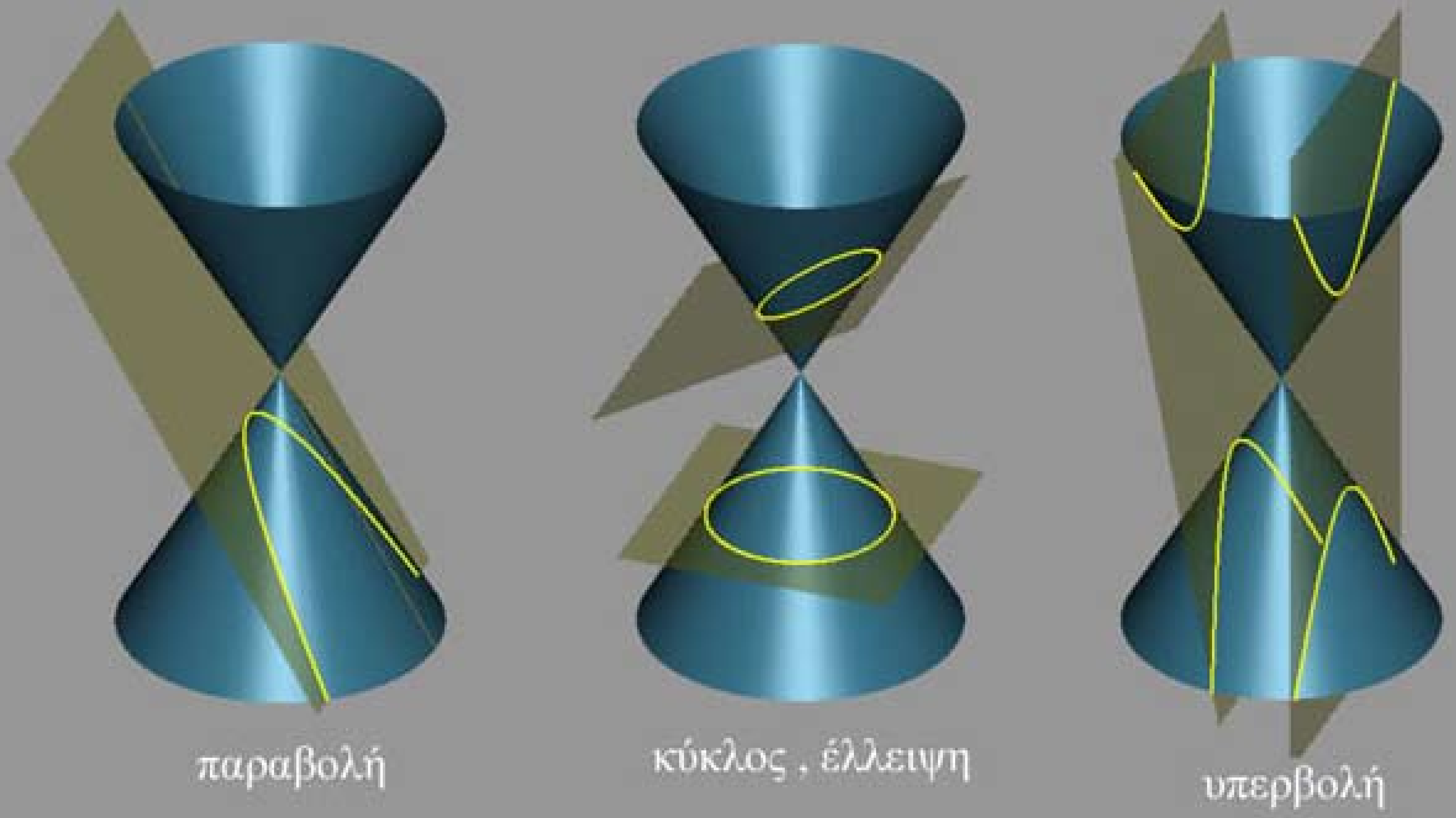
ΚΕΝΤΡΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ & ΜΕΛΕΤΗΣ
ΝΤΙΝΟΣ ΖΑΦΕΙΡΟΠΟΥΛΟΣ & ΣΙΑ ΟΕ
ΣΠΟΥΔΑΣΤΗΡΙΟ ΦΙΛΟΛΟΓΙΑΣ
ΣΟΦΙΑ ΤΕΡΕΖΑΚΗ
ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ - ΛΥΚΕΙΟ - ΓΥΜΝΑΣΙΟ



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

β΄ λυκείου

Επιμέλεια: ΒΡΥΣΑΛΗΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΕΥΘΕΙΑ

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΒΡΥΣΑΛΗΣ

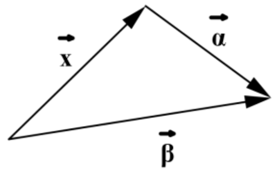
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

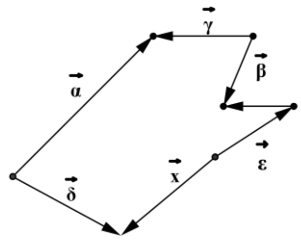
1. Δίνεται ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ τα αντίστοιχα διανύσματα θέσεως ως προς ένα σημείο αναφοράς Ο. Τι μπορείτε να πείτε για το τετράπλευρο ΑΒΓΔ αν:
i) $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\delta}$, **ii)** $|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}|=|\vec{\beta}-\vec{\delta}|$, **iii)** $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\delta}$ και $|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}|=|\vec{\beta}-\vec{\delta}|$.

2. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα ως συνάρτηση των άλλων διανυσμάτων που δίνονται

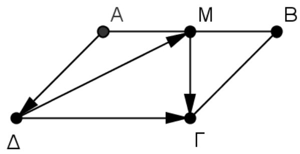
i)



ii)



3. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ το Μ είναι μέσο της ΑΒ.
Αν $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\vec{\beta}$, τότε:



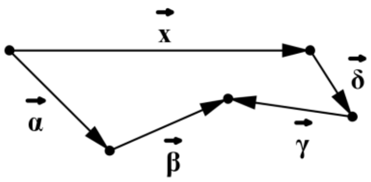
α) Το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta \mathrm{M}}$ ισούται με:
Α. $\dfrac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}$ **Β.** $\dfrac{\vec{\beta}-\vec{\alpha}}{2}$ **Γ.** $-\vec{\alpha}+\dfrac{1}{2}\vec{\beta}$ **Δ.** $\vec{\alpha}+\dfrac{1}{2}\vec{\beta}$ **Ε.** $\dfrac{1}{2}\vec{\alpha}+\vec{\beta}$

β) Το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{M}\Gamma}$ ισούται με: **Α.** $\vec{\alpha}-\dfrac{1}{2}\vec{\beta}$ **Β.** $\dfrac{1}{2}\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ **Γ.** $\dfrac{1}{2}\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ **Δ.** $\vec{\alpha}+\dfrac{1}{2}\vec{\beta}$ **Ε.** $\dfrac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}$

γ) Με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ ισούται το διάνυσμα: **Α.** $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ **Β.** $\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}$ **Γ.** $\overrightarrow{\Delta \mathrm{B}}$ **Δ.** $\overrightarrow{\Gamma \mathrm{A}}$ **Ε.** $\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}$

δ) Με $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ ισούται το διάνυσμα: **Α.** $\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}$ **Β.** $\overrightarrow{\Gamma \mathrm{A}}$ **Γ.** $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ **Δ.** $\overrightarrow{\Delta \mathrm{B}}$ **Ε.** $\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}$

4. Στο διπλανό σχήμα το διάνυσμα $\vec{x}$ ισούται με:
Α. $\vec{\alpha}-\vec{\beta}-\vec{\gamma}-\vec{\delta}$ **Β.** $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}-\vec{\delta}$
Γ. $\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}-\vec{\delta}$ **Δ.** $\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}-\vec{\delta}$ **Ε.** $\vec{\alpha}-\vec{\beta}-\vec{\gamma}+\vec{\delta}$.



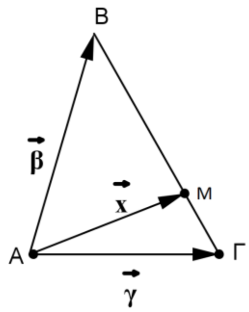
5. Αν για δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}=\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΔΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

6. Δίνονται τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ και έστω Ο, το μέσο του τμήματος ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

7. Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ. Αν $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}=\vec{\beta}$, να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

8. Αν $\vec{\alpha}$ είναι ένα διάνυσμα, τι μπορείτε να πείτε για το μέτρο και την κατεύθυνση του διανύσματος $\alpha_0=\dfrac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha}$;

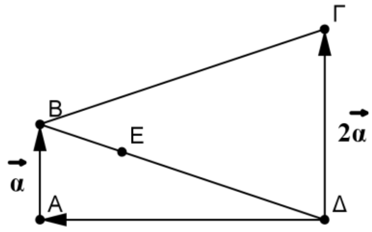
9. Αν στο διπλανό σχήμα είναι $(\mathrm{BM})=2(\mathrm{M}\Gamma)$,
να αποδείξετε ότι : $\vec{x}=\dfrac{1}{3}(\vec{\beta}+2\vec{\gamma})$.



10. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{\alpha})=\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{\beta})$, **ii)** $\vec{x}+3(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=4(\vec{\alpha}-\vec{\beta})-3\vec{x}$.

11. Στο διπλανό σχήμα έχουμε: $\Delta E=2EB$, $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=2\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta A}=\vec{\beta}$. **i)** Να εκφράσετε συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta B}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{\Gamma B}$, $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{E\Gamma}$. **ii)** Από τις εκφράσεις των $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{E\Gamma}$ ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τα σημεία Α, Ε και Γ;



12. Αν $\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{BK}-2\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B\Lambda}+3\overrightarrow{AM}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, και Μ είναι συνευθειακά.

13. Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι διάμεσοι τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{\Gamma Z}=\vec{0}$.

14. Αν Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντιστοίχως, τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Ο ισχύει $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{O\Lambda}+\overrightarrow{OM}$.

15. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ, αντιστοίχως, ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=4\overrightarrow{MN}$.

16. Δίνεται το μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και σημείο Γ τέτοιο ώστε να ισχύει $\overrightarrow{A\Gamma}=\lambda\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=\mu\overrightarrow{AB}$. Να αποδείξετε ότι $\lambda-\mu=1$.

17. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Μ και Ν τα μέσα των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι αν $4\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{B\Gamma}$, τότε το τετράπλευρο αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

18. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρείτε σημείο Μ τέτοιο ώστε να ισχύει $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}=\overrightarrow{M\Delta}$.

19. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ, Δ ισχύει $\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}$.

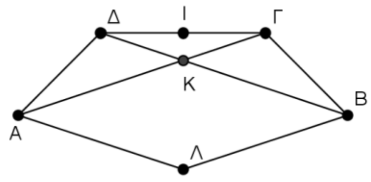
20. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ρ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{P\Gamma}=-2\overrightarrow{PB}$. Να αποδειχθεί ότι $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Delta}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

21. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να προσδιοριστεί σημείο Ρ τέτοιο ώστε να ισχύει $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Gamma}=\vec{0}$.

22. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να προσδιοριστεί σημείο Μ τέτοιο ώστε να είναι $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{B\Delta}-\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

23. Δίνονται τα σημεία Α, Β και Γ. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ το διάνυσμα $3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{M\Gamma}$ είναι σταθερό.

24. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο με $(AB)=2(\Gamma\Delta)$, το ΚΑΛΒ παραλληλόγραμμο και τι Ι μέσο του ΓΔ. Να αποδείξετε ότι: **i)** $\overrightarrow{K\Gamma}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}$ και $\overrightarrow{K\Delta}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{KB}$, **ii)** τα σημεία Ι, Κ, Λ είναι συνευθειακά.



25. Να αποδείξετε ότι αν ισχύουν δύο από τις σχέσεις $x\overrightarrow{KA}+y\overrightarrow{KB}+z\overrightarrow{K\Gamma}=\vec{0}$, $x\overrightarrow{\Lambda A}+y\overrightarrow{\Lambda B}+z\overrightarrow{\Lambda\Gamma}=\vec{0}$, $x+y+z=0$, τότε θα ισχύει και η τρίτη (το σημείο Κ είναι διαφορετικό από το Λ).

26. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Αν Μ και Ν είναι αντιστοίχως τα μέσα των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ, να αποδείξετε ότι: α) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{B\Gamma})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta})$, β) $4\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}$.

27. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, Κ το κέντρο του, Μ το μέσο του ΚΓ. Δείξτε ότι $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}=4\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{A\Gamma}$.

28. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ της διαγωνίου ΑΓ έτσι ώστε $AE = Z\Gamma = \frac{1}{4}A\Gamma$. **α)** Αν $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. **β)** Να δείξετε ότι το ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

29. Αν ισχύει $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} - 5\overrightarrow{P\Gamma} = \vec{0}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

30. Να αποδείξετε ότι αν $(\kappa+2)\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = (\kappa+5)\overrightarrow{P\Gamma}$, τότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

31. Εάν $2\overrightarrow{A\Lambda} + 3\overrightarrow{B\Lambda} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{K\Lambda}$ και $\overrightarrow{M\Lambda}$ είναι αντίρροπα.

32. Δίνονται τέσσερα σημεία Ο, Α, Β, Γ τέτοια ώστε τα Ο, Α, Β δεν είναι συνευθειακά. Να δείξετε ότι αν και $\overrightarrow{O\Gamma} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$, $\lambda \in R$, τότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

33. Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοι του διχοτομούνται και αντιστρόφως, αν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου διχοτομούνται τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

34. Να αποδειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

35. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΑ να αποδείξετε ότι: **α)** $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma})$, **β)** $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

36. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(1,2)$, $B(-3,-4)$, $\Gamma(4,-2)$. Να βρείτε: i) τις συντεταγμένες του $\overrightarrow{B\Gamma}$, ii) τις συντεταγμένες της διαμέσου $\overrightarrow{AM}$, iii) τις συντεταγμένες του Ρ αν $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{B\Gamma}$.

37. Δείξτε ότι το τετράπλευρο με κορυφές $A(1,2)$, $B(3,0)$, $\Gamma(5,4)$ και $\Delta(3,6)$ είναι παραλληλόγραμμο.

38. Δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με $A(1,1)$, $B(2,3)$, $\Gamma(5,-1)$ είναι ορθογώνιο.

39. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (5,-5)$ σε δύο συνιστώσες, που να έχουν τις διευθύνσεις των $\vec{\beta} = (1,1)$ και $\vec{\gamma} = (2,-3)$.

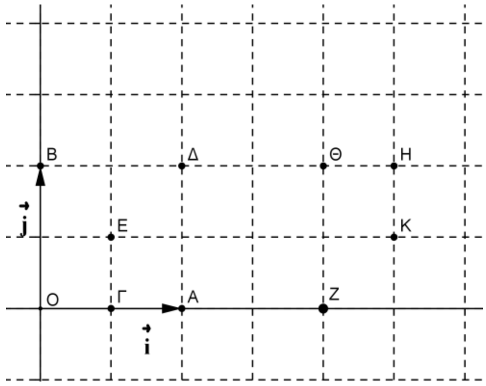
40. Να βρείτε τις συντεταγμένες του περίκεντρου του ΑΒΓ αν $A(-1,2)$, $B(3,2)$, $\Gamma(1,4)$.

41. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων είναι $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$.

Να εκφράσετε ως συνάρτηση των $\vec{i}$ και $\vec{j}$:

α) Τα διανύσματα θέσεως των σημείων Γ, Δ, Ε, Ζ, Κ και Η.

β) Τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{H\Delta}$, $\overrightarrow{K\Delta}$, $\overrightarrow{H\Theta}$, $\overrightarrow{ZA}$ και $\overrightarrow{KZ}$.



42. Δίνονται τα σημεία $A(-1,6)$ και $B(-9,-2)$. Να βρείτε: **α)** το σημείο του άξονα x΄x που ισαπέχει από τα Α και Β, **β)** το σημείο του άξονα y΄y που ισαπέχει από τα Α και Β.

43. Ποια είναι η θέση στο καρτεσιανό επίπεδο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει: i) $|x| = 2$, ii) $|x| < 2$, iii) $|y| > 2$, iv) $|x| = |y|$.

44. Να βρείτε τις αποστάσεις των παρακάτω σημείων από τους άξονες x΄x και y΄y: $A(-1,2)$, $B(3,4)$, $\Gamma(-5,-6)$, $\Delta(\alpha-1,\beta+2)$, $M(x,y)$.

45. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^2-4, \lambda^2-3\lambda+2), \lambda \in R$. Για ποια τιμή του λ είναι: i) $\vec{\alpha} = \vec{0}$; ii) $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} // x'x$;

46. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda^2-3\lambda+2, \lambda^2-3\lambda-2)$ και $\vec{\beta} = (\lambda^2-5\lambda+6, -3\lambda^2+7\lambda-2)$. Να εξετάσετε αν υπάρχει $\lambda \in R$, ώστε να είναι $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

47. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x,1)$ και $\vec{\beta}=(4,x)$, να είναι ομόρροπα.

48. Αν $\vec{u}=(3,4)$, ποιο διάνυσμα είναι συγγραμικό με το $\vec{u}$ και έχει διπλάσιο μέτρο από το $\vec{u}$;

49. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(-1,3)$ και $\vec{v}=(2,-1)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{w}=(x,y)$ σε καθεμιά από τις περιπτώσεις: **α)** $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$, **β)** $\vec{u}+\vec{w}=\vec{v}$,
γ) $\vec{u}+2\vec{v}-3\vec{w}=\vec{0}$, **δ)** $\vec{w}=\kappa\vec{u}+\lambda\vec{v}$ με $\kappa,\lambda\in R$.

50. Να βρείτε το σημείο Μ του άξονα x΄x, ώστε το άθροισμα των αποστάσεων του από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(3,4)$ να είναι ελάχιστο.

51. Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(-6,1)$, $B(-2,3)$ και $\Gamma(-10,-1)$ είναι συνευθειακά.

52. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-2,4)$ και $\vec{\beta}=(3,-2)$. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{u}=(x,y)$ έτσι ώστε να είναι: **α)** $\vec{u}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, **β)** $\vec{\alpha}+\vec{u}=\vec{\beta}$, **γ)** $\vec{u}=\kappa\vec{\alpha}$, $\kappa\in R$,
δ) $\vec{u}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ $\kappa,\lambda\in R$, **ε)** $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{u}=\vec{0}$.

53. Αν $\vec{\alpha}=(2,3)$, $\vec{\beta}=(-1,1)$ και $\vec{\gamma}=(-2,3)$, να υπολογιστούν τα: **α)** $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}|$,
β) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|+|\vec{\beta}+\vec{\gamma}|+|\vec{\gamma}+\vec{\alpha}|$.

54. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,3)$, $\vec{\beta}=(3,-1)$ και $\vec{\gamma}=(-1,0)$. Να βρείτε όλα τα διανύσματα $\vec{v}$ με $|\vec{v}|=10$, $\vec{v}\perp\vec{\gamma}$ και $\vec{v}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$, $\lambda,\mu\in R$.

55. Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{u}=(-2,6)$ σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{v}=(2,-1)$ και $\vec{w}=(3,1)$.

56. Αν τα σημεία $K(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$, $\Lambda(3,\frac{7}{2})$, $M(4,\frac{5}{2})$, $N(3,1)$ και $\Xi(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ και ΕΑ αντιστοίχως, του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ, να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του πενταγώνου.

57. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων οι τετμημένες δύο σημείων Α και Β είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-(\lambda^2-4\lambda+3)x-17=0$. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in R$, ώστε το μέσο του τμήματος ΑΒ να έχει τετμημένη 4.

58. Δίνονται τα σημεία $M_1(\kappa_1,\lambda_1)$, $M_2(\kappa_2,\lambda_2)$, $M_3(\kappa_3,\lambda_3)$ και $M_4(\kappa_4,\lambda_4)$. Να αποδείξετε ότι αν τα σημεία αυτά είναι τα μέσα των διαδοχικών πλευρών ενός τετραπλεύρου, τότε ισχύει $\kappa_1+\kappa_3=\kappa_2+\kappa_4$ και $\lambda_1+\lambda_3=\lambda_2+\lambda_4$.

59. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,x,y$ να αποδείξετε ότι $\sqrt{(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2}+\sqrt{(x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2}\geq\sqrt{(\alpha_2-\alpha_1)^2+(\beta_2-\beta_1)^2}$.

60. Θεωρούμε τα σημεία $A(x_1)$, $B(x_2)$ και $\Gamma(x_3)$ πάνω στον άξονα x΄x. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των συμμετρικών: α) του Α ως προς το Β, β) του Β ως προς το Γ, γ) του Γ ως προς το μέσο του ΑΒ.

61. Πάνω στον άξονα x΄x παίρνουμε τα σημεία $A(3)$, $B(-6)$ και $\Gamma(-8)$. Αν Μ, Ν είναι αντιστοίχως τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ και Κ, Λ τα μέσα των ΑΓ και ΜΝ αντιστοίχως τότε: α) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων Μ και Ν. β) Να βρείτε τις τετμημένες των Κ και Λ. γ) Να βρείτε σημείο Μ του άξονα έτσι ώστε να είναι $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{A\Gamma}$.

62. Αν $\vec{\alpha}=(-1,3)$ και $\vec{\beta}=(2,5)$, τότε: **α)** Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, $(2\vec{\alpha})\cdot(-3\vec{\beta})$ και $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(3\vec{\alpha}+\vec{\beta})$. **β)** Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους $\kappa,\lambda\in R$, ώστε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{u}=(\kappa,\lambda)$ και $\vec{\beta}$ να είναι ίσο με μηδέν. Ποια η σχέση όλων των διανυσμάτων $\vec{u}$ στην περίπτωση αυτή;

63. Αν $\vec{u}=(1,2)$, $\vec{v}=(4,2)$ και $\vec{w}=(6,0)$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις $\vec{u}\cdot(7\vec{v}+\vec{w})$, $|\vec{u}|(\vec{v}\cdot\vec{w})$, $|(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}|$ και $(|\vec{u}|\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}$.

64. Αν $\vec{\alpha}=(1,0)$ και $\vec{\beta}=(1,1)$, να βρείτε τον $\lambda\in R$, ώστε: **α)** Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα. **β)** Τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

65. Να βρείτε τα διανύσματα που είναι κάθετα στο $\vec{u}=(3,-2)$ και έχουν μέτρο ίσο με 1.

66. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(-2,3)$ και $\vec{v}=(4,-3)$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{w}$ ώστε να είναι $\vec{w}\perp(3\vec{v}-5\vec{u})$.

67. Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$, να υπολογίσετε τον $\kappa\in R$, ώστε τα διανύσματα $\vec{u}=3\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\kappa\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$, να είναι κάθετα.

68. Αν $\vec{\alpha}=(\kappa,1)$ και $\vec{\beta}=(4,3)$, να βρείτε τον $\kappa\in R$ ώστε να ισχύει: α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$, β) $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{4}$, γ) $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$.

69. Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{2\pi}{3}$, να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}=2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

70. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\Leftrightarrow \text{συν}(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}$

71. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u}=|\vec{\alpha}|\vec{\beta}+|\vec{\beta}|\vec{\alpha}$ και $\vec{v}=|\vec{\alpha}|\vec{\beta}-|\vec{\beta}|\vec{\alpha}$ είναι κάθετα.

72. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{6}$. Αν $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$, να βρεθούν:

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, **β)** $\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2$, **γ)** $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2$, **δ)** $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$, **ε)** $(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})(4\vec{\alpha}-5\vec{\beta})$.

73. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=3$, $|\vec{\beta}|=6$. Να οριστεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε τα διανύσματα $3\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ και $3\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

74. Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\perp(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=2$, δείξτε ότι $|\vec{\alpha}|=\sqrt{3}$, $|\vec{\beta}|=1$.

75. Αν $\vec{\alpha}=((x-1)\sqrt{3},2x)$ και $\vec{\beta}=(-\sqrt{3},1)$, να βρείτε το x, ώστε $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$.

76. Να αποδείξετε ότι για δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, το διάνυσμα $\vec{v}=\vec{\beta}^2\vec{\alpha}-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$.

77. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha}=\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{x}}{\vec{\beta}^2}\cdot\vec{\beta}-\vec{x}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$, για κάθε διάνυσμα $\vec{x}$.

78. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, να εξετάσετε αν τα διανύσματα που δίνονται είναι κάθετα μεταξύ τους: **α)** $\vec{\beta}-\frac{(\vec{\alpha}\vec{\beta})\cdot\vec{\alpha}}{\vec{\beta}^2}$ και $\vec{\beta}$, **β)** $(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\gamma}-\vec{\gamma}\cdot(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$ και $\vec{\alpha}$, **γ)** $\vec{\beta}-\frac{(\vec{\alpha}\vec{\beta})\cdot\vec{\alpha}}{\vec{\alpha}^2}$ και $\vec{\alpha}$

79. Αν $\vec{\alpha}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(3,4)$, να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{q}$ ώστε να ισχύουν συγχρόνως: **α)** $\vec{\alpha}=\vec{p}+\vec{q}$, **β)** $\vec{p}//\vec{\alpha}$, **γ)** $\vec{q}\perp\vec{\beta}$.

80. Αν $\vec{x}+(\vec{x}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ με $1+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\neq0$, να αποδείξετε ότι $\vec{x}\cdot\vec{\alpha}=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{1+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}$.

81. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|$, δείξτε ότι τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα.

82. Να εξετάσετε πότε ισχύει: i) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$, ii) $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$.

83. Να αποδείξετε ότι: **i)** $|\vec{u}+\vec{v}|^2+|\vec{u}-\vec{v}|^2=2|\vec{u}|^2+2|\vec{v}|^2$, **ii)** $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{4}|\vec{u}+\vec{v}|^2-\frac{1}{4}|\vec{u}-\vec{v}|^2$.

84. Αν ισχύει $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$, τότε να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|\sqrt{3}$.

85. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$. Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$ και $|\vec{\gamma}|=5$ υπολογίστε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$ και το $2\vec{\alpha}\vec{\beta}-\sqrt{3}\vec{\beta}\vec{\gamma}+\frac{1}{2}\vec{\gamma}\vec{\alpha}$

86. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(3,3)$, $B(-2,-2)$ και $\Gamma(2\sqrt{3},-2\sqrt{3})$. Να βρείτε τη γωνία Β.

87. Αν $\vec{\alpha}=(2,3)$ και $\vec{\beta}=(-1,4)$, να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$.

88. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,-4)$ και $\vec{\beta}=(5,10)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{\alpha}$.

89. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Β΄, Δ΄ οι προβολές του Γ στις ΑΒ και ΑΔ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Delta'}=\overrightarrow{A\Gamma}^2$.

90. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,4)$ και $\vec{\beta}=(-3,1)$. **i)** Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A=(\vec{\alpha}\cdot\vec{i}-\vec{\beta}\cdot\vec{j})+2(\vec{\alpha}\cdot\vec{i})(\vec{\beta}\cdot\vec{j})$. **ii)** Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{v}=(-2,4)$ σε δύο συνιστώσες κάθετες στα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αντίστοιχα.

91. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=(4,-2)$ και $\vec{\alpha}-3\vec{\beta}=(-7,8)$ α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha}=(-1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,-2)$. **β)** Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός κ, ώστε τα διανύσματα $\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ να είναι κάθετα. **γ)** Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}=(3,-1)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

(ΘΕΜΑ 2000)

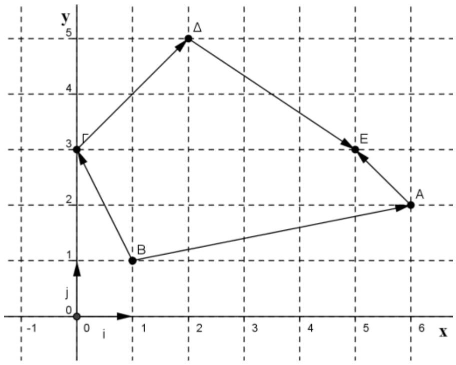
92. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$. Έστω τα διανύσματα $\vec{u}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε: **α)** το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, **β)** τα μέτρα $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$, **γ)** το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u}\cdot\vec{v}$, **δ)** το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$. **(ΘΕΜΑ 2001)**

93. Με βάση το διπλανό σχήμα να υπολογιστούν:

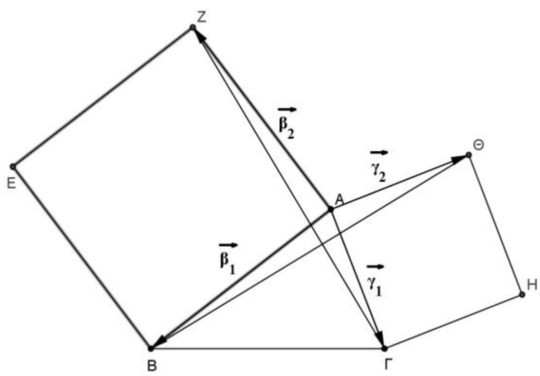
i) $\overrightarrow{\Gamma\Delta}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{\Delta E}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}$,

ii) $\overrightarrow{\Gamma B}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}\cdot\overrightarrow{\Delta E}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{\Delta E}$,

iii) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AE}$.



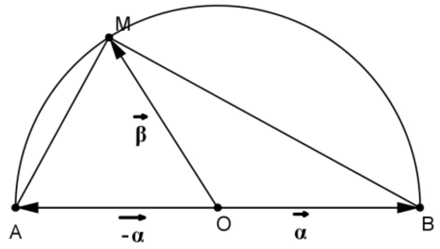
94. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και εξωτερικώς αυτού κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΕΖ και ΑΓΗΘ. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Theta}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma}$ ως συνάρτηση των $\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\gamma}_1,\vec{\gamma}_2$ και να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{B\Theta}\cdot\overrightarrow{Z\Gamma}$. Τι συμπεραίνετε για τα τμήματα ΒΘ και ΓΖ;



95. Σε ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ και κέντρο Ο παίρνουμε σημείο Μ.

i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{MA}$ και $\overrightarrow{MB}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

ii) Να βρείτε το γινόμενο $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ Τι συμπεραίνετε για τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{MA}$ και $\overrightarrow{MB}$; Ποια πρόταση της Ευκλείδειας γεωμετρίας έχει αποδειχθεί;

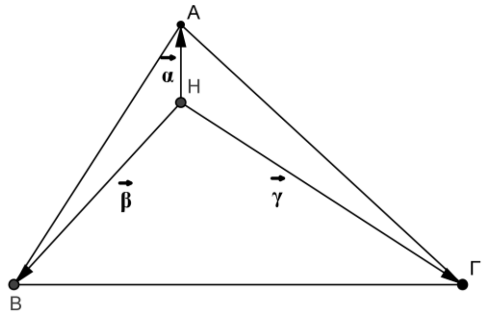


96. Σε τρίγωνο ΑΒΓ τα δύο ύψη του ΒΕ και ΓΖ τέμνονται στο Η. Έστω $\overrightarrow{HA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{HB}=\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{H\Gamma}=\vec{\gamma}$.

i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

iii) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$. Με τη βοήθεια της ισότητας αυτής να δείξετε ότι $AH\perp B\Gamma$.
Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί;



97. Αν ΑΔ είναι ύψος ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$), να αποδείξετε ότι ισχύει $\overrightarrow{A\Delta}^2=\overrightarrow{\Gamma\Delta}\cdot\overrightarrow{\Delta B}$ και αντιστρόφως, αν ΑΔ είναι το ύψος τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει $\overrightarrow{A\Delta}^2=\overrightarrow{\Gamma\Delta}\cdot\overrightarrow{\Delta B}$, να αποδείξετε ότι $\hat{A}=90^o$.

98. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$, όπου $A=(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})$.

99. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $|\vec{\alpha}|=\dfrac{|\vec{\beta}|}{2}=\dfrac{|\vec{\gamma}|}{3}$, να αποδειχθεί ότι:

α) Το $\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{\beta}$. **β)** Το $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπο με το $\vec{\gamma}$.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ
2^o Πέρασμα

100. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν $\overrightarrow{A\Delta}=\kappa\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\kappa\overrightarrow{A\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\Delta E}/\!/\overrightarrow{B\Gamma}$.

101. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Κ, Λ των ΑΒ και ΓΔ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}=2\overrightarrow{K\Lambda}$.

102. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να προσδιοριστεί σημείο Ρ τέτοιο ώστε να ισχύει $\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{\Gamma P}$.

103. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί σημείο Μ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{M\Delta}=\vec{0}$.

104. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί σημείο Ρ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Gamma}=\overrightarrow{P\Delta}$.

105. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε και Ζ ώστε να ισχύει $\overrightarrow{A\Delta}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AZ}=\dfrac{6}{5}\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma E}=\overrightarrow{B\Gamma}$. **α)** Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.
β) Να εξετάσετε αν τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.

106. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα A_1,B_1,Γ_1 των ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντιστοίχως. Αν G είναι το βαρύκεντρο του, να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο Μ ισχύει:
α) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}=3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AA_1}=3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{BB_1}=3\overrightarrow{M\Gamma}+2\overrightarrow{\Gamma\Gamma_1}$,

β) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{G\Gamma}=\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+3\overrightarrow{G\Gamma_1}$, **γ)** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}=3\overrightarrow{MG}$.

107. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A'B'}$. Αν Μ και Μ΄ είναι μέσα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A'B'}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}=2\overrightarrow{MM'}$.

108. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν $A(1,2)$, $B(-3,4)$ και $\Gamma(2,-5)$, να βρείτε τις συντεταγμένες του Δ και του κέντρου του Ο. Δείξτε ότι οι διαγώνιες του διχοτομούνται.

109. Δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με $A(3,0)$, $B(1,1)$ και $\Gamma(4,2)$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

110. Δείξτε ότι τα σημεία $A(-1,-3)$, $B(8,3)$, $\Gamma(3,4)$, $\Delta(0,2)$ είναι κορυφές ισοσκελούς τραπεζίου.

111. Δίνονται τα σημεία $A(3,2)$, $B(7,-4)$. Να βρεθεί σημείο του x΄x, ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι: **α)** ισοσκελές με κορυφή το Μ, **β)** ορθογώνιο στο Μ.

112. Να βρείτε το σημείο Μ του άξονα y΄y, ώστε η διαφορά των αποστάσεων του από τα σημεία $A(-3,2)$ και $B(2,5)$ να είναι μέγιστη.

113. Αν $\vec{\alpha}=(2x-y,x+2y-4)$, $\vec{\beta}=(x-3y+2,-3x+2y-2)$, $\vec{\gamma}=(3,-2)$, $\vec{\delta}=(-3,4)$ τότε:

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες (x_1,y_1) του διανύσματος $\vec{u}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$.

β) Να βρείτε τη σχέση ανάμεσα στα x και y ώστε $\vec{u}//\vec{\delta}$.

γ) Να υπολογιστούν τα x και y αν είναι $\vec{u}=\vec{0}$.

114. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\sigma\upsilon\nu x,\eta\mu x)$, $\vec{\beta}=(\sigma\upsilon\nu 2x,\eta\mu 2x)$ και $\vec{\gamma}=(\sigma\upsilon\nu 3x,\eta\mu 3x)$, $x\in R$. Αποδείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα.

115. Θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ, Μ του άξονα x΄x. Να αποδειχθεί ότι $\overrightarrow{MA}^2\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{MB}^2\cdot\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{M\Gamma}^2\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

116. Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων Oxy θεωρούμε τα σημεία Α, Β του x΄x , τα οποία έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $x^2-(\lambda^2-5\lambda+20)x-2002=0$. Να βρεθεί ο $\lambda\in R$ ώστε το μέσο του ΑΒ να έχει τετμημένη 7.

117. Δίνονται τα σημεία $A(5,-1)$, $B(1,1)$ και $\Gamma(2,3)$. Να μελετηθεί το είδος του τριγώνου ΑΒΓ.

118. Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=45^o$, να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\beta}-\vec{\alpha},\vec{\alpha}})$.

119. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν ίσα μέτρα και είναι κάθετα να αποδείξετε ότι τότε και τα διανύσματα $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

120. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,3)$, $\vec{\beta}=(3,-1)$ και $\vec{\gamma}=(-1,0)$. Να βρείτε όλα τα διανύσματα $\vec{v}$ με $|\vec{v}|=10$, $\vec{v}\perp\vec{\gamma}$ και $\vec{v}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$, $\lambda,\mu\in R$.

121. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο ώστε $\vec{x}//(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ και $\vec{\beta}\perp(\vec{\alpha}+\vec{x})$.

122. Αν $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2)$, $\vec{\beta}=(\beta_1,\beta_2)$ με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=2$ και $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι ισχύει $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=4$ ή $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=-4$.

123. Αν $\vec{\beta}\neq\vec{0}$ και $\vec{\alpha}=\vec{p}+\vec{q}$ με $\vec{p}//\vec{\beta}$ και $\vec{q}\perp\vec{\beta}$, να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι σχέσεις:

α) $\vec{p}=\frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2}\cdot\vec{\beta}$, β) $\vec{q}=\vec{\alpha}-\frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2}\cdot\vec{\beta}$.

124. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τέτοια ώστε να είναι $(\lambda\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta})\perp(\kappa\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta})$, για κάθε $\kappa,\lambda\in R$. **α)** Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$. **β)** Να βρεθεί το $|\vec{\beta}|$ στην περίπτωση που είναι $|\vec{\alpha}|=2$.

125. Αν είναι $|\vec{\alpha}|=5$, $|\vec{\beta}|=8$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$, να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας των $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία της γωνίας.

126. Να αποδείξετε ότι η γωνία θ που σχηματίζουν οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου με διαδοχικές πλευρές $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισούται με τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

127. Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$, $|\vec{\gamma}|=3$ και $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, να υπολογίσετε τα:

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$, $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$, **β)** $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$, $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})$, $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\alpha}})$ και να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}=-2\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}=3\vec{\beta}$.

128. Να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου που κατασκευάζεται με τα διανύσματα $5\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$, αν $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=3$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=45^o$.

129. Αν τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ μοναδιαία και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=-2$, τότε $\vec{\alpha}=\vec{\gamma}$.

130. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(-3,1)$. Να αναλύσετε το $\vec{\alpha}$ σε δύο συνιστώσες, κάθετες μεταξύ τους, που η μία να έχει τη διεύθυνση του $\vec{\beta}$.

131. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(1,2)$, $B(-3,-2)$ και $\Gamma(4,-1)$. Αν ΑΔ το ύψος του ΑΒΓ, βρείτε το $\overrightarrow{B\Delta}$.

132. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-1)$ και $\vec{\beta}=(-5,1)$. Να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

133. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,3)$.

Α. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}=5\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$.

Β. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{\gamma}$ με τον άξονα x΄x.

Γ. Να βρείτε τον αριθμό $\kappa\in R$, ώστε το διάνυσμα $\vec{u}=(\kappa^2-\kappa,\kappa)$ να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

(ΘΕΜΑ 2004)

134. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και κύκλος κέντρου Ο που διέρχεται από την κορυφή Α και τέμνει τις ευθείες ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ στα Β΄, Γ΄, και Δ΄ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Delta'}=\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Gamma'}$.

135. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και $\Gamma E\perp AB$, $\Gamma Z\perp B\Delta$. Δείξτε ότι $\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{BZ}-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{B\Gamma}^2$.

136. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο και ΑΔ διάμεσος του. Αν ΑΕ διάμετρος του κύκλου, δείξτε ότι $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{A\Gamma}^2=2\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AE}$.

137. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, το ύψος του ΑΔ και το ορθόκεντρο Η. Δείξτε ότι $\overrightarrow{\Delta A}\cdot\overrightarrow{\Delta H}=\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

138. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και Μ τυχαίο σημείο της υποτείνουσας ΒΓ. Αν $M\Delta\perp AB$ και $ME\perp A\Gamma$, δείξτε ότι: $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{M\Gamma}=\overrightarrow{\Delta A}\cdot\overrightarrow{\Delta B}+\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{E\Gamma}$.

139. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB=A\Gamma$) και Μ το μέσο της ΒΓ. Αν $MK\perp A\Gamma$ και Λ μέσο της ΜΚ, δείξτε ότι $A\Lambda\perp BK$.

140. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A=90^o$), ΑΔ ύψος και ΑΜ διάμεσος του τριγώνου. Αν $\Delta E\perp AB$ και $\Delta Z\perp A\Gamma$, δείξτε ότι $AM\perp EZ$.

141. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και δύο τυχαία σημεία του Γ και Δ. Φέρνουμε $\Delta E\perp AB$, που τέμνει τη ΒΓ στο Η. Δείξτε ότι $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{B\Delta}^2$.

142. Αν οι διάμεσοι ΒΔ, ΓΕ ενός τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται κάθετα, δείξτε ότι:

α) $(AB)^2+(A\Gamma)^2=5(B\Gamma)^2$. **β)** $\sigma\upsilon\nu A\geq\dfrac{4}{5}$.

143. Αν $\vec{\alpha},\vec{v}\neq\vec{0}$, δείξτε ότι: α) $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{v}}{|\vec{\alpha}|^2}\cdot\vec{\alpha}$, β) $|\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}|=\dfrac{|\vec{\alpha}\cdot\vec{v}|}{|\vec{\alpha}|}$.

144. Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}$, δείξτε ότι $|\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}|=|\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}|\Leftrightarrow\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ ή $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$.

145. Αν $\vec{\alpha}=(4,-3)$, $\vec{\beta}=(1,3)$ δείξτε ότι $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\dfrac{4}{5}\vec{\alpha}$.

146. Αν $\vec{\alpha}=(3,-4)$, $\vec{\beta}=(2,8)$ δείξτε ότι $5\left|\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}\right|-2\sqrt{17}\left|\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}\right|=0$.

147. Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\overrightarrow{B\Gamma}^2+\overrightarrow{A\Gamma}^2=5\overrightarrow{AB}^2$, να αποδειχθεί ότι οι διάμεσοι ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου τέμνονται κάθετα.

148. α) Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου, να αποδειχθεί ότι $\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right|\le|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$. Πότε ισχύει η ισότητα; **β)** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x,y)$ και $\vec{\beta}=(3,4)$. i) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$. ii) Αν $x^2+y^2=49$, να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της παράστασης $A=3x+4y$ καθώς και τις τιμές των $x,y\in R$ για τις οποίες παρουσιάζονται το μέγιστο και το ελάχιστο.

149. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α, να αποδείξετε ότι ισχύει $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{A\Gamma}^2=\overrightarrow{B\Gamma}^2$ και αντιστρόφως, αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{A\Gamma}^2=\overrightarrow{B\Gamma}^2$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Α.

150. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος που γράφεται από την κορυφή του είναι κάθετη στη βάση του.

151. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, να αποδειχθεί ότι:

α) $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2=2\left|\overrightarrow{AM}\right|^2+\dfrac{\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2}{2}$, **β)** $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2=2\overrightarrow{\Delta M}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}$, όπου Δ η προβολή του Α στη ΒΓ.

152. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $|\vec{\alpha}|=\dfrac{|\vec{\beta}|}{3}=\dfrac{|\vec{\gamma}|}{4}$. Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι συγγραμικά.

153. Θεωρούμε τα συνεπίπεδα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$. Να δείξετε ότι η σχέση $\dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}+\dfrac{\vec{\beta}\vec{\gamma}}{|\vec{\beta}||\vec{\gamma}|}+\dfrac{\vec{\gamma}\vec{\alpha}}{|\vec{\gamma}||\vec{\alpha}|}=-1$ συνεπάγεται ότι δύο από τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι αντίρροπα.

154. Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{x}$ συνεπίπεδα, $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και $\begin{cases}\vec{\alpha}(\vec{x}+\vec{\beta})=\vec{\alpha}^2\\ \vec{\beta}\cdot\vec{x}=0\end{cases}$, να βρείτε το $\vec{x}$.

155. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύουν $\begin{cases}\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\\ \vec{\alpha}+\vec{\beta}\perp\vec{\alpha}-\vec{\beta}\\ \left|3\vec{\alpha}+4\vec{\beta}\right|=5\end{cases}$, να βρεθούν:

i) $|\vec{\alpha}|$, $|\vec{\beta}|$, **ii)** $\left|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right|$, **iii)** $(\widehat{\vec{\alpha}-\vec{\beta},\vec{\beta}})$.

156. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν $\overrightarrow{AB}=\vec{\beta}$, $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\gamma}$ και ΑΔ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε το $\overrightarrow{A\Delta}$ συναρτήσει των $\vec{\beta},\vec{\gamma}$.

157. Τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι κάθετα ανά δύο. Αν $\hat{\omega}=(\widehat{\vec{\beta}+\vec{\gamma}-\vec{\alpha},\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}})$ δείξτε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega=\dfrac{\vec{\beta}^2-\vec{\gamma}^2-\vec{\alpha}^2}{\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+\vec{\gamma}^2}$.

158. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. Αν $\begin{cases}\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\perp 7\vec{\alpha}-5\vec{\beta}\\ \vec{\alpha}-4\vec{\beta}\perp 7\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\end{cases}$, να βρείτε τη γωνία των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

159. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}\vec{\beta}\neq 0$. Να βρεθούν τα $\vec{x},\vec{y}$, αν $\begin{cases}\vec{x}+\vec{y}=\vec{\alpha}\\ \vec{x}\,//\,\vec{\alpha}\\ \vec{y}\perp\vec{\beta}\end{cases}$.

160. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}|=\frac{2}{5}$, $|\vec{\beta}|=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $|\vec{\gamma}|=\frac{3}{5}$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=-\frac{9}{25}$.

Δείξτε ότι: **α)** $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, **β)** $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, **γ)** $\frac{\pi}{2}<(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})<\pi$.

161. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$ και $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$. Να βρεθούν τα $\vec{x},\vec{y}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και το $|\vec{x}+\vec{y}|$ αν γνωρίζω ότι $2\vec{x}+\vec{y}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ (1), $\vec{y}\perp(\vec{\alpha}-4\vec{\beta})$ (2), $\vec{x}\,//(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$ (3).

162. Έστω δύο διανύσματα του επιπέδου $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha}\perp(2\vec{i}+3\vec{j})$, $\vec{\beta}//(\vec{j}-\vec{i})$ και $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=\vec{i}+\vec{j}$. Να βρεθεί το $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$.

163. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\delta},\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2$ ενός διανυσματικού επιπέδου, ώστε $|\vec{\delta}-\vec{\delta}_1|=|\vec{\delta}-\vec{\delta}_2|$. Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}=2\vec{\delta}-\vec{\delta}_1-\vec{\delta}_2$ και $\vec{\beta}=\vec{\delta}_1-\vec{\delta}_2$ είναι κάθετα.

164. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με πλευρές $|\vec{AB}|=\alpha$ και $|\vec{A\Delta}|=3\alpha$ και τη γωνία $\hat{A}=120^o$. Θεωρούμε τα σημεία Μ, Ν ώστε $\vec{AM}=\kappa\cdot\vec{AB}$ και $\vec{\Delta N}=\lambda\cdot\vec{\Delta\Gamma}$, όπου $\kappa,\lambda\in R$. Αν οι ευθείες ΔΜ και ΑΝ τέμνονται κάθετα να δειχθεί ότι $(2\kappa+3)(2\lambda-3)=27$.

165. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{A\Delta}=\frac{1}{3}\vec{AB}$ και ονομάζουμε Ε το μέσο της πλευράς ΑΓ. Οι ευθείες ΒΕ και ΓΔ τέμνονται στο Μ. Θέτουμε $\vec{AB}=\vec{\beta}$, $\vec{A\Gamma}=\vec{\gamma}$, $\vec{BM}=x\cdot\vec{BE}$ και $\vec{\Gamma M}=y\cdot\vec{\Gamma\Delta}$, όπου $x,y\in R$. **α)** Να βρείτε τους αριθμούς x και y.

β) Να δείξετε ότι $\vec{AM}=\frac{1}{5}\vec{\beta}+\frac{2}{5}\vec{\gamma}$. **Ε 44 (2002)**

166. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $(AB)=30$ και τα διανύσματα $\vec{AE}=\frac{1}{5}\vec{AB}$ και $\vec{\Delta Z}=\frac{1}{3}\vec{\Delta\Gamma}$.

Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{ZE}\cdot\vec{Z\Gamma}$. **Ε 44 (2002)**

167. Θεωρούμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}|=\sqrt{3}$ και υποθέτουμε ότι για κάθε $x,y\in R$ ισχύει $(3x\vec{\alpha}+4y\vec{\beta})\perp(y\vec{\alpha}-x\vec{\beta})$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$. **β)** Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$. **Ε 44 (2002)**

168. Θεωρούμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα διανύσματα $\vec{A\Delta}=\frac{1}{3}\vec{AB}$ και $\vec{AE}=\frac{1}{5}\vec{A\Gamma}$. Να δείξετε ότι $BE\perp\Gamma\Delta$ **Ε 44 (2002)**

169. Δίνονται τα μη συγγραμικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. **i)** Να δείξετε ότι αν $x\vec{\alpha}+y\vec{\beta}=\vec{0}$, τότε $x=y=0$. **ii)** Αν $x_1\vec{\alpha}+y_1\vec{\beta}=x_2\vec{\alpha}+y_2\vec{\beta}$, να δείξετε ότι $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. **iii)** Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in R$ τα διανύσματα $\vec{u}=(2x-1)\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ και $\vec{v}=(x+4)\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ είναι συγγραμικά. **(Μάρκος)**

170. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $3|\vec{\alpha}|=4|\vec{\beta}|=12|\vec{\gamma}|$, να δείξετε ότι: i) $\vec{\beta}\uparrow\uparrow\vec{\gamma}$, ii) $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$. **(Μάρκος)**

171. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε των ΑΒ, ΑΓ τέτοια ώστε $\vec{A\Delta}=\frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{AE}=\frac{3}{4}\vec{A\Gamma}$. Να δείξετε ότι τα ΒΕ, ΓΔ τέμνονται σε σημείο Ρ και να εκφράσετε το $\vec{AP}$ με τη βοήθεια των $\vec{AB}$, $\vec{A\Gamma}$.

172. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος ΑΔ. Αν $\vec{BA}=\vec{\gamma}$, $\vec{B\Gamma}=\vec{\alpha}$, να δείξετε ότι $\vec{B\Delta}=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{\alpha}|^2}\cdot\vec{\alpha}$.

(Μάρκος)

173. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=1$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=-2$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha}=\vec{\gamma}=-\vec{\beta}$ **(Μάρκος)**

174. Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε τέτοια ώστε $\overrightarrow{\Delta B}-\overrightarrow{\Gamma E}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}-\overrightarrow{AE}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β συμπίπτουν. **Ε 49 (2003)**

175. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$, τα οποία ανά δύο δεν είναι συγγραμικά. Αν $\vec{\alpha}//(\vec{\beta}+2\vec{\gamma})$ και $\vec{\beta}//(\vec{\gamma}+2\vec{\alpha})$, να αποδείξετε ότι $\vec{\beta}=-4\vec{\alpha}-2\vec{\gamma}$. **Ε 49 (2003)**

176. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Αν $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{A\Delta}+y\overrightarrow{AE}$ με $x+y=2$, να αποδείξετε ότι: **α)** $\overrightarrow{\Delta E}//\overrightarrow{B\Gamma}$. **β)** Τα Μ, Β, Γ είναι συνευθειακά. **Ε 49 (2003)**

177. Δίνονται τα σημεία $A(1,\frac{3}{2})$, $B(2,-1)$ και $M(\alpha,\frac{\alpha-4}{2})$, όπου $\alpha\in R$.

