ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Μιγαδικοί Αριθμοί

1. **α)** Είναι $|z-3-6i|=2|z|$ αν $z=x+yi$ τότε

$|x+yi-3-6i|=2|x+yi| \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y-6)^2}=2\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow$

$(x-3)^2+(y-6)^2=4(x^2+y^2) \Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2-12y+36=4x^2+4y^2 \Leftrightarrow$

$3x^2+3y^2+6x+12y-45=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+2x+4y-15=0 \Leftrightarrow$

$x^2+2x+1+y^2+4y+4=20 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y+2)^2=20$

Δηλαδή οι μιγαδικοί z ανήκουν σε κύκλο με κέντρο $K(-1,-2)$ και $\rho=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

άρα θα επαληθεύουν τη σχέση $|z+1+2i|=2\sqrt{5}$.

β) Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2 ανήκουν στον παραπάνω κύκλο τότε, σε κάθε περίπτωση

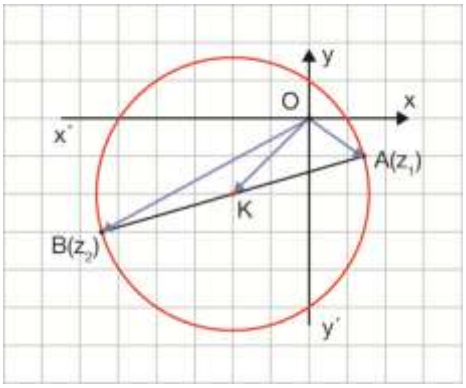
$|z_1-z_2| \le 2\rho \Leftrightarrow |z_1-z_2| \le 4\sqrt{5}$

γ) Αν $|z_1-z_2|=4\sqrt{5}$ τότε τα z_1, z_2

είναι αντιδιαμετρικά οπότε, σε κάθε περίπτωση, αν Α η εικόνα του z_1 και Β η εικόνα του z_2 θα είναι $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OK}$ οπότε

$|z_1+z_2|=2|\overrightarrow{OK}| \Leftrightarrow |z_1+z_2|=2\sqrt{5}$

άρα $|z_1+z_2|^\kappa=2^\kappa \cdot 5^{\frac{\kappa}{2}}$, $\kappa \in \mathbb{N}^*$.



2. **α)** $z=\dfrac{1+2w}{w-2} \Leftrightarrow zw-2z=1+2w \Leftrightarrow zw-2w=2z+1 \Leftrightarrow (z-2)w=2z+1 \quad (1)$.

Αν $z=2$, τότε από τη σχέση (1) προκύπτει: $0\cdot w=4+1$ που είναι αδύνατο,

άρα $z \ne 2$ και $w=\dfrac{2z+1}{z-2}$.

Είναι $|w|=1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{2z+1}{z-2}\right|=1 \Leftrightarrow |2z+1|=|z-2| \Leftrightarrow |2z+1|^2=|z-2|^2 \Leftrightarrow$

$(2z+1)(2\bar{z}+1)=(z-2)(\bar{z}-2) \Leftrightarrow 4z\bar{z}+2z+2\bar{z}+1=z\bar{z}-2z-2\bar{z}+4 \Leftrightarrow$

$3|z|^2+4(z+\bar{z})=3 \Leftrightarrow |z|^2+\dfrac{4}{3}(z+\bar{z})=1.$

Αν $z=x+yi$, $x,y \in \mathbb{R}$, τότε:

$x^2+y^2+\dfrac{4}{3}\cdot 2x=1 \Leftrightarrow x^2+2\dfrac{4}{3}x+\dfrac{16}{9}+y^2=1+\dfrac{16}{9} \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{4}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{25}{9}$.

Οπότε η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο $K\left(-\dfrac{4}{3},0\right)$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{5}{3}$.

β) Επειδή $\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\frac{25}{9}$, είναι $\left|z+\frac{4}{3}\right|=\frac{5}{3}\Leftrightarrow|3z+4|=5\quad(2)$.

Τότε $u=\frac{3z_1+3z_2+8}{3z_1-3z_2}=\frac{(3z_1+4)+(3z_2+4)}{(3z_1+4)-(3z_2+4)}$.

Εστω $3z+4=\omega$, Τότε από τη σχέση (2) προκύπτει ότι:

$|\omega|=5\Leftrightarrow|\omega|^2=25\Leftrightarrow\omega\bar{\omega}=25\Leftrightarrow\bar{\omega}=\frac{25}{\omega}$ και $u=\frac{\omega_1+\omega_2}{\omega_1-\omega_2}$.

Είναι $\bar{u}=\frac{\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2}{\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2}=\frac{\frac{25}{\omega_1}+\frac{25}{\omega_2}}{\frac{25}{\omega_1}-\frac{25}{\omega_2}}=\frac{25\frac{\omega_2+\omega_1}{\omega_1\omega_2}}{25\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_1\omega_2}}=\frac{\omega_2+\omega_1}{\omega_2-\omega_1}=-\frac{\omega_1+\omega_2}{\omega_1-\omega_2}=-u$,

οπότε ο u είναι φανταστικός αριθμός.

γ) Εστω ότι $\frac{1}{z}=\alpha$, τότε $z=\frac{1}{\alpha}$, οπότε από τη σχέση (2), έχουμε:

$\left|3\frac{1}{\alpha}+4\right|=5\Leftrightarrow|3+4\alpha|=5|\alpha|\Leftrightarrow|3+4\alpha|^2=(5|\alpha|)^2\Leftrightarrow(3+4\alpha)(3+4\bar{\alpha})=25|\alpha|^2\Leftrightarrow$

$9+12\alpha+12\bar{\alpha}+16\alpha\cdot\bar{\alpha}=25|\alpha|^2\Leftrightarrow25|\alpha|^2-16|\alpha|^2-12(\alpha+\bar{\alpha})=9\Leftrightarrow$

$9|\alpha|^2-12(\alpha+\bar{\alpha})=9\Leftrightarrow|\alpha|^2-\frac{4}{3}(\alpha+\bar{\alpha})=1$. Αν $\alpha=x_1+y_1i$, τότε:

$x_1^2+y_1^2-\frac{4}{3}\cdot2x_1=1\Leftrightarrow x_1^2-2\cdot\frac{4}{3}\cdot x_1+\frac{16}{9}+y_1^2=1+\frac{16}{9}\Leftrightarrow\left(x_1-\frac{4}{3}\right)^2+y_1^2=\frac{25}{9}$.

Άρα η εικόνα του $\frac{1}{z}=\alpha$, βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο $\Lambda\left(\frac{4}{3},0\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{5}{3}$.

δ) Επειδή $\left(x_1-\frac{4}{3}\right)^2+y_1^2=\frac{25}{9}$, είναι $\left|\frac{1}{z}-\frac{4}{3}\right|=\frac{5}{3}$. Το τριώνυμο $12z^2+7z-12$ έχει ρίζες $-\frac{4}{3}$ και $\frac{3}{4}$, οπότε $12z^2+7z-12=12\left(z+\frac{4}{3}\right)\left(z-\frac{3}{4}\right)=(3z+4)(4z-3)$.

Είναι $|12z^2+7z-12|=25|z|\Leftrightarrow|(3z+4)(4z-3)|=25|z|\Leftrightarrow|3z+4||4z-3|=25|z|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow5|4z-3|=25|z|\Leftrightarrow\frac{|4z-3|}{|z|}=5\Leftrightarrow\left|4-\frac{3}{z}\right|=5\Leftrightarrow3\left|\frac{4}{3}-\frac{1}{z}\right|=5\Leftrightarrow\left|\frac{1}{z}-\frac{4}{3}\right|=\frac{5}{3}$ που ισχύει.

3. **α)** $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2+z_2\bar{z}_2=|z_1|^2+z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}+|z_1|^2\Leftrightarrow$

$|z_1+z_2|^2=1+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)+1=2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$

β) Είναι $z_1+z_2+z_3=0\Leftrightarrow z_1+z_2=-z_3$, άρα $|z_1+z_2|=|-z_3|=|z_3|=1$,

όμοια και $|z_2+z_3|=|z_3+z_1|=1$.

γ) Επειδή $|z_1+z_2|=1$ και $|z_1+z_2|^2=2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$, ισχύει ότι:

$1=2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\Leftrightarrow2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=-1\Leftrightarrow\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=-\frac{1}{2}$

και όμοια $\mathrm{Re}(z_2\bar{z}_3)=\mathrm{Re}(z_3\bar{z}_1)=-\frac{1}{2}$.

δ) Είναι $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=z_1\bar{z}_1-z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2+z_2\bar{z}_2=|z_1|^2-z_1\bar{z}_2-\overline{z_1\bar{z}_2}+|z_1|^2 \Leftrightarrow$

$|z_1-z_2|^2=1-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)+1=2-2\left(-\frac{1}{2}\right)=2+1=3 \Leftrightarrow |z_1-z_2|=\sqrt{3}$

και όμοια $|z_2-z_3|=|z_3-z_1|=\sqrt{3}$.

ε) $|z_1z_2-z_2z_3|=|z_2(z_1-z_3)|=|z_2||z_1-z_3|=1\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}$

και όμοια $|z_2z_3-z_3z_1|=|z_3z_1-z_1z_2|=\sqrt{3}$.

στ) Είναι $|z_1|=1 \Leftrightarrow |z_1|^2=1 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1=1 \Leftrightarrow \bar{z}_1=\frac{1}{z_1}$ και όμοια $\bar{z}_2=\frac{1}{z_2}$ και $\bar{z}_3=\frac{1}{z_3}$.

$z_1+z_2+z_3=0 \Leftrightarrow \overline{z_1+z_2+z_3}=0 \Leftrightarrow \bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3=0 \Leftrightarrow \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{z_1}z_2z_3\frac{1}{\cancel{z_1}}+z_1\cancel{z_2}z_3\frac{1}{\cancel{z_2}}+z_1z_2\cancel{z_3}\frac{1}{\cancel{z_3}}=0 \Leftrightarrow z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$.

ζ) Είναι $z_1+z_2+z_3=0 \Leftrightarrow (z_1+z_2+z_3)^2=0 \Leftrightarrow z_1^2+z_2^2+z_3^2+2z_1z_2+2z_2z_3+2z_3z_1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1^2+z_2^2+z_3^2+2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)=0 \Leftrightarrow z_1^2+z_2^2+z_3^2+2\cdot 0=0 \Leftrightarrow z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$.

η) $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0 \Leftrightarrow z_2^2+z_3^2=-z_1^2 \Leftrightarrow (z_2+z_3)^2-2z_2z_3=-z_1^2 \Leftrightarrow (-z_1)^2-2z_2z_3=-z_1^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1^2-2z_2z_3=-z_1^2 \Leftrightarrow 2z_1^2=2z_2z_3 \Leftrightarrow z_1^2=z_2z_3 \Leftrightarrow z_1z_1^2=z_1z_2z_3 \Leftrightarrow z_1^3=z_1z_2z_3$

και όμοια $z_2^3=z_3^3=z_1z_2z_3$.

θ) Είναι $z_1^3=z_2^3=z_3^3 \Leftrightarrow \frac{z_1^3}{z_3^3}=\frac{z_2^3}{z_3^3}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{z_1}{z_3}\right)^3=\left(\frac{z_2}{z_3}\right)^3=1$.

$z_1^{2013}+z_2^{2013}-2z_3^{2013}=0 \Leftrightarrow \frac{z_1^{2013}}{z_3^{2013}}+\frac{z_2^{2013}}{z_3^{2013}}-2\frac{z_3^{2013}}{z_3^{2013}}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{z_1}{z_3}\right)^{2013}+\left(\frac{z_2}{z_3}\right)^{2013}-2=0 \Leftrightarrow$

$\left[\left(\frac{z_1}{z_3}\right)^3\right]^{671}+\left[\left(\frac{z_2}{z_3}\right)^3\right]^{671}-2=0 \Leftrightarrow 1+1-2=0$ που ισχύει.

4. **α)** $|f(z)|=\left|\frac{z+3i}{\bar{z}-3i}\right|=\frac{|z+3i|}{|\bar{z}-3i|}=\frac{|z+3i|}{|\overline{z+3i}|}=1$

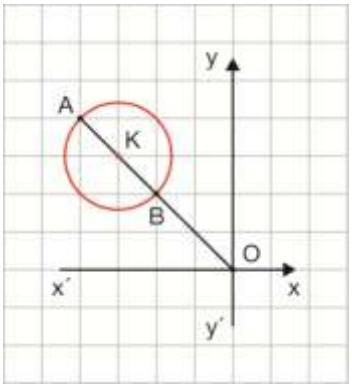
β) $\overline{f(z)}=f(\bar{z}) \Leftrightarrow \frac{\bar{z}-3i}{z+3i}=\frac{\bar{z}+3i}{z-3i} \Leftrightarrow (\bar{z}-3i)(z-3i)=(z+3i)(\bar{z}+3i) \Leftrightarrow$

$z\bar{z}-3i\bar{z}-3iz+9i^2=z\bar{z}+3i\bar{z}+3iz+9i^2 \Leftrightarrow 6iz=-6i\bar{z} \Leftrightarrow z=-\bar{z} \Leftrightarrow z\in I$

γ) $z_1=3i^3-3f(i)=-3i-3\frac{i+3i}{-i-3i}=-3i-3\frac{4i}{-4i}=3-3i$

δ) Είναι $|w+z_1|=\left|\frac{if(z_1)\cdot z_1}{2+\sqrt{5}\cdot i}\right|=\frac{|i||f(z_1)||z_1|}{|2+\sqrt{5}\cdot i|}=\frac{1\cdot 1\cdot|3-3i|}{\sqrt{2^2+\sqrt{5}^2}}=\frac{\sqrt{3^2+(-3)^2}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{18}}{3}=\sqrt{2}$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του w είναι κύκλος με κέντρο $K(-z_1)$ και ακτίνα $\sqrt{2}$.



ε) Αν η ευθεία ΟΚ τέμνει τον κύκλο του προηγούμενου ερωτήματος στα σημεία Α και Β, τότε ο μιγαδικός w με το μέγιστο μέτρο έχει εικόνα το σημείο Α και ο μιγαδικός w με το ελάχιστο μέτρο έχει εικόνα το Β.

Είναι $\lambda_{OK}=\frac{-3}{3}=-1$ και η ΟΚ έχει εξίσωση $y=-x$.

