0)$ .

β) Επειδή η  $g$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και  $g(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , η  $g$  διατηρεί σταθερό

πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ . Για  $x = 1$  είναι  $\int_1^1 f(t)dt = 1\left(\int_0^1 g(t)dt - 1\right) \Leftrightarrow \int_0^1 g(t)dt = 1 > 0$ . Αν ήταν

$g(x) < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε  $\int_0^1 g(t)dt < 0$  που δεν ισχύει, άρα  $g(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

γ) Εστω  $h(x) = \left(\int_0^x g(t)dt\right)^2 + 2f(x) - 1 + 4x, x \in [0, 1]$ .

$$h(0) = 2f(0) - 1 = 2\int_0^0 g(t)dt - 1 - 1 = -2 < 0,$$

$$h(1) = \left(\int_0^1 g(t)dt\right)^2 + 2f(1) - 1 + 4 = 1 + 2\left(\int_0^1 g(t)dt - 1 + g(1)\right) + 3 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow h(1) = 4 + 2(1 - 1 + g(1)) = 3 + 2g(1) > 0$  και επειδή η  $h$  είναι συνεχής, από το Θ. Bolzano

υπάρχει  $x_0 \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε:  $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \left(\int_0^{x_0} g(t)dt\right)^2 + 2f(x_0) = 1 - 4x_0$ .

147. α) Για  $x = 0$  είναι  $0 + 1 \leq f(0) \leq e^0 = 1 \Leftrightarrow f(0) = 1$ .



Άρα  $x+1 \leq f(x) \leq e^x \Leftrightarrow x \leq f(x) - f(0) \leq e^x - 1$ .

Αν  $x > 0$ , τότε:  $1 \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq \frac{e^x - 1}{x}$ . Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{0}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{1} = 1$ , λόγω του

κριτηρίου παρεμβολής είναι και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$ . Ομοια και  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$ , άρα  $f'(0) = 1$ .

$$\begin{aligned} \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt - e^x + 1}{x^2} &\stackrel{0}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1 + 1 - e^x}{x} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x) - 1}{x} - \frac{e^x - 1}{x} \right) = \frac{1}{2} (1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

γ) Εστω  $g(x) = \int_0^x f(t) dt - \sigma \nu x$ ,  $x \in [0, 1]$ . Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$ , η συνάρτηση

$\int_0^x f(t) dt$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[0, 1]$ , οπότε η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[0, 1]$  ως

άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε είναι και συνεχής στο διάστημα αυτό. Είναι

$$g(0) = \int_0^0 f(t) dt - \sigma \nu 0 = -1 < 0 \text{ και } g(1) = \int_0^1 f(t) dt - \sigma \nu 1.$$

Επειδή  $x+1 \leq f(x) \leq e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , έχουμε:

$$\int_0^1 (x+1) dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 e^x dx \Leftrightarrow \left[ \frac{(x+1)^2}{2} \right]_0^1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq [e^x]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$2 - \frac{1}{2} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq e - 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq e - 1, \text{ και επειδή } \sigma \nu 1 < 1 \Leftrightarrow -\sigma \nu 1 > -1,$$

έχουμε:  $\int_0^1 f(x) dx - \sigma \nu 1 > \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} > 0$ , δηλαδή  $g(1) > 0$  και  $g(0)g(1) < 0$ , άρα λόγω του

θεωρήματος Bolzano η εξίσωση  $g(x) = 0 \Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt = \sigma \nu x$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$ .

148. α) Θεωρούμε την  $h(x) = \int_2^x tf(t) dt - x$ ,  $x \in [2, 3]$  η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $[2, 3]$  αφού η συνάρτηση  $tf(t)$  είναι συνεχής στο  $[2, 3]$  και  $h'(x) = xf(x) - 1$ . Επίσης  $h(2) = -2$  και  $h(3) = \int_2^3 tf(t) dt - 3 = 1 - 3 = -2$  οπότε  $h(2) = h(3)$  άρα από Θ. Rolle υπάρχει  $\rho \in (2, 3)$  τέτοιο ώστε  $h'(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho f(\rho) - 1 = 0 \Leftrightarrow \rho f(\rho) = 1$  (1).

β) Η συνάρτηση  $g(x) = \int_2^x f(t) dt + \int_3^x f(t) dt$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[2, 3]$  με  $g'(x) = 2f(x)$ .

Όμως  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in [2, 3]$  και αφού η  $f$  είναι συνεχής τότε η  $f$  διατηρεί πρόσημο και από την (1) αφού  $\rho \in (2, 3)$  δηλαδή  $\rho > 0$  πρέπει και  $f(\rho) > 0$  άρα  $f(x) > 0$  οπότε  $g'(x) = 2f(x) > 0$  άρα η  $g \uparrow$  στο  $[2, 3]$ .

γ) Η  $g$  αφού είναι παραγωγίσιμη στο  $[2, 3]$  θα είναι και συνεχής.

Επιπλέον  $g(2) = \int_2^2 f(t) dt = -\int_2^3 f(t) dt < 0$  αφού  $f(t) > 0$  και  $g(3) = \int_2^3 f(t) dt > 0$  άρα από

Θ. Bolzano υπάρχει  $\xi \in (2,3)$  τέτοιο ώστε  $g(\xi) = 0$  και αφού η  $g \uparrow$  τότε το  $\xi$  μοναδικό.

Δηλαδή υπάρχει μοναδικό  $\xi$  τέτοιο ώστε  $\int_2^\xi f(t) dt + \int_3^\xi f(t) dt = 0 \Leftrightarrow \int_2^\xi f(t) dt = \int_\xi^3 f(t) dt$ .

δ) Αφού  $f(t) > 0$  για κάθε  $x \in [2,3]$  τότε  $E = \int_2^3 f(t) dt = 3$  οπότε

$$I = \int_2^3 g(t) dt = \int_2^3 (t)' g(t) dt = [tg(t)]_2^3 - \int_2^3 tg'(t) dt = 3g(3) - 2g(2) - \int_2^3 2tf(t) dt = \\ = 3 \int_2^3 f(t) dt - 2 \int_2^3 f(t) dt - 2 \int_2^3 tf(t) dt = 5 \int_2^3 f(t) dt - 2 \cdot 1 = 5 \cdot 3 - 2 = 13.$$

149. α) Είναι  $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} f\left(\frac{x}{t}\right) dt$ ,  $x > 0$ . Θέτω  $u = \frac{x}{t} \Leftrightarrow t = \frac{x}{u}$  και  $dt = -\frac{x du}{u^2}$ .

$$\text{άρα } F(x) = \int_x^1 f(u) \left(-\frac{1}{u}\right) du \Leftrightarrow F(x) = \int_1^x \frac{f(u)}{u} du.$$

Επειδή η  $f$  είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής οπότε και η συνάρτηση  $\frac{f(u)}{u}$  είναι συνεχής άρα και η  $F(x) = \int_1^x \frac{f(u)}{u} du$  θα είναι παραγωγίσιμη με  $F'(x) = \frac{f(x)}{x}$ .

β)  $\int_\alpha^\beta F''(x) dx = 0 \Leftrightarrow [F'(x)]_\alpha^\beta = 0 \Leftrightarrow F'(\beta) - F'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow F'(\beta) = F'(\alpha)$  και αφού  $F'(x) = \frac{f(x)}{x}$

η οποία είναι παραγωγίσιμη ως ημίτιο παραγωγίσιμων τότε για την  $F'$  εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο  $[\alpha, \beta]$  οπότε υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \beta) : F''(\xi) = 0$ .

γ) i. Είναι  $\int_1^e f'(x) \ln x dx = \int_e^1 F'(x) dx \Leftrightarrow [f(x) \ln x]_1^e - \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = [F(x)]_e^1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(e) - F(e) = F(1) - F(e) \Leftrightarrow f(e) = 0$$

ii. Αφού η  $F$  κυρτή τότε  $F'(x) = f(x)$

• Αν  $0 < x < e$  τότε  $f(x) < f(e) \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow F'(x) < 0$  άρα  $F \downarrow$  στο  $(0, e]$

• Αν  $x > e$  τότε  $f(x) > f(e) \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow F'(x) > 0$  άρα  $f \uparrow$  στο  $[e, +\infty)$

Για κάθε  $x > 0$  θα είναι  $F(x) \geq F(e)$ .

150. α) Είναι  $f^2(x) + x^2 = 2x \Leftrightarrow f^2(x) = 2x - x^2$  (1) οπότε η εξίσωση  $f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0$  γίνεται  $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ή  $x = 2$ .

β) Εστω ότι η  $f$  δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $(0,2)$  τότε αφού η  $f$  είναι συνεχής και θα υπάρχουν  $x_1, x_2 \in (0,2)$  τέτοια ώρα  $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$  από Θ. Bolzano θα υπάρχει  $x_0 \in (0,2)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = 0$ . Οπότε η (1) για  $x = x_0$  γίνεται  $2x_0 - x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0(2-x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$  ή  $x_0 = 2$  (άτοπο) γιατί  $x_0 \in (0,2)$ .

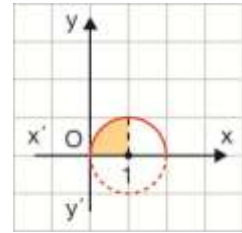
γ) Οπότε αφού  $f(x) \neq 0$  για  $x \in (0,2)$  και η  $f$  συνεχής στο  $(0,2)$ . Επειδή  $f(1) = 1 > 0$  τότε  $f(x) > 0$  για  $x \in (0,2)$  άρα η (1) θα είναι  $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ .

δ) Επειδή  $f(x) > 0$  τότε το ζητούμενο εμβαδό είναι  $E(\Omega) = \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx$ .

$$\begin{aligned} \text{Εστω } \sqrt{2x-x^2} = y &\Leftrightarrow 2x-x^2-y^2 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2=0 \Leftrightarrow \\ x^2+2x+1+y^2=1 &\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1. \end{aligned}$$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου του κυκλικού δίσκου με κέντρο  $K(1,0)$  και  $\rho=1$ .

$$E = \frac{\pi\rho^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4} \text{ οπότε } E(\Omega) = \frac{\pi}{4}$$



ε) Η  $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$  γίνεται  $f(x) = \sqrt{1-1+2x-x^2} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{1-(1-x)^2}$ .

$$\text{Εστω } x_1, x_2 \in (0,1) \text{ με } x_1 < x_2 \Leftrightarrow 1-x_1 > 1-x_2 > 0 \Leftrightarrow (1-x_1)^2 > (1-x_2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-(1-x_1)^2} < \sqrt{1-(1-x_2)^2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ οπότε η } f \uparrow \text{ στο } [0,1] \text{ άρα και } 1-1 \text{ συνεπώς αντιστρέφεται.}$$

$$\text{Εστω } f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{1-(1-x)^2} = y^2 \Leftrightarrow 1-(1-x)^2 = y^2 \Leftrightarrow (1-x)^2 = 1-y^2 \Leftrightarrow 1-x = \pm\sqrt{1-y^2}$$

$$\text{αφού } x \leq 1 \text{ τότε } 1-x > 0 \text{ άρα } 1-x = \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow x = 1-\sqrt{1-y^2} \text{ με } \left. \begin{array}{l} y \geq 0 \\ 1-y^2 \geq 0 \end{array} \right\} y \in [0,1].$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = 1-\sqrt{1-x^2}, x \in [0,1].$$

151. α) Αφού  $G$  παράγουσα της  $f$  στο  $[0,1]$  τότε για κάθε  $x \in [0,1]$  ισχύει  $G'(x) = f(x)$ .

$$\text{Εχουμε } \int_x^1 f(t) dt \geq \frac{1-x^2}{2} \Leftrightarrow [G(t)]_x^1 \geq \frac{1-x^2}{2} \Leftrightarrow G(1) - G(x) - \frac{1-x^2}{2} \geq 0 \text{ οπότε}$$

$$\int_0^1 \left[ G(1) - G(x) - \frac{1-x^2}{2} \right] dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 G(1) dx - \int_0^1 G(x) dx - \int_0^1 \frac{1-x^2}{2} dx \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$G(1)(1-0) \geq \int_0^1 G(x) dx + \frac{1}{2} [x]_0^1 - \frac{1}{2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \Leftrightarrow G(1) \geq \int_0^1 G(x) dx + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G(1) \geq \frac{1}{3} + \int_0^1 G(x) dx \quad (1).$$

β) Ισχύει  $[xG(x)]' = (x)'G(x) + xG'(x) \Leftrightarrow [xG(x)]' = G(x) + xf(x)$  οπότε

$$\int_0^1 [xG(x)]' dx = \int_0^1 G(x) dx + \int_0^1 xf(x) dx \quad (2).$$

γ) (2)  $\Leftrightarrow [xG(x)]_0^1 = \int_0^1 G(x) dx + \int_0^1 xf(x) dx \Leftrightarrow G(1) = \int_0^1 G(x) dx + \int_0^1 xf(x) dx \quad (3).$

Οπότε η (1) με βάση την (3) γίνεται

$$\int_0^1 G(x) dx + \int_0^1 xf(x) dx \geq \frac{1}{3} + \int_0^1 G(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 xf(x) dx \geq \frac{1}{3}.$$

δ) Είναι  $f^2(x) \geq 2xf(x) - x^2 \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) + x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 \geq 0$  που ισχύει.