α)Να αποδείξετε ότι τα Α, Β, Μ είναι συνευθειακά για κάθε $\alpha\in R$. **β)**Αν $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, να υπολογίσετε τον α. **γ)** Να δείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του α, έτσι ώστε $|\overrightarrow{OM}|<\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **Ε 49 (2003)**

178. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ώστε $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$, $|\vec{\gamma}|=\sqrt{2}$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$. β) Να υπολογίσετε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}})$. **Ε 49 (2003)**

179. Έστω τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}$ με $4|\vec{\alpha}|=3\sqrt{3}|\vec{\beta}|$. Αν $\vec{\alpha}\perp(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta})$, να αποδείξετε ότι $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{6}$. **Ε 49 (2003)**

180. Έστω $\vec{\alpha}=(-3,4)$ και $\vec{\beta}=(1,2)$. Να υπολογίσετε το διάνυσμα $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$. **Ε 49 (2003)**

181. Έστω το διάνυσμα $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}|=1$ και $|\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}|=\frac{1}{2}$. Να υπολογίσετε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$. **Ε 49 (2003)**

182. Δύο ποδηλάτες Π_1 και Π_2 ξεκινούν από την πόλη Α έτσι ώστε η γωνία $\Pi_1 A\Pi_2=60^o$. Αν η κίνηση τους είναι ευθύγραμμη πάνω στις ημιευθείες Ax, Ay αντίστοιχα, έτσι ώστε σε κάθε στιγμή το $\overrightarrow{A\Pi_1}=5\pi\rho o\beta_{Ax}\overrightarrow{A\Pi_2}$. Αν στο τέλος της διαδρομής τους ο Π_1 είχε διανύσει 10 χιλιόμετρα, πόσα θα έχει διανύσει ο Π_2;

183. Μια περιοχή που πρόκειται να αναμορφωθεί αποτυπώνεται στο τοπογραφικό σχέδιο ενός εργολάβου, με καρτεσιανό σύστημα αξόνων Οxy. Τα σημεία $A(0,7)$, $B(4,3)$ και $\Gamma(6,1)$ παριστάνουν τρία χωριά. **α)** Να αποδείξετε ότι ο εργολάβος μπορεί να χαράξει έναν ευθύγραμμο δρόμο που να συνδέει τα τρία χωριά Α, Β και Γ.
β) Να βρείτε σε ποιο σημείο του άξονα x΄x πρέπει να σχεδιάσει ένα πρατήριο βενζίνης Π, το οποίο να ισαπέχει από τα χωριά Α και Γ;
γ) Σε κάποιο σημείο $M(2,\lambda)$, $\lambda\in Z$, θέλει να τοποθετήσει έναν στύλο παροχής ηλεκτρικού ρεύματος προς τα χωριά Β και γ, έτσι ώστε το $M\Gamma=2MB$. Να βρείτε τη θέση του σημείου Μ.

184. Αν $\overrightarrow{OA}=(-1,2)$, $\overrightarrow{OB}=(1,-2)$, $\overrightarrow{O\Gamma}=(2,3)$ βρείτε σημείο Μ του y΄y ώστε η απόσταση $d=|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{M\Gamma}|^2$, να παίρνει την ελάχιστη τιμή.

185. Έστω $A(1,3)$, $B(5,1)$, $4\overrightarrow{O\Gamma}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$, Μ μέσο του ΑΒ. **α)** Βρείτε τα $\overrightarrow{O\Gamma}$, $\overrightarrow{OM}$. β) Δείξτε ότι τα Ο, Γ, Μ είναι συνευθειακά. γ) Βρείτε το λ, όταν $\overrightarrow{O\Gamma}=\lambda\overrightarrow{\Gamma M}$.

186. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $A(-1,2)$, $B(7,0)$, $\Gamma(1,4)$, Δ μέσο της διαμέσου ΑΜ και Ε σημείο ώστε $2\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{E\Gamma}$. Τότε: **α)** Βρείτε τα Δ, Ε. **β)** Δείξτε ότι τα Β, Δ, Ε είναι συνευθειακά.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ << Σωστό-Λάθος>>

1. Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$. **Σ** **Λ**

2. Παράλληλα ή συγγραμμικά είναι τα διανύσματα που έχουν την ίδια διεύθυνση. **Σ** **Λ**

3. Αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ τότε συμπεραίνουμε ότι $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ομόρροπα. **Σ** **Λ**

4. Το $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}+\vec{\gamma})$ είναι διάνυσμα. **Σ** **Λ**

5. Για το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και τον αρνητικό πραγματικό λ ισχύει $|\lambda\vec{\alpha}|=-\lambda|\vec{\alpha}|$. **Σ** **Λ**

6. Έστω ΑΒΓΔ ρόμβος με $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$. Τότε $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta A}=4\vec{\alpha}$. **Σ** **Λ**

7. Τα διανύσματα $\dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}, \dfrac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$ έχουν ίσα μέτρα. **Σ** **Λ**

8. Αν $\overrightarrow{AB}=6\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τότε η γωνία των διανυσμάτων είναι ίση με μηδέν. **Σ** **Λ**

9. Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-1$ τότε $\vec{\alpha}$,$\vec{\beta}$ αντίθετα. **Σ** **Λ**

10. Αν για τα μη συνευθειακά σημεία Α,Β,Γ,Δ του επιπέδου ισχύει η ισότητα $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma A}-\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμο. **Σ** **Λ**

11. Αν $\vec{\alpha}^2=16\vec{\beta}^2$ τότε $\vec{\alpha}=4\vec{\beta}$ ή $\vec{\alpha}=-4\vec{\beta}$. **Σ** **Λ**

12. Αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=0$, τότε τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίθετα. **Σ** **Λ**

13. Αν $\vec{i}$, $\vec{j}$ μοναδιαία , τότε $(\vec{i}+\vec{j})\cdot(-\vec{i}+\vec{j})=0$. **Σ** **Λ**

14. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ και οι προτάσεις **Α)** $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ **Β)** $\vec{\alpha}=\vec{0}$ **Γ)** $\vec{\beta}=\vec{0}$ **Δ)** $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$ τότε σωστή είναι μόνο η Α. **Σ** **Λ**

15. Ισχύει ότι $\left(\left(\overrightarrow{AB}\right)^2\right)^2=\left(\overrightarrow{AB}\right)^4$. **Σ** **Λ**

16. Αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$ τότε ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{0}$ **Σ** **Λ**

17. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ ισχύει $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{BA}^2$. **Σ** **Λ**

18. Αν $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}$ τότε το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο. **Σ** **Λ**

19. Αν ΑΒΓ ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α τότε $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\dfrac{\alpha^2}{2}$. **Σ** **Λ**

20. Δύο διανύσματα είναι κάθετα μόνο όταν $\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$ (λ συντελεστής διεύθ.) **Σ** **Λ**

21. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ παράλληλα. **Σ** **Λ**

22. Ισχύει ότι: αν $\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}\right)^2=\overrightarrow{AB}^2\cdot\overrightarrow{A\Gamma}^2$ τα $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}$ παράλληλα **Σ** **Λ**

23. Ισχύει ότι $\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$. **Σ** **Λ**

24. Αν Μ μέσο του $\overrightarrow{AB}$ τότε $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PM}$. **Σ** **Λ**

25. Ισχύει $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}-2\overrightarrow{\Gamma\Delta}=2\overrightarrow{\Delta M}$ αν Μ μέσο του ΒΓ. **Σ** **Λ**

26. Αν $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma A}$ τότε Α,Β,Γ κορυφές τριγώνου. **Σ** **Λ**

ΤΕΣΤ Β ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1ο

1. Να απαντήσετε με την λέξη ΣΩΣΤΟ η ΛΑΘΟΣ και με δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{A\Gamma}$ τότε AB και $A\Gamma$ ομόρροπα

β) Αν $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$ τότε Α,Β,Γ συνευθειακά

2. Να αποδείξετε ότι: αν Μ μέσο του ΑΒ τότε $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

3. Τι ισχύει για το μέτρο του αθροίσματος δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

2ο

---

1. Να απαντήσετε με την λέξη ΣΩΣΤΟ η ΛΑΘΟΣ και με δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν ΑΒΓΔ τετράγωνο τότε ισχύει: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\Gamma}$.

β) Αν $A(1,2)$, και $B(3,-2)|$ τότε $\overrightarrow{AB} = (4,0)$.

2. Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$, τότε $|\vec{\alpha}| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ Απόδειξη

3. Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος. Ορισμός – περιπτώσεις.

3ο

---

1. Να απαντήσετε με την λέξη ΣΩΣΤΟ η ΛΑΘΟΣ και με δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma}$ τότε Β,Γ συμπίπτουν.

β) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}$.

2.Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$. $\left(x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\right)$

3. Ονομάζουμε γινόμενο του λ με το $\vec{\alpha}$ …………………………..

4ο

---

1. Να απαντήσετε με την λέξη ΣΩΣΤΟ η ΛΑΘΟΣ και με δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $\vec{\alpha} = 2i + 3j = x_1 i + \psi_1 j$ τότε $x_1 = 2$ και $\psi_1 = 3$.

β) Αν $|\overrightarrow{AB}| = 3$ και $|\overrightarrow{B\Gamma}| = 2$ τότε $|\overrightarrow{A\Gamma}| = 5$

2. Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ και (x, y) συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ. Τότε $x = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $y = \ldots\ldots\ldots\ldots$ (Απόδειξη)

3. Συμπληρώστε τις ισότητες: α) $\lambda\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ β) $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ και ………… τότε ……………
γ) $(-\lambda\vec{\alpha}) = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$, δ) $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha}$ και …………… τότε ……..

5ο

1. Να απαντήσετε με την λέξη ΣΩΣΤΟ η ΛΑΘΟΣ και με δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ τότε $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$.

β) Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$, τότε $\vec{\beta}=\vec{\gamma}$

2. Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα ορισμός, απόδειξη.

3. Συνημίτονο γωνίας δύο διανυσμάτων Τύπους.

6ο

1. Να απαντήσετε με την λέξη ΣΩΣΤΟ η ΛΑΘΟΣ και με δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha}\nearrow\nearrow\vec{\beta}$.

β) $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})$.

2. Εσωτερικό γινόμενο. Ορισμός.

3. Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ τότε $\lambda_{\vec{\alpha}}\lambda_{\vec{\beta}}=-1$. Απόδειξη($\vec{\alpha},\vec{\beta}$ όχι παράλληλα στον yy')

7ο

1. Να απαντήσετε με την λέξη ΣΩΣΤΟ η ΛΑΘΟΣ και με δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$.

β) Αν $\vec{\alpha}=(x_1,x_2)$, και $\vec{\beta}=(x_3,x_4)$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_4$

2. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με $\vec{\beta}\neq 0$, τότε $\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$, $\lambda\in R$. Απόδειξη

3. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις

i) $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|.........|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$, **ii)** $\vec{\alpha}^2-\vec{\beta}^2=..............$ **iii)** $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=..............$ **iv)** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=..............$

v) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=..........$ **vi)** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}\Leftrightarrow\vec{\alpha}........$ **vii)** $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0$ τότε $\vec{\alpha}$ ……

8ο

1. Να απαντήσετε με την λέξη ΣΩΣΤΟ η ΛΑΘΟΣ και με δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις:

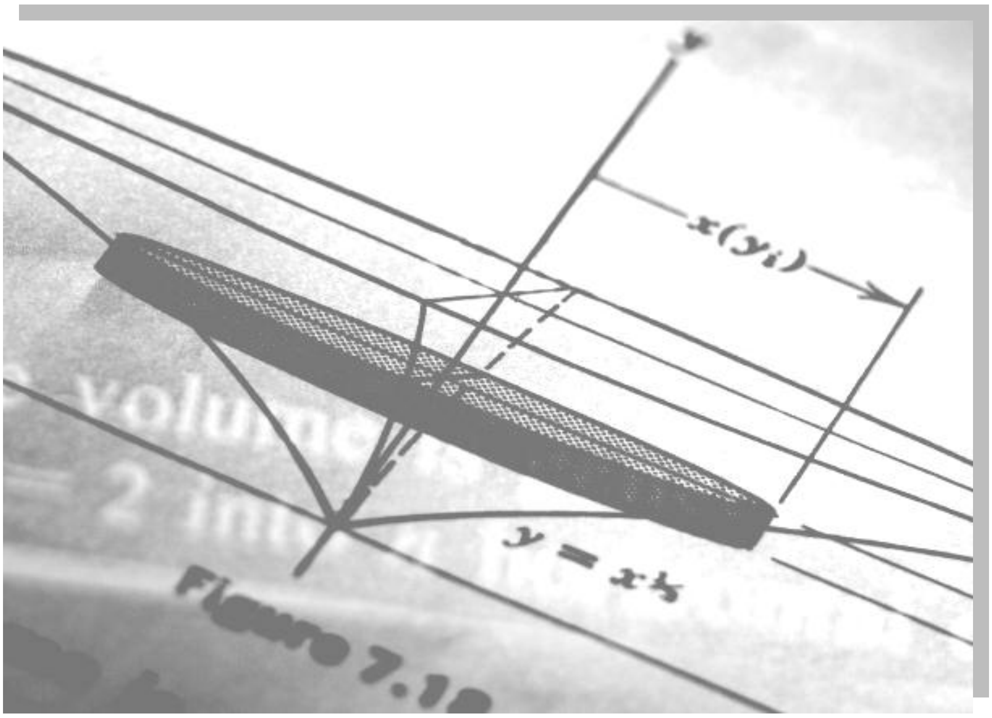
α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\lambda\cdot\vec{\alpha}^2$. $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΔ ύψος ισχύει $\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{B\Delta}=\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{BA}$.

2. Να αποδείξετε ότι $(\lambda\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$

3. Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $\vec{\beta}=(1,2)$, $\vec{\gamma}=(2,-3)$ Να υπολογίσετε τα: **i)** $|\vec{\beta}-\vec{\gamma}|=...$ **ii)** $\pi\rho o\beta_{\vec{\gamma}}\vec{\beta}=......$

iii) $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(|\vec{\beta}|-|\vec{\alpha}|)=...$ **iv)** $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\beta}})=........$


x(yᵢ)
y = x½
Figure 7.1

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ

1. α) Το σύνολο των ευθειών που περνάνε από το $A(x_0,y_0)$ είναι της μορφής $y-y_0=\lambda(x-x_0)$ και η $x=x_0$.

β) Εάν δεν δίνεται το (x_0,y_0) τη μορφή των ευθειών θα τη πάρουμε από τους τύπους $y=\lambda x+\kappa$ ή $x=\alpha$.

2. Μια εξίσωση με x και y παριστάνει ευθεία όταν είναι α΄ βαθμού ως προς x και y και δεν έχω συγχρόνως μηδενισμό των συντελεστών των x, y.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Η εξίσωση $(\lambda-1)x+(2\lambda+1)y=3$ παριστάνει ευθεία διότι $\lambda-1=0\Leftrightarrow\lambda=1$ και $2\lambda+1=0\Leftrightarrow\lambda=-\frac{1}{2}$ δηλ δεν υπάρχει λ που να μηδενίζει συγχρόνως τους συντελεστές των x και y . Αν $\lambda=1$ έχω την ευθεία $y=1$ ενώ για $\lambda=-\frac{1}{2}$ την $y=-2$.

3 . Αν έχω εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού ως προς x και y μιλάμε για **ευθεία** όταν μπορώ να τη φέρω σε μορφή γινομένου πρώτων παραγόντων.

Η εξίσωση $x^2-y^2-4\lambda y-2\lambda x-3\lambda^2=0$ παριστάνει 2 ευθείες κάθετες μεταξύ τους διότι : $x^2-y^2-4\lambda y-2\lambda\chi-3\lambda^2=0\Leftrightarrow(x-\lambda)^2-(y+2\lambda)^2=0\Leftrightarrow(x-y-3\lambda)(x+y+\lambda)=0$ άρα $\varepsilon_1: x-y-3\lambda=0$ και $\varepsilon_2: x+y+\lambda=0$ με $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=-1$ άρα $\varepsilon_1\perp\varepsilon_2$.

4. Για να **αποδείξω ότι μία γραμμή περνάει από σταθερό σημείο,**

<u>Α) τρόπος</u> : γράφω την εξίσωση με άγνωστο την **παράμετρο** και από τη θεωρία των πολυωνύμων θέτω όλους τους συντελεστές μηδέν και βρίσκω το σταθερό σημείο ή τα σταθερά σημεία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_\lambda:(2\lambda^2+\lambda+3)x-(\lambda^2+\lambda-2)y-5\lambda^2-3\lambda+8=0$ διέρχονται από σταθερό σημείο για κάθε πραγματική τιμή του λ.

ΛΥΣΗ : Η εξίσωση γράφεται $2\lambda^2x+\lambda x-3x-\lambda^2y-\lambda y+2y-5\lambda^2-3\lambda+8=0$ $\Leftrightarrow(2x-y-5)\lambda^2+(x-y-3)\lambda-3x+2y+8=0$ και επαληθεύεται **για κάθε τιμή του** $\lambda\in\mathbb{R}$ όταν υπάρχει (x_o,y_o) τέτοιο ώστε $2x-y-5=0$ και $x-y-3=0$ και $-3x+2y+8=0$ από την λύση των 2 πρώτων βρίσκω $x_o=2,\ y_o=-1$ που επαληθεύει την $-3x+2y+8=0$ άρα οι ευθείες ε_λ διέρχονται από το σταθερό σημείο (2,-1).

<u>Β) τρόπος</u> : για να δείξω ότι μια παραμετρική εξίσωση γραμμής πχ $x^2+y^2-2\lambda x-1=0$ για τις διάφορες τιμές του λ διέρχεται από σταθερά σημεία δίνω δύο τιμές στο λ φτιάχνω 2 εξισώσεις και λύνω το σύστημα τους. Αν οι λύσεις που θα βρώ (σημεία τομής) επαληθεύουν την παραμετρική εξίσωση έχω τα σταθερά σημεία που ζητήθηκαν. Έτσι έχω για λ=0 $x^2+y^2-1=0$ και για λ=1 $x^2+y^2-2x-1=0$ Από την λύση του συστήματος έχω $x=0\Rightarrow y^2=1\Rightarrow y=\pm1$ Άρα τα σημεία είναι τα $A(0,1)$ και $B(0,-1)$ τότε για $x=0$ και $y=1$ έχω $0^2+1^2-2\cdot\lambda\cdot0-1=0$ (ισχύει) ομοίως για $x=0$ και $y=-1$.

5. Δύο ευθείες **τέμνονται** για κάθε τιμή μιας παραμέτρου λ όταν το σύστημα τους έχει ορίζουσα διάφορη του μηδέν για κάθε τιμή της παραμέτρου .
(**παράμετρος** συνήθως είναι κάθε γράμμα διαφορετικό των x και y)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ οι $\varepsilon_1: x+\lambda y=1$ και $\varepsilon_2:\lambda x-y=2$ τέμνονται για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ διότι

$$D=\begin{vmatrix}1 & \lambda\\ \lambda & -1\end{vmatrix}=-1-\lambda^2<0\,(\delta\eta\lambda\neq0)$$

6. Δύο ευθείες είναι **παράλληλες** όταν

α) έχουν την μορφή $y=\lambda x+\beta$ και $y=\lambda x+\gamma$.

β) έχουν την μορφή $x=\alpha$ και $x=\beta$.

γ) Το σύστημα τους είναι αδύνατο.

7. Δύο ευθείες **ταυτίζονται** όταν

α) Το σύστημα τους έχει άπειρες λύσεις.

β) έχουν την μορφή $\varepsilon_1: y=\lambda x+\beta$ και $\varepsilon_2: y=\lambda x+\beta$.(ίδια εξίσωση)

γ) έχουν ένα κοινό σημείο και είναι παράλληλες .

δ) είναι παράλληλες με απόσταση μηδέν

ε) έχουν 2 κοινά σημεία

8. Όταν έχω **παραλληλία** ευθειών ή **καθετότητα** δεν κάνω ποτέ λάθος όταν χρησιμοποιώ τα παράλληλα σε αυτές διανύσματα. $\vec{\delta}_1 // \varepsilon_1$ και $\vec{\delta}_2 // \varepsilon_2$ τότε $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2 = 0$ και $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \det(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = 0$ έτσι δεν χάνω λύσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ αν $\varepsilon_1: 2x+(\lambda-1)y+\lambda=0$ και $\varepsilon_2:(\lambda-1)x+(1+\lambda)y+3=0$ και μας ζητηθεί η τιμή του λ για να είναι κάθετες τότε αν πάρω $\lambda_2 \cdot \lambda_1 = -1$ έχω $\dfrac{2}{\lambda-1}\cdot\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}=-1 \Rightarrow ....\lambda=-3$ ενώ το **σωστό** είναι $\vec{\delta}_1 // \varepsilon_1$ τότε $\vec{\delta}_1=(\lambda-1,-2)$

και $\vec{\delta}_2 // \varepsilon_2$ τότε $\vec{\delta}_2=(\lambda+1,-\lambda+1)$ με $\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2 = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)+2(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow ....\lambda=1$ ή $\lambda=-3$

9. Να θυμάστε ότι δύο ευθείες είναι **κάθετες** όχι μόνο αν $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ αλλά και όταν είναι της μορφής $y=\alpha$ και $x=\beta$ Αντίστοιχα **παράλληλες** όταν $\lambda_1=\lambda_2$ ή είναι της μορφής $x=\alpha$.

10. Δεν ξεχνάω ότι αν $\vec{\delta}_1=(x,y)$, $x\neq 0$ τότε $\lambda_{\vec{\delta}}=\dfrac{y}{x}$ και **<u>ότι ένα σημείο</u>** $A(x,y)$ **<u>δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης .</u>**

Όταν δίνεται σημείο $A(x,y)$ και μιλάω για $\dfrac{y}{x}$ εννοώ τον συν. διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{OA}$ (O αρχή των αξόνων).

11. Αν δοθούν δύο σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$, $x_1 \neq x_2$ τότε $\lambda_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

ή $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$ και $\lambda_{\overrightarrow{AB}}=\lambda_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

12. Η **απόσταση δύο σημείων** $A(x,y)$ και $B(x_2,y_2)$ δίνεται από τον τύπο

$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_1-y_2)^2}$ και είναι το ίδιο να γράφουμε $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$ και $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_1-y_2)^2}$ **.(μήκος ευθύγραμμου τμήματος)**

13. Για την απόσταση δύο ευθειών εννοείτε **<u>πάντοτε παραλλήλων</u>** έχουμε

α) τον τύπο $d=\dfrac{|\beta_1-\beta_2|}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ αφού γράψουμε τις ευθείες στην μορφή $\varepsilon_1: y=\lambda x+\beta_1$ και $\varepsilon_2: y=\lambda x+\beta_2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Αν $\varepsilon_1: 2x+y=3$ και $\varepsilon_2: y=-2x$ τότε γράφουμε $\varepsilon_1: y=-2x+3$ και $\varepsilon_2: y=-2x$ άρα $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\dfrac{|0-3|}{\sqrt{1+(-2)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

ή β) βρίσκω ένα σημείο της μίας και παίρνω απόσταση σημείου από ευθεία

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ για $x=0$ η ε_1 δίνει $y=3$ άρα η απόσταση του σημείου $A(0,3)$ από την ε_2 δίνεται από τον τύπο $d(A,\varepsilon_2)=\dfrac{|-2\cdot 0-3|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt5}$ (απόσταση σημείου από ευθεία)

Όταν ένα σημείο $A(x_o,y_o)$ **ανήκει σε ευθεία τότε την επαληθεύει**

Αν το (x_o,y_o) ανήκει στην $\varepsilon:2x-y+3=0$ γράφω $2x_o-y_o+3=0$.

14. ***Όταν μας ζητάνε ένα σημείο*** προσπαθούμε να βρούμε 2 ευθείες στις οποίες ανήκει και λύνουμε το σύστημα τους.

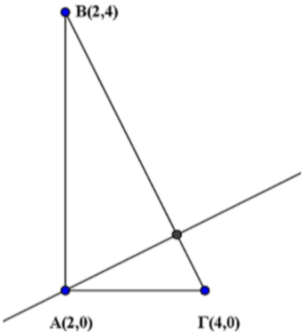
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Να βρείτε το σημείο που η $\varepsilon:2x+y=3$ τέμνει τον $y'y$

λύνω το σύστημα $2x+y=3$ και $x=0$ (εξίσωση του $y'y$). και έχω $x=0$, $y=3$ άρα το σημείο είναι το $A(0,3)$.

15. Για το **εμβαδό τριγώνου** που γνωρίζω τρία σημεία $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $\Gamma(x_3,y_3)$ βρίσκω δύο **τυχαία** διανύσματα πχ $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$, $\overrightarrow{\Gamma B}=(x_2-x_3,y_2-y_3)$ και παίρνω τον τύπο

$E=\dfrac12\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma})\right|$ **ή** βρίσκω το **μήκος** $B\Gamma$ και την απόσταση του A από την $B\Gamma$ (ύψος) και παίρνω τον τύπο της γεωμετρίας $E=\dfrac12\beta\upsilon$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου που ορίζετε από τις ευθείες $\varepsilon_1:x=2$, $\varepsilon_2:y=0$, $\varepsilon_3:y=-2x+8$.



Βρίσκω τα σημεία τομής των ευθειών λύνοντας τα συστήματα των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$, $\varepsilon_2,\varepsilon_3$ και $\varepsilon_1,\varepsilon_3$

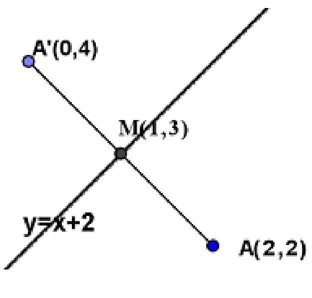
Αν $A(2,0)$, $B(2,4)$, $\Gamma(4,0)$ οι κορυφές του. Τότε $\overrightarrow{AB}=(0,4)$ και $\overrightarrow{\Gamma B}=(-2,4)$ άρα $E=\dfrac12\left|\det\big((0,4),(-2,4)\big)\right|=4\tau\mu$.