Ο κύκλος του προηγούμενου ερωτήματος έχει εξίσωση:

$(x+3)^2+(y-3)^2=2$, οπότε

$(x+3)^2+(-x-3)^2=2\Leftrightarrow(x+3)^2+\left[-(x+3)\right]^2=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x+3)^2=2\Leftrightarrow(x+3)^2=1\Leftrightarrow x+3=\pm1\Leftrightarrow x=-2$ ή $x=-4$

Για $x=-4$ είναι $y=4$ και $A(-4,4)$ οπότε ο w με το μέγιστο μέτρο είναι ο $w=-4+4i$.

Για $x=-2$ είναι $y=2$ και $B(-2,2)$ οπότε ο w με το ελάχιστο μέτρο είναι ο $w=-2+2i$.

5. **α)** Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα:

$\Delta=|w_1-w_2|^2-4=(w_1-w_2)(\bar{w}_1-\bar{w}_2)-4=w_1\bar{w}_1-\bar{w}_1w_2-w_1\bar{w}_2+w^2\bar{w}_2-4\Leftrightarrow$

$\Delta=|w_1|^2-(\bar{w}_1w_2+w_1\bar{w}_2)+|w_2|^2-4=2-\left(\bar{w}_1w_2+\overline{\bar{w}_1w_2}\right)+2-4=-2\mathrm{Re}(\bar{w}_1w_2)<0$

οπότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

β) Από τους τύπους του Vieta, οι μιγαδικές ρίζες z_1,z_2 της εξίσωση έχουν γινόμενο: $z_1z_2=1$, τότε και $|z_1z_2|=1\Leftrightarrow|z_1||z_2|=1$ (1)

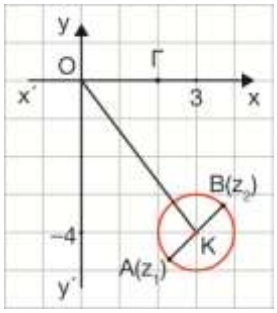
Επειδή οι z_1,z_2 είναι συζυγείς ισχύει ότι $|z_1|=|z_2|$, οπότε η (1) γίνεται:

$|z_1||z_1|=1\Leftrightarrow|z_1|^2=1\Leftrightarrow|z_1|=1=|z_2|$.

γ) Είναι $z_{1,2}=\frac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$ και $z_1-z_2=\frac{-\beta+i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}-\frac{-\beta-i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}=\frac{2i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}=i\frac{\sqrt{-\Delta}}{\alpha}$.

Είναι $(z_1-z_2)^2=\left(i\frac{\sqrt{-\Delta}}{\alpha}\right)^2=i^2\frac{\left(\sqrt{-\Delta}\right)^2}{\alpha^2}=-\frac{-\Delta}{\alpha^2}=\frac{\Delta}{\alpha^2}=\frac{|w_1-w_2|^2-4}{1^2}=|w_1-w_2|^2-4$.

6. **α)** Είναι $|z-3+4i|=1\Leftrightarrow|z-(3-4i)|=1$ οπότε ο γ.τ. των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο $K(3,-4)$ και $\rho=1$ δηλ. $(x-3)^2+(y+4)^2=1$



β) Είναι $|(OK)-\rho|\le|z|\le(OK)+\rho$ και $(OK)=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

οπότε $|5-1|\le|z|\le5+1\Leftrightarrow4\le|z|\le6$

γ) Αν $|z_1-z_2|=2$ τότε οι εικόνες $A(z_1)$ και $B(z_2)$ είναι σημεία αντιδιαμετρικά και θα είναι:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OK}$ άρα $|z_1+z_2|=2|\overrightarrow{OK}|=2\cdot5=10$

δ) Εστω $\Gamma(2,0)$ τότε $(\Gamma K)=\sqrt{17}$ οπότε

$(\Gamma K)-\rho\le|z-2|\le(\Gamma K)+\rho\Leftrightarrow\sqrt{17}-1\le|z-2|\le\sqrt{17}+1$

7. **α)** Είναι $z=\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta$, $\theta\in[0,2\pi)$

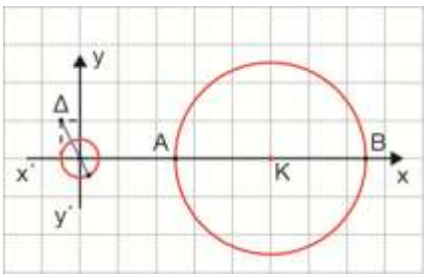
αν $\begin{matrix} x=\sigma\upsilon\nu\theta \\ y=\eta\mu\theta \end{matrix}$ τότε $\left.\begin{matrix} x^2=\sigma\upsilon\nu^2\theta \\ y^2=\eta\mu^2\theta \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2+y^2=\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1$

Άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι ο μοναδιαίος κύκλος. Δηλαδή ισχύει: $|z|=1$.

β) Αφού $|z|=1$ τότε $|z|^2=1 \Leftrightarrow z\bar{z}=1 \Leftrightarrow z=\frac{1}{\bar{z}}$ οπότε ο $w=3z+10+\frac{4i}{\bar{z}}$ γίνεται

$w=3z+10+4iz \Leftrightarrow w-10=z(3+4i)$ οπότε $|w-10|=|z|\cdot|3+4i| \Leftrightarrow |w-10|=5$

οπότε ο γ.τ. των εικόνων του w είναι ο κύκλος με κέντρο $K(10,0)$ και $\rho=5$



γ) Αν $w=x+yi$ τότε $|(x-10)+yi|=5$ άρα

$(x-10)^2+y^2=25$ οπότε $(x-10)^2=25-y^2$

άρα $25-y^2\geq 0 \Leftrightarrow |y|\leq 5 \Leftrightarrow -5\leq y\leq 5$.

Δηλαδή $-5\leq \text{Im}(w)\leq 5$ και $y^2=25-(x-10)^2$

άρα $25-(x-10)^2\geq 0 \Leftrightarrow (x-10)^2\leq 25 \Leftrightarrow |x-10|\leq 5 \Leftrightarrow -5\leq x-10\leq 5 \Leftrightarrow 5\leq x\leq 15$

άρα $5\leq \text{Re}(w)\leq 15$

δ) Αφού z,w εξαρτάται από τη σχέση $w=3z+10+4iz$ τότε

$|z-w|=|z-3z-10-4iz|=|-2z-4iz-10|=|2z+4iz+10|=|z(2+4i)+10|=$

$=\left|(z+4i)\left(z+\frac{10(2-4i)}{20}\right)\right|=|z+4i|\cdot\left|z+\frac{2-4i}{2}\right|=\sqrt{20}\cdot|z+1-2i|=\sqrt{20}|z-(-1+2i)|$.

Αν $\Delta(-1,2)$ η εικόνα του $z_1=-1+2i$ τότε $\Delta O-\rho\leq|z-z_1|\leq\Delta O+\rho$

$\sqrt{5}-1\leq|z-z_1|\leq\sqrt{5}+1 \Leftrightarrow \sqrt{5}-1\leq|z+1-zi|\leq\sqrt{5}+1 \overset{\cdot\sqrt{20}}{\Rightarrow}$

$\sqrt{20}(\sqrt{5}-1)\leq\sqrt{20}|z+1-2i|\leq\sqrt{20}(\sqrt{5}+1) \Leftrightarrow 10-2\sqrt{5}\leq|z-w|\leq 10+2\sqrt{5}$

8. **α)** Είναι $z_1+z_2+z_3=0 \Leftrightarrow z_1+z_2=-z_3$. Άρα $(z_1+z_2)^2=(-z_3)^2 \Leftrightarrow z_1^2+2z_1z_2+z_2^2=z_3^2$ (1).

Όμως $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0 \Leftrightarrow z_3^2=-z_1^2-z_2^2$, οπότε η σχέση (1) ΓΚ γίνεται:

$z_1^2+2z_1z_2+z_2^2=-z_1^2-z_2^2 \Leftrightarrow 2z_1^2+2z_1z_2+2z_2^2=0 \Leftrightarrow z_1^2+z_1z_2+z_2^2=0$

Όμοια αποδεικνύονται και οι άλλες δύο σχέσεις.

β) Είναι $z_1^2+z_1z_2+z_2^2=0 \Leftrightarrow z_1^2+z_2^2=-z_1z_2 \Leftrightarrow -z_3^2=-z_1z_2 \Leftrightarrow z_3^2=z_1z_2$

Άρα και $|z_3^2|=|z_1z_2| \Leftrightarrow |z_3|^2=|z_1||z_2| \Leftrightarrow |z_3|^3=|z_1||z_2||z_3|$ (2).

Είναι $z_2^2+z_2z_3+z_3^2=0 \Leftrightarrow z_2^2+z_3^2=-z_2z_3 \Leftrightarrow -z_1^2=-z_2z_3 \Leftrightarrow z_1^2=-z_2z_3$

Άρα και $|z_1^2|=|z_2z_3| \Leftrightarrow |z_1|^2=|z_2||z_3| \Leftrightarrow |z_1|^3=|z_1||z_2||z_3|$ (3).

Όμοια προκύπτει και $|z_2|^3=|z_1||z_2||z_3|$ (4).

Από τις σχέσεις $(2),(3),(4)$ ισχύει ότι: $|z_1|^3=|z_2|^3=|z_3|^3 \Leftrightarrow |z_1|=|z_2|=|z_3|$.

9. **α)** $|z_1+z_2+z_3|^2=\left|(z_1+z_2+z_3)^2\right|=\left|z_1^2+z_2^2+z_3^2+2z_1z_2+2z_2z_3+2z_3z_1\right|=$

$=|0+2z_1z_2+2z_2z_3+2z_3z_1|=2|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$

β) Επειδή $|z_1|=\theta$ τότε $|z_1|^2=\theta^2 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1=\theta^2$ άρα $\bar{z}_1=\dfrac{\theta^2}{z_1}$,ομοίως $\bar{z}_2=\dfrac{\theta^2}{z_2}$ και $\bar{z}_3=\dfrac{\theta^2}{z_3}$.

Από το (α) ερώτημα έχουμε $|z_1+z_2+z_3|^2=2|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$ οπότε

$$(\theta^2)^2=2|\bar{z}_1\bar{z}_2+\bar{z}_2\bar{z}_3+\bar{z}_3\bar{z}_1| \Leftrightarrow \theta^4=2\left|\frac{\theta^2}{z_1}\frac{\theta^2}{z_2}+\frac{\theta^2}{z_2}\frac{\theta^2}{z_3}+\frac{\theta^2}{z_3}\frac{\theta^2}{z_1}\right| \Leftrightarrow$$

$$\theta^4=2\theta^4\left|\frac{1}{z_1z_2}+\frac{1}{z_2z_3}+\frac{1}{z_3z_1}\right| \Leftrightarrow 1=2\left|\frac{z_3+z_1+z_2}{z_1z_2z_3}\right| \Leftrightarrow 1=2\frac{|z_1+z_2+z_3|}{|z_1||z_2||z_3|} \Leftrightarrow 1=2\frac{\theta^2}{\theta^3} \Leftrightarrow \theta=2$$

γ) Αφού $\theta=2$ τότε $|z_1+z_2+z_3|=4$,οπότε η σχέση του (α) ερωτήματος γίνεται

$16=2|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1| \Leftrightarrow |z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|=8$.

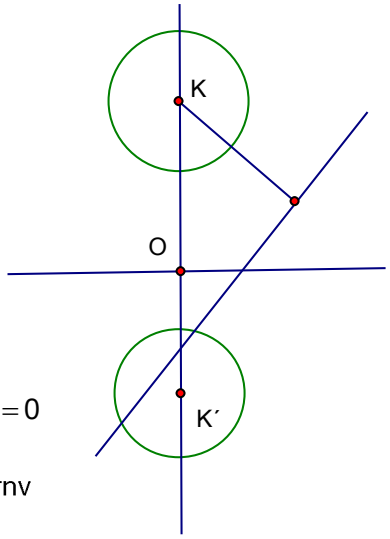
10. **α)** Είναι $|3iz+12|=3 \Leftrightarrow \left|3i\left(z+\dfrac{4}{i}\right)\right|=3 \Leftrightarrow 3|z-4i|=3 \Leftrightarrow |z-4i|=1$ οπότε ο γ.τ. των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο $K(0,4)$ και $\rho=1$.

Επίσης $|w-5+5i|=|w+3-i|$. Αν $w=x+yi$ τότε

$$\sqrt{(x-5)^2+(y+5)^2}=\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow 4x-3y-10=0$$

Άρα ο γ.τ. των εικόνων του w είναι η ευθεία $\varepsilon: 4x-3y-10=0$.

β) Αν M η εικόνα του z τότε



$$|(OK)-\rho|\le(OM)\le(OK)+\rho \Leftrightarrow |4-1|\le|z|\le 4+1 \Leftrightarrow 3\le|z|\le 5$$

γ) $|w|_{min}=d(O,\varepsilon)=\dfrac{|0-0-10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$

δ) $|z-w|_{min}=d(K,\varepsilon)-\rho=\dfrac{|4\cdot 0-3\cdot 4-10|}{\sqrt{4^2+3^2}}-1=\dfrac{22}{5}-1=\dfrac{17}{5}$

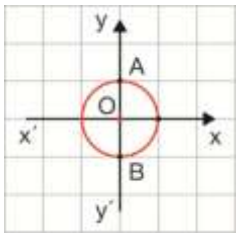
ε) Είναι $|z+w|_{min}=|w+z|_{min}=|w-(-z)|_{min}$

Είναι $d(K',\varepsilon)=\dfrac{|4\cdot 0-3(-4)-10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{2}{5}<1=\rho$, οπότε $|z+w|_{min}=0$

γιατί η εικόνα του z είναι ο συμμετρικός κύκλος ως προς την αρχή των αξόνων δηλαδή ο κύκλος με κέντρο $K'(0,-4)$ ακτίνα $\rho=1$ και τέμνει την ε, άρα η ελάχιστη απόσταση τους είναι μηδέν.

11. **α)** Είναι $|z-i|^2+|z-i|^2=4$, και έστω $M(z)$ και $A(i)$ και $B(-i)$ τότε η προηγούμενη σχέση γίνεται $(MA)^2+(MB)^2=4$, όμως $(AB)=2$ άρα η σχέση γίνεται $(MA)^2+(MB)^2=(AB)^2$.