ε)  $f^2(x) - 2xf(x) + x^2 \geq 0$  τότε  $\int_0^1 (f^2(x) - 2xf(x) + x^2) dx \geq 0$

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq \int_0^1 2xf(x) dx - \int_0^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 xf(x) dx - \frac{1}{3} \stackrel{(3)}{\geq} 2 \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x) dx \geq \frac{1}{3}.$$

152. α) Είναι  $f^5(x) + 4f(x) = 5x \quad (1), x \in [0, 1]$ .

Εστω  $x_1, x_2 \in [0, 1]$  με  $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f^5(x_1) = f^5(x_2)$  και  $4f(x_1) = 4f(x_2)$  οπότε με

πρόσθεση κατά μέλη έχουμε  $f^5(x_1) + 4f(x_1) = f^5(x_2) + 4f(x_2) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 5x_1 = 5x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$  οπότε

η  $f$  είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται. Αν  $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ , η (1) γίνεται  $y^5 + 4y = 5f^{-1}(y)$

άρα  $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(x^5 + 4x)$ .

β) Στην (1) για  $x=0$  έχουμε  $f^5(0) + 4f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(f^4(0) + 4) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$

αφού  $f^4(0) + 4 > 0$ . Επίσης στην (1) για  $x=1$  προκύπτει

$$f^5(1) + 4f(1) = 5 \Leftrightarrow f^5(1) + 4f(1) - 5 = 0 \quad (2).$$

Θεωρούμε την  $g(x) = x^5 + 4x - 5, x \in \mathbb{R}$  για την οποία παρατηρούμε ότι  $g(1) = 0$  και

$g'(x) = 5x^4 + 4 > 0$  οπότε η  $g$  είναι  $\uparrow$  άρα το  $x=1$  μοναδική ρίζα της εξίσωσης

$x^5 + 4x - 5 = 0$  οπότε από τη (2) θα είναι και  $f(1) = 1$ .

γ)  $I = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f^{-1}(x) dx$ . Θέτω  $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$  οπότε  $dx = f'(u) du$  και

για  $x=0$ :  $f(u) = 0 = f(0) \Leftrightarrow u_1 = 0$  ενώ για  $x=1$ :  $f(u) = 1 = f(1) \Leftrightarrow u_2 = 1$  οπότε

$$I = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 uf'(u) du = \int_0^1 f(x) dx + [uf(u)]_0^1 - \int_0^1 f(u) du = f(1) = 1.$$

δ) Εστω ότι υπάρχει  $x_0 \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) \leq x_0$  τότε

$$\left. \begin{array}{l} f^5(x_0) \leq x_0^5 \\ 4f(x_0) \leq 4x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow f^5(x_0) + 4f(x_0) \leq x_0^5 + 4x_0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 5x_0 \leq x_0^5 + 4x_0 \Leftrightarrow x_0^5 - x_0 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$x_0(x_0^4 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x_0(x_0 - 1)(x_0 + 1)(x_0^2 + 1) \geq 0$ , άρα  $x_0 \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$  άτοπο αφού

$x_0 \in (0, 1)$ . Άρα για κάθε  $x \in (0, 1)$  θα είναι  $f(x) > x$ .

ε) Αφού  $f(x) > x \Leftrightarrow f(x) - x > 0$  τότε

$$\int_0^1 (f(x) - x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx > \int_0^1 x dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx > \frac{1}{2}.$$

153. α) Είναι  $f'(x) = \frac{g'(x) - g(x)}{e^x} \quad (1)$  οπότε

$$f'(x) = \frac{e^x g'(x) - e^x g(x)}{e^{2x}} \Leftrightarrow f'(x) = \left( \frac{g(x)}{e^x} \right)' \Leftrightarrow f(x) = \frac{g(x)}{e^x} + c \text{ για } x=1 \text{ προκύπτει } c=0$$

άρα  $f(x) = \frac{g(x)}{e^x} \Leftrightarrow f(x) = g(x)e^{-x}, x \geq 0$ .

**β)** Αφού η  $C_f$  έχει ασύμπτωτη στο  $+\infty$  την ευθεία  $y = 2x - 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$  και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = -1.$$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{xg(x) - 2x^2e^x} & \stackrel{(\alpha)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{xf(x)}}{xe^{xf(x)} - 2x^2e^x} = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{xf(x)}}{e^x \cdot x(f(x) - 2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{f(x) - 2x} \right] = 2 \cdot \frac{1}{(-1)} = -2. \end{aligned}$$

**γ)** Αν  $g(x) > g'(x) \Leftrightarrow g'(x) - g(x) < 0$  τότε από (1):  $f'(x) < 0$  οπότε η  $f \downarrow$

$$\text{άρα } x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow f(x) - f(0) \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x) - f(0)) dx \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 f(0) dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx \leq f(0).$$

154. **α)** Είναι  $xf(x) + 1 + \int_1^x \frac{xf(xt)}{t} dt = 0$  (1),  $x, t > 0$ . Θέτουμε  $u = xt \Leftrightarrow t = \frac{u}{x}$  οπότε  $dt = \frac{1}{x} du$ .

$$\text{Άρα η (1) γίνεται: } xf(x) + 1 + \int_1^x \frac{f(u)}{\frac{u}{x}} du = 0 \Leftrightarrow xf(x) + 1 + x \int_1^x \frac{f(u)}{u} du = 0.$$

$$\text{Για } x > 0 \text{ είναι } f(x) + \frac{1}{x} + \int_1^x \frac{f(u)}{u} du = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{x} - \int_1^x \frac{f(u)}{u} du \quad (2).$$

Αφού  $\frac{f(u)}{u}$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$  ως ηλίκο συνεχών τότε η συνάρτηση  $\int_1^x \frac{f(u)}{u} du$

είναι παραγωγίσιμη και αφού και  $-\frac{1}{x}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  τότε από (2) η  $f(x)$

θα είναι παραγωγίσιμη.

**β)** Παραγωγίζοντας στην (2) έχουμε

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow (xf(x))' = (\ln x)' \Leftrightarrow xf(x) = \ln x + c \quad (3).$$

Στην (2) για  $x = 1$  προκύπτει  $f(1) = -1$  άρα στην (3) για  $x = 1$  έχουμε

$$f(1) = \ln 1 + c \Leftrightarrow c = -1 \text{ οπότε } xf(x) = \ln x - 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x - 1}{x}, \quad x > 0.$$

**γ)**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{x} (\ln x - 1) \right] = -\infty$  άρα η  $x = 0$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1} = 0 \text{ οπότε η } y = 0 \text{ δηλαδή ο άξονας } x'x \text{ είναι οριζόντια}$$

ασύμπτωτη.

**δ)** Είναι  $f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x - 1}{x} > 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > e$  οπότε στο  $[\lambda, 1]$  με  $0 < \lambda < 1$  είναι

$f(x) < 0$  και το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\begin{aligned} E(\lambda) &= -\int_{\lambda}^1 f(x) dx = -\int_{\lambda}^1 \frac{\ln x - 1}{x} dx = \int_{\lambda}^1 \frac{1}{x} dx - \int_{\lambda}^1 (\ln x)' \ln x dx = \\ &= [\ln|x|]_{\lambda}^1 - \left[ \frac{\ln^2 x}{2} \right]_{\lambda}^1 = -\ln \lambda + \frac{\ln^2 \lambda}{2} \Leftrightarrow E(\lambda) = \frac{\ln^2 \lambda}{2} - \ln \lambda. \end{aligned}$$

**ε)**  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^-} [\lambda^2 E(\lambda)] = \lim_{\lambda \rightarrow 0^-} \left[ \frac{\lambda^2 \ln^2 \lambda}{2} - \lambda^2 \ln \lambda \right] = 0$

γιατί  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 \ln^2 \lambda = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\ln^2 \lambda}{\frac{1}{\lambda^2}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{2 \ln \lambda \cdot \frac{1}{\lambda}}{-\frac{2}{\lambda^3}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( -\frac{\ln \lambda}{\frac{1}{\lambda^2}} \right) \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( -\frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{2}{\lambda^3}} \right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( -\frac{\lambda^2}{2} \right) = 0$

και  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 \ln \lambda = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\ln \lambda}{\frac{1}{\lambda^2}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{2}{\lambda^3}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( -\frac{\lambda^2}{2} \right) = 0$

155. **α)** Αφού  $f(x)$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  τότε και η συνάρτηση  $\frac{3t^2}{3f^2(t)+1}$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$

οπότε η συνάρτηση  $f(x) = \int_0^x \frac{3t^2}{3f^2(t)+1} dt$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3f^2(x)+1} \quad (1)$$

**β)** Αφού  $f'(x) > 0$  τότε η  $f$  είναι  $\uparrow$  στο  $\mathbb{R}$  και  $f(0) = 0$ .

Για  $x < 0$  είναι  $f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$  ενώ για  $x > 0$  είναι  $f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$

**γ)** Από (1)  $\Rightarrow 3f^2(x)f'(x) + f'(x) = 3x^2 \Leftrightarrow (f^3(x) + f(x))' = (x^3)'$   $\Leftrightarrow f^3(x) + f(x) = x^3 + c$ .

Για  $x = 0$  προκύπτει ότι  $c = 0$  άρα  $f^3(x) + f(x) = x^3$  (2)

**δ)** Αφού  $f'(x) > 0$  τότε η  $f$  είναι  $\uparrow$  άρα και 1-1 οπότε η  $f$  αντιστρέφεται.

Αν  $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$  οπότε η (2) γίνεται  $y^3 + y = (f^{-1}(y))^3 \Leftrightarrow [f^{-1}(y)]^3 = y(y^2 + 1)$

Αν  $y < 0$   $f^{-1}(y) = -\sqrt[3]{-y(y^2 + 1)}$  ενώ

αν  $y \geq 0$   $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y(y^2 + 1)}$  άρα  $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{-x^3 - x}, & x < 0 \\ \sqrt[3]{x^3 + x}, & x \geq 0 \end{cases}$

**ε)** Αφού η  $f$  είναι  $\uparrow$  η εξίσωση  $f(x) = f^{-1}(x)$  είναι ισοδύναμη με την  $f(x) = x$  οπότε

$f^3(x) = x^3$  και από την (2) έχουμε  $x^3 + x = x^3 \Leftrightarrow x = 0$  οπότε οι  $C_f, C_{f^{-1}}$  τέμνονται στο  $(0, 0)$ .

156. α) Αφού η  $f$  είναι συνεχής τότε και η συνάρτηση  $\frac{f(t)}{t}$  είναι συνεχής οπότε η συνάρτηση

$g(x) = \int_e^x \frac{f(t)}{t} dt$  είναι παραγωγίσιμη οπότε και η συνάρτηση  $f(x) = e^{-g(x)}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(1, +\infty)$  ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

β) Είναι (1)  $f(x) = e^{-\int_e^x \frac{f(t)}{t} dt} \Leftrightarrow \ln f(x) = -\int_e^x \frac{f(t)}{t} dt$  και παραγωγίζοντας έχουμε

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x) = -f^2(x), \quad x > 1.$$

γ)  $xf'(x) = -f^2(x) \Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = (\ln x)' \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = \ln x + c$  (2).

Στην (1) για  $x = e$  είναι  $f(e) = e^0 = 1$  οπότε από τη (2) για  $x = e$  θα είναι  $c = 0$ .