Ή αλλιώς $d(A,B\Gamma)=\dfrac{|-2\cdot2-0+8|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt5}$ και

$B\Gamma=\sqrt{(4-2)^2+(0-4)^2}=2\sqrt5$ άρα $E=\dfrac12\cdot2\sqrt5\cdot\dfrac{4}{\sqrt5}=4\tau\mu.$

16. **Το συμμετρικό** A' **ενός σημείου** A ως προς ευθεία ε το βρίσκω εάν βρώ το σημείο τομής της **ε** με την AA' δηλαδή το μέσον της AA' τότε ισχύει $x_M=\dfrac{x_A+x_{A'}}{2}$ και $y_M=\dfrac{y_A+y_{A'}}{2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $A(2,2)$ ως προς την ευθεία $\varepsilon:y=x+2$



Έστω A' το συμμετρικό τότε η ευθεία AA' είναι κάθετη στην ε με συντελεστή $\lambda=-1$ και εξίσωση $AA':y-2=-1(x-2)$

Από την λύση του συστήματος των AA' και ε βρίσκω τις συντεταγμένες του μέσου της AA' δηλ $M(1,3)$ άρα

$x_M=\dfrac{x_A+x_{A'}}{2}\Rightarrow\dfrac{2+x_{A'}}{2}=1\Rightarrow x_{A'}=0$ ομοίως $y_{A'}=4$ δηλαδή $A'(0,4)$.

17. **Την γωνία 2 ευθειών** την βρίσκω σαν γωνία των παραλλήλων σε αυτές διανυσμάτων.

πχ Αν $\varepsilon_1 : 2x - 3y = 0$ και $\varepsilon_2 : y = 3$ τότε $\vec{\delta}_1 // \varepsilon_1$, άρα $\vec{\delta}_1 = (3,2)$ και $\vec{\delta}_2 // \varepsilon_2$, άρα $\vec{\delta}_2 = (1,0)$ τότε $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\varepsilon_1,\varepsilon_2}) = \dfrac{(3,2)\cdot(1,0)}{\sqrt{3^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

18. Μία εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού ως προς x και y που επαληθεύεται από τις συντεταγμένες 2 σημείων **δηλώνει την εξίσωση που διέρχεται απ αυτά.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Αν ισχύει $2x_1 - 3y_1 = 2$ και $2x_2 - 3y_2 = 2$ τότε τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ανήκουν στην ευθεία $\varepsilon : 2x - 3y = 2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης: i) Της ευθείας, η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(-1,4)$ και $B(1,6)$. ii) Της ευθείας, η οποία τέμνει τους άξονες στα σημεία $\Gamma(-1,0)$ και $\Delta(0,2)$. iii) Της ευθείας, η οποία διέρχεται από το Ο και είναι κάθετη στη ΓΔ.

2. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ οι ευθείες που διέρχονται από τα σημεία: i) $A(-1,4)$ και $B(1,6)$, ii) $A(-1,3)$ και $B(0,4)$, iii) $A(1,3)$ και $B(1,-1)$, iv) $A(2,3)$ και $B(-2,3)$.

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1,-1)$ και: i) Είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (3,-2)$, ii) Είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (0,1)$, iii) Σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \pi/4$.

4. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές $A(-1,0)$, $B(3,2)$ και $\Gamma(-3,4)$. Να βρείτε: i) Τις εξισώσεις των υψών του. ii) Τις εξισώσεις των μεσοκαθέτων των πλευρών του.

5. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφές $A(3,1)$, $B(5,5)$, $\Gamma(1,3)$ και $\Delta(-1,-1)$ είναι ρόμβος. Ποιες είναι οι εξισώσεις των διαγωνίων του;

6. Να δείξετε ότι τα σημεία $A(1,-1)$, $B(2,0)$ και $\Gamma(-1,-3)$ είναι συνευθειακά.

7. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία $A(\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$ και $B(\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$, αν $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ και $\theta \neq \dfrac{\pi}{4}$. Για ποια τιμή του θ η ευθεία αυτή διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

8. Δίνονται τα σημεία $A(1,4)$ και $B(-1,-5)$. **α)** Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. β) Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ.
γ) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. **δ)** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ.
ε) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία τομής τους με την ευθεία ΑΒ.

9. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών, που διέρχονται από το σημείο $A(-1,2)$ και σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

10. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών και τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ, του οποίου τα δύο ύψη έχουν εξισώσεις $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$ και $y = -x + 2$ αντιστοίχως και η κορυφή Α έχει συντεταγμένες $(1,4)$.

11. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(2,1)$ και τέμνει τις ευθείες $y = x + 1$ και $y = -x + 1$ στα σημεία Α και Β αντιστοίχως, έτσι ώστε το Μ να είναι μέσο του ΑΒ.

12. Δίνονται τα σημεία $P(\kappa, \frac{1}{\kappa})$ και $Q(\lambda, \frac{1}{\lambda})$, με $\kappa, \lambda \neq 0$ και $\kappa \neq \lambda$. i) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας PQ. ii) Αν η ευθεία PQ τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Α και Β αντιστοίχως, να δείξετε ότι $AP = BQ$.

13. Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$, με $\alpha, \beta \neq 0$, είναι η $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$.

14. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -\frac{2}{3}x - \frac{11}{3}$ και τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα Α και Β, ώστε το άθροισμα της τετμημένης του Α και της τεταγμένης του Β να είναι ίσο με 15.

15. Τα σημεία $M_1(1,1)$, $M_2(2,2)$ και $M_3(3,-1)$ είναι τρεις διαδοχικές κορυφές ενός παραλληλογράμμου. Να βρεθούν: α) οι συντεταγμένες της τέταρτης κορυφής του, β) οι συντεταγμένες του κέντρου του, γ) το εμβαδόν του.

16. Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $A(-8,2)$, $B(7,4)$ και $H(5,2)$ το ορθόκεντρο του. Να βρείτε: α) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ, β) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ, γ) τις εξισώσεις των πλευρών του.

17. Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(6,4)$ και $\Gamma(\frac{9}{2}, 6)$. α) Να δειχθεί ότι η γωνία ΑΒΓ είναι ορθή. β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής Δ του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. γ) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ.

18. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1 : 2x - y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + 2y + 3 = 0$ είναι οι φορείς των δύο πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου και $A(2,-1)$ μια κορυφή του, να βρεθούν οι άλλες κορυφές και το εμβαδόν του.

19. Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, 0)$, $B(2\lambda, 3\lambda)$, $\lambda \neq 0$. Αν η κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Α τέμνει την ευθεία $x = -2\lambda$ στο Γ, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

20. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματική τιμή του μ η εξίσωση $(\mu - 1)x + \mu y + \mu^2 = 0$ παριστάνει ευθεία γραμμή. Πότε η ευθεία αυτή είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x, πότε προς τον y΄y και πότε διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

21. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-2,3)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $2x - 3y + 6 = 0$. Ποιο είναι το σημείο τομής των δύο ευθειών;

22. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $2x - 5y + 3 = 0$ και $x - 3y - 7 = 0$ και είναι κάθετη στην ευθεία $4x + y = 1$.

23. Τα σημεία $A(-4,6)$ και $\Gamma(-1,1)$ είναι οι απέναντι κορυφές ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Οι πλευρές ΒΓ και ΓΔ του παραλληλογράμμου ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις $x + 3y = 2$ και $x - y + 2 = 0$ αντιστοίχως. Να υπολογίσετε: i) Τις συντεταγμένες της κορυφής Δ. ii) Το συνημίτονο της οξείας γωνίας των διαγωνίων του παραλληλογράμμου.

24. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in R$, ώστε οι ευθείες $(\lambda - 1)x + \lambda y + 8 = 0$ και $\lambda x + 3y + 1 - 2\lambda = 0$ να είναι κάθετες.

25. Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in R$, ώστε η ευθεία $3x + 3y + \kappa = 0$, να διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $3x + 4y + 6 = 0$ και $6x + 5y - 9 = 0$.

26. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $x + 4y = 5$, $3x - 2y = 1$ και $7x - 8y + 1 = 0$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

27. Δίνεται η ευθεία $3x + y = 3$ και το σημείο $A(1,2)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες της προβολής του Α στην ευθεία αυτή.

28. Να σχεδιάσετε τις γραμμές τις οποίες παριστάνουν οι εξισώσεις: i) $x^2 - y^2 + 4y - 4 = 0$, ii) $x^2 - y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$.

29. Να αποδείξετε ότι εξίσωση $(2\alpha^2 + \alpha + 3)x + (\alpha^2 - \alpha + 1)y + (3\alpha + 1) = 0$ παριστάνει ευθεία για κάθε $\alpha \in R$ και ότι οι ευθείες αυτής της μορφής διέρχονται από το ίδιο σημείο.

30. Να βρείτε την οξεία γωνία την οποία σχηματίζουν οι ευθείες $y = \mu x$ και $(1+\mu)x = (1-\mu)y$.

31. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο τομής των ευθειών $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$ και $\frac{x}{\beta} + \frac{y}{\alpha} = 1$, με $\alpha, \beta \neq 0$ και $\alpha \neq \pm\beta$.

32. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία είναι κάθετη στην ε στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα x΄x.

33. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 5x - 8y - 51 = 0$ και $\varepsilon_2: 5x - 8y + 68 = 0$. i) Να δείξετε ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. ii) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις της αρχής των αξόνων από τις ε_1 και ε_2. iii) Να υπολογίσετε την απόσταση των ε_1 και ε_2.

34. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 4x - 3y - 9 = 0$ και $\varepsilon_2: 4x - 3y - 24 = 0$. Να βρείτε ένα σημείο της ε_1 και στη συνέχεια να υπολογίσετε την απόσταση των ε_1 και ε_2.

35. Ποιο σημείο της ευθείας $2x - 3y = 30$ ισαπέχει από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(7,9)$;

36. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -3$ και απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 5 μονάδες.

37. Η ευθεία $\varepsilon: 3x - 2y + 1 = 0$ είναι μεσοπαράλληλη δύο παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2, που απέχουν 8 μονάδες. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών αυτών.

38. Δίνονται τα σημεία $A(5,1)$ και $B(1,3)$. Να βρείτε το σημείο Μ του άξονα x΄x, για το οποίο το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ είναι ίσο με 7.

39. Δίνονται τα σημεία $A(3,4)$ και $B(5,-2)$. Να βρείτε το σημείο Μ, τέτοιο ώστε $MA = MB$ και $(MAB) = 10$.

40. Ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ οι τρεις κορυφές του έχουν συντεταγμένες $(-3,1)$, $(-2,3)$ και $(4,-5)$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.

41. Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση $x + y = 1$. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $P(2,3)$ ως προς άξονα συμμετρίας την ε.

42. Ένα σημείο Ρ του επιπέδου κινείται πάνω στην ευθεία $y = x$. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό σημείο Ρ΄ του Ρ ως προς την ευθεία $x + 2y - 1 = 0$, κινείται πάνω στην ευθεία $7x - y - 2 = 0$.

43. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ισαπέχει από τα σημεία $A(-2,0)$ και $B(0,2)$.

44. Να βρείτε το σημείο του άξονα x΄x, το οποίο ισαπέχει από την αρχή των αξόνων Ο και από την ευθεία $5x + 12y - 60 = 0$.

45. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από το σημείο $M(1,2)$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν $E = 4$.

46. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων Ο και απέχουν από το σημείο $A(-1,3)$ απόσταση ίση με 1.

47. Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $x - y + 2 = 0$, τα οποία απέχουν από την ευθεία $12x - 5y + 60 = 0$ απόσταση ίση με 1.

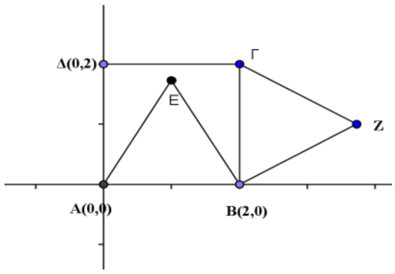
48. Να δείξετε ότι τα σημεία $A(\alpha,\beta)$, $B(\gamma,\delta)$ και $\Gamma(\alpha-\gamma, \beta-\delta)$ είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν $\alpha\delta = \beta\gamma$.

49. Δίνονται τα σημεία $A(\alpha,0)$, $B(0,\beta)$ με $\alpha,\beta\neq 0$. Αν η μεσοκάθετος του ΑΒ τέμνει τους άξονες στα σημεία $P(p,0)$ και $Q(0,q)$, να δείξετε ότι: **α)** $\alpha q+\beta p=2pq$, **β)** $\alpha p+\beta q=0$. Στη συνέχεια να εκφράσετε τα p και q συναρτήσει των α και β.

50. Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες $3x-4y+1=0$ και $5x+12y+4=0$.

51. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $x-y+1=0$ και $2x-3y+5=0$ και απέχει από το σημείο $A(3,2)$ απόσταση ίση με $7/5$.

52. Δίνονται τα σημεία $A(-1,-2)$ και $B(3,1)$. Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ, για τα οποία ισχύει $(MAB)=8$.



53. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο ενώ τα ΕΑΒ και ΖΒΓ είναι ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς $\alpha=2$.

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των Ε και Ζ.

ii) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.

54. Να βρείτε την ευθεία η οποία συνδέει το σημείο $A(\alpha,\beta)$ με το σημείο τομής των ευθειών $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$ και $\frac{x}{\beta}+\frac{y}{\alpha}=1$, όπου $\alpha,\beta\neq 0$ και $\alpha\neq\pm\beta$.

55. Να δείξετε ότι: i) Η εξίσωση $x^2-4xy+y^2=0$ παριστάνει δύο ευθείες. ii) Καθεμιά σχηματίζει με την $x-y=0$ γωνία 30^o.

56. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από το σημείο $M(1,0)$ και τέμνει τις ευθείες $y=x+2$ και $y=x$ στα σημεία Α και Β αντιστοίχως, έτσι ώστε $(AB)=2$.

57. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\lambda x+(\lambda-1)y=2\lambda$ και $(\lambda+1)x+\lambda y=2\lambda+1$ τέμνονται για όλες τις τιμές του $\lambda\in R$. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής τους;

58. Να βρείτε συνθήκη, ώστε: i) Η ευθεία $\alpha x+\beta y+\gamma=0$, να ορίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.. ii) Ο άξονας $x'x$ να διχοτομεί τη γωνία των ευθειών με εξισώσεις $\varepsilon_1:\alpha_1 x+\beta_1 y=0$ και $\varepsilon_2:\alpha_2 x+\beta_2 y=0$.

59. Αν οι ευθείες $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$ και $\frac{x}{A}+\frac{y}{B}=1$ είναι παράλληλες με $A>\alpha$ και $\beta>0$, να δείξετε ότι η απόσταση μεταξύ των ευθειών είναι $\frac{\beta(A-\alpha)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

60. Να εξετάσετε αν η ευθεία $2\lambda x+2\lambda y+5\lambda=3y-x+7$ διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $\lambda\in R$.

61. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2}+y\eta\mu^2\frac{\theta}{2}+\sigma\upsilon\nu\theta-1=0$, $\theta\in[0,\pi]$, παριστάνει ευθεία, η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο.

62. Θεωρούμε την εξίσωση $(2\lambda^2+\lambda-3)x-(\lambda^2+\lambda-2)y-5\lambda^2-3\lambda+8=0$. Για ποιες τιμές του $\lambda\in R$ η εξίσωση παριστάνει ευθεία;

63. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(\lambda-1,2\lambda+3)$, $\lambda\in R$.

64. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2-y^2-4\lambda y-2\lambda x-3\lambda^2=0$ παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής των δύο αυτών ευθειών.

65. Οι συντεταγμένες δύο πλοίων Π_1, Π_2 είναι $\Pi_1(t-1,t+2)$ και $\Pi_2(3t,3t-1)$, για κάθε χρονική στιγμή t ($t>0$). α) Να βρεθούν οι γραμμές πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο πλοία. β) Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές του t που τα δύο πλοία θα συναντηθούν. γ) να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων τη χρονική στιγμή $t=3$.

66. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1:(\mu+1)x+(\mu+2)y=0$ και $\varepsilon_2:\mu x-(3\mu+2)y+7=0$. Να βρείτε τον μ, ώστε η γωνία των ε_1 και ε_2 να είναι 90^o.

67. Οι εξισώσεις των πλευρών ενός τριγώνου είναι $3x+4y-7=0$, $x+y+2=0$ και $2x+3y-5=0$. Ζητούνται: α) οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου, β) το εμβαδόν του.

68. Δίνονται τα σημεία $A(1,-1)$, $B(2,2)$ και $\Gamma(\mu-1,3\mu-2)$, $\mu\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι το Γ κινείται σε ευθεία.

β) Να δειχθεί ότι για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$, τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου με σταθερό εμβαδόν.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Β και από την οποία το σημείο Α απέχει απόσταση ίση με 1.

ΕΥΘΕΙΑ
2^o Πέρασμα

69. Να εξετάσετε αν η ευθεία $x+1998y=4$ ανήκει στην οικογένεια ευθειών που έχει εξίσωση $(x+y-4)+\lambda(x-3y-4)=0$.

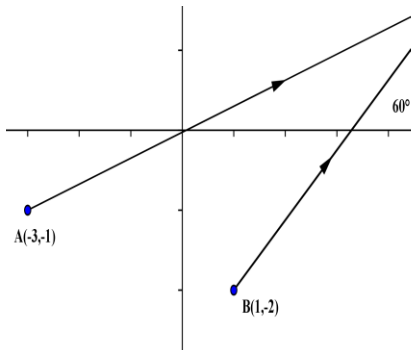
70. Φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο $\Sigma(2,3)$ και προσπίπτουσα στην ευθεία $x+y+1=0$, μετά την ανάκλαση της διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$. Να βρεθούν οι εξισώσεις της προσπίπτουσας και της ανακλώμενης ακτίνας.

71. Μια κορυφή ενός τετραγώνου είναι το σημείο τομής των ευθειών $2x-3y+20=0$ και $3x+5y-27=0$ και η διαγώνιος του βρίσκεται επί της ευθείας $x+7y-16=0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τετραγώνου καθώς και η εξίσωση της άλλης διαγωνίου του.

72. Το σημείο $A(3,-1)$ είναι κορυφή του τετραγώνου ΑΒΓΔ, του οποίου μία πλευρά έχει εξίσωση $3x-2y-5=0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των άλλων πλευρών του.

73. Τριγώνου ΑΒΓ δίνονται η κορυφή $A(1,2)$ και οι εξισώσεις $x-3y+1=0$ και $y-1=0$ δύο διαμέσων του. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.

74. Η πορεία δύο κινητών που κινούνται ευθύγραμμα ξεκινώντας από τα σημεία Α και Β αντιστοίχως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. **α)** Να βρεθεί η απόσταση των δύο σημείων Α και Β. **β)** Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Γ. **γ)** Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Β από την ευθεία στην οποία κινείται το άλλο κινητό. **δ)** Να εξεταστεί αν τέμνονται οι διευθύνσεις των δύο κινητών.



75. Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο $A(2,6)$ και η θέση ενός πλοίου με το σημείο $\Pi(\lambda-1,2+\lambda)$, $\lambda\in R$.
α) Για ποιες τιμές του λ το σημείο Π έχει τετμημένη μικρότερη από την τετμημένη του Α; **β)** Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι Α, όταν κινείται ευθύγραμμα. **γ)** Ποια θα είναι η ελάχιστη απόσταση της πορείας του πλοίου από το λιμάνι, και ποια είναι τότε η θέση του.

76. Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy ένα πλοιάριο ξεκινά από ένα λιμάνι Α και κατευθύνεται στο λιμάνι Ο. Το ραντάρ θέσης για κάθε χρονική στιγμή t δίνει συντεταγμένες για το πλοιάριο $(2t-40,t-30)$, $t\geq 0$. **α)** Που βρίσκεται στο χάρτη το λιμάνι Α; **β)** Πόσο απέχει το λιμάνι Α από το Ο; **γ)** Είναι σωστή η πορεία του πλοιαρίου; Ποια είναι η εξίσωση της;

77. Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ διανύσματα του επιπέδου με $|\vec{\alpha}|=1, |\vec{\beta}|=3$ και $\phi=(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ με $\phi\in[0,\pi]$ και η σχέση $(\vec{\alpha}\vec{\beta}+3)x+(\vec{\alpha}\vec{\beta}-3)y-1=0$ (1) για κάθε $\phi\in[0,\pi]$. Τότε: α) Να δειχθεί ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε β) Η ευθεία αυτή περνά πάντοτε από σταθερό σημείο το οποίο και να βρεθεί. γ) Εάν η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα x΄x τότε το $\vec{\alpha} \nearrow\swarrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta}=-3\vec{\alpha}$. δ) Εάν η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα y΄y τότε το $\vec{\alpha} \nearrow\nearrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta}=3\vec{\alpha}$. ε) Εάν η ευθεία σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ άξονα x΄x τότε $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

78. Έστω $x_1,x_2,y_1,y_2 \in R$ με $12x_1-5y_1+1=0$ και $12x_2-5y_2-25=0$. Να δειχθεί ότι $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 \ge 4$.

79. Έστω τα σημεία $A(1,2)$, $B(3,1)$ και η σχέση
$(2\kappa+3\lambda-7)\overrightarrow{OA}+(4-\kappa-\lambda)\overrightarrow{OB}+(3-\kappa-2\lambda)\overrightarrow{OM}=\vec{0}$, με $\kappa+2\lambda-3\neq 0$.
α) Να δειχθεί ότι τα Α, Β και Μ σημεία είναι συνευθειακά και να βρεθεί η ευθεία στην οποία κινείται το Μ. **β)** Εάν $3\kappa+4\lambda=11$, τότε το Μ είναι μέσο του ΑΒ με $\kappa\neq 5$ και $\lambda\neq -1$. **γ)** Να βρεθούν οι τιμές του $\rho\in R$, ώστε η ευθεία $y=\rho x$ να τέμνει το τμήμα ΑΒ. **δ)** Να δειχθεί ότι όταν $\rho=1$, τότε $4\kappa+5\lambda=15$, $\kappa\neq 5$ και $\lambda\neq -1$.

80. Η θέση ενός πλοίου σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς δίνεται από τις συντεταγμένες $\Pi(20,-10)$ και του λιμανιού στο οποίο πρόκειται να καταπλεύσει $\Lambda(5,-\frac{5}{2})$. Το πλοίο κινείται από το σημείο Π προς το σημείο Λ έτσι ώστε για κάθε 2 min η τετμημένη του να μεταβάλλεται κατά μία μονάδα. Να βρεθούν: **α)** Η εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία κινείται το πλοίο. **β)** Η θέση Μ του πλοίου πάνω στην ευθεία συναρτήσει του χρόνου t. **γ)** Ο χρόνος που χρειάζεται για να καταπλεύσει. **δ)** Να βρεθούν οι συντεταγμένες της θέσης του πλοίου καθώς και η χρονική στιγμή όπου το εμβαδόν του ΑΓΜΠ τραπεζίου είναι τετραπλάσιο του εμβαδού του ΓΒΛΜ τραπεζίου.

81. Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB//\Gamma\Delta$, $\hat{A}=\hat{\Delta}=90^o$ και $AB+\Gamma\Delta=B\Gamma$. Να δειχθεί ότι το μέσο της ΑΔ ισαπέχει από τα σημεία Α, Δ και την ευθεία ΒΓ.

82. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy, η εξίσωση ευθείας $(\lambda-1)x+(\lambda+1)y-\lambda-3=0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ. **α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ. **β)** Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία $K(2,2)$, $\Lambda(-1,5)$ και $M(1,3)$. Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτινών που διέρχονται από το πλοία Κ, Λ και Μ. **γ)** Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία Κ και Λ βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο Μ. **δ)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο Φ και τα πλοία Λ και Μ.

83. Έστω η ευθεία $\varepsilon: x+y+\mu=0$ και το σημείο $M(1,0)$. **α)** Να βρεθούν οι συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου Μ ως προς την ευθεία (ε). **β)** Αν Ν το συμμετρικό του Μ ως προς την (ε) το Ν κινείται σε σταθερή ευθεία.

84. Θεωρούμε τα σημεία $A(x_1,\lambda x_1)$, $B(x_2,-\lambda x_2)$, $\lambda\neq 0$ και $M(\mu,\nu)$ μέσο του ΑΒ. α) Να βρείτε τα x_1,x_2 συναρτήσει των μ, ν και λ. β) Αν $K(x_1,x_2)$, $\Lambda(\mu,\frac{\nu}{\lambda})$, να δείξετε ότι $|\overrightarrow{OK}|=\sqrt{2}|\overrightarrow{O\Lambda}|$. γ) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής που διαγράφουν τα σημεία $P(x_1-\mu+1,x_2-\mu)$.

85. Έστω $A(-2,1)$, $B(2,0)$ και ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με $(AB\Gamma\Delta)=8$. Αν το σημείο τομής των διαγωνίων ανήκει στην ευθεία $y=2x$, να βρείτε τις συντεταγμένες των Γ και Δ.

86. Θεωρούμε ορθή γωνία xOy και μεταβλητά σημεία $A\in Ox$ και $B\in Oy$ με $(OA)+(OB)=\kappa=$σταθερό. Αν Μ είναι η τέταρτη κορυφή του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΟΑΜΒ, να δείξετε ότι η κάθετη από το Μ στη διαγώνιο ΑΒ περνά από σταθερό σημείο.

87. Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon_1: x+y-2=0$ και $\varepsilon_2: 2x-y-2=0$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία Α και Β αντιστοίχως και το σημείο $M(-1,1)$ είναι μέσο του ΑΒ. Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Γ είναι το σημείο τομής των ε_1 και ε_2.

88. Δίνονται οι εξισώσεις $(\lambda-1)x+(\lambda-2)y=-1$ (1) και $(\lambda+1)x-1=2\lambda y$ (2), όπου $\lambda\in R$. α) Να δειχθεί ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν ευθεία γραμμή και ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) (οικογένεια ευθειών) διέρχονται από το ίδιο σημείο. (Όμοια για την εξίσωση (2)). β) Να εξεταστεί αν υπάρχει ευθεία που ανήκει και στις δύο οικογένειες ευθειών.