Σε κάθε περίπτωση το τρίγωνο MAB είναι ορθογώνιο στο M.



β) Οπότε η εικόνα M του μιγαδικού z είναι ο κύκλος διαμέτρου AB δηλαδή με κέντρο $(0,0)$ και $\rho=1$, ο κύκλος $x^2+y^2=1$.

γ) i. Είναι $w = z(4+4i)$ (1) οπότε $|w| = |z|\cdot|4+4i| \Leftrightarrow |w| = 1\cdot\sqrt{32} \Leftrightarrow |w| = \sqrt{32}$ άρα $|w| = 4\sqrt{2}$, οπότε ο γ.τ. των εικόνων του w είναι ο κύκλος με κέντρο $(0,0)$ και $\rho = 4\sqrt{2}$.

ii. Αφού οι μιγαδικοί z, w συνδέονται με τη σχέση (1) τότε

$|z-w| = |z - z(4+4i)| = |z(1-4-4i)| = |z|\cdot|-3-4i| = 1\cdot 5 = 5$.

12. **α) i.** Είναι $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} + \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = -1 \Leftrightarrow \frac{z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2}{z_2\bar{z}_2} = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = -|z_2|^2 \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = -9$ άρα $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = -\frac{9}{2}$.

ii. Δείξαμε πριν ότι $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = -9$, όμοια αποδεικνύουμε ότι $z_2\bar{z}_3 + \bar{z}_2 z_3 = -9$ και $z_1\bar{z}_3 + \bar{z}_1 z_3 = -9$.

Εχουμε $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ άρα $|z_1+z_2+z_3| = 0 \Leftrightarrow (z_1+z_2+z_3)(\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3) = 0 \Leftrightarrow$

$z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_3 + \bar{z}_1 z_2 + z_2\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + \bar{z}_1 z_3 + \bar{z}_2 z_3 + z_3\bar{z}_3 = 0 \Leftrightarrow$

$|z_1|^2 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) + |z_2|^2 + (z_2\bar{z}_3 + \bar{z}_2 z_3) + |z_3|^2 + (z_1\bar{z}_3 + \bar{z}_1 z_3) = 0 \Leftrightarrow$

$9-9+9-9+9-9 = 0$ άρα $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

iii. Αρκεί να δείξουμε ότι $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$.

Οπότε αφού $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_2 = -z_1 - z_3$ και η σχέση $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$ γίνεται

$|z_1 + z_1 + z_3| = |-z_1 - z_3 - z_3| \Leftrightarrow |2z_1 + z_3|^2 = |z_1 + 2z_3|^2 \Leftrightarrow$

$(2z_1 + z_3)(2\bar{z}_1 + \bar{z}_3) = (z_1 + 2z_3)(\bar{z}_1 + 2\bar{z}_3) \Leftrightarrow$

$4z_1\bar{z}_1 + 2z_1\bar{z}_3 + 2\bar{z}_1 z_3 + z_3\bar{z}_3 = z_1\bar{z}_1 + 2z_1\bar{z}_3 + 2\bar{z}_1 z_3 + 4z_3\bar{z}_3 \Leftrightarrow 3|z_1|^2 = 3|z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$

που ισχύει. Όμοια αποδεικνύουμε και ότι $|z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ οπότε

$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ και το τρίγωνο που ορίζουν οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι ισόπλευρο.

β) Επειδή $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$ τότε οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 βρίσκονται στον κύκλο $x^2 + y^2 = 9$, που είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος των τριγώνων.

13. **α)** $|\kappa z + \lambda w| = |\kappa z - \lambda w| \Leftrightarrow |\kappa z + \lambda w|^2 = |\kappa z - \lambda w|^2 \Leftrightarrow$

$(\kappa z + \lambda w)(\kappa\bar{z} + \lambda\bar{w}) = (\kappa z - \lambda w)(\kappa\bar{z} - \lambda\bar{w}) \Leftrightarrow$

$\cancel{\kappa^2 z\bar{z}} + \kappa\lambda z\bar{w} + \kappa\lambda\bar{z}w + \cancel{\lambda^2 w\bar{w}} = \cancel{\kappa^2 z\bar{z}} - \kappa\lambda z\bar{w} - \kappa\lambda\bar{z}w + \cancel{\lambda^2 w\bar{w}} \Leftrightarrow$

$2\kappa\lambda z\bar{w} + 2\kappa\lambda\bar{z}w = 0 \Leftrightarrow 2\kappa\lambda(z\bar{w} + \bar{z}w) = 0 \Leftrightarrow z\bar{w} + \bar{z}w = 0$ (1) $\Leftrightarrow$

$2\mathrm{Re}(z\bar{w}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z\bar{w}) = 0$

β) Από τη σχέση (1) έχουμε: $z\bar{w} + \bar{z}w = 0 \Leftrightarrow z\bar{w} = -\bar{z}w \Leftrightarrow \frac{z}{w} = -\frac{\bar{z}}{\bar{w}} \Leftrightarrow u = -\bar{u} \Leftrightarrow u \in I$

γ) $|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 \Leftrightarrow (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} \Leftrightarrow z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w} = z\bar{z} + w\bar{w} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\bar{w} + \bar{z}w = 0$ ισχύει.

δ) Εστω A, B οι εικόνες των μιγαδικών z, w αντίστοιχα.

Τότε: $|z-w|^2=|z|^2+|w|^2 \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2$, δηλαδή στο τρίγωνο ΟΑΒ επαληθεύεται το πυθαγόρειο θεώρημα, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $AOB=90^\circ$.

14. **α)** Είναι $z+\frac{\theta^2}{z}=\theta \Leftrightarrow z^2-\theta z+\theta^2=0 \quad (1)$.

Είναι $\Delta=-3\theta^2<0$ και $z=\frac{\theta\pm i\sqrt{3}\theta}{2}$ άρα $z=\theta\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ή $z=\theta\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Οπότε $|z|=\theta\left|\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\theta\cdot 1=\theta$ και $\mathrm{Re}(z)=\frac{\theta}{2}\Leftrightarrow \theta=2\mathrm{Re}(z)$ άρα $|z|=2\mathrm{Re}(z)=\theta$.

β) Από την υπόθεση έχουμε $z-\theta=-\frac{\theta^2}{z} \quad (2)$.

Επίσης από την (1) έχουμε $z^2=\theta z-\theta^2 \quad (3)$.

Επιπλέον αφού $|z|=\theta$ τότε $|z|^2=\theta^2 \Leftrightarrow z\bar{z}=\theta^2 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{\theta^2}{z} \quad (4)$

Άρα $z^2+|z|\bar{z}=\theta z-\theta^2+\theta\frac{\theta^2}{z}=\theta\left(z-\theta+\frac{\theta^2}{z}\right)\overset{(2)}{=}\theta\left(-\frac{\theta^2}{z}+\frac{\theta^2}{z}\right)=0$.

γ) Από την (1) και αφού $z+\theta\neq 0$ έχουμε $(z+\theta)(z^2-\theta z+\theta^2)=0\Leftrightarrow z^3+\theta^3=0\Leftrightarrow z^3=-\theta^3$

οπότε $\bar{z}^3=-\theta^3$. Άρα $\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{2013}=\left[\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^3\right]^{671}=\left(\frac{z^3}{\bar{z}^3}\right)^{671}=\left(\frac{-\theta^3}{-\theta^3}\right)^{671}=1^{671}=1.$

15. **α)** Εστω $w=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Τότε $|w|=2\Leftrightarrow\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=2\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2=4 \quad (2)$.

Είναι $z=w+\frac{4i}{\bar{w}}=\alpha+\beta i+\frac{4i}{\alpha-\beta i}=\alpha+\beta i+\frac{4i(\alpha+\beta i)}{\alpha^2+\beta^2}=\alpha+\beta i+\frac{\cancel{4}i(\alpha+\beta i)}{\cancel{4}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\alpha+\beta i+\alpha i-\beta=(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)i$. Αν $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$, τότε $\begin{cases}x=\alpha-\beta\\ y=\alpha+\beta\end{cases}$.

Με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει: $\begin{cases}x+y=2\alpha\\ x-y=2\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{x+y}{2}\\ \beta=\frac{x-y}{2}\end{cases}$.

Η σχέση (2) γίνεται: $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=4\Leftrightarrow\frac{x^2+2xy+y^2}{4}+\frac{x^2-2xy+y^2}{4}=4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2=16\Leftrightarrow x^2+y^2=8$. Άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του μιγαδικού z είναι κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα $\rho=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

β) **i.** Επειδή $x^2+y^2=8$, είναι $|z|^2=8$. Άρα $|z_1|^2=8\Leftrightarrow z_1\cdot\bar{z}_1=8\Leftrightarrow\frac{\bar{z}_1}{8}=\frac{1}{z_1}$

και όμοια $\frac{\bar{z}_2}{8}=\frac{1}{z_2}$, $\frac{\bar{z}_3}{8}=\frac{1}{z_3}$.

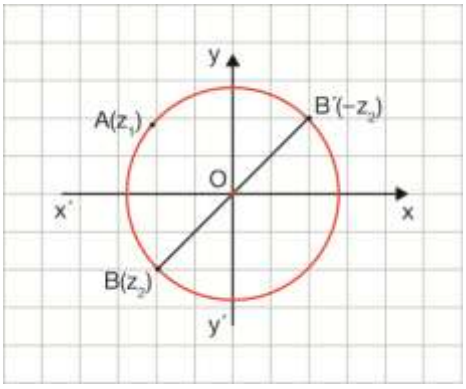
ii. $(z_1+z_2)\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)\le 4 \Leftrightarrow (z_1+z_2)\left(\frac{\bar{z}_1}{8}+\frac{\bar{z}_2}{8}\right)\le 4 \Leftrightarrow \frac{(z_1+z_2)\left(\overline{z_1+z_2}\right)}{8}\le 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z_1+z_2|^2 \le 32 \Leftrightarrow |z_1+z_2|\le 4\sqrt{2}$.

Επειδή οι εικόνες Α,Β των z_1, z_2 βρίσκονται στον κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας $2\sqrt{2}$, η μέγιστη απόσταση των εικόνων τους είναι η διάμετρος του κύκλου. Άρα $|z_1-z_2|_{max}=2\rho=4\sqrt{2}$. Όμως η εικόνα του $-z_2$ είναι επίσης σημείο του κύκλου αυτού, άρα και

$|z_1-(-z_2)|_{max}=2\rho=4\sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1+z_2|_{max}=4\sqrt{2}$,

οπότε $|z_1+z_2|\le 4\sqrt{2}$.



iii. Είναι $|z_1+z_2+z_3|=\left|\overline{z_1+z_2+z_3}\right|=|\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3|=\left|\frac{8}{z_1}+\frac{8}{z_2}+\frac{8}{z_3}\right|=8\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z_1+z_2+z_3|=8\left|\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right|=8\frac{|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|}{|z_1|\cdot|z_2|\cdot|z_3|}=8\frac{|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z_1+z_2+z_3|=\frac{1}{2\sqrt{2}}|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1| \Leftrightarrow \frac{|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|}{|z_1+z_2+z_3|}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right|=2\sqrt{2}$.

iv. Εστω $u=\frac{z_1-z_2}{z_3}+\frac{z_2-z_3}{z_1}+\frac{z_3-z_1}{z_2}=\frac{z_1}{z_3}-\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_2}{z_1}-\frac{z_3}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}-\frac{z_1}{z_2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u=\left(\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}\right)-\left(\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}+\frac{z_1}{z_2}\right)$.

Είναι $\bar{u}=\left(\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_3}+\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}+\frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_2}\right)-\left(\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_3}+\frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1}+\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\right)=\left(\frac{\frac{8}{z_1}}{\frac{8}{z_3}}+\frac{\frac{8}{z_2}}{\frac{8}{z_1}}+\frac{\frac{8}{z_3}}{\frac{8}{z_2}}\right)-\left(\frac{\frac{8}{z_2}}{\frac{8}{z_3}}+\frac{\frac{8}{z_3}}{\frac{8}{z_1}}+\frac{\frac{8}{z_1}}{\frac{8}{z_2}}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bar{u}=\left(\frac{z_3}{z_1}+\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}\right)-\left(\frac{z_3}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_2}{z_1}\right)=-u$ άρα ο u είναι φανταστικός αριθμός.

16. **α)** $|z_1+z_2|=|z_1|=|z_2| \Leftrightarrow \frac{|z_1+z_2|}{|z_2|}=\frac{|z_1|}{|z_2|}=1 \Leftrightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}+1\right|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=1$. Εστω $w=\frac{z_1}{z_2}$, τότε: $|w+1|=1$ και $|w|=1$. Άρα $|w+1|^2=1 \Leftrightarrow (w+1)(\bar{w}+1)=1 \Leftrightarrow w\bar{w}+w+\bar{w}+1=1 \Leftrightarrow 1+w+\bar{w}=0 \quad (1)$.

Όμως $|w|=1 \Leftrightarrow |w|^2=1 \Leftrightarrow w\bar{w}=1 \Leftrightarrow \bar{w}=\frac{1}{w}$, οπότε η (1) γίνεται:

$1+w+\frac{1}{w}=0 \Leftrightarrow w+w^2+1=0 \Leftrightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2+\frac{z_1}{z_2}+1=0$.

β) Είναι $w^2+w+1=0$, άρα $w^3-1=(w-1)(w^2+w+1)=0 \Leftrightarrow w^3=1 \Leftrightarrow \frac{z_1^3}{z_2^3}=1 \Leftrightarrow z_1^3=z_2^3$.

γ) $\left|\frac{z_1}{z_2}-1\right|=\sqrt{3} \Leftrightarrow |w-1|=\sqrt{3} \Leftrightarrow |w-1|^2=3 \Leftrightarrow (w-1)(\bar{w}-1)=3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w\bar{w}-w-\bar{w}+1=3 \Leftrightarrow 1-w-\bar{w}+1=3 \Leftrightarrow w+\bar{w}+1=0$ που ισχύει.

17. **α)** Εστω Α,Β οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα. Επειδή το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο πλευράς 1, ισχύει ότι: $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{AB}|=1 \Leftrightarrow |z_1|=|z_2|=|z_1-z_2|=1$.

Τότε: $|z_1|=1 \Leftrightarrow |z_1|^2=1 \Leftrightarrow z_1\cdot\overline{z_1}=1 \Leftrightarrow \overline{z_1}=\frac{1}{z_1}$ και όμοια $\overline{z_2}=\frac{1}{z_2}$.