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{1}{\ln x}, \quad x > 1.$$

δ) Η εφαπτομένη στο  $M(x_0, f(x_0))$  είναι

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0).$$

Αυτή τέμνει τους άξονες στα σημεία  $A\left(-\frac{f(x_0) - x_0 f'(x_0)}{f'(x_0)}, 0\right)$  και  $B(0, f(x_0) - x_0 f'(x_0))$ .

$$E_{OAB} = \frac{1}{2} \left| f(x_0) - x_0 f'(x_0) \right| \left| -\frac{f(x_0) - x_0 f'(x_0)}{f'(x_0)} \right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{15}{2} = \frac{1}{2} \frac{(f(x_0) - x_0 f'(x_0))^2}{|f'(x_0)|} \stackrel{\substack{f'(x_0) < 0 \\ x_0 > e}}{\Rightarrow} -15f'(x_0) = (f(x_0) - x_0 f'(x_0))^2$$

Αρκεί να δείξουμε ότι συνάρτηση  $h(x) = (f(x) - xf'(x))^2 + 15f'(x)$  έχει ρίζα στο  $(e, e^2)$ .

Είναι  $f(e) = 1$ ,  $f'(e) = -\frac{1}{e}$ ,  $f(e^2) = \frac{1}{2}$  και  $f'(e^2) = -\frac{1}{4e^2}$ . Οπότε  $h(e) = 4 - \frac{15}{e} = \frac{4e - 15}{e} < 0$

και  $h(e^2) = \frac{9}{16} - \frac{15}{4e^2} = \frac{9e^2 - 60}{16e^2} > 0$  γιατί  $3e > 8 \Leftrightarrow 9e^2 > 64 \Leftrightarrow 9e^2 - 60 > 0$ , οπότε από Θ.

Bolzano υπάρχει  $x_0 \in (e, e^2)$  τέτοιο ώστε  $h(x_0) = 0$ .

ε) Εστω  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$  μία αρχική της συνεχούς συνάρτησης  $f(t)$ , τότε  $F'(x) = f(x)$ .

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ για την  $F$  στο  $[x, x+1]$  οπότε υπάρχει  $\xi \in (x, x+1)$  τέτοιο ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(x+1) - F(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow f(\xi) = \int_1^{x+1} f(t) dt - \int_1^x f(t) dt \Leftrightarrow \frac{1}{\ln \xi} = \int_x^{x+1} f(t) dt \quad (3).$$

Όμως  $x < \xi < x+1 \Leftrightarrow \ln x < \ln \xi < \ln(x+1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\ln x} > \frac{1}{\ln \xi} > \frac{1}{\ln(x+1)} \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\ln x} > \int_x^{x+1} f(t) dt > \frac{1}{\ln(x+1)}.$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x+1)} = 0$  οπότε από κριτήριο παρεμβολής και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt = 0.$$

157. α) Είναι  $f'(x) = 1 - \eta\mu x > 0$  για κάθε  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,

οπότε είναι και 1-1 και αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της  $f^{-1}$  είναι το σύνολο τιμών της  $f$ .

Επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , για το σύνολο τιμών της έχουμε:

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]. \text{ Άρα } A_{f^{-1}} = \left[1, \frac{\pi}{2}\right].$$

β) Είναι  $f^{-1}(f(x)) = x$ , οπότε  $(f^{-1}(f(x)))' = (x)'$  ή

$$(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(x + \sigma\upsilon\nu x) \cdot (1 - \eta\mu x) = 1.$$

$$\text{Για } x = \frac{\pi}{4} \text{ είναι } (f^{-1})'\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'\left(\frac{\pi + 2\sqrt{2}}{4}\right) \cdot \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f^{-1})'\left(\frac{\pi + 2\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{2}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = 2 + \sqrt{2}.$$

γ) Επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα ισχύει:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x + \sigma\upsilon\nu x = x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0 \text{ άρα } x = \frac{\pi}{2}.$$

Κοινό σημείο των  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  είναι το  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

δ) Είναι  $f(x) = x + \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f(x) - x = \sigma\upsilon\nu x \geq 0$  για κάθε  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , άρα  $f(x) \geq x$ . Δηλαδή η

$C_f$  βρίσκεται πάνω από την ευθεία  $y = x$ , οπότε η  $C_{f^{-1}}$  βρίσκεται κάτω από την  $y = x$  και

ισχύει  $f(x) \geq f^{-1}(x)$  για κάθε  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_1^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - f^{-1}(x)) dx = \int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - \int_1^{\frac{\pi}{2}} f^{-1}(x) dx.$$

Θέτουμε  $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$  και  $dx = f'(u) du$ . Για  $x = 1$  είναι

$$f(u) = 1 \Leftrightarrow f(u) = f(0) \Leftrightarrow u = 0, \text{ ενώ για } x = \frac{\pi}{2} \text{ είναι } f(u) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(u) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Οπότε: } E = \int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u f'(u) du \Leftrightarrow E = \int_1^{\frac{\pi}{2}} (x + \sigma\upsilon\nu x) dx - [uf(u)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) du \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{\frac{\pi}{2}} + [\eta\mu x]_1^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sigma\upsilon\nu x) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow E = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8} + 1 = \frac{3}{2}$$



158. α) Αφού η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  τότε και η συνάρτηση  $\frac{\text{συν}t}{3f^2(t)-2f(t)+1}$  είναι συνεχής στο

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  οπότε η συνάρτηση  $f(x) = \int_0^x \frac{\text{συν}t}{3f^2(t)-2f(t)+1} dt$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  με:

$$(1) \quad f'(x) = \frac{\text{συν}x}{3f^2(x)-2f(x)+1}. \text{ Επειδή } 3f^2(x)-2f(x)+1 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ αφού αν τη}$$

θεωρήσουμε τριώνυμο ως προς  $f(x)$  έχει  $\Delta < 0$ . Άρα  $f'(x) > 0$  για  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  οπότε η  $f \uparrow$

στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  με ελάχιστο το  $f(0) = 0$  και μέγιστο το  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

Από την (1)  $\Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x) - 2f(x)f'(x) + f'(x) = \text{συν}x \Rightarrow (f^3(x) - f^2(x) + f(x))' = (\eta\mu x)'$   
 άρα  $f^3(x) - f^2(x) + f(x) = \eta\mu x + c$  για  $x = 0$  έχουμε  $c = 0$ . Άρα  $f^3(x) - f^2(x) + f(x) = \eta\mu x$ .

Αν θέσουμε  $x = \frac{\pi}{2}$  τότε  $f^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]\left[f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1\right] = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ . Άρα το μέγιστο της  $f$  στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  είναι το 1

β) Αφού η  $f \uparrow$  στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  τότε το σύνολο τιμών της  $f$  είναι  $f(A) = \left[f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [0, 1]$

γ) Θεωρούμε την  $g(x) = f(x) - \frac{2}{\pi}x$  η οποία είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

με  $g'(x) = f'(x) - \frac{2}{\pi}$ , επίσης  $g(0) = 0$  και  $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1 - 1 = 0$  άρα  $g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

Οπότε από Θ. Rolle υπάρχει  $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  τέτοιο ώστε  $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{2}{\pi}$



δ) Είναι  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf''(x) dx = [xf'(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) dx = \frac{\pi}{2}f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 - [f(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(0) = -1$ .

159. α) Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με:  $f'(x) = \frac{(\ln x + 1)'x - (\ln x + 1)}{x^2} = \frac{1 \cdot x - \ln x - 1}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$ .

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\ln x}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Όταν  $x \in (0, 1)$ , είναι  $f'(x) > 0$  και η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, 1]$ .

Όταν  $x \in (1, +\infty)$  είναι  $f'(x) < 0$  και η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[1, +\infty)$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$f'$	+	0	-
$f$			

**β)** Εστω  $y = \lambda x$  η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Επειδή τέμνει την  $C_f$  στα

$$\text{σημεία } A(\alpha, f(\alpha)) \text{ και } B(\beta, f(\beta)), \text{ ισχύει: } \begin{cases} f(\alpha) = \lambda\alpha \\ f(\beta) = \lambda\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{f(\alpha)}{\alpha} \\ \lambda = \frac{f(\beta)}{\beta} \end{cases},$$

$$\text{άρα } \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\beta)}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\ln\alpha + 1}{\alpha^2} = \frac{\ln\beta + 1}{\beta^2} \Leftrightarrow \beta^2 \ln\alpha + \beta^2 = \alpha^2 \ln\beta + \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 \ln\alpha - \alpha^2 \ln\beta = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \ln\alpha^{\beta^2} - \ln\beta^{\alpha^2} = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \ln \frac{\alpha^{\beta^2}}{\beta^{\alpha^2}} = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha^{\beta^2}}{\beta^{\alpha^2}} = e^{\alpha^2 - \beta^2} \Leftrightarrow \frac{\alpha^{\beta^2}}{\beta^{\alpha^2}} = \frac{e^{\alpha^2}}{e^{\beta^2}} \Leftrightarrow e^{\beta^2} \alpha^{\beta^2} = e^{\alpha^2} \beta^{\alpha^2} \Leftrightarrow (e\alpha)^{\beta^2} = (e\beta)^{\alpha^2}.$$

**γ)** Η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $[x, x+1]$ ,  $x > 0$  και παραγωγίσιμη στο  $(x, x+1)$  με:

$$g'(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{\ln x + 1}{x} = f(x), \text{ άρα λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχει}$$

$$\xi \in (x, x+1) \text{ τέτοιο ώστε: } g'(\xi) = \frac{g(x+1) - g(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow g'(\xi) = g(x+1) - g(x). \text{ Επειδή η } f \text{ είναι}$$

γνησίως φθίνουσα στο  $[1, +\infty)$ , η  $g'$  είναι γνησίως φθίνουσα. Είναι  $x < \xi < x+1$  και

$$g'(x+1) < g'(\xi) < g'(x) \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)+1}{x+1} < g(x+1) - g(x) < \frac{\ln x + 1}{x}.$$

**δ)** Επειδή η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[1, +\infty)$ , ισχύει:

$$1 \leq x \leq e \Leftrightarrow f(1) \geq f(x) \geq f(e) \Leftrightarrow \frac{2}{e} \leq f(x) \leq 1. \text{ Δηλαδή } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in [1, e].$$

$$\text{Το εμβαδόν είναι: } E = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{\ln x + 1}{x} dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx + \int_1^e \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow$$

$$E = \int_1^e \ln x (\ln x)' dx + [\ln x]_1^e = \left[ \frac{\ln^2 x}{2} \right]_1^e + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

160. **α)**  $f(x) < xf'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} < f'(x)$ ,  $x > 0$ . Η  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[0, x]$  και

παραγωγίσιμη στο  $(0, x)$ , οπότε λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει  $\xi \in (0, x)$

τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$ . Επειδή η  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ , η  $f'$  είναι γνησίως

αύξουσα και  $0 < \xi < x$ , άρα  $f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow f(x) < xf'(x)$ ,  $x > 0$ .

**β)** Επειδή η συνάρτηση  $\frac{f(t)}{t}$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$ , η  $F$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα

$$\text{αυτό με: } F'(x) = \left( \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt \right)' = \frac{f(x)}{x} \text{ και } F''(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}. \text{ Ομως } xf'(x) > f(x), \text{ άρα}$$

$F''(x) > 0$ , οπότε η  $F$  είναι κυρτή στο  $(0, x)$ .

γ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι, η εξίσωση  $g(x)=h(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}-x=e^{-x}-x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}-e^{-x}=0$ ,

έχει το πολύ μια ρίζα στο  $(0, +\infty)$ . Εστω  $t(x)=\frac{f(x)}{x}-e^{-x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

Είναι  $t(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}+e^{-x} > 0$ , άρα η  $t$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ , οπότε η εξίσωση  $t(x)=0$  έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα αυτό.

161. α) Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x)=e^{\alpha x+\beta}+\alpha x e^{\alpha x+\beta}=e^{\alpha x+\beta}(1+\alpha x)$ . Επειδή η  $C_f$  διέρχεται από το σημείο  $A$ , ισχύει:  $f(-1)=-e^2 \Leftrightarrow -e^{-\alpha+\beta}=-e^2 \Leftrightarrow -\alpha+\beta=2$  (1).

Επειδή η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $A$  είναι παράλληλη στην ευθεία  $y=2e^2x-e$ , ισχύει:  $f'(-1)=\lambda=2e^2 \Leftrightarrow e^{-\alpha+\beta}(1-\alpha)=2e^2 \Leftrightarrow e^2(1-\alpha)=2e^2 \Leftrightarrow 1-\alpha=2 \Leftrightarrow \alpha=-1$ .

Τότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:  $1+\beta=2 \Leftrightarrow \beta=1$ .

β) Για  $\alpha=-1$  και  $\beta=1$  είναι  $f(x)=xe^{1-x}$  και  $f'(x)=e^{1-x}(1-x)$ .

Για κάθε  $x < 1$  είναι  $f'(x) > 0$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 1]$ .

Για κάθε  $x > 1$  είναι  $f'(x) < 0$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[1, +\infty)$ .

Είναι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{1-x} = -\infty$  ( $(-\infty) \cdot (+\infty)$ ),

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{1-x} \stackrel{\infty \cdot 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0$$

και  $f(1)=1$ . Για το σύνολο τιμών του διαστήματος  $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ , έχουμε:

$f(\Delta_1) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 1]$ . Για το σύνολο τιμών του διαστήματος  $\Delta_2 = [1, +\infty)$ ,

έχουμε:  $f(\Delta_2) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right) = (0, 1]$ . Άρα  $f(A) = (-\infty, 1] \cup (0, 1] = (-\infty, 1]$ .

γ) Αρκεί να βρούμε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης  $f(x)=k$ .

- Αν  $k > 1$ , τότε η εξίσωση είναι αδύνατη, γιατί λόγω του συνόλου τιμών της  $f$  ισχύει:  $f(x) \leq 1$ .
- Αν  $k = 1$ , τότε η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την  $x = 1$  ( $f(1) = 1$ ).
- Αν  $0 < k < 1$ , τότε η εξίσωση έχει ακριβώς 2 ρίζες, μία στο  $(-\infty, 1)$  και μία στο  $(1, +\infty)$ .
- Αν  $k < 0$ , τότε η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα που βρίσκεται στο διάστημα  $(-\infty, 1)$ .

δ) Για κάθε  $0 \leq x \leq 1$ , είναι  $f(0) \leq f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$ , οπότε το ζητούμενο εμβαδό

$$\text{είναι: } E = \int_0^1 xe^{1-x} dx = -\int_0^1 x(e^{1-x})' dx = -\left[ xe^{1-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x} dx = -1 - \left[ e^{1-x} \right]_0^1 = e - 2.$$

162. α) Η συνάρτηση  $\frac{6t^2+1}{3f^2(t)+2}$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, οπότε η  $f$

$$\text{είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } f'(x) = \frac{6x^2+1}{3f^2(x)+2} \Leftrightarrow 3f'(x)f^2(x)+2f'(x) = 6x^2+1 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (f^3(x)+2f(x))' = (2x^3+x) \Leftrightarrow f^3(x)+2f(x) = 2x^3+x+c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } f(0) = \int_0^0 \frac{6t^2+1}{3f^2(t)+2} dt = 0 \text{ και } f^3(0)+2f(0) = 2 \cdot 0^3 + 0 + c \Leftrightarrow c=0 \text{ και}$$

$$f^3(x)+2f(x) = 2x^3+x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

β) Η σχέση (1) για  $x=0$  γίνεται:  $3f'(0)f^2(0)+2f'(0) = 6 \cdot 0^2 + 1 \Leftrightarrow 2f'(0) = 1 \Leftrightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$ .

$$\text{Η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο } A \text{ έχει εξίσωση: } y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x.$$

γ) Για  $x=1$  είναι  $f(1) = \int_0^1 \frac{6t^2+1}{3f^2(t)+2} dt$ , όμως  $f^3(1)+2f(1) = 2 \cdot 1^3 + 1 \Leftrightarrow f^3(1)+2f(1) - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$(f(1)-1)(f^2(1)+f(1)+3) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1 \text{ ή } f^2(1)+f(1)+3 = 0 \text{ που είναι αδύνατο.}$$

$$\text{Άρα } \int_0^1 \frac{6t^2+1}{3f^2(t)+2} dt = f(1) = 1.$$

δ) Είναι  $f'(x) = (x+1)e^{x-1} \Leftrightarrow f'(x) - (xe^{x-1} + e^{x-1}) = 0 \Leftrightarrow (f(x) - xe^{x-1})' = 0$ . Εστω

$$g(x) = f(x) - xe^{x-1}, \quad x \in [0,1]. \text{ Η } g \text{ είναι συνεχής στο } [0,1] \text{ ως άθροισμα συνεχών}$$

$$\text{συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο } (0,1) \text{ με } g'(x) = (f(x) - xe^{x-1})' = f'(x) - (xe^{x-1} + e^{x-1}).$$

$$\text{Είναι } g(0) = f(0) = 0 \text{ και } g(1) = f(1) - 1 = 0, \text{ δηλαδή } g(0) = g(1), \text{ άρα λόγω του}$$

$$\text{θεωρήματος Rolle υπάρχει } \xi \in (0,1) \text{ τέτοιο ώστε } g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = (\xi+1)e^{\xi-1}.$$

ε) Είναι  $f'(x) = \frac{6x^2+1}{3f^2(x)+2} > 0$  άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

στ) Επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  είναι και 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Επειδή τα κοινά σημεία των  $C_f, C_{f^{-1}}$  βρίσκονται επί της ευθείας  $y = x$  έχουμε:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x, \text{ οπότε η σχέση } f^3(x) + 2f(x) = 2x^3 + x, \text{ γίνεται:}$$

$$x^3 + 2x = 2x^3 + x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \pm 1.$$

$$\text{Άρα τα κοινά σημεία των } C_f, C_{f^{-1}} \text{ είναι τα } (0,0), (1,1) \text{ και } (-1,-1).$$

163. α) Επειδή η  $f$  είναι συνεχής και  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Είναι } f(0) = 1 + \int_0^0 \frac{t}{f(t)} dt = 1 > 0, \text{ άρα } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

β) Η συνάρτηση  $\frac{t}{f(t)}$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , οπότε η συνάρτηση  $\int_0^x \frac{t}{f(t)} dt$  είναι παραγωγίσιμη

στο  $\mathbb{R}$ , άρα η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x) = \left( 1 + \int_0^x \frac{t}{f(t)} dt \right)' = \frac{x}{f(x)} \Leftrightarrow f'(x)f(x) = x \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f^2(x))' = (x^2)' \Leftrightarrow f^2(x) = x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Για  $x=0$  είναι  $f^2(0) = c \Leftrightarrow c=1$  και  $f^2(x) = x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}$ . Επειδή η  $f$  είναι συνεχής και διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ , ισχύει ότι:  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  ή  $f(x) = -\sqrt{x^2 + 1}$ . Επειδή επιπλέον  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , είναι  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$ .

γ) Είναι  $h(x) = \frac{f^2(x)}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$ . Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  με  $h'(x) = -\frac{2}{x^3}$ .

Για  $x < 0$  είναι  $h'(x) > 0$ , οπότε η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 0)$ .

Για  $x > 0$  είναι  $h'(x) < 0$ , οπότε η  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, +\infty)$ .

x	$-\infty$	0	$+\infty$	
h'	+		-	
h	↗		↘	

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty, \quad \text{οπότε:}$$

$$\text{Για το διάστημα } \Delta_1 = (-\infty, 0), \quad \text{έχουμε: } h(\Delta_1) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) \right) = (1, +\infty).$$

$$\text{Για το διάστημα } \Delta_2 = (0, +\infty), \quad \text{έχουμε: } h(\Delta_2) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) \right) = (1, +\infty).$$

$$\text{Το σύνολο τιμών της } h \text{ είναι } h(A) = h(\Delta_1) \cup h(\Delta_2) = (1, +\infty).$$

δ) Εστω  $g(u) = \int_1^u h(t) dt, \quad u \in [x, x+1], \quad x > 0$ . Επειδή η  $h$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$ , η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό. Άρα η  $g$  είναι συνεχής στο  $[x, x+1]$  και παραγωγίσιμη

$$\text{στο } (x, x+1) \text{ με } g'(u) = \left( \int_1^u h(t) dt \right)' = h(u).$$

Λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχει  $\xi \in (x, x+1)$  τέτοιο ώστε:

$$g'(\xi) = \frac{g(x+1) - g(x)}{x+1 - x} = \int_1^{x+1} h(t) dt - \int_1^x h(t) dt = \int_1^{x+1} h(t) dt + \int_x^1 h(t) dt = \int_x^{x+1} h(t) dt.$$

Είναι  $x < \xi < x+1$  και η  $g'(x) = h(x)$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, +\infty)$ , άρα

$$g'(x) > g'(\xi) > g'(x+1) \Leftrightarrow h(x+1) < h(\xi) < h(x) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{(x+1)^2} < \int_x^{x+1} h(t) dt < 1 + \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 1 + \frac{1}{(x+1)^2} \right] = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1, \quad \text{άρα και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} h(t) dt = 1.$$

164. α)  $\int_1^x xf(t)dt \leq x^2 - 2\eta\mu x \Leftrightarrow x \int_1^x f(t)dt - x^2 + 2\eta\mu x \leq 0$ .

Εστω  $g(x) = x \int_1^x f(t)dt - x^2 + 2\eta\mu x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Παρατηρούμε ότι  $g(0) = 0$ . Η ανίσωση γίνεται:  $g(x) \leq g(0)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Δηλαδή η  $g$  παρουσιάζει μέγιστο στο εσωτερικό σημείο  $x = 0$  του πεδίου ορισμού της. Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , η συνάρτηση  $\int_1^x f(t)dt$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , οπότε η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με:

$$g'(x) = \left( x \int_1^x f(t)dt - x^2 + 2\eta\mu x \right)' = \int_1^x f(t)dt + xf(x) - 2x + 2\sigma\upsilon\nu x, \text{ από το θεώρημα Fermat}$$

προκύπτει ότι  $g'(0) = 0 \Leftrightarrow \int_1^0 f(t)dt + 2 = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)dt = 2$

β) Αρκεί η εξίσωση  $f(x) = 2$ , να έχει τουλάχιστον μία ρίζα. Έστω  $h(x) = \int_0^x f(t)dt - 2x$ .

Παρατηρούμε ότι  $h(0) = 0$  και  $h(1) = \int_0^1 f(t)dt - 2 = 0$ , δηλαδή  $h(0) = h(1)$ . Επειδή η  $h$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$  και παραγωγίσιμη στο  $(0, 1)$  με  $h'(x) = f(x) - 2$ , λόγω του θεωρήματος Rolle η εξίσωση  $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2$ , έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο  $(0, 1)$ .

γ) Έστω  $t(x) = \int_2^x f(t)dt$ ,  $x \in [2, 3]$ . Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $[2, 3]$ , η  $t$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό, οπότε είναι συνεχής στο  $[2, 3]$  και παραγωγίσιμη στο  $(2, 3)$  με  $t'(x) = f(x)$ . Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει  $\xi \in (2, 3)$  τέτοιο ώστε

$$t'(\xi) = \frac{t(3) - t(2)}{3 - 2} \Leftrightarrow f(\xi) = \int_2^3 f(t)dt < 0. \text{ Είναι } f(2)f(\xi) < 0 \text{ και η } f \text{ είναι συνεχής στο}$$

διάστημα  $[2, \xi]$ , οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει  $x_0 \in (2, 3)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = 0$ .

165. α) Είναι  $e^x f(x) + f'(x) + \eta\mu x = -e^x f'(x) \Leftrightarrow e^x f(x) + e^x f'(x) + f'(x) = -\eta\mu x$  ή

$$\left[ e^x f(x) + f(x) \right]' = (\sigma\upsilon\nu x)' \Leftrightarrow e^x f(x) + f(x) = \sigma\upsilon\nu x + c, c \in \mathbb{R}.$$

Για  $x = 0$  είναι  $e^0 f(0) + f(0) = \sigma\upsilon\nu 0 + c \Leftrightarrow 2f(0) = 1 + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$ .

Άρα  $e^x f(x) + f(x) = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow (e^x + 1)f(x) = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x + 1}, x \in \mathbb{R}$ .