89. Δίνεται η εξίσωση $y^2=yx$. α) Να δειχθεί ότι: Η εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες ε_1 και ε_2 που τέμνονται στην αρχή των αξόνων. Το σημείο $M(2+\sqrt{2},\sqrt{2})$ ισαπέχει από τις ε_1, ε_2. β) Να βρεθούν οι εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ε_1, ε_2.

90. Σ' ένα καρτεσιανό επίπεδο θεωρούμε τα σημεία $A(2\lambda-3,0)$ και $B(0,\lambda+6)$, όπου $\lambda\in R$. Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο σταθερά σημεία του επιπέδου αυτού, από τα οποία το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ φαίνεται υπό ορθή γωνία, για κάθε $\lambda\in R$.

91. Θεωρούμε τα σημεία $A(\alpha,2)$ και $B(1,\alpha)$, όπου $\alpha\in R$. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου ε του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

92. Έστω η εξίσωση $(3\lambda^2-4\lambda+1)x+(3\lambda^2-7\lambda+2)y-6\lambda^2+11\lambda-3=0$ (1). i) Να δείξετε ότι, για κάθε αριθμό $\lambda\neq\frac{1}{3}$, η εξίσωση (1) παριστάνει μία ευθεία ε_λ. ii) Σε μία παραθαλάσσια περιοχή με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy, οι πορείες 10 πλοίων είναι οι ευθείες ε_λ, με $\lambda\in\{1,2,3,...,10\}$. α) Να δείξετε ότι οι πορείες και των 10 πλοίων διέρχονται από το ίδιο σημείο, στο οποίο βρίσκεται ένα λιμάνι. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του λιμανιού αυτού; β) Στο σημείο $(3,1)$ υπάρχει μια λαστιχένια σημαδούρα. Να εξετάσετε αν κάποιο από τα πλοία αυτά θα συγκρουστεί με τη σημαδούρα. γ) Μία βάρκα που κινείται ευθύγραμμα, κάποια στιγμή βρίσκεται στο σημείο $(1,8)$ και κάποια άλλη στιγμή βρίσκεται στο σημείο $(2,6)$. Να εξετάσετε αν κάποιο από τα 10 πλοία κινείται παράλληλα με τη βάρκα.

93. Θεωρούμε τα σημεία $A(4,0)$ και $B(0,3)$. Να βρείτε τα σημεία Μ της ευθείας $\varepsilon: y=2x+8$, για τα οποία το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ είναι 10 τετραγωνικές μονάδες.

94. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $B(1,2)$, του οποίου οι εξισώσεις του ύψους ΑΔ και της διαμέσου ΑΜ είναι $2x+y=16$ και $x+3y=23$ αντίστοιχα. Να βρείτε τις συντεταγμένε των Α και Γ.

95. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: x-2y+2=0$ και $\varepsilon_2: x-y-1=0$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ορίζει με τις $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ ισοσκελές τρίγωνο του οποίου οι ίσες πλευρές βρίσκονται πάνω στις ε_1 και ε_2.

96. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με εμβαδόν 8 τ. μ. και κορυφές $A(1,-2)$ και $B(2,3)$. Αν η κορυφή Γ είναι σημείο της ευθείας $2x+y-2=0$, να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ.

97. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): \alpha x+\beta y=1$ και $(\varepsilon_2): 2\beta x+(\alpha-\beta)y=-2$ με $\alpha,\beta\in R$, $\beta\neq 0$. i) Να μελετηθεί η θέση των ευθειών μεταξύ τους. ii) Στην περίπτωση που οι (ε_1) και (ε_2) τέμνονται, να δειχθεί ότι το σημείο τομής τους κινείται σε μια σταθερή ευθεία, έστω (δ).
iii) Αν οι (ε_1) και (ε_2) τέμνονται, τότε η (δ) διχοτομεί μια από τις γωνίες των (ε_1), (ε_2) αν και μόνο αν οι (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες. iv) Αν (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες, $\beta=\frac{3}{5}$ και ακόμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει διαγώνιες που βρίσκονται πάνω στις (ε_1), (ε_2) και εμβαδόν $20cm^2$, να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του και οι εξισώσεις των πλευρών του.

98. Δίνεται η εξίσωση: $x^2-y^2-4\mu x+2\mu y+3\mu^2=0$, $\mu\in R$ **α)** Να αποδειχτεί ότι παριστάνει δύο ευθείες κάθετες **β)** Αν Α το σημείο τομής των ευθειών να δείξετε ότι το Α κινείται στην ευθεία ε: $x-2y=0$ **γ)** να βρεθεί το σημείο της ευθείας (ε) που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο $B\left(\frac{5}{2},0\right)$.

99. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^2+y^2+2xy-4x-4y+3=0$ παριστάνει 2 ευθείες παράλληλες μεταξύ τους. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τετραπλεύρου που σχηματίζεται από τις παραπάνω ευθείες και τους άξονες

100. Δύο ευθείες με συντελεστές διεύθυνσης αντίθετους αριθμούς σχηματίζουν γωνία 60^o και τέμνονται στο σημείο $(0,\kappa)$, $\kappa\in\mathbb{R}$. Επίσης η ευθεία που έχει συντελεστή θετικό διέρχεται από το σημείο $(-3,0)$. Να βρεθούν : **i)**οι εξισώσεις των δύο ευθειών. **ii)** οι εξισώσεις των διχοτόμων των δυο γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες.

101. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ αν είναι $A(1,3)$ και $x-2y+1=0$, $y-1=0$ οι εξισώσεις των διαμέσων του

102. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ αν είναι γνωστή η κορυφή του $\Gamma(8,-2)$ και οι εξισώσεις της διχοτόμου του $A\Delta:3x+y-12=0$ και της διαμέσου του $AM:11x+6y-58=0$.

103. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ αν είναι $A(4,-1)$ και $x-y-1=0$, $x-1=0$ οι εξισώσεις των διχοτόμων δύο γωνιών του (εσωτερικές ή εξωτερικές).

104. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(3,-1)$ και ορθόκεντρο $H(4,-1)$. Η εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς ΑΒ είναι $x+4y=16$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου

105. Δίνονται οι εξισώσεις $3x-2y-5=0$ και $2x+3y+7=0$ των δύο πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου και η κορυφή του $A(-2,1)$. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου.

Ε 78 (2010)

106. Δίνονται τα σημεία $A(5,6)$ και $B(2t+1,t-3)$ με $t\in\mathbb{R}$.

α) Να δειχθεί ότι το μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ κινείται σε ευθεία.

β) Να βρεθεί η τιμή του $t\in\mathbb{R}$ ώστε η ευθεία ε να είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ.

107. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+2(2x+2y+xy)=5$.

α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, έστω $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$.

β) Να βρείτε την απόσταση των ευθειών.

γ) Να βρείτε μεσοπαράλληλη (ε) των ευθειών $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$.

δ) Αν το σημείο $P(\kappa,\lambda)$ κινείται στην ευθεία (ε_1) και το σημείο $\Sigma(\mu,\nu)$ κινείται στην (ε_2), να αποδείξετε ότι το σημείο $M\left(\frac{\kappa+\mu}{2}+1,\ \frac{\lambda+\nu}{2}-1\right)$ κινείται στην ευθεία (ε) και το εμβαδόν του τριγώνου παραμένει σταθερό. **Ε 60 (2006)**

108. Έστω $A(\lambda,\lambda+1)$, $B(\lambda+6,2\lambda+1)$, $\Gamma(\lambda+3\lambda)$.

α) Πότε τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά;

β) Αν ορίζουν τρίγωνο ΑΒΓ ποιο είναι το λ ώστε $(AB\Gamma)=12\tau.\mu.$;

γ) Ποιο είναι το λ ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο στο Α; **Ε 50 (2003)**

109. Να βρεθούν οι συμμετρικές ευθείες της ευθείας $2x+y-8=0$ ως προς: **α)** $x'x$, **β)** $y'y$, **γ)** $O(0,0)$, δ) $y=x$ (διχοτόμος $1^{ης}$-$3^{ης}$ γωνίας). **Ε 50 (2003)**

110. Αφού δειχθεί ότι η εξίσωση $x^2+y^2+2xy-4x-4y+3=0$ παριστάνει δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, να υπολογιστεί κατόπιν το εμβαδόν του τετραπλεύρου που σχηματίζεται από τις παραπάνω ευθείες και τους άξονες. **Ε 66 (2007)**

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ << Σωστό-Λάθος>>

1. Συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε) είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$ **Σ Λ**

2. Οι ευθείες με εξισώσεις $y=\frac{1}{|\lambda|}x$ και $y=-\lambda x$ είναι κάθετες για κάθε $\lambda\neq 0$ **Σ Λ**

3. Οι ευθείες $y=2x+1$ και $4x-2y+5=0$ είναι παράλληλες **Σ Λ**

4. Οι ευθείες $y=2$ και $y=2x$ είναι παράλληλες **Σ Λ**

5. Η ευθεία $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$ με $\alpha,\beta\neq 0$ τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(\alpha,0)$ και $B(0,\beta)$. **Σ Λ**

6. Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By-\Gamma=0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\delta=(B,-A)$. **Σ Λ**

7. Δύο ευθείες παράλληλες προς τα διανύσματα $\delta_1=(2,0)$ και $\delta_2=(0,-3)$ είναι κάθετες μεταξύ τους **Σ Λ**

8. Μια ευθεία κάθετη στο διάνυσμα $\delta=(\alpha,\beta),\beta\neq 0$ είναι η ευθεία $\beta y+\alpha x=3$ **Σ Λ**

9. Η ευθεία $y=\kappa^3x+1$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$ για κάθε $\kappa\geq 2$. **Σ Λ**

10. Η εξίσωση $xy=x$ παριστάνει μία μόνο ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου **Σ Λ**

11. Η εξίσωση $y=x+\beta$, $\beta\in\mathbb{R}$ παριστάνει οικογένεια ευθειών παράλληλων προς την ευθεία $y=x$. **Σ Λ**

12. Η συμμετρική της ευθείας $y=4x$ ως προς τον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση την $y=-4x+1$ **Σ Λ**

13. Όλες οι ευθείες της οικογένειας ευθειών : $(x+y+1)+\lambda(3x-2y-4)=0$ διέρχονται από το σημείο $(2,1)$. **Σ Λ**

14. Οι ευθείες $A_1x+B_1y+\Gamma=0$ και $A_2x+B_2y+\Gamma=0$ είναι κάθετες. Ισχύει $A_1A_2=B_1B_2$. **Σ Λ**

15. Η εξίσωση $y=|x|$ παριστάνει μία μόνο ημιευθεία. **Σ Λ**

16. Οι ευθείες $2x+3y-5=0$ και $4x+6y-10=0$ είναι παράλληλες. **Σ Λ**

17. Οι ευθείες $2x-3y=5$ και $y=\lambda x-\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$ δεν ταυτίζονται για καμμία τιμή του λ **Σ Λ**

18. Τα σημεία της ευθείας $y=3$ είναι της μορφής $(x,3)$. **Σ Λ**

19. Όταν $x=0$ η ευθεία είναι ο άξονας $x'x$. **Σ Λ**

20. Αν δύο ευθείες έχουν δύο κοινά σημεία ταυτίζονται **Σ Λ**

21. Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες με απόσταση μηδέν ταυτίζονται. **Σ Λ**

ΤΕΣΤ Β ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ

1ο

1. Να απαντήσετε με την λέξη ΣΩΣΤΟ η ΛΑΘΟΣ και με δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $A \neq B$ τότε η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει πάντοτε ευθεία.

β) Η ευθεία $x + 3 = 0$ είναι παράλληλη σον άξονα yy'.

2. Να γράψετε τον τύπο που δίνει την απόσταση σημείου $A(x_o, y_o)$ από ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$.

3. Να γράψετε τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο $A(2,0)$ και σχηματίζουν γωνία $\varphi = 30^0$.

2ο

1. Να απαντήσετε με την λέξη ΣΩΣΤΟ η ΛΑΘΟΣ και με δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας (ε) δίνεται μόνο από τον τύπο

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ x_1 \neq x_2$$

β) Η εξίσωση της ευθείας $(\lambda^2 + 1)x + 3y = 0$ διέρχεται από την αρχή τον αξόνων.

2. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\lambda^2 + 1)x - 2y = 3,\ \varepsilon_2 : 2x + (\lambda^2 + 1)y = 2$ τέμνονται κάθετα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

3 Να βρείτε την απόσταση των ευθειών $\varepsilon_1 : 2x + 3y = 0,\ 4x + +6y - 2 = 0$.

3ο

1. Να απαντήσετε με την λέξη ΣΩΣΤΟ η ΛΑΘΟΣ και με δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν δύο ευθείες έχουν τρία κοινά σημεία ταυτίζονται.

β) Αν $\varepsilon_1 : y = 2x + 3$ και $\varepsilon_2 : 4x - 2y + 1 = 0$ τότε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

2.Να αποδείξετε ότι αν $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ τότε η $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία.

3. Αν $A(2,3)$,$B(3,3)$,$\Gamma(1,4)$ να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.

4ο

1. Να απαντήσετε με την λέξη ΣΩΣΤΟ η ΛΑΘΟΣ και με δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Η εξίσωση $(\lambda^2 + 1)x + (\lambda^2 - 1)y - 2 = 0$ παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για κάθε ευθεία ε υπάρχει ένα μόνο διάνυσμα $\vec{\delta}$ τέτοιο ώστε $\vec{\delta} // \varepsilon$.

2. Να αποδείξετε : κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$ με $A\neq 0$ η $B\neq 0$.

3. Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών $\varepsilon_1: y=2x+1$ και $\varepsilon_2: y=-x-1$

5^ο^

1. Να απαντήσετε με την λέξη ΣΩΣΤΟ η ΛΑΘΟΣ και με δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες ισχύει μόνο $\lambda_1=\lambda_2$

β) Οι ευθείες $(\lambda^2+1)x+(\lambda^2-1)y+1-3\lambda^2=0$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

2.Να γράψετε όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο $A(1,-3)$

3.Να βρείτε την σχετική θέση των ευθειών $\varepsilon: 2x-y-1=0$ και $\zeta: 2x=y+2$ και να τις ζωγραφίσετε .

6^ο^

1. Να απαντήσετε με την λέξη ΣΩΣΤΟ η ΛΑΘΟΣ και με δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Δύο ευθείες είναι κάθετες αν και μόνο αν $\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$

β) Αν λύσω το σύστημα $y=\alpha x+\beta$ και $y=\gamma x+\delta$ βρίσκω τα κοινά σημεία των ευθειών.

2. Να γράψετε τις ειδικές περιπτώσεις ευθειών με συντελεστή λ.

3. Αν $A(2,3)$,$B(3,3)$,$\Gamma(1,4)$ να βρείτε το ύψος ΑΚ ,την διάμεσο ΒΜ και την μεσοκάθετη της ΑΓ.

7^ο^

1. Να απαντήσετε με την λέξη ΣΩΣΤΟ η ΛΑΘΟΣ και με δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν το σύστημα $y=\alpha x+\beta$ και $y=\gamma x+\delta$ έχει μία λύση οι ευθείες τέμνονται.

β) Αν $\varepsilon: y=2x+3$,$\zeta: 2x-3y+3=0$ τότε $\varepsilon//\zeta$.

2. Η ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$, $A\neq 0$ η $B\neq 0$ είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\delta=(B,-A)$. Απόδειξη

3. Αν $A(\lambda+3,\lambda-2)$ να βρείτε την ευθεία ε στην οποία ανήκει.

8^ο^

1. Να απαντήσετε με την λέξη ΣΩΣΤΟ η ΛΑΘΟΣ και με δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Η ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$, $B\neq 0$ τέμνει τον xx' στο $A\left(-\frac{\Gamma}{A},0\right)$.

β) Δύο ευθείες ταυτίζονται όταν έχουν ένα κοινό σημείο και ίδιο συντελεστή διεύθυνσης .

2. Ως συντελεστή διεύθυνσης ευθείας ε ορίζουμε…………

3. Αν $\varepsilon: (1-2\lambda)x+(4\lambda^2-1)y+3=0$ να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες παριστάνει ευθεία παράλληλη στην $\zeta: -x+(\lambda^2+1)y+1=0$.

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

$$y^2=2px$$

$$x^2+y^2=\rho^2$$

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

1. **α)** Όταν η άσκηση έχει κύκλο **τελειώνει** με προσδιορισμό του κέντρου και της ακτίνας.

β) Όταν η άσκηση έχει παραβολή **τελειώνει** με προσδιορισμό της εστίας και της διευθετούσας.

γ) Όταν η άσκηση έχει έλλειψη ή υπερβολή **τελειώνει** με προσδιορισμό των εστιών και του μεγάλου άξονα 2α.

2. Για να προσδιορίσω ένα κύκλο δηλ. να βρώ ακτίνα και κέντρο **προσέχω:**

α) Δύο σημεία του κύκλου δίνουν χορδή που στην μεσοκάθετη της ανήκει το κέντρο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να βρεθεί ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία $A(0,1)$ και $B(2,1)$ και το κέντρο του βρίσκεται στην ευθεία $y=x+1$.

ΛΥΣΗ ο συντελεστής διεύθυνσης της ΑΒ (χορδή) είναι $\lambda_{AB}=\dfrac{1-1}{2-0}=0$ τότε η μεσοκάθετη ε **ΔΕΝ** έχει συντελεστή **(κατακόρυφη)** και διέρχεται από το σημείο $M(\dfrac{0+2}{2},\dfrac{1+1}{2})=(1,1)$ άρα η εξίσωση της είναι $\varepsilon: x=1$. Το κέντρο του κύκλου βρίσκεται από την λύση του συστήματος της ε και της $y=x+1$. Άρα $x_\kappa=1, y_\kappa=2$ και η ακτίνα ρ θα βρεθεί από την απόσταση του κέντρου από το Α ή το Β, δηλ $\rho=\sqrt{(1-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$. Τελικά ο κύκλος έχει εξίσωση $C:(x-1)^2+(y-2)^2=2$.

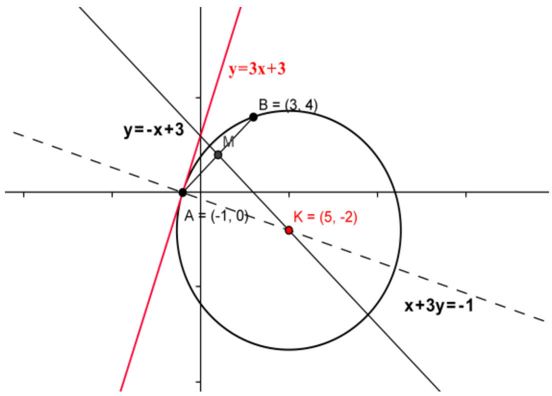
β) Αν διέρχεται από 3 σημεία (**περιγεγραμμένος κύκλος σε τρίγωνο**) αντικαθιστώ στην γενική εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ και λύνω σύστημα με αγνώστους Α,Β,Γ ή βρίσκω το κέντρο από το σημείο τομής δύο μεσοκαθέτων που ορίζονται από δύο πλευρές του τριγώνου και την ακτίνα από την απόσταση του από ένα σημείο .

πχ Να βρεθεί ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία $A(0,1)$, $B(2,3)$ και $\Gamma(0,3)$.

Αντικαθιστώντας στην γενική εξίσωση έχω το σύστημα

$$\Sigma:\ \begin{cases} 1+B+\Gamma=0 \\ 4+9+2A+3B+\Gamma=0 \\ 9+3B+\Gamma=0 \end{cases}$$

που έχει λύση $A=-2,\ B=-4,\ \Gamma=3$ και ό κύκλος εξίσωση την $x^2+y^2-2x-4y+3=0$ με κέντρο το $K(-\dfrac{A}{2},-\dfrac{B}{2})=(1,2)$ ακτίνα $\rho=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\sqrt{2}$.



γ) Αν δίνεται μία εφαπτόμενη του κύκλου τότε η κάθετη στο σημείο επαφής διέρχεται από το κέντρο του κύκλου .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου πού η χορδή του ΑΒ κόβει το κύκλο στα σημεία $A(-1,0)$ και $B(3,4)$ και η εφαπτόμενη του στο Α έχει εξίσωση $\varepsilon: x+3y=-1$.

ΛΥΣΗ

Η χορδή ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=1$ και το μέσο Μ έχει συντεταγμένες $M(1,2)$ τότε η εξίσωση της μεσοκάθετης ΚΜ έχει $\lambda=-1$ και είναι η

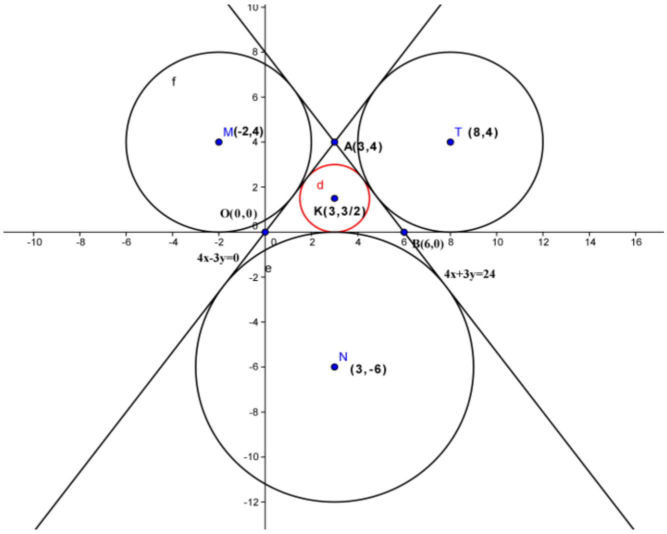
ΚΜ: $y-2=-1(x-1)\Leftrightarrow y=-x+3$. Η κάθετη στο Α είναι η ΑΚ:

$y-0=-\dfrac{1}{3}(x+1)\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}$. Το κέντρο Κ θα βρεθεί από τη λύση του συστήματος

$y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$ και $y=-x+3$, άρα $K(5,-2)$ και

$\rho=d(K,A)=\sqrt{(5+1)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{5}.$ Άρα $C:(x-5)^2+(y+2)^2=40.$

3. Αν ζητάει τον ***εγγεγραμμένο κύκλο*** τότε ισχύει $d(K,\varepsilon_1)=d(K,\varepsilon_2)=d(K,\varepsilon_3)=\rho,$ όπου Κ κέντρο και $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ οι πλευρές του τριγώνου που ορίζεται από αυτές.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Να βρεθεί ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου που οι πλευρές του είναι οι ευθείες $\varepsilon_1: 4x+3y=24$, $\varepsilon_2: 4x-3y=0$ και ο άξονας $x'x$.

ΛΥΣΗ : Ισχύει ότι

$$\rho=d(K,\varepsilon_1)=\frac{|4x_o+3y_0-24|}{\sqrt{4^2+3^2}} \quad \textbf{(1)}$$

και $\rho=d(K,\varepsilon_2)=\frac{|4x_o+3y_0|}{\sqrt{4^2+3^2}}$ **(2)**

και $\rho=d(K,\varepsilon_3)=|y_o|$ **(3)** (εξίσωση του $x'x: y=0$). Τότε οι 1,2,3 δίνουν τις εξισώσεις

$|4x_o-3y_o|=5\rho=|y_o|\Leftrightarrow x_o=2y_o(1\alpha)$ $|4x_o+3y_o-24|=5\rho=5|y_o|\Leftrightarrow 2x_o-y_o=12(2\alpha)$

ή $y_o=-2x_o(1\beta)$ ή $x_o+2y_o=6(2\beta).$

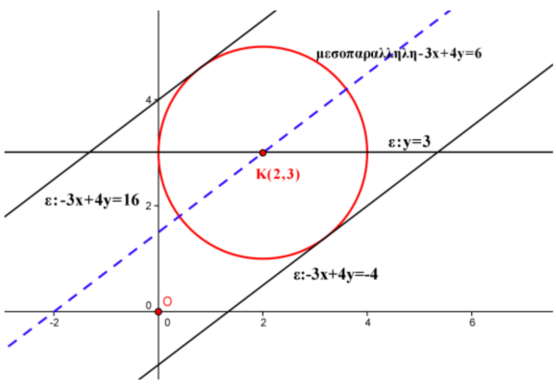
Από τα 4 συστήματα που φτιάχνω έχω 4 κύκλους

$C_1:(x-3)^2+(y-\frac{3}{2})^2=(\frac{3}{2})^2$, $C_2:(x-8)^2+(y-4)^2=4^2$, $C_3:(x-3)^2+(y+6)^2=6^2$ και

$C_4:(x+2)^2+(y-4)^2=4^2$ Από αυτούς ο ζητούμενος είναι ο C_3 διότι $0<x_o<6$ και $0<y_o<4$ αφού τα σημεία τομής των $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ είναι τα $O(0,0)$, $B(6,0)$ $A(3,4).$ Οι άλλοι κύκλοι είναι οι παραγεγραμμένοι του τριγώνου ΑΒΓ.

4) Αν ο κύκλος εφάπτεται στον $x'x$ τότε $\rho=|y_o|$ αντίστοιχα στο $y'y$ $\rho=|x_o|$ και στους δύο τότε $\rho=|x_o|=|y_o|$. ***πχ*** ο κύκλος που εφάπτεται στον Ox' και Oy και έχει ακτίνα 2 είναι $C:(x+2)^2+(y-2)^2=2^2$ διότι $2=|y_o|=y_o$ και $2=|x_o|=-x_o$.

5) Αν ο κύκλος εφάπτεται σε δύο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ τότε $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=2\rho$ και το κέντρο βρίσκεται στην μεσοπαράλληλη τους.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στις ευθείες $\varepsilon: 3x+16=4y$ και $\varepsilon: 3x-4y=4$ και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: y=3.$

ΛΥΣΗ Η απόσταση των παραλλήλων ευθειών $y=\frac{3}{4}x+4$ και $y=\frac{3}{4}x-1$ δίνεται από το τύπο $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\frac{|4+1|}{\sqrt{1+(\frac{3}{4})^2}}=4=2\rho$ Για το κέντρο του κύκλου $K(x_o,y_o)$ ισχύει

$$\frac{|3x_o-4y_o+16|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|3x_o-4y_o-4|}{\sqrt{9+16}}\Leftrightarrow\textbf{.......}3x_o-4y_o+6=0\ (1)$$ και $y_o=3$ άρα $\mathbf{K(2,3)}$ και εξίσωση $C:(x-2)^2+(y-3)^2=2^2$.