Είναι $|z_1-z_2|=1 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=1 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z_1|^2+|z_2|^2-z_1\frac{1}{z_2}-\frac{1}{z_1}z_2=1 \Leftrightarrow 1+1-\frac{z_1}{z_2}-\frac{z_2}{z_1}=1 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=1$

β) $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=1 \Leftrightarrow z_1^2+z_2^2=z_1z_2 \Leftrightarrow z_1^2-z_1z_2+z_2^2=0$.

Όμως $z_1^3+z_2^3=(z_1-z_2)(z_1^2-z_1z_2+z_2^2)=0 \Leftrightarrow z_1^3=-z_2^3$.

γ) $z_1^{2016}=(z_1^3)^{672}=(-z_2^3)^{672}=z_2^{2016} \Leftrightarrow z_1^{2016}-z_2^{2016}=0$.

18. **α)** Επειδή $\mathrm{Re}\left(\frac{v+5i}{v-5i}\right)=0$ τότε ο αριθμός $\frac{v+5i}{v-5i}$ είναι φανταστικός οπότε έχουμε:

$\frac{\bar{v}-5i}{\bar{v}+5i}=-\frac{v+5i}{v-5i} \Leftrightarrow (\bar{v}-5i)(v-5i)=-(v+5i)(\bar{v}-5i) \Leftrightarrow$

$v\bar{v}-5\bar{v}i-5vi-25=-v\bar{v}-5vi-5\bar{v}i+25 \Leftrightarrow 2v\bar{v}=50 \Leftrightarrow |v|^2=25 \Leftrightarrow |v|=5$

Επίσης $(w+4)^4=16(w+1)^4$ οπότε $|w+4|^4=2^4|w+1|^4 \Leftrightarrow |w+4|=2|w+1| \Leftrightarrow$

$|w+4|^2=4|w+1|^2 \Leftrightarrow (w+4)(\bar{w}+4)=4(w+1)(\bar{w}+1) \Leftrightarrow$

$w\bar{w}+4w+4\bar{w}+16=4w\bar{w}+4w+4\bar{w}+4 \Leftrightarrow 3w\bar{w}=12 \Leftrightarrow |w|^2=4 \Leftrightarrow |w|=2$

β) Εστω $z+v+w=0 \Leftrightarrow z+w=-v$ οπότε $|v|=|z+w|\le|z|+|w| \Leftrightarrow 5\le 2+2$ άτοπο.

Άρα $z+v+w\ne 0$.

γ) Αφού $|z|=2$ τότε $|z|^2=4 \Leftrightarrow z\bar{z}=4 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{4}{z}$ και όμοια $\bar{v}=\frac{25}{v}$, $\bar{w}=\frac{4}{w}$ άρα

$|z+v+w|=|\bar{z}+\bar{v}+\bar{w}|=\left|\frac{4}{2}+\frac{25}{v}+\frac{4}{w}\right|=\left|\frac{4vw+25zw+4zv}{z\cdot vw}\right|=\frac{|4vw+4zv+25zw|}{|z|\cdot|v|\cdot|w|} \Leftrightarrow$

$|z+v+w|=\frac{1}{20}|4v(w+z)+25zw| \Leftrightarrow 20|z+v+w|=|4v(w+z)+25zw|$

19. **α)** Εστω $z=x+yi$ τότε

$$z+\frac{1}{4z}=x+yi+\frac{1}{4(x+yi)}=x+yi+\frac{x-yi}{4(x^2+y^2)}=x+\frac{x}{4(x^2+y^2)}+i\left(y-\frac{y}{4(x^2+y^2)}\right).$$

Οπότε η σχέση $4\text{Im}\left(z+\frac{1}{4z}\right)-3\text{Im}(z)=0 \quad (1)$ γίνεται

$$4\left(y-\frac{y}{4\left(x^2+y^2\right)}\right)-3y=0 \Leftrightarrow 4y-\frac{y}{x^2+y^2}-3y=0$$

αφού $y\neq 0$ τότε $4-\frac{1}{x^2+y^2}-3=0 \Leftrightarrow 1=\frac{1}{x^2+y^2} \Leftrightarrow x^2+y^2=1.$

Αφού για τους μιγαδικούς z_1,z_2,z_3 ισχύει η σχέση (1) τότε θα ισχύει και η σχέση $x^2+y^2=1$ οπότε οι εικόνες τους ανήκουν στον μοναδικό κύκλο άρα ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ είναι ο μοναδιαίος.

β) Εχουμε ότι $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ οπότε $\bar{z}_1=\frac{1}{z_1}$, $\bar{z}_2=\frac{1}{z_2}$, $\bar{z}_3=\frac{1}{z_3}$

άρα $\bar{w}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}+\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_3}+\frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1}+\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_3}+\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}+\frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_2}=\frac{\frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_2}}+\frac{\frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_3}}+\frac{\frac{1}{z_3}}{\frac{1}{z_1}}+\frac{\frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_3}}+\frac{\frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_1}}+\frac{\frac{1}{z_3}}{\frac{1}{z_2}}=$

$=\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}+\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}=w$ οπότε αφού $\bar{w}=w$ τότε $w\in\mathbb{R}$.

γ) $|z_1+z_2+z_3|=|\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3|=\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|=\left|\frac{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2}{z_1z_2z_3}\right|=$

$=\frac{|z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3|}{|z_1|\cdot|z_2|\cdot|z_3|}=|z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3|.$

δ) Αφού z_1,z_2,z_3 είναι ρίζες της εξίσωσης $z^3=1$ τότε θα ισχύει $z_1^3=1,\ z_2^3=1,\ z_3^3=1$. Οπότε:

i. $z_1^3=z_2^3=1 \Leftrightarrow z_1^3-z_2^3=0 \Leftrightarrow (z_1-z_2)\left(z_1^2+z_1z_2+z_2^2\right)=0$. Αφού $z_1\neq z_2$ τότε

$$z_1^2+z_1z_2+z_2^2=0 \overset{:z_1z_2}{\Leftrightarrow} \frac{z_1^2}{z_1z_2}+\frac{z_1z_2}{z_1z_2}+\frac{z_2^2}{z_1z_2}=0 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}+1+\frac{z_2}{z_1}=0 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=-1$$

ii. Είναι και όμοια $\left.\begin{array}{l}\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=-1\\ \frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_2}=-1\\ \frac{z_1}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}=-1\end{array}\right\}$ με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}=-3.$$

iii. Αφού z_1,z_2,z_3 ρίζες της εξίσωσης $z^3=1$ τότε $z^3-1=0 \Leftrightarrow (z-1)\left(z^2+z+1\right)=0$

$z-1=0 \Leftrightarrow z_1=1$ ή $z^2+z+1=0 \Leftrightarrow z_{2,3}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

οπότε $z_1+z_2+z_3=1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=0.$

20. **α)** Αφού η εξίσωση $z^2-\kappa z+1=0$ (1) έχει ως ρίζες μη πραγματικούς αριθμούς τότε πρέπει

$\Delta<0 \Leftrightarrow \kappa^2-4<0 \Leftrightarrow |\kappa|<2 \Leftrightarrow -2<\kappa<2$

β) Αφού z_1, z_2 ρίζες του τριωνύμου (1) τότε $z_2=\bar{z}_1$ οπότε

$w=z_1^{1821}+z_2^{1821}=z_1^{1821}+\bar{z}_1^{1821}=2\mathrm{Re}\left(z_1^{1821}\right)\in\mathbb{R}$

γ) Από τον τύπο Vieta θα είναι $z_1z_2=\frac{1}{1}\Leftrightarrow z_1z_2=1$ οπότε $z_1\bar{z}_1=1\Leftrightarrow |z_1|^2=1\Leftrightarrow |z_1|=1$ οπότε

αφού $z_2=\bar{z}_1$ θα είναι $|z_2|=1$.

δ) Επίσης $z_1+z_2=-\frac{-\kappa}{1}=\kappa$ και η σχέση $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}+2=\frac{1}{|z_1|^2}$ γίνεται

$\frac{z_1^2+z_2^2}{z_1z_2}+2=\frac{1}{1}\Leftrightarrow \frac{(z_1+z_2)^2-2z_1z_2}{1}+2=1\Leftrightarrow \kappa^2-2+2=1\Leftrightarrow \kappa^2=1$ άρα $\kappa=\pm1$

ε) Αν $\kappa=-1$ τότε η σχέση (1) γίνεται $z^2+z+1=0$

i. άρα αφού ο z_1 είναι ρίζα θα ισχύει: $z_1^2+z_1+1=0 \overset{\cdot(z_1-1)\neq0}{\Leftrightarrow} (z_1-1)\left(z_1^2+z_1+1\right)=0\Leftrightarrow$

$z_1^3-1=0\Leftrightarrow z_1^3=1$ και όμοια $z_2^3=1$.

ii. $z_1^{300}-z_1^{400}+z_1^{500}=\left(z_1^3\right)^{100}-\left(z_1^3\right)^{133}z_1+\left(z_1^3\right)^{166}z_1^2=1+z_1+z_1^2=0$

21. **α)** Εχουμε: $w=\frac{z-i}{1-iz}\Leftrightarrow w-wiz=z-i\Leftrightarrow w+i=wiz+z\Leftrightarrow w+i=z(1+wi)$

Είναι $w+i\neq0$ γιατί αν $w+i=0$ τότε προκύπτει $z=0$ που είναι άτοπο.

Άρα: $\frac{1+wi}{w+i}=\frac{1}{z}$ οπότε $\left|\frac{1+wi}{w+i}\right|=\left|\frac{1}{z}\right|\Leftrightarrow\left|\frac{i(w-i)}{w+i}\right|=\frac{1}{|z|}\Leftrightarrow\left|\frac{w-i}{w+i}\right|=\frac{1}{|z|}$ (1).

β) Αν $|z|=2$ τότε $(1)\Rightarrow|w+i|=2|w-i|\Leftrightarrow|w+i|^2=4|w-i|^2\Leftrightarrow(w+i)(\bar{w}-i)=4(w-i)(\bar{w}+i)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w\bar{w}-iw+i\bar{w}+1=4(w\bar{w}+iw-i\bar{w}+1)\Leftrightarrow w\bar{w}-iw+i\bar{w}+1=4w\bar{w}+4iw-4i\bar{w}+4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3w\bar{w}+5iw-5i\bar{w}+3=0\Leftrightarrow 3w\bar{w}+5i(w-\bar{w})+3=0$. Αν $w=x+yi$ τότε έχουμε

$3(x^2+y^2)+5i\cdot2yi+3=0\Leftrightarrow x^2y^2-\frac{10}{3}y+1=0\Leftrightarrow x^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$

οπότε ο γ.τ. των εικόνων του w είναι ο κύκλος με κέντρο $K\left(0,\frac{5}{3}\right)$ και $\rho=\frac{4}{3}$

γ) Αν $|z|=1$ τότε από $(1)\Rightarrow|w-i|=|w+i|$. Αν $w=x+yi$ έχουμε

$|x+(y-1)i|=|x+(y+1)i|\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=x^2+(y+1)^2\Leftrightarrow y=0$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του w είναι ο άξονας $x'x$.

δ) Εχουμε $w\in I\Leftrightarrow\bar{w}=-w\Leftrightarrow\frac{\bar{z}+i}{1+i\bar{z}}=-\frac{z-i}{1-iz}\Leftrightarrow(\bar{z}+i)(1-iz)=-(z-i)(1+i\bar{z})\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\bar{z}-iz\bar{z}+i+z=-(z+iz\bar{z}-i+\bar{z})\Leftrightarrow\bar{z}-i\cancel{z\bar{z}}+\cancel{i}+z=-z-i\cancel{z\bar{z}}+\cancel{i}-\bar{z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\bar{z}=-2z\Leftrightarrow\bar{z}=-z\Leftrightarrow z\in I$.

22. **α)** Αφού $f(z)=|z-3i|$ τότε η σχέση $\frac{1}{f(z)}+\frac{1}{f(\bar{z})}=\frac{10}{f(z)f(\bar{z})}$ γίνεται

$\frac{1}{|z-3i|}+\frac{1}{|\bar{z}-3i|}=\frac{10}{|z-3i||\bar{z}-3i|}$ όμως $|\bar{z}-3i|=|\overline{\bar{z}-3i}|=|z+3i|$

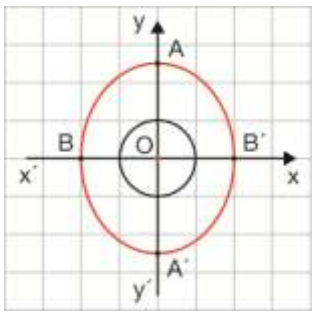
άρα $\frac{1}{|z-3i|}+\frac{1}{|z+3i|}=\frac{10}{|z-3i||z+3i|}\Leftrightarrow|z+3i|+|z-3i|=10\ \ (1)$.

Οπότε ο γ.τ. των εικόνων του z είναι έλλειψη με εστίες $E(0,3)$ και $E'(0,-3)$ οπότε $\gamma=3$, μεγάλο άξονα $2\alpha=10\Leftrightarrow\alpha=5$ οπότε $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2=16$.

Η εξίσωση της έλλειψης είναι: $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1.$

β) Σε κάθε περίπτωση είναι

$(B'B)\le|z_1-z_2|\le(A'A)\Leftrightarrow 2\beta\le|z_1-z_2|\le 2\alpha\Leftrightarrow 8\le|z_1-z_2|\le 10$



γ) Από τη σχέση (1) έχουμε $\left(|z+3i|+|z-3i|\right)^2=100$

$|z+3i|^2+2|z+3i||z-3i|+|z-3i|^2=100\Leftrightarrow$

$(z+3i)(\bar{z}-3i)+2|z^2+9|+(z-3i)(\bar{z}+3i)=100\Leftrightarrow$

$z\bar{z}-3\cancel{z\bar{i}}+3\cancel{\bar{z}i}+9+2|z^2+9|+z\bar{z}+3\cancel{z\bar{i}}-\cancel{3\bar{z}i}+9=100\Leftrightarrow$

$2|z|^2+2|z^2+9|=82\Leftrightarrow|z|^2+|z^2+9|=41$

δ) i. Αφού $w=\eta\mu\theta+i\sigma\upsilon\nu\theta$ τότε $\begin{cases}x=\eta\mu\theta\\ y=\sigma\upsilon\nu\theta\end{cases}$ έχουμε $\begin{cases}x^2=\eta\mu^2\theta\\ y^2=\sigma\upsilon\nu^2\theta\end{cases}$ οπότε

$x^2+y^2=\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1$. Άρα ο γ.τ. των εικόνων του w είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

ii. Είναι $|z-w|_{min}=\beta-\rho=4-1=3$ και $|z-w|_{max}=\alpha+\rho=5+1=6$ άρα $3\le|z-w|\le 6$

23. **α)** Η εξίσωση $z+\frac{1}{z}=1$ γίνεται $z^2+1=z\Leftrightarrow z^2-z+1=0\ \ (1)$.