β)  $f(x) + f(-x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x + 1} + \frac{\sigma\upsilon\nu(-x)}{e^{-x} + 1} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x + 1} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\frac{1}{e^x} + 1} \Leftrightarrow$

$$f(x) + f(-x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x + 1} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\frac{1 + e^x}{e^x}} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x + 1} + \frac{e^x \sigma\upsilon\nu x}{1 + e^x} \Leftrightarrow f(x) + f(-x) = \frac{(e^x + 1)\sigma\upsilon\nu x}{e^x + 1} = \sigma\upsilon\nu x.$$

γ) Είναι  $|f(x)| = \left| \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x + 1} \right| = \frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{e^x + 1} \leq \frac{1}{e^x + 1} \Leftrightarrow -\frac{1}{e^x + 1} \leq f(x) \leq \frac{1}{e^x + 1}$ .

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + 1} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{e^x + 1} \right)$ , από το κριτήριο παρεμβολής είναι και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

δ) Επειδή  $f(x) + f(-x) = \text{συν}x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , έχουμε:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}x dx \quad (1).$$

Θέτουμε  $-x = u$ , τότε  $dx = -du$ . Για  $x = -\frac{\pi}{2}$  είναι  $u = \frac{\pi}{2}$ , ενώ για  $x = \frac{\pi}{2}$  είναι  $u = -\frac{\pi}{2}$ .

$$\text{Τότε: } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(u) du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = I.$$

$$\text{Η (1) γίνεται: } I + I = [\eta\mu x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow 2I = \eta\mu \frac{\pi}{2} - \eta\mu \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow I = 1.$$

ε) Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  με

$$f'(x) = \frac{-\eta\mu x(e^x + 1) - e^x \text{συν}x}{(e^x + 1)^2} = -\frac{\eta\mu x(e^x + 1) + e^x \text{συν}x}{(e^x + 1)^2} < 0, \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως}$$

φθίνουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Για κάθε  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  είναι  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ ,

$$\text{άρα και } \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dx \Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \frac{\pi}{4}.$$

στ) Εστω  $h(x) = 2 \int_0^x \frac{\text{συν}t}{e^t + 1} dt - x = 2 \int_0^x f(t) dt - x$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Είναι  $h'(x) = 2f(x) - 1 < 0$  για κάθε  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , άρα  $h \searrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow h(x) \leq h(0) = 0 \Leftrightarrow 2 \int_0^x \frac{\text{συν}t}{e^t + 1} dt \leq x.$$

ζ)  $1000 \text{συν}x_0 = e^{x_0} + 1 \Leftrightarrow \frac{\text{συν}x_0}{e^{x_0} + 1} = \frac{1}{1000} \Leftrightarrow f(x_0) = 0,001.$

Επειδή ο αριθμός 0,001 ανήκει στο σύνολο τιμών της  $f$ , υπάρχει  $x_0 \in (0, \pi)$  τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = 0,001 \Leftrightarrow 1000 \text{συν}x_0 = e^{x_0} + 1.$$

166. α) Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με  $f'(x) = \frac{1}{x} - \lambda$ . Είναι  $f(1) = -\lambda - 2$ ,  $f'(1) = 1 - \lambda$  και η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $A$  είναι η ευθεία  $\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = (1 - \lambda)x - 3$ .

β) Είναι  $f'(x) = \frac{1}{x} - \lambda = \frac{1 - \lambda x}{x}$ .  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{\lambda}$ .

Για κάθε  $x \in \left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$  είναι  $f'(x) > 0$  άρα η  $f$

είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$ .

Για κάθε  $x \in \left(\frac{1}{\lambda}, +\infty\right)$  είναι  $f'(x) < 0$  άρα η  $f$

είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\left[\frac{1}{\lambda}, +\infty\right)$ .

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{\lambda}$	$+\infty$
$f'$		$\phi$	
		+	-
$f$	↗		↘
		O.M.	

Η  $f$  έχει μέγιστο το  $f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \ln\frac{1}{\lambda} - \lambda\frac{1}{\lambda} - 2 = -\ln\lambda - 3 < 0$ ,

άρα  $f(x) \leq f\left(\frac{1}{\lambda}\right) < 0$  για κάθε  $x > 0$ .

γ) Είναι  $f''(x) = \left(\frac{1}{x} - \lambda\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0$ , οπότε η  $f$  είναι κοίλη στο  $(0, +\infty)$ .

δ) Επειδή η  $f$  είναι κοίλη στο  $(0, +\infty)$  βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό. Άρα η  $f$  βρίσκεται κάτω και από την ευθεία  $\epsilon$  του α) ερωτήματος, δηλαδή  $f(x) \leq (1-\lambda)x - 3$  για κάθε  $x > 0$ .

ε) i. Είναι  $f(x) \leq (1-\lambda)x - 3 \Leftrightarrow (1-\lambda)x - 3 - f(x) \geq 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)x - 3 - \ln x + \lambda x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 - \ln x \geq 0$  για κάθε  $x > 0$ . Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\lambda) = \int_1^\lambda [(1-\lambda)x - 3 - f(x)] dx = \int_1^\lambda (x - 1 - \ln x) dx \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda) = \int_1^\lambda x dx - \int_1^\lambda dx - \int_1^\lambda \ln x (x)' dx \Leftrightarrow E(\lambda) = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^\lambda - \lambda + 1 - [x \ln x]_1^\lambda + \int_1^\lambda x \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda) = \frac{\lambda^2 - 1}{2} - \lambda + 1 - \lambda \ln \lambda + \lambda - 1 \Leftrightarrow E(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1 - 2\lambda \ln \lambda).$$

ii.  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1 - 2\lambda \ln \lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \lambda^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} - 2\frac{\ln \lambda}{\lambda}\right) = +\infty$

γιατί  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\ln \lambda}{\lambda} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\lambda}}{1} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} = 0$ .

167. α) Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με:

$$f'(x) = 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x - 2) + 2\sqrt{x} \frac{1}{x} = \frac{\ln x - 2}{\sqrt{x}} + 2 \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\ln x - 2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

Οπότε  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \ln x\right) = -\infty$  γιατί  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ .

β)  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ .

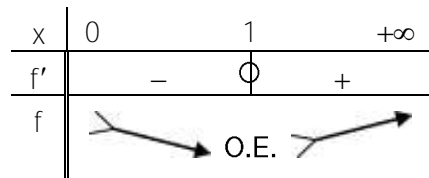
Όταν  $x > 1$  είναι  $f'(x) > 0$  άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$ .

Όταν  $0 < x < 1$  είναι  $f'(x) < 0$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, 1]$ .

Η  $f$  έχει ελάχιστο το  $f(1) = 2\sqrt{1}(\ln 1 - 2) = 2(-2) = -4$ .

γ) Η συνάρτηση  $f'$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με:

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \ln x}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}. \quad f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq e^2.$$





Όταν  $0 < x < e^2$  είναι  $f''(x) > 0$ , άρα η  $f$  είναι κυρτή στο  $(0, e^2)$ . Όταν  $x > e^2$  είναι  $f''(x) < 0$ , άρα η  $f$  είναι κοίλη στο  $[e^2, +\infty)$ .

Η  $f$  έχει σημείο καμπής το  $(e^2, f(e^2)) \equiv (e^2, 0)$ .

$x$	0	$e^2$	$+\infty$
$f''$		+	Φ
$f$			-

δ) Είναι  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = e^2$  και  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in (1, e^2)$ , άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = -\int_1^{e^2} f(x) dx = -2 \int_1^{e^2} \sqrt{x} (\ln x - 2) dx \Leftrightarrow E(\Omega) = -2 \int_1^{e^2} \left( \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right)' (\ln x - 2) dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = -\frac{4}{3} \left[ x^{\frac{3}{2}} (\ln x - 2) \right]_1^{e^2} + \frac{4}{3} \int_1^{e^2} x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x} dx = -\frac{4}{3} [e^3 (2 - 2) - (-2)] + \frac{4}{3} \int_1^{e^2} x^{\frac{1}{2}} dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = -\frac{8}{3} + \frac{4}{3} \left[ \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^{e^2} = -\frac{8}{3} + \frac{8}{9} (e^3 - 1) = \frac{8(e^3 - 2)}{9}.$$

168. α) Επειδή οι  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$ , ισχύει:  $(f^2(x) + g^2(x))' = (4)'$  ή

$$2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 0. \text{ Επειδή } f'(x) = g^2(x), \text{ είναι}$$

$$2f(x)g^2(x) + 2g(x)g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2g(x)g'(x) = -2f(x)g^2(x) \Leftrightarrow g'(x) = \frac{\cancel{2}f(x)g^{\cancel{2}}(x)}{\cancel{2}g(x)} \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = -f(x)g(x).$$

β) Επειδή η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  είναι και συνεχής και αφού  $g(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ . Είναι  $g(0) = 2 > 0$ , άρα  $g(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Είναι  $f'(x) = g^2(x) > 0$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Είναι } f^2(0) + g^2(0) = 4 \stackrel{g(0)=2}{\Leftrightarrow} f^2(0) + 4 = 4 \Leftrightarrow f^2(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

Για  $x < 0$  είναι  $f(x) < f(0) = 0 \stackrel{g(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)g(x) < 0 \Leftrightarrow -f(x)g(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$  και  $g$  γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 0]$ .

Για  $x > 0$  είναι  $f(x) > f(0) = 0 \stackrel{g(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)g(x) > 0 \Leftrightarrow -f(x)g(x) < 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0$  και  $g$  γνησίως φθίνουσα στο  $[0, +\infty)$ . Η  $g$  παρουσιάζει ολικό μέγιστο το  $g(0) = 2$ .

γ) Επειδή η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , η  $f'$  είναι παραγωγίσιμη με:

$$f''(x) = (g^2(x))' = 2g(x)g'(x).$$

Για  $x < 0$  είναι  $g'(x) > 0$  και αφού  $g(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $f''(x) > 0$ , οπότε η  $f$  είναι κυρτή στο  $(-\infty, 0]$ .

Για  $x > 0$  είναι  $g'(x) < 0$ , οπότε  $f''(x) < 0$  και  $f$  κοίλη στο  $[0, +\infty)$ .

Η  $f$  έχει σημείο καμπής το  $(0, f(0)) \equiv (0, 0)$ .

δ) Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $O$  είναι η ευθεία  $\varepsilon: y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ .

Όμως  $f'(0) = g^2(0) = 4$ , άρα  $\varepsilon: y = 4x$ .

ε) Επειδή η  $f$  είναι κοίλη στο  $[0, +\infty)$  βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό. Δηλαδή  $f(x) \leq 4x$  για κάθε  $x \in [0, +\infty)$ . Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_0^1 |f(x) - 4x| dx = \int_0^1 (4x - f(x)) dx = \int_0^1 4x dx + \int_0^1 \frac{g'(x)}{g(x)} dx \Leftrightarrow$$

$$E = 2[x^2]_0^1 + [\ln g(x)]_0^1 = 2 + (\ln g(1) - \ln g(0)) = 2 - \ln 2.$$

169. α)  $\int_0^x (t^2 + 1)f''(t) dt + 2 \int_0^x tf'(t) dt + \int_0^2 xtf(x) dt = 0 \Leftrightarrow$

$$\int_0^x (t^2 + 1)f''(t) dt + 2 \int_0^x tf'(t) dt + xf(x) \int_0^2 t dt = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x (t^2 + 1)f''(t) dt + 2 \int_0^x tf'(t) dt + xf(x) \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x (t^2 + 1)f''(t) dt + 2 \int_0^x tf'(t) dt + 2xf(x) = 0.$$

Παραγωγίζοντας κατά μέλη την προηγούμενη σχέση έχουμε:

$$\left( \int_0^x (t^2 + 1)f''(t) dt + 2 \int_0^x tf'(t) dt + 2xf(x) \right)' = 0 \text{ ή}$$

$$(x^2 + 1)f''(x) + 2xf'(x) + 2f(x) + 2xf'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[ (x^2 + 1)f'(x) \right]' + [2xf(x)]' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[ (x^2 + 1)f'(x) + 2xf(x) \right]' = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)f'(x) + 2xf(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Για  $x = 0$  είναι  $f'(0) = c \Leftrightarrow c = 2$  και  $(x^2 + 1)f'(x) + 2xf(x) = 2 \Leftrightarrow$

$$(x^2 + 1)f'(x) + (x^2 + 1)'f(x) = (2x)' \Leftrightarrow \left[ (x^2 + 1)f(x) \right]' = (2x)' \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 1)f(x) = 2x + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Για  $x = 0$  είναι  $f(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$  και  $(x^2 + 1)f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}.$

β) Είναι  $|h(x) + x - 3| \leq |f(x)| \Leftrightarrow -|f(x)| \leq h(x) + x - 3 \leq |f(x)|.$

Όμως  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{2x}{x^2 + 1} \right| = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-|f(x)|)$ , οπότε από το κριτήριο παρεμβολής

προκύπτει ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) + x - 3) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - (-x + 3)) = 0$ . Άρα η ευθεία  $y = -x + 3$

είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $h$  στο  $+\infty$ .