6) Για να βρω **εφαπτόμενη** **γενικά** μιας κωνικής προσέχω :
α) Αν το δοσμένο σημείο ανήκει στην κωνική (θυμήσου **επαληθεύει**) τότε έχω τύπους ανάλογα την κωνική $xx_1+yy_1=\rho^2$ ή $yy_1=p(x+x_1)$ κλπ. **Το σημείο που μας έδωσαν είναι το** (x_1,y_1) **.**Οι τύποι των εφαπτόμενων αναφέρονται σε κωνικές που δεν έχουμε μεταφορά αξόνων **πχ κύκλος κέντρου** $(0,0)$ **, παραβολή με κορυφή** $(0,0)$ **κλπ.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Δίνεται η παραβολή $y^2=4x$ και το σημείο $A(1,2)$.Να αποδείξετε ότι το A ανήκει στην παραβολή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο A.

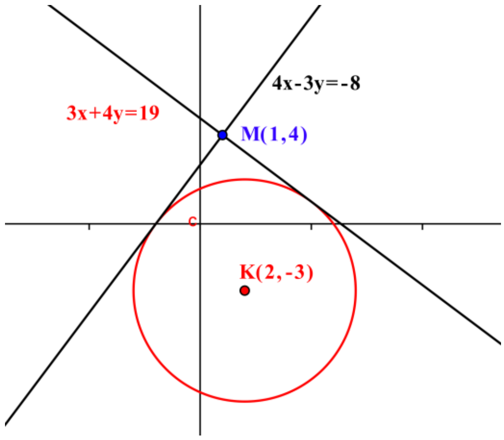
ΛΥΣΗ Επειδή $2^2=4\cdot1$ το A ανήκει στην παραβολή και είναι επομένως το σημείο επαφής. Άρα παίρνω τον τύπο της εφαπτομένης της παραβολής $yy_1=2(x+x_1)$ και αντικαθιστώ όπου $x_1=1,\ y_1=2$ και έχω $2y=2(x+1)$.

β) Αν δεν ανήκει τότε το σύστημα κωνικής και της ευθείας $y=\lambda x+\kappa$ βρίσκει το λ αφού απαιτήσω Δ=0, δεν ξεχνάω την ευθεία $x=\alpha$ δηλ να εξετάσω αν είναι εφαπτόμενη.

ΕΙΔΙΚΑ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ ΕΧΩ:

7) Για την εφαπτομένη κύκλου κέντρου $K(x_0,y_0)$ ακτίνας ρ, που διέρχεται από γνωστό σημείο (α,β) παίρνω τις ευθείες $x=\alpha$ και $y-\beta=\lambda(x-\alpha)$. Αν η $x=\alpha$ έχει απόσταση ρ από το κέντρο $K(x_0,y_0)$ είναι λύση. Για την ευθεία $\varepsilon:y-\beta=\lambda(x-\alpha)$ απαιτώ η $d(K,\varepsilon)=\rho$ και βρίσκω το λ **ή** το σύστημα ευθείας και κύκλου με συνθήκη Δ=0 βρίσκει το λ όπως παραπάνω με **πιο σύνθετες πράξεις** .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ και το σημείο $\mathbf{M(1,4)}$ να βρεθούν οι εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το M.



ΛΥΣΗ Πρώτα παρατηρώ ότι το M δεν ανήκει στον κύκλο διότι δεν επαληθεύει την εξίσωση του $1^2+4^2-4\cdot1+6\cdot4-12=25\neq0$, οι ευθείες που διέρχονται από το M είναι οι : $x=1$ (1) και οι ευθείες με εξίσωση της μορφής $y-4=\lambda(x-1)$ (2).
Ο κύκλος έχει ακτίνα $\rho=5$ και κέντρο $\mathbf{K(2,-3)}$ Η ευθεία $x=1$ (1) απέχει $d=1\neq\rho=5$ άρα δεν είναι εφαπτόμενη του κύκλου
Για τις ευθείες της μορφής (2) θα δώσουμε και τους δύο τρόπους.

α) $$d(K,\varepsilon)=\frac{|\lambda\cdot2+3-\lambda+4|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=5=\rho\quad\Leftrightarrow$$

$|\lambda+7|=5\sqrt{\lambda^2+1}\Leftrightarrow$ **......**$12\lambda^2-7\lambda-12=0$ άρα $\lambda=\frac{4}{3}$ και $\lambda=-\frac{3}{4}$ δηλ έχω δύο εφαπτόμενες τις $\varepsilon_1:y-4=\frac{4}{3}(x-1)$ και $\varepsilon_2:y-4=-\frac{3}{4}(x-1)$ (πάντα έχω **2** εφαπτόμενες από σημείο εκτός)

β) $C:(x-2)^2+(y+3)^2=5^2$ και $y-4=\lambda(x-1)\Leftrightarrow y=\lambda x-\lambda+4$ δίνει εξίσωση $(x-2)^2+(\lambda x-\lambda+7)^2=5^2 \Leftrightarrow$ **......**$(1+\lambda^2)x^2+2(7\lambda-\lambda^2-2)x+\lambda^2-14\lambda+28=0$

με $\Delta=0$ **δηλ** $\Delta=4(7\lambda-\lambda^2-2)-4(1+\lambda^2)(\lambda^2-14\lambda+28)=0 \Leftrightarrow$ **.........**$12\lambda^2-7\lambda-12=0$

άρα $\lambda=\frac{4}{3}$ και $\lambda=-\frac{3}{4}$ …………………..

8) Αν γενικά μας δίνουν με κάποιο τρόπο τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης **πχ** «$\lambda=..,$» «παράλληλη στην... » ,«κάθετη στην......» , « σχηματίζει γωνία ....» και η κωνική είναι κορυφής $O(0,0)$ ή κέντρου $O(0,0)$ μπορώ να βρω και το σημείο επαφής και την εξίσωση της εφαπτομένης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Δίνεται ο κύκλος $C: x^2+y^2=4$. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες του κύκλου που σχηματίζουν με τον $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{6}$.

ΛΥΣΗ Έστω (x_1,y_1) το σημείο επαφής τότε $x_1^2+y_1^2=4.$ (1) και η εφαπτόμενη έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=4.$ (2) Από την εξίσωση (2) έχω $\lambda=-\frac{x_1}{y_1}$ που από την υπόθεση είναι ίσο με την $\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ δηλαδή έχω το σύστημα $\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{x_1}{y_1}$ και $x_1^2+y_1^2=4 \Rightarrow x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}y_1$ και με αντικατάσταση $(-\frac{\sqrt{3}}{3}y_1)^2+y_1^2=4 \Rightarrow ......\frac{12}{9}y_1^2=4 \Rightarrow y_1^2=3 \Rightarrow y_1=\sqrt{3}$ ή $y_1=-\sqrt{3}$ τότε $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{3}=-1$ και $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(-\sqrt{3})=1$ άρα έχω 2 σημεία επαφής δηλαδή δύο εφαπτόμενες, τις $\varepsilon_1: x-\sqrt{3}y=4$ και $\varepsilon_2: -x+\sqrt{3}y=4.$

Άλλος τρόπος θα ήταν να γράψω την ευθεία στην μορφή $y=\lambda x+\kappa$ με $\lambda=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ και να πάρω την απόσταση από το κέντρο του κύκλου να είναι ίση με 4 έτσι βρίσκω το κ **ή** να αντικαταστήσω στην εξίσωση του κύκλου , να φτιάξω εξίσωση 2ου βαθμού και να ζητήσω Δ=0 και πάλι να βρω τον κ. Η απόσταση ίση με ακτίνα ισχύει προφανώς μόνο για κύκλο .Ακόμα παρατηρήστε ότι έτσι **δεν βρίσκω τα σημεία επαφής.**

Αν στο παραπάνω παράδειγμα αντί να μας δίνει πληροφορίες για τον συντελεστή μας έδινε ότι διέρχεται από το σημείο $B(3,0)$ τότε στην (2) αντικαθιστώ και έχω $3x_1+0y_1=4$ βρίσκω πάλι το σημείο επαφής κλπ . (ΠΡΟΣΟΧΗ ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΩ ΣΤΟ Χ ΚΑΙ Υ)

9) Για την εφαπτομένη κύκλου κέντρου $K(x_0,y_0)$ με σημείο επαφής το $\Lambda(x_1,y_1)$ παίρνω $M(x,y)$ τυχαίο σημείο της εφαπτομένης και ισχύει $\overrightarrow{K\Lambda}\cdot\overrightarrow{M\Lambda}=0$.Παίρνω πάλι το ίδιο παράδειγμα δηλ ο κύκλος

$C: x^2+y^2=4$ και σημείο το $A(1,\sqrt{3})$ που είναι σημείο επαφής Τότε έχω κέντρο $K(0,0)$ και

$\overrightarrow{KA}=(1-0,\sqrt{3}-0)=(1,\sqrt{3})$ και $\overrightarrow{AM}=(x-1,y-\sqrt{3})$ και

$\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{AM}=0 \Rightarrow 1(x-1)+\sqrt{3}(y-\sqrt{3})=0 \Rightarrow x-1+\sqrt{3}y-3=0 \Rightarrow x+\sqrt{3}y=4.$ **ή** αν δοθεί

$B(3,0)\notin C$ τότε πάλι σημείο επαφής $A(x_1,y_1)$ με $x_1^2+y_1^2=4$ και

$\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow (x_1,y_1)\cdot(3-x_1,0-y_1)=0$ δίνει τα x_1,y_1 κλπ.

10) Αν ένα σημείο ανήκει σε μια γραμμή πάντοτε την επαληθεύει δηλαδή αν (x_0,y_0) ανήκει στη $C: x^2+y^2=1$ τότε $x_0^2+y_0^2=1$.

11) Όταν **αντικαθιστώ σε μία εξίσωση γραμμής** προσέχω να αντικαθιστώ το **τυχαίο σημείο** στα x,y ενώ το **κέντρο κύκλου** στα x_0,y_0 **τα σημεία επαφής** στα x_1,y_1 όπως τα βλέπω στους τύπους.

12) Δύο ευθείες συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$ έχουν αντίθετα y δηλ οι ευθείες $\varepsilon: 2x-3y+5=0$ και $\varepsilon': 2x+3y+5=0$ αντίστοιχα ως προς τον $y'y$ οι $\varepsilon: 2x-3y+5=0$ και $\varepsilon': -2x-3y+5=0$

13) Δύο κύκλοι είναι συμμετρικοί ως προς την αρχή των αξόνων όταν οι συντεταγμένες των κέντρων τους είναι αντίθετοι αριθμοί και έχουν ίδια ακτίνα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Να βρεθεί ο συμμετρικός κύκλος του κύκλου $C_1:(x-4)^2+(y+3)^2=1$ ως προς την αρχή των αξόνων.

ΛΥΣΗ Θέτω όπου x το $-x$ και όπου y το $-y$ τότε $C_2:(-x-4)^2+(-y+3)^2=1$ άρα $C_2:(x+4)^2+(y-3)^2=1$

14) Για να αποδείξω ότι μία παραμετρική εξίσωση ως προς x^2 και y^2 παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή της παράμετρου αρκεί $A^2+B^2-4\Gamma>0$ όπου Α συντελεστής του x, Β συντελεστής του y και Γ ο σταθερός όρος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις: i) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(1,\sqrt{3})$. ii) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(\alpha-\beta,\alpha+\beta)$. iii) Όταν εφάπτεται της ευθείας $x-y=2$.
iv) Όταν εφάπτεται της ευθείας $\alpha x+\beta y=\alpha^2+\beta^2$.

2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2+y^2=5$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις: i) Όταν είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x+3$. ii) Όταν είναι κάθετη στην ευθεία iii) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(5,0)$.

3. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες του κύκλου $x^2+y^2=2$ στα σημεία $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $\Gamma(-1,-1)$ και $\Delta(1,-1)$ σχηματίζουν τετράγωνο με διαγώνιες τους άξονες x΄x και y΄y. Ποιο είναι το εμβαδόν του τετραγώνου αυτού;

4. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου $x^2+y^2=4$, που έχει μέσο το σημείο $M(1,-1)$.

5. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
i) Όταν έχει κέντρο το σημείο $K(0,1)$ και διέρχεται από το σημείο $A(\sqrt{3},0)$.
ii) Όταν έχει διάμετρο το τμήμα με άκρα $A(-1,2)$ και $B(7,8)$.
iii) Όταν έχει ακτίνα $\rho=5$ και τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $A(1,0)$ και $B(7,0)$.
iv) Όταν διέρχεται από τα σημεία $A(4,0)$ και $B(8,0)$ και έχει το κέντρο του στην ευθεία $y=x$.
v) Όταν τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $A(4,0)$ και $B(8,0)$ και τον άξονα y΄y στα σημεία $\Gamma(0,-2)$ και $\Delta(0,\mu)$.
vi) Όταν εφάπτεται του άξονα x΄x στο σημείο $A(3,0)$ και διέρχεται από το σημείο
vii) Όταν διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της ευθείας $3x+4y=12$ στο σημείο $A(0,3)$.

6. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που έχει εξίσωση:
i) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$, ii) $x^2+y^2-10x+12y-20=0$,
iii) $3x^2+3y^2+6x-9y+1=0$, iv) $x^2+y^2-4\alpha x+10\beta y+4\alpha^2+16\beta^2=0$.

7. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου:
i) $x^2+y^2-2x+4y+4=0$ στο σημείο του $A(1,-1)$,
ii) $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2-3\beta^2=0$ στο σημείο του $A(\alpha,-\beta)$.

8. Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων $C_1:x^2+y^2=1$ και $C_2:(x-1)^2+y^2=4$.

9. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x-\alpha)(x-\beta)+(y-\gamma)(y-\delta)=0$ παριστάνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τετραπλεύρου με κορυφές τα σημεία $A(\alpha,\gamma)$, $B(\beta,\gamma)$, $\Gamma(\beta,\delta)$, $\Delta(\alpha,\delta)$ και ότι οι ΑΓ και ΒΔ είναι διάμετροι αυτού του κύκλου.

10. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x\sigma\upsilon\nu\varphi + y\eta\mu\varphi = 4\eta\mu\varphi - 2\sigma\upsilon\nu\varphi + 4$ εφάπτεται του κύκλου $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$.

11. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $2\sqrt{2}$.
β) Έχει κέντρο το σημείο $(3,-1)$ και ακτίνα 5.
γ) Έχει κέντρο το σημείο $(-2,1)$ και διέρχεται από το σημείο $(-2,3)$.
δ) Έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με $A(1,3)$ και $B(-3,5)$.
ε) Διέρχεται από τα σημεία $(2,1)$, $(1,2)$ και $(\frac{\sqrt{15}}{2},\frac{1}{2})$.
στ) Διέρχεται από τα σημεία $(3,1)$ και $(-1,3)$ και έχει κέντρο πάνω στην ευθεία $y = 3x - 2$.
ζ) Έχει κέντρο το σημείο $(8,-6)$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
η) Έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της ευθείας $3x + y = 10$.
θ) Έχει ακτίνα 4, εφάπτεται στον άξονα x΄x και διέρχεται από το σημείο $(5,4)$.
ι) Έχει κέντρο το σημείο $(-3,2)$, εφάπτεται στον άξονα y΄y.
ια) Έχει κέντρο το σημείο $(3,3)$ και εφάπτεται των αξόνων x΄x και y΄y.
ιβ) Έχει κέντρο το σημείο $(-3,1)$ και εφάπτεται στην ευθεία $4x - 3y + 5 = 0$.

12. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon: 2x - y + 4 = 0$ στο σημείο $A(3,10)$ και διέρχεται από το σημείο $B(7,2)$

13. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, ο οποίος είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο που σχηματίζει η ευθεία $x + y - 6 = 0$ με τους άξονες x΄x και y΄y.

14. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το κέντρο του κύκλου $x^2 - 2x + y^2 - 6y = 0$ και είναι κάθετη στην ευθεία $x + 2y - 7 = 0$.

15. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$, που είναι παράλληλες στην ευθεία $x + y = 0$.

16. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στην ευθεία $y = x$ και είναι ομόκεντρος του κύκλου $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

17. Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(2,4)$ και $\Gamma(3,1)$. **α)** Να αποδειχθεί ότι η $B\hat{A}\Gamma = 90^o$. **β)** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ.

18. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ και η ευθεία $y = x - 3$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία εφάπτεται του κύκλου και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής.

19. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(3\alpha,0)$, $B(0,3\alpha)$ και $\Gamma(0,-3\alpha)$, $\alpha > 0$.

20. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x\sigma\upsilon\nu\theta - 2y\eta\mu\theta - 1 = 0$, $0 \le \theta < 2\pi$. **α)** Να αποδείξετε ότι για κάθε θ η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα. **β)** Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο $M(1,2)$.
γ) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$. **(ΘΕΜΑ 2002)**

21. **Α.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$, όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή των μ, λ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
Β. Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς μ, λ ισχύει η σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$. α) Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$ για τις διάφορες τιμές των μ και λ, έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
β) Να βρείτε τα μ, λ έτσι ώστε, αν Α, Β είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την

ευθεία $x+y+2=0$, να ισχύει $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$. **γ)** Για τις τιμές των μ, λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ. **(ΘΕΜΑ 2001)**

22. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα x΄x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις: **α)** Όταν έχει εστία το σημείο $E(-1,0)$. **β)** Όταν έχει διευθετούσα την ευθεία $x=\frac{1}{2}$.
γ) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.

23. Να βρεθεί η εστία και η διευθετούσα της παραβολής με εξίσωση: **α)** $y^2=8x$,
β) $y^2=-8x$, **γ)** $y=\frac{1}{4}x^2$, **δ)** $y=-\frac{1}{4}x^2$, **ε)** $y^2=4\alpha x$, **στ)** $y=\frac{1}{4\alpha}x^2$.

24. Δίνεται η παραβολή $y^2=2px$. Να αποδειχθεί ότι η κορυφή της παραβολής είναι το πλησιέστερο στην εστία σημείο της.

25. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β της παραβολής $y=\frac{1}{4}x^2$, που έχουν την ίδια τεταγμένη και ισχύει $AOB=90^o$.

26. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y=\frac{1}{4}x^2$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις**: α)** Όταν είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x+1$.
β) Όταν είναι κάθετη στην ευθεία $y=-2x$. **γ)** Όταν διέρχεται από το σημείο $A(0,-1)$.

27. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της παραβολής $y=\frac{1}{4}x^2$ στα σημεία $A(4,4)$ και $B(-1,\frac{1}{4})$ τέμνονται κάθετα και πάνω στη διευθετούσα της.

28. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος $(x-3)^2+y^2=8$ εφάπτεται της παραβολής $y^2=4x$. (Δηλαδή, έχουν τις ίδιες εφαπτόμενες στα κοινά σημεία τους).

29. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το $(0,0)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:
α) είναι συμμετρική ως προς το θετικό ημιάξονα Οx και έχει παράμετρο $p=5$,
β) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Οx και διέρχεται από το σημείο $(-1,4)$,
γ) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Οy και διέρχεται από το σημείο
δ) έχει άξονα συμμετρίας τον Οy και εστία $E(0,-4)$,
ε) έχει εστία $E(-2,0)$ και διευθετούσα $\delta: x-2=0$,
στ) έχει άξονα συμμετρίας τον Οx και εφάπτεται της ευθείας $y=4x+1$.

30. Έστω η παραβολή $y^2=12x$. Αν η εφαπτόμενη της παραβολής στο σημείο $A(1,2\sqrt{3})$ τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Β, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΕΑΒ είναι ισόπλευρο.

31. Έστω η παραβολή $y^2=4x$. Αν η εφαπτόμενη της παραβολής στο σημείο $A(3,2\sqrt{3})$ τέμνει τη διευθετούσα στο σημείο Β, να αποδειχθεί ότι ο κύκλος με διάμετρο ΑΒ εφάπτεται στον άξονα x΄x στην εστία της παραβολής.

32. Από το σημείο $(-2,3)$ προς την παραβολή $y^2=8x$ γράφονται δύο εφαπτόμενες ευθείες. α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων αυτών ευθειών. β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές ευθείες είναι κάθετες.

33. Έστω η παραβολή $y^2=4px$, $p>0$. Μια χορδή της ΑΒ είναι κάθετη στον άξονα και έχει μήκος 8p. Να αποδειχθεί ότι $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.

34. Ισόπλευρο τρίγωνο ΟΑΒ είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $y^2=4px$ με κορυφή το Ο. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

35. Έστω η παραβολή $y^2=2px$ και μια χορδή της ΑΒ παράλληλη με τον άξονα y΄y, η οποία περνάει από την εστία. Να αποδειχθεί ότι: **α)** $(AB)=2(EK)$, όπου Κ το σημείο που τέμνει ο άξονας x΄x τη διευθετούσα. **β)** οι εφαπτόμενες στα Α και Β διέρχονται από το Κ.

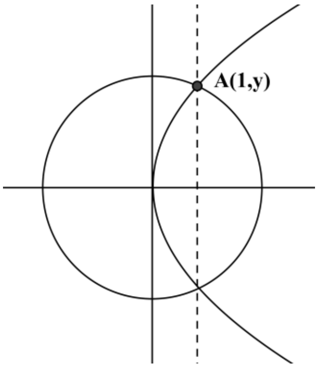
36. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$ και δύο χορδές ΟΒ, ΟΓ, ώστε να είναι $B\hat{O}\Gamma = 90^o$. Να αποδειχθεί ότι η ΒΓ διέρχεται από σταθερό σημείο.

37. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και η ευθεία $\varepsilon : y = x - 1$.
α) Να δείξετε ότι η (ε) περνά από την εστία της παραβολής.
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία Α, Β της (ε) και της παραβολής.
γ) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία Α, Β είναι κάθετες.
δ) Να δείξετε ότι κάθε ευθεία που περνά από την εστία και τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία έχει την ιδιότητα γ.

38. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$. Θέτουμε $x' = \alpha x$ και $y' = \alpha y$, $\alpha \neq 0$. Να αποδειχθεί ότι το σημείο (x', y') κινείται πάλι σε παραβολή.

39. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $(x, y) = (2\rho\kappa^2, 2\rho\kappa)$ με $\kappa \in R$. **α)** Να αποδειχθεί ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε μια παραβολή. **β)** Αν $A(2\rho\kappa_1^2, 2\rho\kappa_1)$, $B(2\rho\kappa_2^2, 2\rho\kappa_2)$ είναι δύο σημεία της παραβολής αυτής, να αποδειχθεί ότι αν η ΑΒ διέρχεται από την εστία, είναι $4\kappa_1\kappa_2 = -1$.

40. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Να βρείτε: Α. Την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής. Β. Τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Γ. Την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία **(ΘΕΜΑ 2002)**



41. Ο κύκλος του διπλανού σχήματος διέρχεται από την εστία της παραβολής. Να βρεθούν οι εξισώσεις του κύκλου και της παραβολής.

42. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
i) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$ και μεγάλο άξονα 10.
ii) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0,-5)$ και $E(0,5)$ και μεγάλο άξονα 26.
iii) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-12,0)$ και $E(12,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{12}{13}$.
iv) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M(4, \frac{9}{5})$.
v) Όταν έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, εστίες στον άξονα x΄x και διέρχεται από τα σημεία $M_1(1,1)$ και $M_2(2, \frac{1}{2})$.

43. Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα των ελλείψεων:
i) $x^2 + 4y^2 = 4$ ii) $169x^2 + 144y^2 = 24336$.

44. Να εγγράψετε στην έλλειψη $4x^2 + y^2 = 4$ τετράγωνο με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες.

45. Αν Ε΄, Ε είναι οι εστίες και Β΄Β ο μικρός άξονας της έλλειψης $x^2 + 2y^2 = 4$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΒ΄Ε΄ είναι τετράγωνο.

46. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες μιας έλλειψης στα άκρα μιας διαμέτρου της είναι παράλληλες. (Διάμετρος μιας έλλειψης λέγεται το τμήμα που συνδέει δύο σημεία της έλλειψης και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

47. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $3x^2+y^2=4$, οι οποίες: **α)** Είναι παράλληλες προς την ευθεία $y=-3x+1$. **β)** Είναι κάθετες στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x$. γ) Διέρχονται από το σημείο $M(0,4)$.

48. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της έλλειψης $x^2+4y^2=100$ στα σημεία της $M_1(4\sqrt{5},\sqrt{5})$, $M_2(-4\sqrt{5},\sqrt{5})$, $M_3(-4\sqrt{5},-\sqrt{5})$ και $M_4(4\sqrt{5},-\sqrt{5})$ σχηματίζουν τετράγωνο με διαγώνιες τους άξονες x΄x και y΄y .

49. Να αποδείξετε ότι το σημείο $M\left(\frac{\alpha(1-t^2)}{1+t^2},\frac{2\beta t}{1+t^2}\right)$ ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, για όλες τις τιμές του $t\in R$.

50. Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ευθειών $\alpha y=\lambda\beta(\alpha+x)$ και $\lambda\alpha y=\beta(\alpha-x)$, $0<\beta<\alpha$, ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, για όλες τις τιμές του $\lambda\in R^*$.

51. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
i) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-13,0)$, $E(13,0)$ και κορυφές τα σημεία $A(5,0)$ και $A'(-5,0)$.
ii) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0,-10)$, $E(0,10)$ και εκκεντρότητα $\frac{5}{3}$.
iii) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-\sqrt{5},0)$, $E(\sqrt{5},0)$ και διέρχεται από το σημείο
iv) Όταν έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y=\frac{4}{3}x$ και $y=-\frac{4}{3}x$ και διέρχεται από το σημείο $M(3\sqrt{2},4)$.