Αφού έχει ρίζες z_1, z_2 τότε από τους τύπους του Vieta θα ισχύει $z_1z_2=\frac{1}{1}=1$,

$z_1+z_2=-\frac{-1}{1}=1$. Επίσης $z_1^3+1=(z_1+1)(z_1^2-z_1+1)=0$ αφού $z_1^2-z_1+1=0$ λόγω του ότι ο z_1 είναι ρίζα της (1). Όμοια αποδεικνύουμε ότι $z_2^3+1=0$ άρα $z_1^3=z_2^3=-1$.

β) Είναι $z_1^{2015}+z_2^{2015}=\left(z_1^3\right)^{671}z_1^2+\left(z_2^3\right)^{671}z_2^2=(-1)^{671}z_1^2+(-1)^{671}z_2^2=-z_1^2-z_2^2=-\left(z_1^2+z_2^2\right)\ \ (2)$.

Όμως $z_1^2-z_1+1=0\Leftrightarrow z_1^2=z_1-1\ \ (3)$ και αντίστοιχα $z_2^2=z_2-1$ οπότε η (2) γίνεται:

$z_1^{2015}+z_2^{2015}=-(z_1-1+z_2-1)=-(z_1+z_2-2)\overset{(0)}{=}-(1-2)=1.$

γ) Εχουμε $z_1^{14}+\frac{1}{z_2^{22}}+1=0\Leftrightarrow\left(z_1^3\right)^4z_1^2+\frac{1}{\left(z_2^3\right)^7z_2}+1=0\Leftrightarrow z_1^2=\frac{1}{z_2}+1=0\overset{(3)}{\Leftrightarrow}$

$z_1-1+\frac{1}{z_2}+1=0\Leftrightarrow z_1-\frac{1}{z_2}=0\ \ (4)$ όμως $z_1+z_2=1\Leftrightarrow z_1=1-z_2$, άρα η (4) γίνεται

$1-z_2-\frac{1}{z_2}=0\Leftrightarrow z_2+\frac{1}{z_2}=1$ που ισχύει αφού z_2 ρίζα της εξίσωσης $z+\frac{1}{z}=1$.

δ) Εχουμε $(\text{ΑΓ})=|3z_1+3z_2-z_1|=|2z_1+3z_2|$ και $(\text{ΒΓ})=|3z_1+3z_2-z_2|=|3z_1+2z_2|$.

Είναι $|2z_1+3z_2|=|3z_1+2z_2| \Leftrightarrow (2z_1+3z_2)(2\bar{z}_1+3\bar{z}_2)=(3z_1+2z_2)(3\bar{z}_1+32\bar{z}_2) \Leftrightarrow |z_1|=|z_2|$

που ισχύει γιατί αφού $z_1^3=z_2^3$ τότε $|z_1|^3=|z_2|^3 \Leftrightarrow |z_1|=|z_2|$.

24. **α)** Είναι $z+1=w$. Οπότε η σχέση $|w-1|=1$ γίνεται $|z+1-1|=1 \Leftrightarrow |z|=1$, οπότε η εικόνα του z βρίσκεται στον μοναδικό κύκλο.

β) i. Ισχύει $|z_1|=1 \Leftrightarrow |z_1|^2=1 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1=1 \Leftrightarrow \bar{z}_1=\dfrac{1}{z_1}$ και αντίστοιχα $\bar{z}_2=\dfrac{1}{z_2}$, $\bar{z}_3=\dfrac{1}{z_3}$

Είναι $u=\dfrac{z_1+z_2}{z_3}+\dfrac{z_2+z_3}{z_1}+\dfrac{z_3+z_1}{z_2}=\dfrac{z_1}{z_3}+\dfrac{z_2}{z_3}+\dfrac{z_2}{z_1}+\dfrac{z_3}{z_1}+\dfrac{z_3}{z_2}+\dfrac{z_1}{z_2}$ οπότε

$$\bar{u}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_3}+\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_3}+\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}+\frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1}+\frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_2}+\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}=\frac{\frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_3}}+\frac{\frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_3}}+\frac{\frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_1}}+\frac{\frac{1}{z_3}}{\frac{1}{z_1}}+\frac{\frac{1}{z_3}}{\frac{1}{z_2}}+\frac{\frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_2}}=$$

$=\dfrac{z_3}{z_1}+\dfrac{z_3}{z_2}+\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_1}{z_3}+\dfrac{z_2}{z_3}+\dfrac{z_2}{z_1}=u$, οπότε $\bar{u}=u$ άρα $u\in\mathbb{R}$.

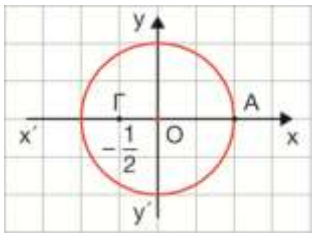
ii. Αφού $z_1+z_2+z_3=0$ τότε $z_1+z_2=-z_3$, $z_1+z_3=-z_2$ και $z_2+z_3=-z_1$ οπότε ο u γίνεται

$$u=\frac{z_1+z_2}{z_3}+\frac{z_2+z_3}{z_1}+\frac{z_3+z_1}{z_2}=\frac{-z_3}{z_3}+\frac{-z_1}{z_1}+\frac{-z_2}{z_2}=-3$$

$$\Leftrightarrow u=-3 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_3}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_3}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}+\frac{z_1}{z_2}=-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}\right)+\left(\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}\right)=-3 \Leftrightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}\right)+\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}\right)}=-3 \Leftrightarrow$$

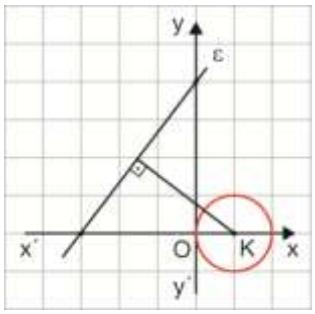
$$\Leftrightarrow 2\text{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}\right)=-3 \Leftrightarrow \text{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}\right)=\frac{-3}{2}$$



γ) Επειδή $z+1=w$ τότε $|z+w|=|z+z+1|=|2z+1|=2\left|z-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|$,

τότε η μέγιστη τιμή του

$|z+w|=2(\text{ΑΓ})=2((\text{ΓΟ})+\rho)=2\left(\dfrac{1}{2}+1\right)=3$.



δ) Οι μιγαδικοί w κινούνται σε κύκλο με κέντρο $K(1,0)$ και $\rho=1$.

Οπότε η ελάχιστη του μιγαδικού w από την ευθεία ε είναι

$$d(K,\varepsilon)-\rho=\frac{|4\cdot1-3\cdot0+12|}{\sqrt{4^2+3^2}}-1=\frac{16}{5}-1=\frac{11}{5}$$

25. **α)** Είναι $f(z)=3+i \Leftrightarrow |z|+i\bar{z}=3+i$. Αν $z=x+yi$ τότε $\sqrt{x^2+y^2}+xi+y=3+i$.

Πρέπει $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+y=3\\ x=1\end{cases}\Bigg\}\ \begin{matrix}\sqrt{1+y^2}=3-y\\ x=1\end{matrix}\ \Bigg|\overset{y\le 3}{\Leftrightarrow}\ \begin{matrix}1+y^2=9-6y+y^2\\ x=1\end{matrix}\ \Bigg|\ \begin{matrix}y=\frac{4}{3}\\ x=1\end{matrix}$

άρα $z=1+\frac{4}{3}i$

β) Είναι $\left|f(|z|)\right|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left||z|+i|\bar{z}|\right|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left||z|+i|z|\right|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|z||1+i|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|z|\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}$

οπότε $|z|=1$

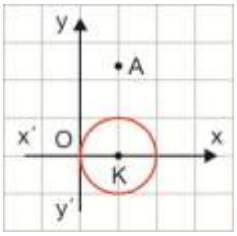
γ) i. Αφού $|z|=1$ τότε $f(z)=1+i\bar{z}$. Έστω $z=\alpha+\beta i$ τότε αφού $|z|=1$ θα ισχύει $\alpha^2+\beta^2=1$ και ο $f(z)$ γίνεται $f(z)=1+i(\alpha-\beta i)=(\beta+1)+\alpha i$. Αν $f(z)=x+yi$ πρέπει

$\begin{matrix}x=\beta+1\\ y=\alpha\end{matrix}\Bigg|\Leftrightarrow\begin{matrix}x-1=\beta\\ y=\alpha\end{matrix}$ οπότε $\left.\begin{matrix}(x-1)^2=\beta^2\\ y^2=\alpha^2\end{matrix}\right\}$ άρα $(x-1)^2+y^2=\beta^2+\alpha^2=1$, άρα ο γ.τ. των εικόνων του $f(z)$ είναι ο κύκλος με κέντρο $K(1,0)$ και $\rho=1$.

ii. Είναι $z_1=1+\frac{4}{3}i$ οπότε $|z_1-w|=|f(z)-z_1|=\left|f(z)-1-\frac{4}{3}i\right|$.

Αν A η εικόνα του z_1 τότε $|z_1-w|_{min}=(AK)-\rho=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$,

$|z_1-w|_{max}=(AK)+\rho=\frac{4}{3}+1=\frac{7}{3}$ οπότε $\frac{1}{3}\le|z_1-w|\le\frac{7}{3}$



26. **α)** Εστω $z=x+yi$ τότε $(1-3i)z=(1-3i)(x+yi)=x+yi-3xi+3y=(x+3y)+i(y-3x)$.

Οπότε η εξίσωση $z\bar{z}+4\mathrm{Re}((1-3i)z)+15=0$ γίνεται

$x^2+y^2+4(x+3y)+15=0\Leftrightarrow x^2+y^2+4x+12y+15=O$

$x^2+4x+4+y^2+12y+36=25\Leftrightarrow(x+2)^2+(y+6)^2=5^2$

Άρα η δοσμένη εξίσωση παριστάνει εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(-2,-6)$ και $\rho=5$.

Επειδή ο κύκλος έχει άπειρα σημεία τότε και η παραπάνω εξίσωση έχει άπειρες λύσεις (όλα τα σημεία του κύκλου).

β) Θα είναι $|z_1-z_2|\le 2\rho=10\Leftrightarrow|z_1-z_2|\le 10$ γιατί η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η απόσταση των z_1,z_2 είναι όταν αυτή είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

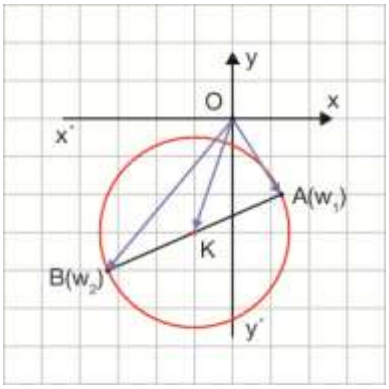
γ) Εστω A, B οι εικόνες των w_1,w_2 τα οποία είναι αντιδιαμετρικά σημεία τότε $|w_1-w_2|=2\rho=10$

και $|w_1+w_2|=\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=2\left|\overrightarrow{OK}\right|=2\cdot\sqrt{40}=4\sqrt{10}$ οπότε

$|w_1+w_2|^{2\nu}+\left|16(w_1-w_2)\right|^{\nu}=\left(4\sqrt{10}\right)^{2\nu}+16^{\nu}\cdot|w_1-w_2|^{\nu}=$

$=4^{2\nu}\cdot10^{\nu}+16^{\nu}\cdot10^{\nu}=2\cdot16^{\nu}\cdot10^{\nu}=$

$=2\cdot\left(2^4\right)^{\nu}\cdot2^{\nu}\cdot5^{\nu}=2^{1+4\nu+\nu}\cdot5^{\nu}=2^{5\nu+1}\cdot5^{\nu},\ \nu\in\mathbb{N}^*$



27. **Α) α)** Αφού $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ τότε $\bar{z}_1=\frac{1}{z_1}$, $\bar{z}_2=\frac{1}{z_2}$, $\bar{z}_3=\frac{1}{z_3}$

οπότε $|z_1+z_2+z_3|=|\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3|=\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|$

β) Αφού $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$ τότε $z_1^2+z_2^2=-z_3^2$ άρα $|z_1^2+z_2^2|=|-z_3^2|=|z_3|^2=1$

όμοια και $|z_1^2+z_3^2|=|z_3^2+z_1^2|=1$

γ) Είναι $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0 \Leftrightarrow \bar{z}_1^2+\bar{z}_2^2+\bar{z}_3^2=0 \Leftrightarrow \frac{1}{z_1^2}+\frac{1}{z_2^2}+\frac{1}{z_3^2}=0$

δ) Είναι $(z_1+z_2+z_3)^2=z_1^2+z_2^2+z_3^2+2z_1z_2+2z_2z_3+2z_3z_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z_1+z_2+z_3)^2=2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)$

άρα και $|z_1+z_2+z_3|^2=2|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|=2\frac{|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|}{1\cdot1\cdot1}=$

$=2\frac{|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|}{|z_1|\cdot|z_2|\cdot|z_3|}=2\left|\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right|\overset{(\alpha)}{=}2|z_1+z_2+z_3|$

οπότε $|z_1+z_2+z_3|^2=2|z_1+z_2+z_3|$ και αφού $z_1+z_2+z_3\neq 0$ τότε $|z_1+z_2+z_3|=2$

Β) Είναι $|z_1|=1$. $|z_1z_2z_3|=|z_1|\cdot|z_2|\cdot|z_3|=1\cdot1\cdot1=1\left|\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right|=1$

γιατί από (α) ερώτημα έχουμε:

$|z_1+z_2+z_3|=\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|=\left|\frac{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2}{z_1z_2z_3}\right|=\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{1\cdot1\cdot1}=|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|$

Άρα ο περιγεγραμμένος κύκλος του παραπάνω τριγώνου είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

28. **α)** Είναι $z_1e^{|z_1|}+z_2e^{|z_2|}=z_1e^{|z_1+z_2|}+z_2e^{|z_1+z_2|}$ (1) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1\left(e^{|z_1|}-e^{|z_1+z_2|}\right)=z_2\left(e^{|z_1+z_2|}-e^{|z_2|}\right)$

Εστω $e^{|z_1|}-e^{|z_1+z_2|}\neq 0$, τότε $\frac{z_1}{z_2}=\frac{e^{|z_1+z_2|}-e^{|z_2|}}{e^{|z_1|}-e^{|z_1+z_2|}}\in\mathbb{R}$

Αν $e^{|z_1|}=e^{|z_1+z_2|}$ τότε $z_1\cdot 0=z_2\left(e^{|z_1+z_2|}-e^{|z_2|}\right)\Leftrightarrow e^{|z_1+z_2|}-e^{|z_2|}=0\Leftrightarrow e^{|z_1+z_2|}=e^{|z_2|}$ άρα

$|z_1+z_2|=|z_2|$ και αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει $|z_1|=|z_2|$

β) Αν $\frac{z_1}{z_2}\in\mathbb{R}$ δηλαδή $\frac{z_1}{z_2}=\alpha\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z_1=\alpha z_2$ τότε οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 βρίσκονται στην ίδια ευθεία $y=\lambda x$. Έστω $z_1=x_1+y_1i$ και $z_2=x_2+y_2i$, $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}$.