γ) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:  $E = \int_0^3 |h(x) - (-x + 3)| dx.$

Είναι  $|h(x) + x - 3| \leq |f(x)| \Leftrightarrow |h(x) + x - 3| - |f(x)| \leq 0$ , άρα και

$$\int_0^3 [|h(x) + x - 3| - |f(x)|] dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^3 |h(x) + x - 3| dx \leq \int_0^3 |f(x)| dx. \text{ Όμως } f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \geq 0 \text{ για}$$

κάθε  $x \in [0, 3]$ , άρα  $\int_0^3 |h(x) + x - 3| dx \leq \int_0^3 \frac{2x}{x^2 + 1} dx = [\ln(x^2 + 1)]_0^3 = \ln 10.$

170. **α)** Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $[1, \lambda]$  και  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [1, \lambda]$ , ισχύει:

$$E(\lambda) = \int_1^\lambda f(x) dx = \int_1^\lambda \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x dx \Leftrightarrow E(\lambda) = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^\lambda - \int_1^\lambda \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx = \frac{\lambda^3}{3} \ln \lambda - \frac{1}{3} \int_1^\lambda x^2 dx \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda) = \frac{\lambda^3}{3} \ln \lambda - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^\lambda = \frac{\lambda^3}{3} \ln \lambda - \frac{\lambda^3 - 1}{9} = \frac{1}{9} (3\lambda^3 \ln \lambda - \lambda^3 + 1).$$

**β)** Η συνάρτηση  $E(\lambda)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(1, +\infty)$  με

$$E'(\lambda) = \frac{1}{9} \left( 9\lambda^2 \ln \lambda + 3\lambda^3 \frac{1}{\lambda} - 3\lambda^2 \right) = \lambda^2 \ln \lambda > 0 \text{ για κάθε } \lambda \in (1, +\infty), \text{ άρα η } E(\lambda) \text{ είναι}$$

γνησίως αύξουσα στο  $(1, +\infty)$ . Είναι  $\lim_{\lambda \rightarrow 1^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 1^+} \frac{1}{9} (3\lambda^3 \ln \lambda - \lambda^3 + 1) = 0$  και

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{9} (3\lambda^3 \ln \lambda - \lambda^3 + 1) \Leftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{9} \lambda^3 \left( 3 \ln \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda^3} \right) \right] = +\infty.$$

Για το σύνολο τιμών της  $E$  ισχύει:  $E((1, +\infty)) = \left( \lim_{\lambda \rightarrow 1^+} E(\lambda), \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) \right) = (0, +\infty)$ .

Αν  $\alpha \leq 0$ , τότε η εξίσωση  $E(\lambda) = \alpha$  είναι προφανώς αδύνατη.

Αν  $\alpha > 0$ , τότε επειδή το  $\alpha$  ανήκει στο σύνολο τιμών της  $E$  και η  $E$  είναι γνησίως αύξουσα, η εξίσωση  $E(\lambda) = \alpha$  έχει μοναδική ρίζα.

**γ)** Αρκεί  $x^{x^2} \geq e^{-\frac{1}{2e}} \Leftrightarrow \ln x^{x^2} \geq \ln e^{-\frac{1}{2e}} \Leftrightarrow x^2 \ln x \geq -\frac{1}{2e} \Leftrightarrow f(x) \geq -\frac{1}{2e}$ .

Είναι  $f'(x) = x(2 \ln x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{1}{2}}$ .

Για κάθε  $x > e^{-\frac{1}{2}}$  είναι  $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow \left( e^{-\frac{1}{2}}, +\infty \right)$  και

για κάθε  $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$  είναι  $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow \left( 0, e^{-\frac{1}{2}} \right)$ .

Η  $f$  έχει ελάχιστο το  $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2e}$ , άρα  $f(x) \geq -\frac{1}{2e} \Leftrightarrow x^2 \ln x \geq -\frac{1}{2e} \Leftrightarrow x^{x^2} \geq e^{-\frac{1}{2e}}$  και

επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για  $x = e^{-\frac{1}{2}}$ , είναι και:  $\int_1^e x^{x^2} dx > \int_1^e e^{-\frac{1}{2e}} dx$ .

171. **α)** Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 = f(0)$ ,

άρα η  $f$  είναι συνεχής στο 0.

**β)** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με  $f'(x) = \ln x + 1$ .

Είναι  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq e^{-1} = \frac{1}{e}$ .

Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$  και  $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$ .

Για κάθε  $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$  είναι  $f'(x) < 0$ ,

άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ .

Οπότε  $f\left(\left(0, \frac{1}{e}\right]\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(0)\right] = \left[-\frac{1}{e}, 0\right)$ .

Για κάθε  $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$  είναι  $f'(x) > 0$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ .

Οπότε  $f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$ .

Το σύνολο τιμών της  $f$  είναι:

$$f(A) = f\left(\left(0, \frac{1}{e}\right]\right) \cup f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)\right) = \left[-\frac{1}{e}, 0\right) \cup \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

**γ)**  $x = e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x \ln x = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha \quad (1)$ .

- Αν  $\alpha < -\frac{1}{e}$ , τότε  $\alpha \notin f(A)$  και η (1) είναι αδύνατη.
- Αν  $\alpha = -\frac{1}{e}$ , τότε επειδή  $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$  και  $f(x) > -\frac{1}{e}$  για κάθε  $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ , η (1) έχει μοναδική ρίζα την  $x = \frac{1}{e}$ .
- Αν  $\alpha \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$  τότε:
  - Υπάρχει  $x_1 \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$  τέτοιο ώστε  $f(x_1) = \alpha$  και αφού η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό, το  $x_1$  είναι μοναδικό.
  - Υπάρχει  $x_2 \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$  τέτοιο ώστε  $f(x_2) = \alpha$  και αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, το  $x_2$  είναι μοναδικό. Άρα η (1) έχει ακριβώς δύο ρίζες στη περίπτωση αυτή.
- Αν  $\alpha \in [0, +\infty)$ , τότε υπάρχει  $x_1 \in [1, +\infty)$  ( $f(1) = 0$ ) τέτοιο, ώστε  $f(x_1) = \alpha$  και αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, το  $x_1$  είναι μοναδικό.

Άρα η (1) έχει ακριβώς μία ρίζα στη περίπτωση αυτή.

**δ)** Η  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[x, x+1]$ ,  $x > 0$  και παραγωγίσιμη στο  $(x, x+1)$ , οπότε λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχει  $\xi \in (x, x+1)$ , τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x).$$

Είναι  $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$  για κάθε  $x > 0$ , οπότε η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

Είναι  $x < \xi < x+1$ , οπότε  $f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$ .

$x$	0	$1/e$	$+\infty$
$f'$	-	0	+
$f$			

ε) Εστω ευθεία  $x = \lambda$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ . Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την  $C_f$ , τον  $x$ , την  $x = \lambda$  και την  $x = 1$  είναι:

$$E(\lambda) = \int_{\lambda}^1 |f(x)| dx = -\int_{\lambda}^1 x \ln x dx = -\int_{\lambda}^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx = -\left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_{\lambda}^1 + \int_{\lambda}^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} \ln \lambda + \left[\frac{x^2}{4}\right]_{\lambda}^1 = \frac{\lambda^2}{4} \ln \lambda + \frac{1-\lambda^2}{4} = \frac{\lambda^2 \ln \lambda + 1 - \lambda^2}{4} = \frac{1}{4} \lambda^2 (\ln \lambda - 1) + \frac{1}{4}.$$

Το ζητούμενο εμβαδό είναι το  $E(\Omega) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{4} \lambda^2 (\ln \lambda - 1) + \frac{1}{4}\right]$ .

$$\text{Επειδή } \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda^2 (\ln \lambda - 1) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\ln \lambda - 1}{\frac{1}{\lambda^2}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{2}{\lambda^3}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) = 0,$$

$$\text{είναι } E(\Omega) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda) = \frac{1}{4}.$$

$$172. \text{ α) } e^x (f(x) - 2) + f'(x)(e^x + 1) = 0 \Leftrightarrow e^x f(x) - 2e^x + f'(x)(e^x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x + 1)' f(x) + f'(x)(e^x + 1) = 2e^x \Leftrightarrow [(e^x + 1)f(x)]' = (2e^x)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x + 1)f(x) = 2e^x + c \Leftrightarrow f(x) = \frac{2e^x + c}{e^x + 1}.$$

$$\text{Είναι } f(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{2+c}{2} = 1 \Leftrightarrow c = 0, \text{ άρα } f(x) = \frac{2e^x}{1+e^x}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{β) } e^x (2 - \alpha) - \alpha = 0 \Leftrightarrow 2e^x - \alpha e^x - \alpha = 0 \Leftrightarrow 2e^x - \alpha(e^x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2e^x = \alpha(e^x + 1) \Leftrightarrow \frac{2e^x}{e^x + 1} = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha.$$

Θα βρούμε το σύνολο τιμών της  $f$  για να διαπιστώσουμε αν υπάρχουν  $x \in A$  ώστε

$$f(x) = \alpha. \text{ Είναι } f'(x) = \frac{2e^x(1+e^x) - 2e^x e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{2e^x(1+e^x - e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} > 0, \text{ άρα η } f \text{ είναι}$$

γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ . Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{1+e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{e^x \left(\frac{1}{e^x} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\frac{1}{e^x} + 1} = 2$  και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x}{1+e^x} = \frac{0}{1+0} = 0. \text{ Είναι } f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) = (0, 2).$$

• Αν  $\alpha \in (0, 2)$ , τότε υπάρχει μοναδικός  $x_0 \in A = \mathbb{R}$  τέτοιος ώστε  $f(x_0) = \alpha$ .

• Αν  $\alpha \leq 0$  ή  $\alpha \geq 2$  η εξίσωση  $f(x) = \alpha$  είναι αδύνατη.

$$\text{γ) Είναι } f'(0) = \frac{2e^0}{(1+e^0)^2} = \frac{1}{2}. \text{ Η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο } M \text{ έχει εξίσωση:}$$

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 1.$$

Είναι

$$f''(x) = \frac{2e^x(1+e^x)^2 - 2e^x 2(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^2} \Leftrightarrow f''(x) = \frac{2e^x(1+e^x)[(1+e^x) - 2e^x]}{(1+e^x)^4} = \frac{2e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}.$$

Για κάθε  $x \in (0,1)$  είναι  $f''(x) > 0$  άρα η  $f$  είναι κοίλη στο  $[0,1]$ , επομένως βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό. Δηλαδή  $f(x) \leq \frac{1}{2}x + 1$  για κάθε  $x \in [0,1]$ .

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:  $E(\Omega) = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2}x + 1 - f(x) \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x dx + \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{2e^x}{1+e^x} dx \Leftrightarrow$

$$E(\Omega) = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + 1 - 2 \int_0^1 \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} dx = \frac{1}{4} + 1 - 2 \left[ \ln(1+e^x) \right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \frac{5}{4} - 2(\ln(1+e) - \ln 2) = \frac{5}{4} - 2 \ln \frac{1+e}{2}.$$

173. α)  $\int_0^x e^{-f(t)} dt - f(x) = \frac{1}{2} f^2(x) \Leftrightarrow 2 \int_0^x e^{-f(t)} dt - 2f(x) = f^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x) = 2 \int_0^x e^{-f(t)} dt \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x) + 1 = 2 \int_0^x e^{-f(t)} dt + 1 \Leftrightarrow (f(x) + 1)^2 = 2 \int_0^x e^{-f(t)} dt + 1.$

Είναι  $e^{-f(t)} > 0$ , οπότε για κάθε  $x \geq 0$  είναι και  $\int_0^x e^{-f(t)} dt \geq 0 \Leftrightarrow \int_0^x e^{-f(t)} dt + 1 \geq 1 > 0$ , άρα και  $(f(x) + 1)^2 > 0$ , οπότε  $f(x) + 1 \neq 0$ . Επειδή η συνάρτηση  $f(x) + 1$  είναι συνεχής στο  $[0, +\infty)$ , και  $f(x) + 1 \neq 0$  για κάθε  $x \geq 0$ , η  $f(x) + 1$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $[0, +\infty)$ . Επειδή  $f(0) + 1 = 1 > 0$  είναι και  $f(x) + 1 > 0$  για κάθε  $x \geq 0$ .