52. Να βρείτε τις εστίες, την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες της υπερβολής:
i) $9x^2-16y^2=144$, ii) $x^2-y^2=4$, iii) $144x^2-25y^2=3600$.

53. Να βρείτε την εκκεντρότητα της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, της οποίας η ασύμπτωτη $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 30^o.

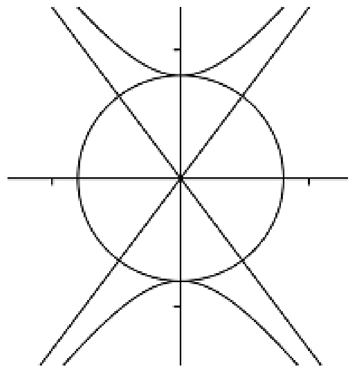
54. Αν η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στην κορυφή $A(\alpha,0)$ τέμνει την ασύμπτωτη $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ στο σημείο Γ, να αποδείξετε ότι $(OE)=(O\Gamma)$.

55. Έστω η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, ε η εφαπτομένη της σε ένα σημείο $M_1(x_1,y_1)$ και ζ η κάθετη της ε στο M_1. Αν η ε διέρχεται από το σημείο $M_2(0,-\beta)$ και η ζ από το σημείο $M_3(2\alpha\sqrt{2},0)$, να αποδείξετε ότι η εκκεντρότητα της υπερβολής είναι ίση με $\sqrt{2}$.

56. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία που είναι παράλληλη προς μια από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ τέμνει την υπερβολή σε ένα μόνο σημείο. Ποιο είναι το σημείο τομής της ευθείας $2x-y=1$ και της υπερβολής $4x^2-y^2=1$;

57. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $x^2-4y^2=12$ οι οποίες:
i) είναι παράλληλες προς την ευθεία $y=x+1$, ii) είναι κάθετες στην ευθεία $y=-\frac{4}{\sqrt{3}}x$,
iii) διέρχονται από το σημείο $M(3,0)$.

58. Αν E_1 είναι η προβολή της εστίας Ε της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ πάνω στην ασύμπτωτη $y=\frac{\beta}{\alpha}x$, να αποδείξετε ότι: **α)** $(OE_1)=\alpha$,
β) $(EE_1)=\beta$.



59. Ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=16$ διέρχεται από τις κορυφές της υπερβολής C του διπλανού σχήματος, της οποίας η μία ασύμπτωτη έχει εξίσωση $y=-\frac{4}{3}x$. Να βρεθούν:
α) οι εστίες της υπερβολής,
β) η εστιακή της απόσταση,
γ) η εξίσωση της,
δ) να προσδιοριστεί το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής,
ε) η εκκεντρότητα της.

60. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις εστίες της στον άξονα x΄x συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων και ακόμα: **α)** έχει εστιακή απόσταση $(EE')=6$ και εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{3}{2}$, **β)** έχει εστιακή απόσταση $(EE')=20$ και εξισώσεις ασυμπτώτων $y=\frac{4}{3}x$ και $y=-\frac{4}{3}x$, **γ)** έχει εστιακή απόσταση $(EE')=4$ και ασύμπτωτες τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων.

61. Δίνονται η παραβολή $y^2=2px$ και η έλλειψη $4x^2+2y^2=3p^2$, $p>0$. **Α**. Να αποδείξετε ότι οι εστίες Ε και Ε΄ της έλλειψης είναι τα σημεία $E(0,\frac{\sqrt{3}p}{2})$ και $E'(0,-\frac{\sqrt{3}p}{2})$.

Β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής Κ και Λ των δύο κωνικών τομών είναι τα σημεία $K(\frac{p}{2},p)$ και $\Lambda(\frac{p}{2},-p)$.

Γ. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των δύο κωνικών τομών στο σημείο $K(\frac{p}{2},p)$ είναι κάθετες. **(ΘΕΜΑ 2003)**

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ
2ο Πέρασμα

62. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο $(1,0)$ και εφάπτεται στις ευθείες $3x+y+6=0$ και $3x+y-12=0$.

63. Από ένα σημείο $M_0(x_0,y_0)$ εκτός του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ φέρνουμε τις δύο εφαπτόμενες του. Αν M_1,M_2 είναι τα σημεία επαφής, να αποδείξετε ότι η χορδή M_1M_2 έχει εξίσωση $xx_0+yy_0=\rho^2$.

64. Έστω C ο κύκλος που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το σημείο $A(3\alpha,0)$. Αν Μ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του C που δεν βρίσκεται στον άξονα x΄x, να αποδείξετε ότι το κέντρο βάρους G του τριγώνου ΟΑΜ ανήκει στον κύκλο $(x-\alpha)^2+y^2=\alpha^2$.

65. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, από τα οποία οι εφαπτόμενες προς τον κύκλο $x^2+y^2=\rho^2$ είναι κάθετες.

66. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα σημεία $A(-3,0)$ και $B(3,0)$ είναι σταθερός και ίσος με 2.

67. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, των οποίων το τετράγωνο της απόστασης από την αρχή των αξόνων είναι ίσο με το τετραπλάσιο της απόστασης από την ευθεία $x=1$.

68. Έστω το τρίγωνο με κορυφές $A(3,5)$, $B(2,-4)$ και $\Gamma(-5,-1)$. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ, για τα οποία ισχύει $MA^2+MB^2+M\Gamma^2=107$, είναι κύκλος με κέντρο το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ.

69. Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ευθειών $x\sigma\upsilon\nu\theta+y\eta\mu\theta=\alpha$ και $x\eta\mu\theta-y\sigma\upsilon\nu\theta=\beta$ ανήκει στον κύκλο $x^2+y^2=\alpha^2+\beta^2$, για όλες τις τιμές του $\theta\in[0,2\pi)$.

70. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου $x^2+y^2=25$, που διέρχονται από το σημείο $A(2,4)$.

71. Δίνεται η ευθεία $y=\lambda x$ και ο κύκλος $x^2+y^2-4x+1=0$. Να βρεθεί η τιμή του λ, ώστε η ευθεία: **α)** να τέμνει τον κύκλο, **β)** να εφάπτεται του κύκλου, **γ)** να μην έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.

72. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^2+y^2+\lambda x=0$ παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in R^*$. Να βρεθεί η γραμμή πάνω στην οποία βρίσκονται τα κέντρα αυτών των κύκλων.

73. Θεωρούμε τον κύκλο $x^2+y^2+4y=0$ και το σημείο $A(-1,-1)$. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που ορίζει στον κύκλο χορδή, με μέσο το σημείο Α.

74. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου που ικανοποιούν τις εξισώσεις $x\sigma\upsilon\nu\theta-y\eta\mu\theta=\sigma\upsilon\nu2\theta$ και $x\eta\mu\theta+y\sigma\upsilon\nu\theta=\eta\mu2\theta$, $\theta\in R$, βρίσκονται σε κύκλο.

75. Δίνεται το σημείο $M(1,4)$ και ο κύκλος $x^2+y^2-4x+6y-12=0$. α) Να δειχθεί ότι το Μ είναι εξωτερικό του κύκλου. β) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που διέρχονται από το Μ.

76. **α)** Για ποιες τιμές του $\alpha\in R$, η εξίσωση $x^2+y^2-\alpha x+9=0$ παριστάνει κύκλο; **β)** Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου του κύκλου;

77. Δίνεται ο κύκλος $(x+2)^2+(y-3)^2=4$ και η ευθεία $3x+4y+\lambda=0$, $\lambda\in R$. **α)** Να βρεθεί ο λ ώστε η ευθεία να εφάπτεται του κύκλου. **β)** Για τη θετική τιμή του λ, να βρεθεί το σημείο επαφής της ευθείας με τον κύκλο.

78. Να βρεθεί η εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $K(3,1)$, $\Lambda(1,1)$, $M(-2,-4)$.

79. Δίνονται η ευθεία $5x+3y+2=0$ και ο κύκλος $x^2+y^2-x-2=0$. **α)** Να βρεθεί η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία. **β)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in R$ η εξίσωση $x^2+y^2-x-2+\lambda(5x+3y+2)=0$ παριστάνει κύκλο. Για ποια τιμή του $\lambda\in R$, ο κύκλος αυτός διέρχεται από την αρχή των αξόνων; Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων αυτών.

80. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι $(x-1)^2+(y+5)^2=50$ και $(x+1)^2+(y+1)^2=10$ τέμνονται και να βρείτε την εξίσωση της κοινής τους χορδής.

81. Ένας μεταβλητός κύκλος διέρχεται από το $A(1,2)$ και εφάπτεται στον x΄x. Αν $B(x,y)$ είναι το αντιδιαμετρικό του, να δείξετε ότι: $(x-1)^2=8y$.

82. Να βρείτε το $\kappa\in R^*$, ώστε το μήκος της εφαπτομένης από το $A(5,4)$ προς τον κύκλο με εξίσωση $x^2+y^2+2\kappa y=0$ να είναι 1.

83. Έστω Μ ένα σημείο της παραβολής $y^2=2px$. Να αποδειχθεί ότι ο κύκλος με διάμετρο ΕΜ, όπου Ε η εστία της παραβολής, εφάπτεται στον άξονα y΄y.

84. Έστω η παραβολή $y^2=2px$ και η εφαπτομένη της ε σε ένα σημείο $A(x_1,y_1)$ αυτής. Αν η ευθεία ΟΑ τέμνει τη διευθετούσα της παραβολής στο σημείο Β, να αποδειχθεί ότι $BE\,//\,\varepsilon$.

85. Αν η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της Α τέμνει τη διευθετούσα στο σημείο Β και τον άξονα y΄y στο σημείο Κ, να αποδειχθεί ότι: i) $\widehat{AEB} = 90^o$, ii) $EK \perp AB$, iii) $(EK)^2 = (KA)(KB)$.

86. Έστω η παραβολή $y^2 = 2px$ και ένα σημείο της $A(x_1, y_1)$. Φέρνουμε την εφαπτομένη της παραβολής στο Α, που τέμνει τον άξονα x΄x στο Β και την παράλληλη από το Α στον άξονα x΄x, που τέμνει τη διευθετούσα στο Γ. Να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι ρόμβος με κέντρο στον άξονα y΄y.

87. Δίνονται οι παραβολές $C_1 : y^2 = 2px$ και $C_2 : x^2 = 2py$. i) Να αποδείξετε ότι οι C_1 και C_2 τέμνονται στα σημεία $O(0,0)$ και $A(2p, 2p)$. ii) Αν οι εφαπτόμενες των C_1 και C_2 στο Α τέμνουν τις C_2 και C_1 στα σημεία Β και Γ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι η ΒΓ είναι κοινή εφαπτόμενη των C_1 και C_2.

88. Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ και $C_2 : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$. **α)** Να δείξετε ότι δεν έχουν κοινό σημείο. **β)** Να βρείτε την εξίσωση της διακέντρου. **γ)** Από όλα τα ζεύγη σημείων (A, B), όπου Α ανήκει στον C_1 και Β στον C_2, να βρεθεί αυτό για το οποίο τα Α, Β απέχουν τη μικρότερη απόσταση. **δ)** Να βρεθεί το ζεύγος σημείων (Γ, Δ) (το Γ στον C_1 και το Δ στον C_2) με τη μεγαλύτερη απόσταση.

89. Δίνονται τα σημεία $A(-2,0)$, $B(2,0)$ και $M_1(1, \sqrt{3})$. α) Να δείξετε ότι $M_1A \perp M_1B$. β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που περνά από τα σημεία Α, Β, M_1. γ) Να δείξετε ότι το σημείο $M_2(-1, \sqrt{3})$ ανήκει στον κύκλο και $M_2A \perp M_2B$. δ) Να δείξετε ότι κάθε σημείο $M(x_0, y_0)$ για το οποίο ισχύει $MA \perp MB$, ανήκει στον κύκλο του ερωτήματος (β).

90. Αν $M(x, y)$ είναι ένα σημείο της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, να αποδείξετε ότι $(ME') = \alpha + \varepsilon x$ και $(ME) = \alpha - \varepsilon x$.

91. Αν d, d' είναι οι αποστάσεις των σημείων $\Gamma(0, \gamma)$ και $\Gamma'(0, -\gamma)$ από την εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ σε ένα σημείο της $M_1(x_1, y_1)$, να αποδείξετε ότι $d^2 + d'^2 = 2\alpha^2$.

92. Έστω $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ δύο σημεία της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και τα σημεία $N_1(\varepsilon x_1, 0)$ και $N_2(\varepsilon x_2, 0)$. Να αποδείξετε ότι $(M_1N_2) = (M_2N_1)$.

93. Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και ένα σημείο της Μ. Έστω επιπλέον, ο κύκλος $x^2 + y^2 = \alpha^2$ και το σημείο του Ν, που έχει την ίδια τετμημένη με το Μ. Από το Μ φέρνουμε παράλληλη προς την ΟΝ, που τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Γ και Δ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι $M\Gamma = \beta$ και $M\Delta = \alpha$.

94. Έστω ε και ε΄ οι εφαπτομένες της έλλειψης $C : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $0 < \beta < \alpha$, στις κορυφές της $A(\alpha, 0)$ και $A'(-\alpha, 0)$ αντιστοίχως και ζ η εφαπτόμενη της C σε ένα σημείο της $M_1(x_1, y_1)$. Αν η ζ τέμνει τις ε και ε΄ στα σημεία Γ και Γ΄ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:
i) $(A\Gamma)(A'\Gamma') = \beta^2$, **ii)** ο κύκλος με διάμετρο το ΓΓ΄ διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης.

95. Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και η εφαπτομένη της στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$. Αν η εφαπτομένη τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία $\Gamma(p, 0)$ και $\Delta(0, q)$, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha^2}{p^2} + \frac{\beta^2}{q^2} = 1$.

96. Αν ε είναι η εφαπτομένη της έλλειψης $C:\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στο $M_1(x_1,y_1)$, να αποδείξετε ότι η κάθετη στην ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{\alpha^2 y_1}{\beta^2 x_1}$.

97. Να γραφεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει μεγάλο και μικρό άξονα με μήκος 6 και 4 μονάδες αντιστοίχως και έχει εστίες πάνω στον άξονα x΄x συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων.

98. Δίνεται σταθερό σημείο Α και ευθεία (ε) που δεν διέρχεται από το Α. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το Α και εφάπτονται στην (ε), είναι παραβολή.

99. Ο κύκλος με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα β διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, με $\alpha>\beta$. Να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης.

100. Δίνεται η έλλειψη $C:\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Να αποδείξετε ότι και η έλλειψη με εξίσωση $\frac{\kappa^2x^2}{\alpha^2}+\frac{\kappa^2y^2}{\beta^2}=1$ έχει την ίδια εκκεντρότητα με τη C.

101. Να συγκριθούν οι εκκεντρότητες των ελλείψεων $C_1:\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $C_2:\frac{x^2}{\alpha^4}+\frac{y^2}{\beta^4}=1$, με $\alpha>\beta$.

102. Να βρεθεί η μορφή της εξίσωσης της έλλειψης με εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$ και εφαπτομένη την $y=2$.

103. Θεωρούμε την υπερβολή $C:x^2-y^2=-1$ και την ευθεία $(\varepsilon):x+2y=\alpha$. Να βρεθούν οι τιμές του α, για τις οποίες η (ε) τέμνει τη C. Να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες η (ε) εφάπτεται στην $y^2-x^2=1$.

104. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=4$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1$. **α)** Να δείξετε ότι το σημείο $(1,-\sqrt{3})$ είναι κοινό τους σημείο και στη συνέχεια να βρείτε όλα τα κοινά σημεία.
β) Να δείξετε ότι τα κοινά τους σημεία είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.
γ) Να βρεθούν τα σημεία $M(x_0,y_0)$ ώστε $x_0^2+y_0^2=4$ και $(E'M)+(EM)=2\sqrt{6}$ (Ε, Ε΄ οι εστίες της έλλειψης). **δ)** Να βρεθεί η υπερβολή με τις ίδιες εστίες και ασύμπτωτη την ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(1,\sqrt{3})$.

105. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$. **α)** Να δείξετε ότι το τετράπλευρο Ε΄ΒΕΒ΄ είναι ρόμβος (Ε, Ε΄ οι εστίες, Β, Β΄ τα άκρα του μικρού άξονα). **β)** Να βρεθεί το εμβαδόν του ρόμβου.

106. Έστω κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=\alpha^2$. Αν θέσουμε $x=x'$ και $y=cy'$, να αποδείξετε ότι το σημείο (x',y') ανήκει σε έλλειψη.

107. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη και εφάπτεται στην ευθεία $y=x+1$.

108. Δίνεται η υπερβολή $C:\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $M(x_1,y_1)$ ένα σημείο της διαφορετικό από τις κορυφές της. Αν η κάθετη (ε΄) της (ε) στο Μ τέμνει τους άξονες x΄x , y΄y στα Γ και Δ αντίστοιχα (ε η εφαπτομένη στο Μ) **α)** να βρεθεί συναρτήσει των x_1, y_1 η εξίσωση της (ε΄),
β) να βρεθούν οι συντεταγμένες των Γ και Δ,
γ) να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου Ν του ΓΔ, **δ)** να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός

τόπος του Ν είναι μια υπερβολή **ε)** να αποδειχθεί ότι οι υπερβολές C και C_1 έχουν τις ίδιες εκκεντρότητες.

109. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ και την ευθεία $y=2$.

110. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $25x^2-4y^2=100$ που είναι παράλληλες προς την ευθεία $3x-y=0$.

111. Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

112. Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με κλάδους C_1 και C_2 και τυχαίο σημείο της $M(x_1,y_1)$ στον κλάδο C_1 $(y_1\neq 0)$ **α)** Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στο σημείο Μ και να βρείτε τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες.
β) Να δείξετε ότι η (ε) τέμνει τον x΄x σε σημείο μεταξύ των κορυφών της υπερβολής.
γ) Με δεδομένο ότι η (ε) τέμνει τον κλάδο C_2 στο σημείο $M'(x_2,y_2)$, να δείξετε ότι $y_1y_2<0$.

113. Έστω ε και ε΄ οι εφαπτόμενες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στις κορυφές της Α και Α΄. Αν Γ και Γ΄ είναι τα σημεία στα οποία μια τρίτη εφαπτόμενη της υπερβολής τέμνει τις ε και ε΄, αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι: **α)** $(A\Gamma)(A'\Gamma')=\beta^2$ και **β)** ο κύκλος με διάμετρο το ΓΓ΄ διέρχεται από τις εστίες της υπερβολής.

114. Έστω $M_1(x_1,y_1)$ και $M_2(x_2,y_2)$ δύο σημεία του δεξιού κλάδου της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Αν η ευθεία M_1M_2 τέμνει τις ασύμπτωτες στα σημεία $M_3(x_3,y_3)$ και $M_4(x_4,y_4)$, να αποδείξετε ότι $(M_1M_3)=(M_2M_4)$.

115. Από ένα σημείο $M_1(x_1,y_1)$ της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ φέρνουμε παράλληλες προς τις ασύμπτωτες. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του σχηματιζόμενου παραλληλογράμμου είναι σταθερό.

116. Να αποδείξετε ότι το συνημίτονο μιας από τις γωνίες των ασυμπτώτων της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ δίνεται από τον τύπο $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{2-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}$.

117. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2\lambda x-1=0$ (1), όπου $\lambda\in R$. i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου ζητείται να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα. ii) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι C_λ που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. Ποια είναι η εξίσωση της κοινής χορδής όλων αυτών των κύκλων;

118. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2+y^2=1$ και $C_2:(x-2)^2+y^2=2^2$ και η ευθεία $y=\lambda x+\beta$, όπου $\lambda,\beta\in R$ i) Ποιες είναι οι αποστάσεις των κέντρων των κύκλων C_1 και C_2 από την ε
ii) Για ποιες τιμές των λ και β η ευθεία εφάπτεται και στους δύο κύκλους; iii) Να αποδείξετε ότι οι κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2 τέμνονται πάνω στον άξονα x΄x και σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 60^o.

119. Μια ευθεία $y=\lambda x+\beta$, με $\lambda\neq 0$, τέμνει την παραβολή $y^2=4x$ σε δύο σημεία Α και Β
i) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ είναι $\left(\frac{2-\lambda\beta}{\lambda^2},\frac{2}{\lambda}\right)$.
ii) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία βρίσκεται το Μ, όταν
α) $\lambda=1$ και το β μεταβάλλεται, **β)** $\beta=0$ και το λ μεταβάλλεται.

120. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, με $\alpha>\beta>0$ και το σημείο $\Sigma(0,2\beta)$. Μια ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το σημείο Σ και τέμνει τις εφαπτομένες, στα άκρα του μεγάλου άξονα της έλλειψης, στα σημεία Μ και Μ΄. i) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο ΜΜ΄ συναρτήσει του λ. ii) Για ποιες τιμές του $\lambda\in R$, ο κύκλος αυτός διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης;

121. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=2$ και η παραβολή $y^2=8x$.

α) Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες του κύκλου και της παραβολής.
β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.
γ) Το σημείο τομής τους βρίσκεται στον x΄x.

122. Δίνεται η έλλειψη $c: x^2+\frac{y^2}{2}=1$ και η ευθεία $\varepsilon: y=\lambda x+1$

α) Δείξτε ότι για κάθε $\lambda\in R$, η ε τέμνει την c σε δύο σημεία.

β) Αν Κ, Λ τα κοινά σημεία της ε με την c, να βρείτε την εξίσωση της ε, όταν $K O\Lambda=90^o$.

123. Θεωρούμε την παραβολή $c: y^2=5x$ και το σημείο $M(2,-3)$.

α) Δείξτε ότι το μ είναι εσωτερικό σημείο της c. **β)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που τέμνει την παραβολή στα Α, Β και το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

124. Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy. Στο Ο έχουμε τοποθετήσει ένα προβολέα και στο σημείο $A(2,1)$ ένα εμπόδιο. Φωτίζουμε το Α και το φως ανακλώμενο τέμνει τον x΄x στο Β και σχηματίζει με τον x΄x γωνία 135^o. Να βρείτε:
α) Το σημείο Β. **β)** Το σημείο Μ της ΑΒ που δέχεται τον ισχυρότερο φωτισμό. **γ)** Τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΟΜΒ.

125. Θεωρούμε την έλλειψη $C: \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, με $\alpha>\beta>0$. **α)** Αν Μ τυχαίο σημείο της έλλειψης και Ε΄, Ε οι εστίες της, να βρείτε τα (ME'), (ME). **β)** Εξετάστε αν υπάρχουν σημεία Μ της έλλειψης έτσι ώστε $E'ME=90^o$ **Ε 40 (2001)**

126. Θεωρούμε τα σημεία $M(\lambda,\mu)$ και τις ευθείες $\varepsilon_1: \mu x-(\lambda+5)y+5\mu=0$, $\varepsilon_2: \mu x+(5-\lambda)y-5\mu=0$. Αν οι ευθείες είναι κάθετες, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ.

127. **α)** Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2+2)x^2+3\lambda y^2-6\lambda x+3\lambda y+4=0$ (1). Για ποιο $\lambda\in R$ η (1) είναι εξίσωση κύκλου **β)** Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+y^2+(m-1)x+my-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}=0$, $m\in R$ (2) Να δείξετε ότι: i) Για κάθε $m\in R$ η (2) είναι εξίσωση κύκλου. ii) Οι κύκλοι με εξίσωση τη (2) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία από τα οποία το ένα είναι το κέντρο του κύκλου του α) ερωτήματος. **γ)** Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον x΄x η κοινή χορδή των κύκλων του (β) ερωτήματος.

128. Θεωρούμε τον κύκλο με κέντρο $K(-1,0)$ που διέρχεται από το σημείο $A(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

α) Να βρείτε: i) την εξίσωση του κύκλου, ii) την εφαπτομένη ε του κύκλου στο Α.
β) Αν η ε διέρχεται από την εστία της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον θετικό ημιάξονα Ox, τότε: i) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής. ii) Αν η διευθετούσα της παραβολής τέμνει τον κύκλο στα σημεία Μ, Ν να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΝ.

129. Δίνεται η παραβολή $c: y^2=2px$, $p>0$ και οι ευθείες $\varepsilon_1: y=\lambda x$, $\varepsilon_2: y=-\lambda x$, όπου λ θετικός ακέραιος. **α)** Δείξτε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ τέμνουν την παραβολή σε σημεία Α, Β συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x. **β)** Να βρείτε τον λ όταν η ΑΒ διέρχεται από την εστία της ε. **γ)** Όταν το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ γίνεται μέγιστο, όπου Ο η αρχή των αξόνων, δείξτε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι κάθετες.

130. Τα σταθερά σημεία Ε΄, Ε είναι σημεία του x¨x συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων με $(Ε΄Ε)=2\sqrt{5}$. Σημεία Μ του επιπέδου ικανοποιούν τις σχέσεις $\sqrt{[(ΜΕ΄)-(ΜΕ)]^2}=4$ (1) και $\left|\overline{ΜΕ΄}^2-\overline{ΜΕ}^2\right|=24$ (2). **α)** Δείξτε ότι τα σημεία Μ ανήκουν σε δύο κωνικές τομές των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις. **β)** Αν $Μ(x_0,y_0)$ δείξτε ότι $x_0^2=9y_0^2$.

131. Κύκλος c έχει το κέντρο του στο θετικό ημιάξονα Ox και η ακτίνα του είναι ρ. Η ευθεία $ε: y=2x$ είναι ασύμπτωτη της υπερβολής $c_1: \frac{x^2}{ρ^2}-\frac{y^2}{16}=1$ και εφάπτεται του κύκλου c. Να βρείτε τις εξισώσεις των c, c_1 και τα κοινά τους σημεία.

132. Δίνεται η εξίσωση $x^2+(λ-1)y^2=λ-1$ **α)** Για τις διάφορες τιμές του λ να βρείτε το είδος της γραμμής που εκφράζει η (1).
β) Στην περίπτωση που η (1) είναι εξίσωση υπερβολής να βρείτε την εξίσωση της και το εμβαδόν του ορθογωνίου της βάσης, όταν οι ασύμπτωτες που περιέχουν την υπερβολή σχηματίζουν γωνία 60°.