$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$, $\overrightarrow{O\Gamma}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{O\Gamma}=(x_2-x_1)(x_2+x_1)+(y_2-y_1)(y_2+y_1)=x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{O\Gamma}=(x_2^2+y_2^2)-(x_1^2+y_1^2)=|z_1|^2-|z_2|^2=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{O\Gamma}$

29. **α)** $|z+\alpha|^2+|z+\beta|^2+|z+\gamma|^2=3$ $(1)\Leftrightarrow(z+\alpha)(\bar{z}+\bar{\alpha})+(z+\beta)(\bar{z}+\bar{\beta})+(z+\gamma)(\bar{z}+\bar{\gamma})=3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\bar{z}+\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z+\alpha\bar{\alpha}+z\bar{z}+\beta\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{\beta}+z\bar{z}+\gamma\bar{z}+\bar{\gamma}z+\gamma\bar{\gamma}=3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3|z|^2+|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2+\bar{z}\cancel{\left(\alpha+\beta+\gamma\right)}^{z}+z\cancel{\left(\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\bar{\gamma}\right)}^{\bar{z}}=3\Leftrightarrow 5|z|^2+3=3\Leftrightarrow |z|=0$

β) Αν $\alpha=\beta=\gamma=\kappa\in\mathbb{C}$ τότε $z=3\kappa$ και $|z|=0\Leftrightarrow|\kappa|=0$ που είναι άτοπο.

γ) $\beta+\gamma=-\alpha$ οπότε $|\beta+\gamma|^2=|\alpha|^2\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\beta\bar{\gamma}+\bar{\beta}\gamma=1\Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(\beta\bar{\gamma})=-1\Leftrightarrow\mathrm{Re}(\beta\bar{\gamma})=-\frac{1}{2}$

δ) $|\beta-\gamma|=\sqrt{3}\Leftrightarrow|\beta-\gamma|^2=3\Rightarrow|\beta-\gamma||\bar{\beta}-\bar{\gamma}|=3\Leftrightarrow\beta\bar{\beta}-(\beta\bar{\gamma}+\bar{\beta}\gamma)+\gamma\bar{\gamma}=3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|\beta|^2+1+|\gamma|^2=3\Leftrightarrow 1+1+1=3$ ισχύει

ε) $|\gamma^2+1|+|\gamma^3+1|\geq|\gamma^3+\gamma^2+2|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|\gamma^2+1|+|\gamma^3+1|\geq|\gamma^2(\gamma+1)+2|\geq|\gamma^2(\gamma+1)-|2||\geq||\gamma^2||\gamma+1|-2|=|\gamma+1|-2=2-|\gamma+1|$

30. **α)** Η άλλη ρίζα της εξίσωσης είναι η $z_2=\bar{z}_1=2-2i$. Από τους τύπους του Vieta, είναι

$z_1+z_2=\beta\Leftrightarrow 2+2i+2-2i=\beta\Leftrightarrow\beta=4$ και $z_1z_2=\gamma\Leftrightarrow\gamma=2^2+2^2=8$

β) $z_1^{2014}+z_2^{2014}=(2+2i)^{2014}+(2-2i)^{2014}=2^{2014}\left[(1+i)^2\right]^{1007}2^{2014}\left[(1-i)^2\right]^{1007}\Leftrightarrow$

$z_1^{2014}+z_2^{2014}=2^{2014}(2i)^{1007}+2^{2014}(-2i)^{1007}=2^{2014}(2i)^{1007}-2^{2014}(2i)^{1007}=0$

γ) i. $z_3=\frac{z_2}{z_1}+3(2+i)=6+2i$, $(AB)=|z_2-z_1|=4$, $(A\Gamma)=|z_3-z_1|=|6+2i-2+2i|=4$ και

$(B\Gamma)=|z_3-z_2|=|6+2i-2+2i|=4\sqrt{2}$. Είναι $(AB)=(A\Gamma)=4$ και $(AB)^2+(A\Gamma)^2=(B\Gamma)^2$,

άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

ii. Είναι $|w-z_1|=|\overline{w-z_1}|\Leftrightarrow|w-z_1|=|w-z_2|\Leftrightarrow$

$|w-2-2i|^2=|w-2+2i|^2\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow w=\bar{w}\Leftrightarrow w\in\mathbb{R}$

iii. $|u+2i|+|u-2i|=10$. Έλλειψη με εστίες $E'(0,-2)$, $E(0,2)$ και μεγάλο άξονα

$(AA')=2\alpha=10\Leftrightarrow\alpha=5$

iv. Επειδή τα u_1,u_2 βρίσκονται στη προηγούμενη έλλειψη, η μέγιστη απόσταση τους είναι $2\alpha=10$, ισχύει $|u_1-u_2|\leq 10$.

31. **α)** Είναι $f(z)=\dfrac{(1+i\sqrt{3})z}{|z+3i|-|z-3i|}$, $z\in\mathbb{C}$.

Για να ορίζεται η $f(z)$ πρέπει $|z+3i|-|z-3i|\neq 0\Leftrightarrow|z+3i|\neq|z-3i|$

Αν $z=x+yi$ τότε $|x+(y+3)i|\neq|x+(y-3)i|\Leftrightarrow x^2+(y+3)^2\neq x^2+(y-3)^2$ άρα $y\neq 0$.

Άρα η παραπάνω συνάρτηση δεν ορίζεται όταν $z\in\mathbb{R}$

β) i. Είναι $||z+3i|-|z-3i||\leq|(z+3i)+(z-3i)|=|2z|=2|z|$

ii. Εχουμε $|f(z)|\geq 1\Leftrightarrow\dfrac{|(1+i\sqrt{3})z|}{||z+3i|-|z-3i||}\geq 1\Leftrightarrow\dfrac{|1+i\sqrt{3}|\cdot|z|}{||z+3i|-|z-3i||}\geq 1\Leftrightarrow\dfrac{2|z|}{||z+3i|-|z-3i||}\geq 1$

που ισχύει από (β) i) ερώτημα.

γ) Εχουμε $|f(z)| = \frac{1}{2}|z| \Leftrightarrow \frac{|1+i\sqrt{3}|\cdot|z|}{||z+3i|-|z-3i||} = \frac{1}{2}|z| \Leftrightarrow \frac{2|z|}{||z+3i|-|z-3i||} = \frac{|z|}{2} \Leftrightarrow ||z+3i|-|z-3i|| = 4$.

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο γ.τ. των εικόνων του z είναι υπερβολή με εστίες $E(0,3)$ και $E'(0,-3)$ οπότε $\gamma = 3$, $2\alpha = 4$ άρα $\alpha = 2$ και $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = 5$. Οπότε η εξίσωση της υπερβολής είναι $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$

32. **α)** Είναι $\left|\frac{z}{4} - i\right| = \frac{1}{2}|z-i| \Leftrightarrow \frac{|z-4i|}{4} = \frac{|z-i|}{2} \Leftrightarrow |z-4i| = 2|z-i|$

οπότε $|z-4i|^2 = 4|z-i|^2 \Leftrightarrow (z-4i)(\bar{z}+4i) = 4(z-i)(\bar{z}+i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\bar{z} + 4zi - 4\bar{z}i + 16 = 4z\bar{z} + 4zi - 4\bar{z}i + 4 \Leftrightarrow 3z\bar{z} = 12 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2$ οπότε ο γ.τ. των εικόνων του z είναι ο κύκλος με κέντρο το $O(0,0)$ και $\rho_1 = 2$

β) Εχουμε $w(z-i) - 2zi - 8 = 0 \Leftrightarrow wz - 2zi = wi + 8 \Leftrightarrow z(w-2i) = wi + 8$

οπότε $|z|\cdot|w-2i| = |wi+8| \Leftrightarrow 2|w-2i| = |wi+8|$

άρα $4|w-2i|^2 = |wi+8|^2 \Leftrightarrow 4(w-2i)(\bar{w}+2i) = (wi+8)(-\bar{w}i+8) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4w\bar{w} + \cancel{8wi} - \cancel{8\bar{w}i} + 16 = w\bar{w} + \cancel{8wi} - \cancel{8\bar{w}i} + 64 \Leftrightarrow 3w\bar{w} = 48 \Leftrightarrow |w|^2 = 16$, άρα $|w| = 4$,

οπότε η εικόνα του w βρίσκεται στον κύκλο που έχει κέντρο $O(0,0)$ και $\rho_2 = 4$

γ) Είναι $|z| = 2 \Leftrightarrow z\bar{z} = 4 \Rightarrow \bar{z} = \frac{4}{z}$ και $|w| = 4 \Leftrightarrow w\bar{w} = 16 \Leftrightarrow \bar{w} = \frac{16}{w}$

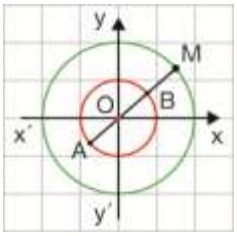
οπότε $\bar{u} = \frac{\bar{w} - 2\bar{z}}{\bar{w} + 2\bar{z}} = \frac{\frac{16}{w} - 2\frac{4}{z}}{\frac{16}{w} + 2\frac{4}{z}} = \frac{16z - 8w}{16z + 8w} = \frac{2z - w}{2z + w} = -\frac{w - 2z}{w + 2z} = -u$ οπότε $u \in I$

δ) Είναι $(MA) = |z_1 - w|$ όπου

$||z_1| - |w|| \le |z_1 - w| \le |z_1| + |w| \Leftrightarrow \Leftrightarrow |2-4| \le (MA) \le 2+4 \Leftrightarrow$

$2 \le (MA) \le 6$. Επίσης $2 \le (MB) \le 6 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \le \frac{1}{(MB)} \le \frac{1}{2}$,

άρα $\frac{1}{3} \le \frac{(MA)}{(MB)} \le 3$



33. **α)** $|z-w| = |z|$ τότε $|z-w|^2 = |z|^2 \Leftrightarrow (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) \Leftrightarrow \cancel{z\bar{z}} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w} =$

$= \cancel{z\bar{z}} - (z\bar{w} + \bar{z}w) + |w| = 0 \Leftrightarrow -2\mathrm{Re}(z\bar{w}) + 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z\bar{w}) = \frac{1}{2}$

β) Είναι $w = z - 3\theta zi \Leftrightarrow z - w = 3\theta iz$ άρα $|z-w| = 3|\theta||i||z| \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} |z| = 3|\theta||z| \Leftrightarrow |\theta| = \frac{1}{3}$

οπότε $\theta = \frac{1}{3}$ αφού $\theta > 0$.

γ) i. Άρα $\theta = \frac{1}{3}$ τότε $w = z\left(1 - 3\frac{1}{3}i\right) \Leftrightarrow w = z(1-i)$ άρα $|w| = |z||1-i| \Leftrightarrow 1 = |z|\cdot\sqrt{2} \Leftrightarrow |z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ii. $(OA)=|z|$, $(OB)=|w|$, $(AB)=|z-w|$.