β) Είναι  $\left( 2 \int_0^x e^{-f(t)} dt - 2f(x) \right)' = (f^2(x))'$ ,

άρα  $2e^{-f(x)} - 2f'(x) = 2f(x)f'(x) \Leftrightarrow f(x)f'(x)e^{f(x)} + f'(x)e^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)(e^{f(x)})' + f'(x)e^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow (f(x)e^{f(x)})' = 1 \Leftrightarrow f(x)e^{f(x)} = x + c, c \in \mathbb{R}.$

Για  $x=0$  είναι  $f(0)e^{f(0)} = c \Leftrightarrow c=0$ , οπότε  $f(x)e^{f(x)} = x \Leftrightarrow f(x) = xe^{-f(x)}$  για κάθε  $x \geq 0$ .

γ) Για  $x=0$  είναι  $f(0) = 0 \cdot e^{-f(0)} = 0$ .

$f'(x) = (xe^{-f(x)})' = e^{-f(x)} - xf'(x)e^{-f(x)} \Leftrightarrow f'(x) + xf'(x)e^{-f(x)} = e^{-f(x)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)(1 + xe^{-f(x)}) = e^{-f(x)} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^{-f(x)}}{1 + xe^{-f(x)}} = \frac{e^{-f(x)}}{1 + \frac{x}{e^{f(x)}}} = \frac{1}{e^{f(x)} + x}.$

Για  $x=0$  είναι  $f'(0) = \frac{1}{e^{f(0)} + 0} = 1$ . Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο

$x_0 = 0$  είναι η ευθεία  $\varepsilon: y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x$

**δ)** Είναι  $f''(x) = \left( \frac{1}{e^{f(x)} + x} \right)' = -\frac{(e^{f(x)} + x)'}{(e^{f(x)} + x)^2} = -\frac{f'(x)e^{f(x)} + 1}{(e^{f(x)} + x)^2} < 0$ , οπότε η  $f$  είναι κοίλη στο

$[0, +\infty)$ . Επειδή η  $f$  είναι κοίλη, βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της, άρα βρίσκεται κάτω και από την  $\varepsilon$ , οπότε ισχύει:  $f(x) \leq x$  για κάθε  $x \geq 0$ .

**ε)** Είναι  $f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)} + x} > 0$  για κάθε  $x \geq 0$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ , οπότε

είναι και 1-1 και αντιστρέφεται.  $f(x) = y \Leftrightarrow x = ye^y$ , άρα  $f^{-1}(x) = xe^x$ ,  $x > -1$

**στ)** Θέτουμε  $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$ , τότε  $dx = f'(u)du$ .

Για  $x=0$  είναι  $f(u)=0=f(0) \Leftrightarrow u=0$  και για  $x=1$  είναι  $f(u)=1 \Leftrightarrow 1 \cdot e^1 = u \Leftrightarrow u=e$ .

Άρα  $\Pi = \int_0^e f(x)dx + \int_0^1 f^{-1}(x)dx = \int_0^e f(x)dx + \int_0^e uf'(u)du \Leftrightarrow$

$\Pi = \int_0^e f(x)dx + [uf(u)]_0^e - \int_0^e f(u)du = ef(e)$  ή  $\Pi = e \cdot 1 = e$ .

**ζ)** Επειδή  $f(x) \leq x$  για κάθε  $x \geq 0$ , είναι  $E(\lambda) = \int_0^{\lambda e^\lambda} (x - f(x))dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\lambda e^\lambda} - \int_0^{\lambda e^\lambda} f(x)dx$ .

Επειδή  $x = f^{-1}(y)$  και  $f(x)e^{f(x)} = x$ , για κάθε  $x \geq 0$  έχουμε:  $ye^y = f^{-1}(y)$ . Θέτουμε

$x = f^{-1}(y) = ye^y$ , τότε  $dx = (e^y + ye^y)dy$ . Για  $x=0$  είναι  $y=0$  και για  $x = \lambda e^\lambda$  είναι  $y = \lambda$ .

Τότε  $E(\lambda) = \frac{\lambda^2 e^{2\lambda}}{2} - \int_0^\lambda y(e^y + ye^y)dy = \frac{\lambda^2 e^{2\lambda}}{2} - \int_0^\lambda e^y (y + y^2)dy \Leftrightarrow$

$E(\lambda) = \frac{\lambda^2 e^{2\lambda}}{2} - \int_0^\lambda (y + y^2)(e^y)' dy \Leftrightarrow E(\lambda) = \frac{\lambda^2 e^{2\lambda}}{2} - [(y + y^2)e^y]_0^\lambda + \int_0^\lambda (1 + 2y)e^y dy \Leftrightarrow$

$E(\lambda) = \frac{\lambda^2 e^{2\lambda}}{2} - (\lambda + \lambda^2)e^\lambda + \int_0^\lambda (1 + 2y)(e^y)' dy \Leftrightarrow$

$E(\lambda) = \frac{\lambda^2 e^{2\lambda}}{2} - (\lambda + \lambda^2)e^\lambda + [(1 + 2y)e^y]_0^\lambda - \int_0^\lambda 2e^y dy \Leftrightarrow$

$E(\lambda) = \frac{\lambda^2 e^{2\lambda}}{2} - (\lambda + \lambda^2)e^\lambda + (1 + 2\lambda)e^\lambda - 1 - 2[e^y]_0^\lambda \Leftrightarrow$

$E(\lambda) = \frac{\lambda^2 e^{2\lambda}}{2} - (\lambda + \lambda^2)e^\lambda + (1 + 2\lambda)e^\lambda - 1 - 2e^\lambda + 2 \Leftrightarrow$

$E(\lambda) = \frac{\lambda^2 e^{2\lambda}}{2} - (\lambda^2 - \lambda + 1)e^\lambda + 1$

**η)**  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\lambda^2 e^{2\lambda}}{2} - (\lambda^2 - \lambda + 1)e^\lambda + 1 \right] \Leftrightarrow$

$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left[ \lambda^2 e^{2\lambda} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{e^\lambda} + \frac{1}{\lambda e^\lambda} - \frac{1}{\lambda^2 e^\lambda} + \frac{1}{\lambda^2 e^{2\lambda}} \right) \right] = +\infty$ .

174. **α)** Για  $x \neq 0$  έχουμε  $f(x) = \int_0^1 e^{tx^2} dt = \left[ \frac{e^{tx^2}}{x^2} \right]_0^1 = \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$ .

**β)** Είναι  $f(0) = \int_0^1 e^0 dt = 1$ .

$$\gamma) \text{ Άρα } f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2} = 1 = f(0) \text{ οπότε η } f \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = 0.$$

$$\delta) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}-1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2}-2x}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2}-2}{3x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x2e^{x^2}}{3} = 0, \text{ οπότε } f'(0) = 0.$$

$$\epsilon) \text{ Για } x \geq 0 \text{ είναι } f'(x) = \frac{2x(x^2e^{x^2}-e^{x^2}+1)}{x^4} = \frac{2(x^2e^{x^2}-e^{x^2}+1)}{x^3}$$

Εστω  $g(x) = x^2e^{x^2} - e^{x^2} + 1, x \geq 0$ . Είναι  $g'(x) = 2x^3e^{x^2} > 0$  άρα η  $g \uparrow$  στο  $[0, +\infty)$ .

Για  $x > 0$ :  $g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$  άρα  $f'(x) > 0$  οπότε  $f \uparrow$  στο  $[0, +\infty)$ .

$$\sigma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}-1}{x^3} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2xe^{x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x^2}}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4xe^{x^2}}{3} = +\infty.$$

175. α) Θεωρώ  $g(x) = e^{-x}f(x) - x, x \in \mathbb{R}$ .

Είναι  $g'(x) = e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) - 1 = e^{-x}(f'(x) - f(x) - e^x) > 0$  άρα η  $g \uparrow$  οπότε για  $x > 0$  είναι  $g(x) > g(0) \Leftrightarrow e^{-x}f(x) - x > 0 \Leftrightarrow e^{-x}f(x) > x \Leftrightarrow f(x) > xe^x$  (1).

β) Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση  $h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - 2e^{x-1}$  έχει μοναδική λύση στο  $[0, 1]$ . Είναι  $h(0) = f(0) - 2e^{-1} = -\frac{2}{e} < 0$  και  $h(1) = f(1) - 2 > 0$  γιατί αν στην (1)

θέσουμε όπου  $x = 1$  είναι  $f(1) > e > 2 \Leftrightarrow f(1) - 2 > 0$ . Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $h'(x) = f'(x) - 2e^{x-1} > f(x) + e^x - 2e^{x-1} > xe^x + e^x - 2e^{x-1} > 0$  γιατί αν θέσουμε

$\varphi(x) = xe^x + e^x - 2e^{x-1}$  είναι  $\varphi'(x) = e^x + xe^x - e^x - 2e^{x-1} = 2(e^x - e^{x-1}) + xe^x > 0$  όπου

$x \in [0, 1]$  αφού  $e^x > e^{x-1}$ . Άρα η  $\varphi \uparrow$  οπότε για  $x > 0$  είναι  $\varphi(x) > \varphi(0) = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e} > 0$ .

Οπότε  $h(0) \cdot h(1) < 0$  και από Θ. Bolzano υπάρχει λύση η οποία αφού η  $h$  είναι  $\uparrow$  τότε είναι μοναδική.

γ) Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την  $f$  στο  $[0, 1]$  οπότε υπάρχει  $\xi \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(1)-f(0)}{1} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(1). \text{ Από την (1) για } x = 1 \text{ είναι } f(1) > e. \text{ Άρα } f'(\xi) > e$$

δ) Αφού  $f(x) > xe^x$  τότε για  $x > 0$  είναι  $f(x) > xe^x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$  οπότε  $E(\lambda) = \int_0^\lambda f(x) dx$ .

Από τη σχέση  $f(x) > xe^x$  προκύπτει ότι

$$\int_0^\lambda f(x) dx > \int_0^\lambda xe^x dx \Leftrightarrow E(\lambda) > [xe^x]_0^\lambda - \int_0^\lambda e^x dx \Leftrightarrow E(\lambda) > \lambda e^\lambda - e^\lambda + 1 \text{ και}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\lambda e^\lambda - e^\lambda + 1) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} [(\lambda - 1)e^\lambda + 1] = +\infty \text{ άρα και } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = +\infty.$$



176. α) Επειδή η συνάρτηση  $tg(t)$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , η  $f$  είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \left( \int_2^x e^{tg(t)} dt \right)' = e^{xg(x)}. \text{ Είναι } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ οπότε η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα}$$

στο  $\mathbb{R}$ . Παρατηρούμε ότι  $f(2) = \int_2^2 e^{tg(t)} dt = 0$ , άρα για κάθε  $x < 2$  είναι

$$f(x) < f(2) \Leftrightarrow f(x) < 0, \text{ ενώ για κάθε } x > 2 \text{ είναι } f(x) > f(2) = 0.$$

β) Επειδή  $f'(x) = e^{xg(x)}$ , έχουμε:  $f(x) + xe^{xg(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) + xf'(x) = 0$  ή  $(xf(x))' = 0$ .

Εστω  $h(x) = xf(x)$ ,  $x \in [0, 2]$ . Η  $h$  είναι συνεχής στο  $[0, 2]$  ως γινόμενο συνεχών

συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο  $(0, 2)$  με  $h'(x) = (xf(x))' = f(x) + xf'(x)$ .

Είναι  $h(0) = 0f(0) = 0$ ,  $h(2) = 2f(2) = 0$ , δηλαδή  $h(0) = h(2)$ , άρα λόγω του θεωρήματος

Rolle, η εξίσωση  $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + xf'(x) = 0$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο  $(0, 2)$ .

$$\gamma) \int_0^x \left( \int_2^u e^{tg(t)} dt \right) du \geq \int_{-x}^0 \left( \int_2^u e^{tg(t)} dt \right) du \Leftrightarrow \int_0^x f(u) du \geq \int_{-x}^0 f(u) du \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x f(u) du - \int_{-x}^0 f(u) du \geq 0 \Leftrightarrow \int_0^x f(u) du + \int_0^{-x} f(u) du \geq 0.$$

Εστω  $F(x) = \int_0^x f(u) du + \int_0^{-x} f(u) du$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Επειδή η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  είναι και

συνεχής και επειδή η  $-x$  είναι παραγωγίσιμη, οι συναρτήσεις  $\int_0^x f(u) du$  και  $\int_0^{-x} f(u) du$ ,

είναι παραγωγίσιμες, οπότε και η  $F$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $F'(x) = f(x) - f(-x)$ .

$$\text{Είναι } F'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) - f(-x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(-x) \Leftrightarrow x \geq -x \Leftrightarrow 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Για κάθε  $x < 0$  είναι  $F'(x) < 0$ ,

άρα  $F$  γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 0]$ .

Για κάθε  $x > 0$  είναι  $F'(x) > 0$ ,

άρα  $F$  γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ .

Η  $F$  έχει ελάχιστο το  $F(0) = 0$ ,

$$\text{άρα } F(x) \geq F(0) \Leftrightarrow \int_0^x f(u) du + \int_0^{-x} f(u) du \geq 0 \Leftrightarrow \int_0^x f(u) du \geq \int_{-x}^0 f(u) du.$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$F'$	$-$	$\emptyset$	$+$
$F$			

177. α) Είναι  $f^3(x) + 2f(x) = x$  (1) και θέτω στην (1) όπου  $x = x_0$  οπότε  $f^3(x_0) + 2f(x_0) = x_0$  (2).

Αφαιρώντας (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:

$$f^3(x) - f^3(x_0) + 2f(x) - 2f(x_0) = x - x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x) - f(x_0))(f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0)) + 2(f(x) - f(x_0)) = x - x_0$$

$$\Leftrightarrow [f(x) - f(x_0)][f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 2] = x - x_0 \quad (3)$$

$$\text{όμως } f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 2 > 0 \Leftrightarrow \left( f(x) + \frac{f(x_0)}{2} \right)^2 + \frac{3f^2(x_0)}{4} + 2 > 0.$$

Οπότε (3)  $\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{x - x_0}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 2}$  (4)

άρα  $|f(x) - f(x_0)| = \frac{|x - x_0|}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 2} \leq \frac{|x - x_0|}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{|x - x_0|}{2} \leq f(x) - f(x_0) \leq \frac{|x - x_0|}{2}$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left( -\frac{|x - x_0|}{2} \right) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x - x_0|}{2}$

οπότε από κριτήριο παρεμβολής  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

για κάθε  $x_0 \in \mathbb{R}$ , οπότε η  $f$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

**β)** Εστω  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $f(x_1) = f(x_2)$  οπότε  $f^3(x_1) = f^3(x_2)$  και  $2f(x_1) = 2f(x_2)$

άρα  $f^3(x_1) + 2f(x_1) = f^3(x_2) + 2f(x_2) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2$  οπότε η  $f$  είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Αν  $f(x) = y$ , τότε  $f^{-1}(y) = x$  και η (1) γίνεται  $y^3 + 2y = f^{-1}(y)$ , άρα  $f^{-1}(x) = x^3 + 2x$ .

**γ)** Από την (1)  $\Leftrightarrow f(x)(f^2(x) + 2) = x \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{f^2(x) + 2}$  οπότε για  $x < 0$  είναι  $f(x) < 0$

ενώ για  $x > 0$  είναι  $f(x) > 0$ . Επίσης  $f(0) = 0$ .

**δ)** Για  $x \neq x_0$  από την (4)  $\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 2}$  οπότε

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 2}$ , άρα  $f'(x_0) = \frac{1}{3f^2(x_0) + 2}$ , αφού η  $f$

είναι συνεχής στο  $x_0$ . Άρα η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = \frac{1}{3f^2(x) + 2}$  (5).

**ε)** Αφού η  $f$  είναι παραγωγίσιμη τότε και η συνάρτηση  $\frac{1}{3f^2(x) + 2}$  είναι παραγωγίσιμη,

άρα από τη σχέση (5) η  $f'$  είναι παραγωγίσιμη με  $f''(x) = \frac{-6f(x)f'(x)}{(3f^2(x) + 2)^2}$ .

Από τη σχέση (5) έχουμε  $f'(x) > 0$ . Για  $x < 0$  είναι  $f(x) < 0 \Leftrightarrow -6f(x) > 0$  άρα  $f''(x) > 0$ ,

ενώ για  $x > 0$  είναι  $f(x) > 0 \Leftrightarrow -6f(x) < 0$  άρα  $f''(x) < 0$  και  $f''(0) = 0$ .

Οπότε η γραφική παράσταση της  $f$  έχει μοναδικό σημείο καμπής το  $(0, 0)$ .

**στ)** Εστω  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$  μια παράγουσα της συνεχούς συνάρτησης  $f$ , τότε  $F'(x) = f(x)$  και

$F''(x) = f'(x) > 0$  οπότε η  $F' \uparrow$  στο  $\mathbb{R}$ . Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ για την  $F$  στα διαστήματα

$[x-1, x]$  και  $[x, x+1]$  οπότε υπάρχουν  $\xi_1 \in (x-1, x)$  και  $\xi_2 \in (x, x+1)$  τέτοια ώστε

$F'(\xi_1) = \frac{F(x) - F(x-1)}{x - (x-1)} \Leftrightarrow F'(\xi_1) = \int_1^x f(t) dt - \int_1^{x-1} f(t) dt \Leftrightarrow F'(\xi_1) = \int_{x-1}^x f(t) dt$  και

$F'(\xi_2) = \frac{F(x+1) - F(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow F'(\xi_2) = \int_1^{x+1} f(t) dt - \int_1^x f(t) dt \Leftrightarrow F'(\xi_2) = \int_x^{x+1} f(t) dt$ .

Επειδή  $\xi_1 < \xi_2$  και η  $F'$  είναι  $\uparrow$  στο  $\mathbb{R}$  τότε  $F'(\xi_1) < F'(\xi_2)$

δηλαδή  $\int_{x-1}^x f(t) dt < \int_x^{x+1} f(t) dt$ .

ζ) Έστω  $g(u) = \int_0^u f(t) dt$ ,  $u \in [0, x]$ ,  $x > 0$ .

Από το Θ.Μ.Τ. για τη  $g$ , υπάρχει  $\xi \in (0, x)$  τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi) = \frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

Είναι  $g'(u) = f(u)$  και  $g''(u) = f'(u) > 0 \Rightarrow g' \uparrow [0, x]$ .

$$0 < \xi < x \Rightarrow g'(0) < g'(\xi) < g'(x) \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt < f(x) \Leftrightarrow 0 < \int_0^x f(t) dt < xf(x) \quad (1)$$

Επειδή  $f(x) = \frac{x}{f^2(x)+2} > 0$  για κάθε  $x > 0$ , υπάρχει  $k > 0$  τέτοιος, ώστε  $f(x) > k$ , οπότε

και  $f(t) > k$ ,  $t > 0$ . Άρα  $\int_0^x f(t) dt > \int_0^x k dt = kx$  και από την (1), έχουμε:

$$kx < \int_0^x f(t) dt < xf(x). \text{ Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} kx = +\infty, \text{ είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = +\infty.$$

178. α) Έστω  $\frac{f(x)}{x} = h(x)$ ,  $x > 0$  με  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \alpha$ .

Τότε  $f(x) = xh(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xh(x) = +\infty$

$$\text{Είναι: } \alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x).$$

β) Έστω  $g(x) = (x-1)f(x)$ . Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$ , παραγωγίσιμη στο  $(0, 1)$  με  $g'(x) = f(x) + (x-1)f'(x)$  και  $g(0) = g(1) = 0$ , οπότε σύμφωνα με το Θ. Rolle, υπάρχει  $\xi \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε  $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + (\xi-1)f'(\xi) = 0$ .

γ) i. Για  $x=0$  ισχύει η ισότητα. Για  $x > 0$ : Ισχύει για την  $f$  το ΘΜΤ στο  $[0, x]$ , οπότε υπάρχει

$\xi_1 \in (0, x)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi_1) = \frac{f(x)}{x}$ . Επειδή η  $f$  είναι κυρτή, η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα,

$$\text{οπότε: } 0 < \xi_1 < x \Leftrightarrow f'(0) < f'(\xi_1) < f'(x) \Leftrightarrow 1 < \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow x < f(x) < xf'(x).$$

ii. Είναι  $t \leq f(t) \leq tf'(t)$  για κάθε  $t \geq 0$ , οπότε και

$$\int_0^x t dt \leq \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^x tf'(t) dt \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} \leq \int_0^x f(t) dt \leq [tf(t)]_0^x - \int_0^x f(t) dt.$$

$$\text{Είναι } \int_0^x f(t) dt \leq xf(x) - \int_0^x f(t) dt \Leftrightarrow 2 \int_0^x f(t) dt \leq xf(x) \Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt \leq \frac{xf(x)}{2},$$

$$\text{άρα } \frac{x^2}{2} \leq \int_0^x f(t) dt \leq \frac{xf(x)}{2}. \text{ Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty, \text{ είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = +\infty.$$

179. α) Έστω η συνάρτηση  $h(x) = \int_1^x \left( \int_2^4 f(t) dt \right) du - 1 - \ln x + x^2$ . Παρατηρούμε ότι

$h(1) = 0 - 1 - 0 + 1 = 0$  άρα  $h(x) \leq h(1)$ . Επίσης αφού η  $f$  είναι συνεχής τότε η συνάρτηση

$\int_2^u f(t) dt$  είναι παραγωγίσιμη οπότε και συνεχής άρα και η συνάρτηση  $\int_1^x \left( \int_2^u f(t) dt \right) du$  θα

είναι παραγωγίσιμη. Άρα η  $h(x)$  είναι παραγωγίσιμη με  $h'(x) = \int_2^x f(t)dt - \frac{1}{x} + 2x$ .

Αφού η  $h$  έχει μέγιστο στο  $x_0 = 1 \in (0, +\infty)$  τότε από Θ. Fermat είναι

$$h'(1) = 0 \Leftrightarrow \int_2^1 f(t)dt - 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow \int_1^2 f(t)dt = 1 \quad (1).$$

Αφού  $f(t) > 0$  στο  $\mathbb{R}$  τότε εμβαδό του χωρίου που σχηματίζει η  $C_f$  με τον άξονα  $x'x$  και

τις ευθείες  $x=1, x=2$  είναι  $E(\Omega) = \int_1^2 f(t)dt = 1$ .

**β)** Αφού  $f(x) > 0$  και  $x-1 \geq 0$  για  $x \in [1, 2]$  τότε  $g(x) = (x-1)f(x) \geq 0$  όταν  $x \in [1, 2]$

άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_1^2 g(x)dx = \int_1^2 (x-1)f(x)dx = \int_1^2 (x-1)F'(x)dx = \\ &= [(x-1)F(x)]_1^2 - \int_1^2 F(x)dx = F(2) - 1 = 1. \end{aligned}$$

**γ)** Είναι  $\int_1^2 (x-1)f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_1^2 xf(x)dx - \int_1^2 f(x)dx = 1 \Leftrightarrow$

$$\int_1^2 xf(x)dx - 1 = 1 \Leftrightarrow \int_1^2 xf(x)dx = 2 \quad (2).$$

Επίσης  $\int_1^2 F(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_1^2 (x)'F(x)dx = 1 \Leftrightarrow [xF(x)]_1^2 - \int_1^2 xF'(x)dx = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2F(2) - F(1) - \int_1^2 xf(x)dx = 1 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 2 \cdot 2 - F(1) - 2 = 1 \Leftrightarrow 2 - F(1) = 1 \Leftrightarrow F(1) = 1 \quad (3).$$

Θεωρούμε την  $\varphi(x) = F(x) - x$ ,  $x \in [1, 2]$  η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $[1, 2]$  με

$\varphi'(x) = F'(x) - 1$ . Επίσης  $\varphi(1) = F(1) - 1 = 0$  από την (3) και  $\varphi(2) = F(2) - 2 = 2 - 2 = 0$  άρα

$\varphi(1) = \varphi(2)$  οπότε από Θ. Rolle υπάρχει  $\xi \in (1, 2)$  τέτοιο ώστε  $\varphi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow F'(\xi) = 1$ .

Άρα υπάρχει σημείο της  $C_f$  στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην  $y = x$ .