Αφού $|z|=|z-w|$ τότε $(OA)=(AB)$ οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Επίσης $(OA)^2+(AB)^2=|z|^2+|z-w|^2=2|z|^2=2\frac{2}{4}=1=|w|^2=(OB)^2$

Άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $A=90^\circ$

34. **Α)** $f(z)=\frac{4-iz}{z+1}$, $z\in\mathbb{C}$ με $z\neq 1$.

i. Είναι $f(4)=\frac{4-4i}{4+1}=\frac{4}{5}(1-i)$ οπότε

$$\left[f(4)\right]^{40}=\left(\frac{4}{5}\right)^{40}(1-i)^{40}=\left(\frac{4}{5}\right)^{40}\cdot\left[(1-i)^2\right]^{20}=\left(\frac{4}{5}\right)^{40}\cdot(-2i)^{20}=$$

$$=\left(\frac{4}{5}\right)^{40}\cdot 2^{20}\cdot 1=\left(\frac{4}{5}\right)^{40}\cdot 2^{20}\in\mathbb{R}_+^*$$

οπότε το $\left[f(4)\right]^{40}$ ανήκει στο θετικό ημιάξονα Ox.

ii. Είναι $\left|\frac{f(z)-4}{f(z)+i}\right|=\left|\frac{\frac{4-iz}{z+1}-4}{\frac{4-iz}{z+1}+i}\right|=\left|\frac{\frac{4-iz-4z-4}{z+1}}{\frac{4-iz+i(z+1)}{z+1}}\right|=\left|\frac{-iz-4z}{4+i}\right|=\left|\frac{-z(i+4)}{4+i}\right|=|-z|=|z|$

Β) i. Αν $|z|=1$ τότε $\left|\frac{f(z)-4}{f(z)+i}\right|=1$ οπότε $|f(z)-4|=|f(z)+i|$. Εστω $f(z)=x+yi$, τότε

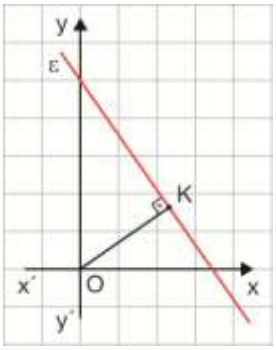
$$|x+yi-4|=|x+yi+i|\Leftrightarrow(x-4)^2+y^2=x^2+(y+1)^2\Leftrightarrow$$

$$x^2-8x+16+y^2=x^2+y^2+2y+1\Leftrightarrow\varepsilon:8x+2y-15=0$$

ii. $\lambda_\varepsilon=-\frac{8}{2}=4$ οπότε $OK\perp\varepsilon$ άρα $\lambda_\alpha=\frac{1}{4}$

$$\left.\begin{array}{l} OK: y=\frac{1}{4}x \\ \varepsilon: 8x+2y-15=0 \end{array}\right| \begin{array}{l} x=\frac{30}{17} \\ y=\frac{15}{34} \end{array}$$

Άρα ο μιγαδικός που έχει το ελάχιστο μέτρο είναι ο $\frac{30}{17}+i\frac{15}{34}$



35. **α)** $|z-3|^2=k^2\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow z+\bar{z}=\frac{|z|^2-k^2+9}{3}$ (1)

β) $|z-1|=|z^2-7z+12|\Leftrightarrow|z-1|=|z-3||z-4|\Leftrightarrow|z-1|^2=k^2|z-4|^2\Leftrightarrow$

$$(z-1)(\bar{z}-1)=k^2(z-4)(\bar{z}-4)\Leftrightarrow|z|^2-(z+\bar{z})+1=k^2\left(|z|^2-4(z+\bar{z})+16\right)\Leftrightarrow$$

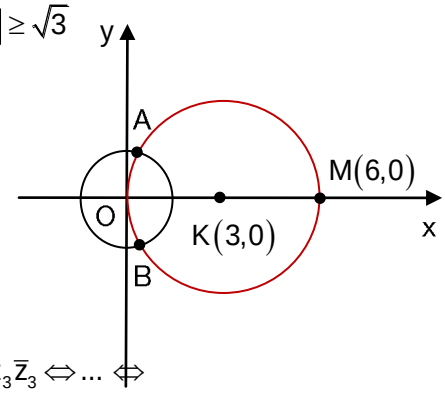
$$(1-k^2)|z|^2+(4k^2-1)(z+\bar{z})=16k^2-1\ (2)$$

γ) $(2)\overset{(1)}{\Rightarrow}(1-k^2)|z|^2+(4k^2-1)\frac{|z|^2-k^2+9}{3}=16k^2-1\Leftrightarrow$

$$\left(3-3k^2\right)|z|^2+\left(4k^2-1\right)\left(|z|^2-k^2+9\right)=48k^2-3 \Leftrightarrow$$

$$\left(3-3k^2\right)|z|^2+\left(4k^2-1\right)|z|^2+\left(4k^2-1\right)\left(-k^2+9\right)=48k^2-3 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{\left(k^2+2\right)}|z|^2=\left(4k^2+3\right)\cancel{\left(k^2+2\right)} \Leftrightarrow |z|^2=4k^2+3\geq 3 \Rightarrow |z|\geq\sqrt{3}$$



δ) Αν $k=3$ τότε $|z-3|=3$ και επειδή $|z|\geq\sqrt{3}$, η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται στο μη κυτρό τόξο AB, οπότε $|z|_{min}$ έχουν τα A,B τα οποία ανήκουν στο κύκλο $|z|=\sqrt{3}$, οπότε $|z|_{min}=\sqrt{3}$

$|z|_{max}=(OM)=6$.

36. **α)** Είναι $\left|2z_1+3z_2\right|^2=\left|5z_3\right|^2 \Leftrightarrow \left(2z_1+3z_2\right)\left(2\bar{z}_1+3\bar{z}_2\right)=25z_3\bar{z}_3 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4|z_1|^2+9|z_2|^2+6\left(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2\right)=25\cdot|z_3|^2 \Leftrightarrow 16+9+6\cdot 2\cdot \mathrm{Re}\left(\bar{z}_1z_2\right)=25\cdot 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\bar{z}_1z_2\right)=0$$

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $\left|z_1-z_2\right|^2=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2 \Leftrightarrow \left(z_1-z_2\right)\left(\bar{z}_1-\bar{z}_2\right)=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|z_1-z_2\right|^2=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2 \Leftrightarrow \cancel{z_1\bar{z}_1}-z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2+\cancel{z_2\bar{z}_2}=\cancel{z_1\bar{z}_1}+\cancel{z_2\bar{z}_2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}_1z_2\right)=0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\bar{z}_1z_2\right)=0$ που ισχύει.

γ) $2z_1+3z_2=5z_3 \Leftrightarrow 2z_1+3z_2=2z_3+3z_3 \Leftrightarrow 2\left(z_1-z_3\right)=3\left(z_3-z_2\right)$.

Αν $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, $z_3=x_3+iy_3$

τότε $2\left(z_1-z_3\right)=3\left(z_3-z_2\right) \Leftrightarrow 2\left(x_3-x_1\right)=3\left(x_3-x_2\right)$ και $2\left(y_3-y_1\right)=3\left(y_3-y_2\right)$

άρα και $2\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma}\right)=3\left(\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB}\right) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{\Gamma A}=3\overrightarrow{B\Gamma}$ άρα A,B,Γ συνευθειακά.

δ) Είναι $2z_1+3z_2=5z_3 \Leftrightarrow 2z_1=5z_3-3z_2$, άρα και $\left|2z_1\right|=\left|5z_3-3z_2\right| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|2z_1\right|^2=\left|5z_3-3z_2\right|^2 \Leftrightarrow 4z_1\bar{z}_1=25z_3\bar{z}_3-15z_3\bar{z}_2-15\bar{z}_2z_3+9z_2\bar{z}_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot 4=25+9-152\cdot\mathrm{Re}\left(z_3\bar{z}_2\right) \Leftrightarrow 30\mathrm{Re}\left(z_3\bar{z}_2\right)=18 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(z_2\bar{z}_3\right)=\frac{3}{5}$$

$$(B\Gamma)^2=\left|z_3-z_2\right|^2=\left|z_3\right|^2-2\mathrm{Re}\left(z_2\bar{z}_3\right)+\left|z_2\right|^2=1+1-2\frac{3}{5}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow (B\Gamma)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

37. **α)** Είναι $z_1=\eta\mu\theta+i\sigma\upsilon\nu\theta$ και $z_2=\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta$ οπότε $iz_2=i\left(\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta\right)=i\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta=z_1$

β) Είναι $\left|z_1\right|=\sqrt{\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta}=1$ και $\left|z_2\right|=\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\theta+\left(-\eta\mu\theta\right)^2}=1$ οπότε οι εικόνες των z_1, z_2 βρίσκονται στον μοναδιαίο κύκλο.

γ) Είναι $w=\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{iz_2}{z_2}=i$

οπότε $1+w^{101}+w^{102}+w^{103}=1+i^{101}+i^{102}+i^{103}=1+i+i^2+i^3=1+i-1-i=0$

δ) $\left(1+\dfrac{\eta\mu\theta+i\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta}\right)^{100}=\left(1+\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{100}=\left(1+i\right)^{100}=\left[\left(1+i\right)^2\right]^{50}=\left(2i\right)^{50}=2^{50}\cdot i^{50}=-2^{50}$

ε) Είναι $|z_1-z_2|=|iz_2-z_2|=|-z_2(1-i)|=|z_2||1-i|=\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$, οπότε θα είναι

$|z_1|^2+|z_2|^2=|z_1-z_2|^2$ γιατί $1+1=\left(\sqrt{2}\right)^2$, οπότε $(OA)^2+(OB)^2=(AB)^2$.

Άρα το τρίγωνο που ορίζουν οι εικόνες $A(z_1), B(z_2)$ και $O(0,0)$ είναι ορθογώνιο στο O και ισοσκελές αφού $(OA)=(OB)$ διότι $|z_1|=|z_2|$.

στ) Είναι $\big||z|-|3+4i|\big|\le|z_1-(3+4i)|\le|z_1|+|3+4i|\Leftrightarrow|1-5|\le|z_1-3-4i|\le 1+5\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\le|z_1-3-4i|\le 6$

ζ) Αφού $z_1=iz_2$ τότε $z_1^2=i_1^2z_2^2=-z_2^2$

άρα η εξίσωση $z_2^2z^3+z_1^2=0$ γίνεται $z_2^2z^3-z_2^2=0\Leftrightarrow z_2^2\left(z^3-1\right)=0$

αφού $z_2\ne 0$ τότε $z^3-1=0\Leftrightarrow(z-1)\left(z^2+z+1\right)=0$

$z-1=0\Leftrightarrow z=1$ ή $z^2+z+1=0$ οπότε $z=\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ ή $\begin{cases} z=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.

Εστω $z_\alpha=1$, $z_\beta=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z_\gamma=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ οι τρεις ρίζες της παραπάνω εξίσωσης τότε

$$|z_\alpha-z_\beta|=\left|\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$$

$$|z_\beta-z_\gamma|=\left|-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\left|\frac{2i\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{3}$$

$$|z_\gamma-z_\alpha|=\left|-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right|=\left|\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$$

Οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

η) i. Εστω $z_3=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ τότε $z_3^3=1$ αφού το z_3 είναι ρίζα της εξίσωσης $z^3=1$,

οπότε $z_3^{90}=\left(z_3^3\right)^{30}=1$.

ii. $z_3+\dfrac{1}{z_3}=-1\Leftrightarrow z_3^2+1=-z_3\Leftrightarrow z_3^2+z_3+1=0\overset{z_3-1\ne 0}{\Leftrightarrow}(z_3-1)\left(z_3^2+z_3+1\right)=0$

άρα $z_3^3-1=0\Leftrightarrow z_3^3=1$ που ισχύει.

38. **α)** Εχουμε $|z|^2+\bar{z}w-4=0\Leftrightarrow z\bar{z}+\bar{z}w=4\Leftrightarrow 3z\bar{z}+3\bar{z}w=12\quad(1)$

και $|w|^2+z\bar{w}-12=0\Leftrightarrow w\bar{w}+z\bar{w}=12\quad(2)$.

Από (1) και (2) έχουμε $3z\bar{z}+3\bar{z}w=w\bar{w}+z\bar{w}\Leftrightarrow 3z\bar{z}+3\bar{z}w-w\bar{w}-z\bar{w}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\bar{z}(z+w)-\bar{w}(z+w)=0\Leftrightarrow(3\bar{z}-\bar{w})(z+w)=0$, οπότε $z+w=0$ απορρίπτεται γιατί αν $w=-z$ τότε από την (1) προκύπτει $0=12$ άτοπο ή $3\bar{z}-\bar{w}=0\Leftrightarrow 3\bar{z}=\bar{w}\Leftrightarrow w=3z$

β) Αφού $w=3z$ τότε η (1) γίνεται $3z\bar{z}+9z\bar{z}=12$ δηλαδή $12|z|^2=12\Leftrightarrow|z|^2=1\Leftrightarrow|z|=1$

οπότε ο γ.τ. των εικόνων του z είναι ο μοναδιαίος κύκλος. Επίσης $\bar{w}=3\bar{z}$ και η (2) γίνεται

$w\bar{w}+3z\bar{z}=12 \Leftrightarrow |w|^2+3|z|^2=12 \Leftrightarrow |w|^2=9 \Leftrightarrow |w|=3$ άρα ο γ.τ. των εικόνων του w είναι ο κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=3$.

γ) Αφού $w=3z$ τότε $(MN)=|w-z|=|3z-z|=|2z|=2|z|=2$

39. **α)** Εστω $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$ με $z\neq 0$, τότε:

$$2z+\frac{8}{z}=2(x+yi)+\frac{8}{x+yi}=2x+2yi+\frac{8(x-yi)}{x^2+y^2}=\left(2x+\frac{8x}{x^2+y^2}\right)+\left(2y-\frac{8y}{x^2+y^2}\right)i$$

Είναι $\mathrm{Re}\left(2z+\frac{8}{z}\right)=4\mathrm{Re}(z) \Leftrightarrow 2x+\frac{8x}{x^2+y^2}=4x \Leftrightarrow \frac{8x}{x^2+y^2}=2x \Leftrightarrow 8x=2x(x^2+y^2) \Leftrightarrow$

$2x(x^2+y^2)-8x=0 \Leftrightarrow 2x(x^2+y^2-4)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x^2+y^2=4$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z αποτελείται από τα σημεία του άξονα $y'y$ εκτός του $O(0,0)$ και από τα σημεία του κύκλου που έχει κέντρο O(0,0) και ακτίνα 2.

β) **i.** Αν $\mathrm{Re}(z)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ τότε $\mathrm{Im}(u)=2y-\frac{8y}{x^2+y^2}=2y-\frac{8y}{4}=2y-2y=0$ άρα $u\in\mathbb{R}$.

ii. Αρκεί $-8\le 2x+\frac{8x}{x^2+y^2}\le 8 \Leftrightarrow -8\le 2x+\frac{8x}{4}\le 8 \Leftrightarrow -8\le 4x\le 8 \Leftrightarrow -2\le x\le 2$ που ισχύει αφού η εικόνα του z κινείται στον κύκλο $x^2+y^2=4$.

γ) Επειδή οι εικόνες των z_1,z_2,z_3 ανήκουν στον κύκλο $C: x^2+y^2=4$, ισχύει:

$|z_1|=|z_2|=|z_3|=2 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1=z_2\bar{z}_2=z_3\bar{z}_3=4 \Leftrightarrow \bar{z}_1=\frac{4}{z_1}$, $\bar{z}_2=\frac{4}{z_2}$ και $\bar{z}_3=\frac{4}{z_3}$.

Είναι $|z_1+z_2+z_3|=|\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3|=\left|\frac{4}{z_1}+\frac{4}{z_2}+\frac{4}{z_3}\right|=2\left|\frac{2z_2z_3+2z_1z_3+2z_1z_2}{z_1z_2z_3}\right|=$

$$=2\frac{|z_1^2+z_2^2+z_3^2+2z_2z_3+2z_1z_3+2z_1z_2|}{|z_1||z_2||z_3|}=2\frac{|z_1+z_2+z_3|^2}{2\cdot 2\cdot 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1+z_2+z_3|=\frac{|z_1+z_2+z_3|^2}{4}$$

και επειδή $z_1+z_2+z_3\neq 0$, είναι $|z_1+z_2+z_3|\neq 0$, οπότε $|z_1+z_2+z_3|=4$.

40. **α)** Εστω $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$, τότε $|z|^2-(\mathrm{Im}(z)+2)^2+4=0 \Leftrightarrow$

$x^2+y^2-(y+2)^2+4=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-y^2-4y-4+4=0 \Leftrightarrow x^2=4y \quad (1)$.

Άρα ο γ. τ. των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή $x^2=4y$.

β) Είναι $|z|=\sqrt{12} \Leftrightarrow x^2+y^2=12 \Leftrightarrow 4y+y^2=12 \Leftrightarrow y^2+4y-12=0 \Leftrightarrow y=-6$ ή $y=2$

Αν $y=-6$ τότε $x^2=-24$ που είναι αδύνατο.

Αν $y=2$ τότε $x^2=8 \Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{2}$ και $z=2\sqrt{2}+2i$ ή $z=-2\sqrt{2}+2i$.

γ) Όταν $|z|=\theta$, έχουμε $\theta^2-(\mathrm{Im}(z)+2)^2+4=0 \Leftrightarrow y^2+4y-\theta^2=0$. Είναι $\Delta=16+4\theta^2>0$ οπότε το τριώνυμο έχει δύο ρίζες y_1,y_2 πραγματικές και άνισες. Επειδή $y_1y_2=-\theta^2<0$ οι

ρίζες είναι ετερόσημες και λόγω της (1) δεχόμαστε μόνο τη θετική, από την οποία προκύπτουν δύο λύσεις για το x.

δ) i. Αν $w=\alpha+\beta i$, τότε $|w|=|w-2+2i| \Leftrightarrow |\alpha+\beta i|=|(\alpha-2)+(\beta+2)i| \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \alpha-\beta-2=0$, άρα ο γ.τ. του w είναι η ευθεία ε: $x-y-2=0$.

ii. Εστω $M(x,y)$ η εικόνα του z. Επειδή $x^2=4y \Leftrightarrow y=\frac{x^2}{4}$, είναι $M\left(x,\frac{x^2}{4}\right)$.

Η απόσταση του M από την ε, είναι:

$$d(M,\varepsilon)=\frac{\left|x-\frac{x^2}{4}-2\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|x^2-4x+8|}{4\sqrt{2}}=\frac{|x^2-4x+4+4|}{4\sqrt{2}}=\frac{(x-2)^2+4}{4\sqrt{2}}$$

Είναι $(x-2)^2\geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2+4\geq 4 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2+4}{4\sqrt{2}}\geq\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, άρα

$d(M,\varepsilon)_{min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ όταν $(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$ και $y=\frac{2^2}{4}=1$, άρα $M(2,1)$ και $z=2+i$

$\lambda_{MN}\lambda_{\varepsilon}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{MN}=-1$ και MN: $y-1=-(x-2) \Leftrightarrow y=-x+3$.

Από το σύστημα των MN, ε, προκύπτει $x=\frac{1}{2}$ και $y=-\frac{3}{2}$, άρα $w=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$.

41. **α)** $z(\lambda)=\frac{1}{\lambda-3i}=\frac{\lambda+3i}{(\lambda-3i)(\lambda+3i)}=\frac{\lambda+3i}{(\lambda^2+9)}=\frac{\lambda}{\lambda^2+9}+\frac{3}{\lambda^2+9}i$.

Είναι: $z(1)=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i$ και $z(2)=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$.

Οπότε: $w=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i+\frac{1}{\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i}=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i+2-3i=\frac{21}{10}-\frac{27}{10}i$.

β) Είναι $Re(z(\lambda))=\frac{\lambda}{\lambda^2+9}$ και $Im(z(\lambda))=\frac{3}{\lambda^2+9}$,

οπότε: $Re(z(\lambda))+Im(z(\lambda))=0 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\lambda^2+9}+\frac{3}{\lambda^2+9}=0 \Leftrightarrow \lambda+3=0 \Leftrightarrow \lambda=-3$.

Τότε $z(-3)=\frac{-3}{18}+\frac{3}{18}i=-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}i$.

γ) Εστω $z(\lambda)=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Τότε $\begin{cases} x=\frac{\lambda}{\lambda^2+9} \\ y=\frac{3}{\lambda^2+9}\end{cases}$ (1), άρα $\begin{cases} x^2=\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+9)^2} \\ y^2=\frac{9}{(\lambda^2+9)^2}\end{cases}$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $x^2+y^2=\frac{\lambda^2+9}{(\lambda^2+9)^2}=\frac{1}{\lambda^2+9}$.

Από την σχέση (1) όμως έχουμε $y=\frac{3}{\lambda^2+9} \Leftrightarrow \frac{y}{3}=\frac{1}{\lambda^2+9}$.

Άρα $x^2+y^2=\frac{y}{3} \Leftrightarrow x^2+y^2-2\cdot\frac{y}{6}+\frac{1}{36} \Leftrightarrow x^2+\left(y-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$.

Οπότε ο γ.τ. του $M(z)$ είναι κύκλος με κέντρο $K\left(0,\frac{1}{6}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{1}{6}$

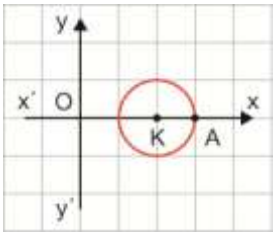
42. **α) 1ος τρόπος:** $(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2 \Leftrightarrow (z-2)\overline{(z-2)}+|z-2|=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|-2=0 \Leftrightarrow |z-2|=1$ ή $|z-2|=-2$ που απορρίπτεται.

Άρα ο γ.τ. των $M(z)$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος με $K(2,0)$ και $\rho=1$.

2ος τρόπος: Αν $z=x+yi$, τότε $(x-2)^2+y^2+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=1$

Για $|z|\le 3$



1ος τρόπος: $1=|z-2|\ge||z|-2| \Leftrightarrow ||z|-2|\le 1 \Leftrightarrow -1\le|z|-2\le 1 \Leftrightarrow 1\le|z|\le 3$

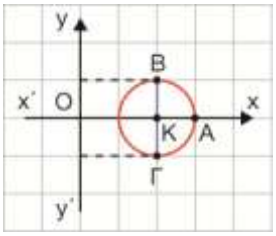
2ος τρόπος: Είναι $|z|_{max}=|\overrightarrow{OA}|=3$, άρα $|z|\le|z|_{max}=3$

3ος τρόπος: $|z-2|^2+|z-2|=2$.

Αν $0<|z-2|<1$, τότε $|z-2|^2+|z-2|<2$.

Αν $|z-2|>1$, τότε $|z-2|^2+|z-2|>2$, άρα $|z-2|=1$

β) 1ος τρόπος: Αν $z_1=x+yi$, τότε $z_2=\bar{z}_1=x-yi$.



$|\text{Im}(z_1)-\text{Im}(z_2)|=2 \Leftrightarrow |2y|=2 \Leftrightarrow y=\pm 1$.

Τότε $|z-2|=1 \Leftrightarrow (x-2)^2+1=1 \Leftrightarrow x=2$, άρα $z_1=2+i$ και $z_2=2-i$.

Είναι $z_1+z_2=-\beta \Leftrightarrow \beta=-4$, $z_1z_2=\gamma \Leftrightarrow \gamma=2^2+1^2=5$.

Όμοια με αντικατάσταση του z_1.

2ος τρόπος:

$|\text{Im}(z_1)-\text{Im}(z_2)|=2 \Leftrightarrow |z_1-z_2|=2$. Επειδή οι εικόνες Β,Γ των z_1,z_2 είναι σημεία ομοκυκλικά και αφού είναι συζυγείς η ΒΓ είναι κάθετη στον $x'x$. Όμως η χορδή που είναι κάθετη στον $x'x$ και έχει μέγιστο μήκος είναι η $ΒΓ=2\rho=2$, άρα $B(2,1)$, $Γ(2,-1)$.

Δηλαδή $z_1=2+i$ και $z_2=2-i$. Είναι $z_1+z_2=-\beta \Leftrightarrow \beta=-4$, $z_1z_2=\gamma \Leftrightarrow \gamma=2^2+1^2=5$.

Όμοια με αντικατάσταση του z_1.

γ) $\nu^3+\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0=0 \Leftrightarrow \alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0=-\nu^3$, άρα και $|\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0|=|\nu|^3$.

$|\nu|^3=|\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0|\le|\alpha_2||\nu|^2+|\alpha_1||\nu|+|\alpha_0|\le 3|\nu|^2+3|\nu|+3=3\left(|\nu|^2+|\nu|+1\right)$.

1ος τρόπος:

Αν $|\nu|>1$, τότε

$$|\nu|^3\le|\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0|\le 3\frac{|\nu|^3-1}{|\nu|-1}=3\left(\frac{|\nu|^3}{|\nu|-1}-\frac{1}{|\nu|-1}\right)<3\frac{|\nu|^3}{|\nu|-1} \Leftrightarrow \cancel{|\nu|^3}<3\frac{\cancel{|\nu|^3}}{|\nu|-1} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow |\nu|-1<3 \Leftrightarrow |\nu|<4$.

Αν $|\nu|\le 1 \Rightarrow |\nu|<4$.

2ος τρόπος: $|\nu|^3\le 3|\nu|^2+3|\nu|+3<3|\nu|^2+3|\nu|+4 \Leftrightarrow |\nu|^3-3|\nu|^2-3|\nu|-4<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (|\nu|-4)(|\nu|^2+|\nu|+1)<0 \Leftrightarrow |\nu|<4$ αφού $|\nu|^2+|\nu|+1>0$.

3ος τρόπος: $|\nu|^3 \le 3|\nu|^2+3|\nu|+3 \Leftrightarrow |\nu|^3-3|\nu|^2-3|\nu|-3\le 0$.

Εστω $f(x)=x^3-3x^2-3x-3$, $x\ge 0$.

Είναι $f'(x)=3(x^2-2x-1)\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1+\sqrt{2}$

Είναι $f(3)=-12<0$, $f(4)=1>0$,

άρα από το Θ.Β. $\exists x_0(3,4): f(x_0)=0$

	0	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Για κάθε $1+\sqrt{2}\le x\le x_0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)\le f(x_0)=0$, για κάθε $x>x_0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(x_0)=0$

και για κάθε $0\le x<1+\sqrt{2} \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(1+\sqrt{2})<f(x)\le f(0)=-3<0$.

Άρα $f(x)\le 0$ για κάθε $x\le x_0<4$, άρα $f(|\nu|)\le 0 \Leftrightarrow |\nu|\le x_0<4 \Leftrightarrow |\nu|<4$.

4ος τρόπος: $|\nu|^3-1<|\nu|^3\le 3|\nu|^2+3|\nu|+3 \Leftrightarrow (|\nu|-1)\cancel{(|\nu|^2+|\nu|+1)}<3\cancel{(|\nu|^2+|\nu|+1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\nu|-1<3 \Leftrightarrow |\nu|<4$

5ος τρόπος: Εστω $|\nu|\ge 4$.

Τότε: $|\nu|^3\le|\alpha_2||\nu|^2+|\alpha_1||\nu|+|\alpha_0| \Leftrightarrow 1\le \frac{|\alpha_2|}{|\nu|}+\frac{|\alpha_1|}{|\nu|^2}+\frac{|\alpha_0|}{|\nu|^3}\le \frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}=\frac{63}{64}$ άτοπο.

43. **α)** Η εξίσωση $2x^2-|w-4-3i|x=-2|z| \Leftrightarrow 2x^2-|w-4-3i|x+2|z|=0$ είναι τριώνυμο ως προς x το οποίο έχει διπλή ρίζα τη $x=1$ οπότε πρέπει

$$\begin{cases}\Delta=0\\ 2-|w-4-3i|+2|z|=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|w-4-3i|^2-16|z|=0\\ |w-4-3i|=2+2|z|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|w-4-3i|=2+2|z|\\ (2+2|z|)^2=16|z|\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}|w-4-3i|=2+2|z|\\ 4+8|z|+4|z|^2=16|z|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|w-4-3i|=2+2|z|\\ (2|z|-2)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|w-4-3i|=4\\ |z|=1\end{cases}$$

Οπότε ο γ.τ. των εικόνων του z είναι ο μοναδιαίος κύκλος ενώ ο γ.τ. των εικόνων του w είναι ο κύκλος με κέντρο $K(4,3)$ και $\rho_2=4$

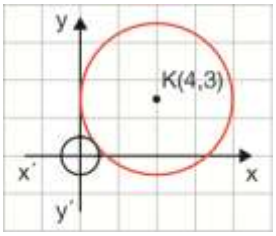
β) Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των δύο κύκλων έχουμε:

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ (x-4)^2+(y-3)^2=16\end{cases} \begin{cases}x^2+y^2=1\\ x^2-8x+16+y^2-6y+9=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2=1\\ 4x+3y=5\end{cases} \begin{cases}x=\frac{4}{5}\\ y=\frac{3}{5}\end{cases}$$

άρα ο μοναδικός μιγαδικός όπου ανήκει και στους δύο τόπους είναι $v=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$

γ) Είναι $|z-w|_{max}=|w-z|_{max}=(OK)+\rho_1+\rho_2=5+1+4=10 \Leftrightarrow |w-z|\le 10$

Επίσης επειδή ο γ.τ. του z έχει κέντρο συμμετρίας το $(0,0)$ οπότε ανήκει στον τόπο και το $-z$ τότε $|w+z|=|w-(-z)|=|w-z|\le 10$



δ) $|2z^2-3z-2z\bar{z}|=5 \Leftrightarrow 1\cdot|z(2z-3-2\bar{z})|=5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z|\cdot|2z-2\bar{z}-3|=5 \Leftrightarrow 1\cdot|2(z-\bar{z})-3|=5 \overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow}$

$|2\cdot(2yi)-3|=5 \Leftrightarrow |-3+4yi|=5 \Leftrightarrow \sqrt{9+16y^2}=5 \Leftrightarrow 9+16y^2=25 \Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1$

Αφού $|z|=1$ δηλ. $x^2+y^2=1$ τότε αν $y^2=1$ θα είναι $x^2=0$ άρα $x=0$. Οπότε $z=\pm i$