133. Να βρεθεί η σχετική θέση της ευθείας $x+y+1=0$ ως προς τη παραβολή $y^2=2x$.

134. Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{α^2}+\frac{y^2}{β^2}=1$ με $α>β>0$ και η ευθεία $ε: x=\frac{α^2}{γ}$. i) Δείξτε ότι η ε δεν έχει κοινά σημεία με την C. ii) Ευθεία $ε_1$ με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από την εστία $Ε(γ,0)$ της έλλειψης και τέμνει την ε στο σημείο Μ. Η $Β(0,β)$ είναι μια κορυφή της C. Να βρείτε το λ όταν: **α)** Ο κύκλος με διάμετρο το ΒΜ διέρχεται από το Ε.
β) Ο κύκλος με διάμετρο το ΕΜ διέρχεται από το Β. **γ)** Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα λ των παραπάνω (α), (β) ερωτημάτων. iii) Αν η ευθεία $ε_1$ του (ii) ερωτήματος τέμνει την ε, στην περίπτωση (α) στο $Μ_1$ και στην περίπτωση (β) στο $Μ_2$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $ΕΜ_1Μ_2$. **Ε 40 (2001)**

135. Δίνεται σταθερό σημείο Α και ευθεία (ε) που δεν διέρχεται από το Α. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το Α και εφάπτονται στην (ε), είναι παραβολή.

136. Ο κύκλος με κέντρο το $Ο(0,0)$ και ακτίνα β διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{α^2}+\frac{y^2}{β^2}=1$, με $α>β$. Να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης.

137. Θεωρούμε την υπερβολή $C: x^2-y^2=1$ και την ευθεία $(ε): x+2y=α$. Να βρεθούν οι τιμές του α, για τις οποίες η (ε) εφάπτεται στη C.

138. Έστω Μ τυχαίο σημείο της υπερβολής , (ε) η εφαπτομένη στο Μ και Β τα σημεία που η (ε) τέμνει τις ασύμπτωτες. Τότε το εμβαδόν το τριγώνου ΟΑΒ είναι σταθερό.

139. Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{α^2}-\frac{y^2}{β^2}=1$ και $Μ(x_1,y_1)$ ένα σημείο της διαφορετικό από τις κορυφές της. Αν η κάθετη (ε΄) της (ε) στο Μ τέμνει τους άξονες x΄x , y΄y στα Γ και Δ αντίστοιχα (ε η εφαπτομένη στο
α) να βρεθεί συναρτήσει των x_1, y_1 η εξίσωση της (ε΄),
β) να βρεθούν οι συντεταγμένες των Γ και Δ,
γ) να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου Ν του ΓΔ,
δ) να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος του Ν είναι μια υπερβολή C_1,
ε) να αποδειχθεί ότι οι υπερβολές C και C_1 έχουν τις ίδιες εκκεντρότητες, αλλά τις εστίες σε διαφορετικούς άξονες.

140. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ και την ευθεία $y=2$.

141. Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με κλάδους C_1 και C_2 και τυχαίο σημείο της $M(x_1,y_1)$ στον κλάδο C_1 $(y_1\neq 0)$. **α)** Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στο σημείο Μ και να βρείτε τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες. **β)** Να δείξετε ότι η (ε) τέμνει τον x΄x σε σημείο μεταξύ των κορυφών **γ)** Με δεδομένο ότι η (ε) τέμνει τον κλάδο C_2 στο σημείο $M'(x_2,y_2)$, να δείξετε ότι $y_1y_2<0$.

142. Να βρείτε το $\kappa\in R^*$, ώστε το μήκος της εφαπτομένης από το $A(5,4)$ προς τον κύκλο με εξίσωση $x^2+y^2+2\kappa y=0$ να είναι 1.

143. Δίνεται η ευθεία $2\lambda^2x-2\lambda y+1=0$, $\lambda\in R^*$ **α)** Πόσες το πολύ ευθείες διέρχονται από ένα σημείο του επιπέδου **β)** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου από τα οποία διέρχεται μία μόνο ευθεία.

144. Δίνονται οι παραβολές $y^2=-4x$ (1) και $y^2=8x$ (2). Αν η εφαπτομένη της (1) τέμνει την (2) στα Α και Β, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου Μ του ΑΒ.

145. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, το σημείο και οι εφαπτόμενες ΡΑ, ΡΒ από το Ρ. Να δείξετε ότι το Ρ, το μέσο Μ της ΑΒ και το κέντρο Ο της έλλειψης, είναι συνευθειακά.

146. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες του κύκλου $C: x^2+y^2=25$, οι οποίες άγονται από το σημείο $M(4\sqrt{2},3\sqrt{2})$ είναι κάθετες. **Ε 40 (2001)**

147. Θεωρούμε μια παραβολή $C: y^2=2px$. Το άθροισμα των τεταγμένων δύο σημείων Α και Β της C είναι ίσο με το άθροισμα των τεταγμένων δύο άλλων σημείων Γ και Δ της C. Να δείξετε ότι $AB//\Gamma\Delta$. **Ε 40 (2001)**

148. Θεωρούμε μια έλλειψη $C:\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ $(\alpha>\beta>0)$ και ένα σημείο της Ρ (διάφορο των κορυφών Β και Β΄). Οι ευθείες ΡΒ και ΡΒ΄ τέμνουν τον άξονα x΄x στα σημεία Μ και Ν αντιστοίχως. Να δείξετε ότι, όταν το Ρ διαγράφει τη C (εκτός των κορυφών Β και Β΄), το γινόμενο (ΟΜ)(ΟΝ) είναι σταθερό.

149. Να βρείτε τη μικρότερη απόσταση του σημείου $A(4,4)$ από τον κύκλο $C: x^2+y^2-2x=0$.

150. Έστω Μ ένα σημείο της (ισοσκελούς) υπερβολής $C: x^2-y^2=\alpha^2$, $\alpha>0$. Να δείξετε ότι $(OM)^2=(ME)(ME')$, όπου Ε΄ και Ε οι εστίες της C και Ο το κέντρο της. **Ε 40 (2001)**

151. Δίνεται κύκλος C με κέντρο Κ(3,5) και μια χορδή του ΑΒ, η οποία έχει μήκος 4 και ανήκει στην ευθεία $y=2x+1$. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου C.

152. Δίνεται ο κύκλος $C_\lambda: x^2+y^2+\lambda x-1=0$ και η ευθεία $\varepsilon_\lambda: y=\lambda x$ με $\lambda\in\mathbb{R}^*$. Δείξτε ότι ο C_λ και η ε_λ έχουν δύο κοινά σημεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ << Σωστό-Λάθος>>

1. Οι κύκλοι $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ και $(x-2)^2+(y+1)^2=10$ εφάπτονται εξωτερικά. **Σ** **Λ**

2. Τα σημεία $(-2,2)$ και $(4,2)$ του κύκλου $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ είναι αντιδιαμετρικά . **Σ** **Λ**

3. Η εξίσωση $(x+y)^2-4=2xy$ παριστάνει κύκλο. **Σ** **Λ**

4. Ένας κύκλος έχει το κέντρο του στην ευθεία $y=x$ τότ έχει πάντα εξίσωση $(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2=\alpha^2$. **Σ** **Λ**

5. Ένα σημείο (x_1,y_1) είναι εσωτερικό ενός κύκλου με κέντρο $K(x_o,y_o)$ και ακτίνα ρ. Ισχύει $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2<\rho^2$. **Σ** **Λ**

6. Μία ευθεία και μία παραβολή έχουν ένα κοινό σημείο. Η ευθεία είναι εφαπτομένη της παραβολής. **Σ** **Λ**

7. Κάθε σημείο της παραβολής $y^2=8x$ ισαπέχει από την ευθεία $x=-2$ και το σημείο $(4,0)$. **Σ** **Λ**

8. Στο σημείο (x_o,y_o) της παραβολής $y^2=2px$ η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{p}{y_o}$, $(y_o\neq 0)$. **Σ** **Λ**

9. Όσο η εκκεντρότητα μιας έλλειψης πλησιάζει προς το μηδέν τόσο η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος. **Σ** **Λ**

10. Η εξίσωση $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ παριστάνει έλλειψη μόνο όταν $\alpha>\beta$. **Σ** **Λ**

11. Ή εξίσωση $x^2+\kappa y^2=1$ παριστάνει έλλειψη μόνο όταν $\kappa>0$. **Σ** **Λ**

12. Όσο πιο μεγάλη είναι η εκκεντρότητα ,τόσο πιο ανοικτή είναι η υπερβολή. **Σ** **Λ**

13. Ή ευθεία $y=\frac{1}{2}x$ εφάπτεται της υπερβολής $x^2-4y^2=4$. **Σ** **Λ**

14. Ή εξίσωση $y^2=16|x|$ παριστάνει μία παραβολή. **Σ** **Λ**

15. Τα σημεία $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $|(AM)-(BM)|=6$ με $A(-5,0)$ και $B(5,0)$ ανήκουν στην υπερβολή $9x^2-5y^2=45$. **Σ** **Λ**

16. Αν (κ,λ) σημείο έλλειψης τότε $(\kappa,-\lambda)$ σημείο της ίδιας έλλειψης. **Σ** **Λ**

17. Η εξίσωση $x^2+y^2+\alpha(x+y+1)=0$ παριστάνει κύκλο για κάθε θετικό α. **Σ** **Λ**

18. Οι κύκλοι $(x-1)^2+y^2=1$ και $x^2+(y-1)^2=1$ τέμνονται σε δύο σημεία της ευθείας $y=x$. **Σ** **Λ**

19. Ο κύκλος $(x-2)^2+y^2=1$ εφάπτεται του $x'x$. **Σ** **Λ**

20. Από κάθε σημείο εκτός παραβολής έχουμε δύο εφαπτομένες προς την παραβολή. **Σ** **Λ**

21. Δύο ελλείψεις όμοιες έχουν ίδιες εστίες. **Σ** **Λ**

22. Υπάρχει υπερβολή με ασύμπτωτες τους άξονες . **Σ** **Λ**

23. Αν η λύση του συστήματος μίας κωνικής τομής με μία ευθεία έχει δύο ρίζες ίσες τότε η ευθεία εφάπτεται στην κωνική . **Σ** **Λ**

ΤΕΣΤ Β ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΑΡΑΒΟΛΗ - ΕΛΛΕΙΨΗ - ΥΠΕΡΒΟΛΗ

1ο

1. Να απαντήσετε με την λέξη ΣΩΣΤΟ η ΛΑΘΟΣ και με δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Η ευθεία $y = 3$ είναι παράλληλη στην διευθετούσα της παραβολής $y^2 = 16x$

β) Εστιακή απόσταση μιας έλλειψης ονομάζεται η απόσταση δύο σημείων της που είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο της.

2. Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 4x$ που διέρχεται από το σημείο $B(-1,0)$

3. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η ευθεία $y = 2x - \alpha$ τέμνει την υπερβολή $x^2 - y^2 = 2$

2ο

1. Να απαντήσετε με την λέξη ΣΩΣΤΟ η ΛΑΘΟΣ και με δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Η εξίσωση $\dfrac{x^2}{\lambda^2} + \dfrac{y^2}{\lambda^2+1} = 1$ παριστάνει εξίσωση έλλειψης με μεγάλο άξονα $2\lambda^2$.

β) Αν για τα σημεία Μ ισχύει $ME + ME' = 2$ τότε τα σημεία Μ ανήκουν σε υπερβολή.

2. Να βρείτε το λ ώστε η $x^2 + \lambda^2 y^2 = \lambda^2$ να παριστάνει έλλειψη με εστίες στον $x'x$

3 Να βρείτε την παραβολή που διέρχεται από το σημείο $A(-1,1)$ και διευθετούσα // στον $y'y$.

3ο

1. Να απαντήσετε με την λέξη ΣΩΣΤΟ η ΛΑΘΟΣ και με δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Δύο όμοιες ελλείψεις έχουν ίδιες εστίες.

β) Η ευθεία $y = \dfrac{1}{2}x$ εφάπτεται της υπερβολής $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$

2.Δίνεται η έλλειψη $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$ να δείξετε ότι το ΒΕΒ΄Ε΄ είναι ρόμβος και να βρεθεί το εμβαδόν του(Ε,Ε΄εστίες και Β,΄Β άκρα του μικρού άξονα.)

3.Να βρεθεί η υπερβολή με εστίες στον $x'x$ εστιακή απόσταση 6 και $\varepsilon = \dfrac{3}{2}$.

4ο

1. Να απαντήσετε με την λέξη ΣΩΣΤΟ η ΛΑΘΟΣ και με δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι αριθμός μεγαλύτερος της εκκεντρότητας της υπερβολής

β) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής τέμνονται κάθετα.

2. Να βρείτε το μήκος της διαμέτρου της έλλειψης $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \varepsilon\varphi 30^{o}$.

3. Να βρείτε την σχετική θέση των $C_1: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ και $C_2: y^2=4x$

5°

---

1. Να απαντήσετε με την λέξη ΣΩΣΤΟ η ΛΑΘΟΣ και με δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής έχει διαγωνίους τις διχοτόμους των αξόνων $x'x$ και $y'y$

β) Αν η παραβολή και μία ευθεία έχουν ένα κοινό σημείο τότε η ευθεία εφάπτεται στη παραβολή.

2. Να εξετάσετε αν υπάρχει έλλειψη στην οποία ένα σημείο της Μ να σχηματίζει με τις εστίες της Ε ,Ε΄ ισόπλευρο τρίγωνο.

3. Δίνεται η παραβολή $C: y^2=2px$ και δύο χορδές ΟΒ,ΟΓ **με** $B\hat{O}\Gamma=90^O$ Να δείξετε ότι η ΒΓ διέρχεται από σταθερό σημείο.

6°

---

1. Να απαντήσετε με την λέξη ΣΩΣΤΟ η ΛΑΘΟΣ και με δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Ο τύπος που δίνει τις εξισώσεις των ασυμπτώτων όλων των υπερβολών είναι $y=\pm\frac{\beta}{\alpha}x$.

β). Στην εξίσωση της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ ισχύει $\alpha>\beta$.

2. Αν Μ τυχαίο σημείο της $y^2-x^2=\alpha^2$,(ε) η εφαπτομένη στο Μ και Α,Β τα σημεία που η (ε) τέμνει τις ασύμπτωτες. Τότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι σταθερό.

3. Ο κύκλος με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα β διέρχεται από τις εστίες της $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ α>β να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης.

7°

---

1. Να απαντήσετε με την λέξη ΣΩΣΤΟ η ΛΑΘΟΣ και με δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Το ορθογώνιο της έλλειψης $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ έχει πλευρές τις $x=2, x=-2, y=3, y=-3.$

β) Η υπερβολή $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$ έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\sqrt{2}$.

2. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ στα άκρα της διαμέτρου της $y=2x$

3. Δίνεται η υπερβολή $x^2-2y^2=2$ Να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από την $y=x+1$ και τις ασύμπτωτες της υπερβολής.

8°

---

1. Να απαντήσετε με την λέξη ΣΩΣΤΟ η ΛΑΘΟΣ και με δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Η $x^2-3y=0$ παριστάνει υπερβολή.

β) Στην έλλειψη με Μ τυχαίο της σημείο η εφαπτόμενη στο Μ διχοτομεί την γωνία Ε΄ΜΕ.$(E, E'$ εστίες$)$

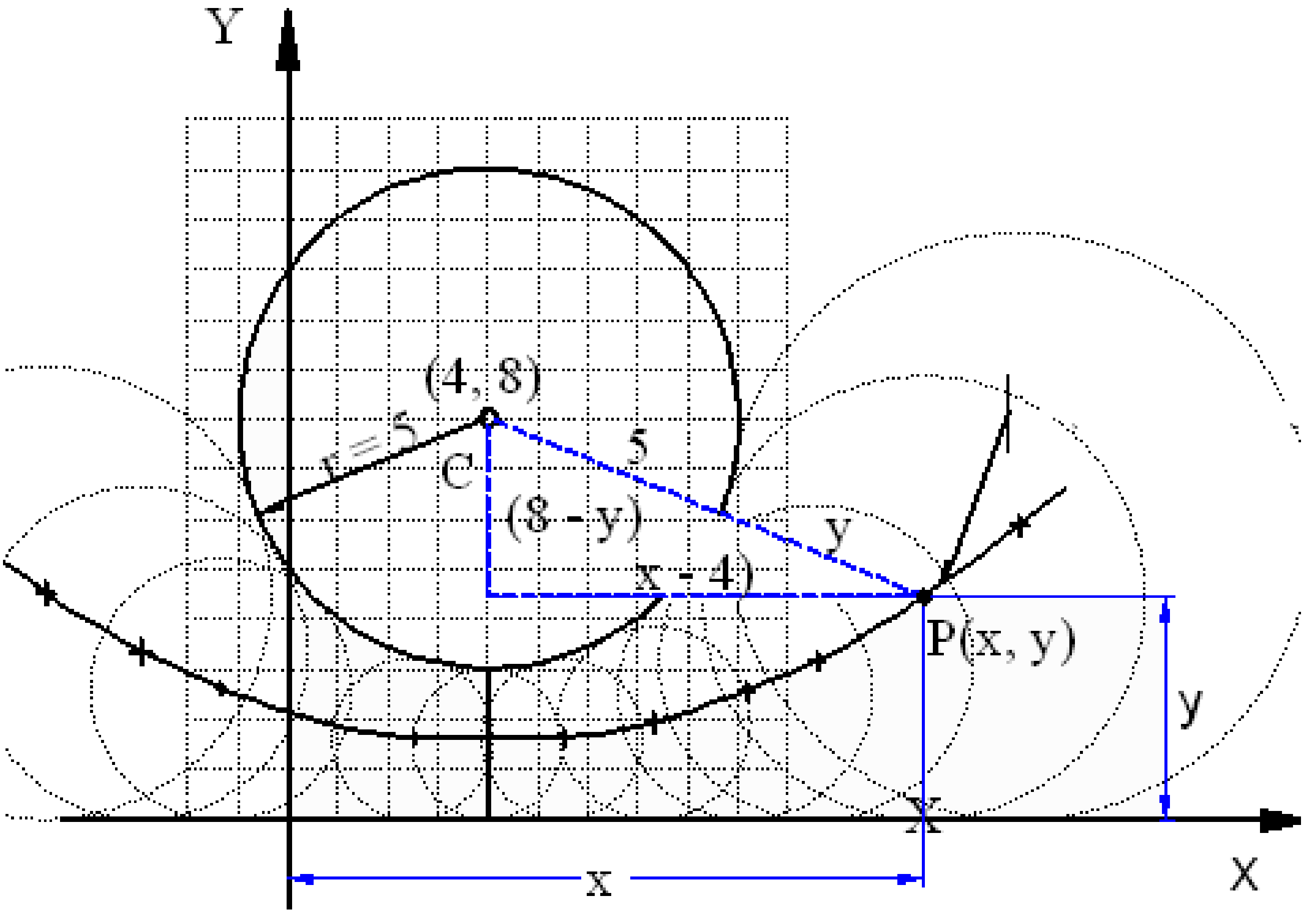
2. Από το σημείο (-2,3) προς την παραβολή $y^2=8x$ γράφονται 2 εφαπτόμενες ευθείες Να βρείτε τις εξισώσεις τους και να δείξετε ότι τέμνονται κάθετα.

3. Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από αυτές και την ευθεία που ενώνει τα σημεία επαφής .

$(\lambda, \lambda + 1)$, $\lambda \in \mathcal{R}$

Άρα y=x+1

Ευθεία


Y
(4, 8)
r = 5
C
5
(8 - y)
y
x - 4)
P(x, y)
y
X
x
X

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

Γεωμετρικός τόπος είναι ένα σύνολο σημείων που έχουν όλα την ίδια ιδιότητα
Πχ Ο κύκλος είναι ένας γεωμετρικός τόπος διότι όλα τα σημεία του ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο (κέντρο) σταθερή απόσταση (ακτίνα).
Γνωστοί γ.τ είναι ο κύκλος , η διχοτόμος γωνίας, η μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος κ.λ
Για να βρώ ένα γ.τ αρκεί να καταλήξω σε μία εξίσωση γραμμής με αγνώστους x,y
Πχ εάν καταλήξω στην εξίσωση $2x+3y=2$ μιλάω για γεωμετρικό τόπο που παριστάνει ευθεία.
Οι ασκήσεις που συναντάμε μπορεί να ξεκινάνε από διανυσματικές σχέσεις ή και από σχέσεις που μας ζητάνε να βρούμε για τα σημεία του γ.τ.
Πχ(1) Να βρείτε τον γ.τ των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει :
α) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{M\Gamma}=0$, **β)** $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{M\Gamma}=9$. Δίνεται $|\overrightarrow{B\Gamma}|=8$

εδώ τα σημεία Β,Γ είναι σταθερά και το Μ κινείται .
Πχ(2) Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=25$ και το σημείο του $A(3,4)$. Να βρείτε τον γεωμ. τόπο των μέσων Μ των χορδών του κύκλου που διέρχονται από το Α.
Για να βρω τον γεωμετρικό τόπο σημείου Μ που το έχω σε σχέση διανυσμάτων θυμίζουμε ότι εάν Α, Β σταθερά σημεία, τότε:

- $|\overrightarrow{MA}|=\alpha$, τότε το Μ ανήκει σε κύκλο κέντρου Α και ακτίνας $\rho=\alpha$.
- $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|$, τότε το Μ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ.
- $|\overrightarrow{MA}|+|\overrightarrow{MB}|=\alpha$, τότε το Μ ανήκει σε έλλειψη με εστίες Α, Β και μεγάλο
- $\left||\overrightarrow{MA}|-|\overrightarrow{MB}|\right|=\alpha$, τότε το Μ ανήκει σε υπερβολή.
- $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$, τότε το Μ ανήκει σε κύκλο διαμέτρου ΑΒ.
- $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{AB}$,τότε το Μ ανήκει σε ευθεία κάθετη στην ΑΒ που περνά από το Α.

ΛΥΣΗ Πχ(1)
α) Επειδή $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{M\Gamma}=0$, τότε Μ ανήκει σε κύκλο διαμέτρου ΒΓ δηλαδή ακτίνας $\rho=4$ και κέντρου Ο μέσον της ΒΓ.
β) Εδώ θεωρώ σύστημα συντεταγμένων $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{M\Gamma}=(x+4,y)(x-4,y)=9$ άρα $x^2-16+y^2=9$ τότε $x^2+y^2=25$ δηλ κύκλος……….
Για να βρούμε τον γεωμετρικό τόπο κάποιου σημείου $M(x_0,y_0)$ πάντα ζητάμε την σχέση που συνδέει την τετμημένη x_0 με την τεταγμένη y_0.
α) Αν x_0 και y_0 έχουν εκφραστεί συναρτήσει μιας παραμέτρου, κάνω απαλοιφή της παραμέτρου.
π.χ. Έστω $M(2t-1,t-2)$, $t\in R$, τότε $x_0=2t-1$ και $y_0=t-2$, οπότε $t=y_0-2$ και $x_0=2(y_0-2)-1$ άρα $x_0-2y_0+5=0$ δηλαδή το Μ ανήκει στην ευθεία $x-2y+5=0$.
β) Αν x_0 και y_0 έχουν εκφραστεί συναρτήσει δύο παραμέτρων τότε αναζητάμε και τρίτη σχέση μεταξύ των παραμέτρων και τις απαλείφουμε.

ΛΥΣΗ Πχ(2) Έστω $M(x_0,y_0)$ και $B(x_1,y_1)$ άκρο της χορδής ΑΒ, τότε $x_0=\frac{x_1+3}{2}$ και $y_0=\frac{y_1+4}{2}$, x_1,y_1 είναι παράμετροι, οπότε $x_1=2x_0-3$ και $y_1=2y_0-4$, αλλά $B(x_1,y_1)$ ανήκει στον κύκλο δηλαδή

$x_1^2+y_1^2=25$ (η τρίτη σχέση) άρα $(2x_0-3)^2+(2y_0-4)^2=25$ ή $(x_0-\frac{3}{2})^2+(y_0-\frac{4}{2})^2=\frac{25}{4}$ άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος………

γ) Αν x_0 και y_0 έχουν εκφραστεί συναρτήσει τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας φ τότε συνδέω τα x_0, y_0 ξεκινώντας από μια τριγωνομετρική σχέση π.χ. $ημ^2φ+συν^2φ=1$.

π.χ. Έστω $M(2ημφ,\sqrt{2}συνφ)$,οπότε $x_0=2ημφ$ και $y_0=\sqrt{2}συνφ$ άρα $ημφ=\frac{x_0}{2}$ και $συνφ=\frac{y_0}{\sqrt{2}}$ και $ημ^2φ+συν^2φ=1$ άρα $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1$ επομένως είναι έλλειψη με $α=2$, $β=\sqrt{2}$ και $γ=\sqrt{2}$.

δ) Αν x_0 και y_0 έχουν εκφραστεί συναρτήσει μιας παραμέτρου της οποίας δεν μπορώ να κάνω απαλοιφή τότε βρίσκω τα x_0^2 και y_0^2 και ψάχνω τη σχέση μεταξύ τους.

π.χ. $M(\frac{2t}{t^2+1},\frac{1-t^2}{t^2+1})$, $t\in R$. Έστω $x_0=\frac{2t}{t^2+1}$ και $y_0=\frac{1-t^2}{t^2+1}$, τότε $x_0^2=\frac{4t^2}{(t^2+1)^2}$ και $y_0^2=\frac{1-2t^2+t^4}{(t^2+1)^2}$.

Επομένως $x_0^2+y_0^2=\frac{4t^2}{(t^2+1)^2}+\frac{1-2t^2+t^4}{(t^2+1)^2}=\frac{t^4+2t^2+1}{(t^2+1)^2}=\frac{(t^2+1)^2}{(t^2+1)^2}=1$, άρα κύκλος…………

Αν το x_0 ή y_0 του σημείου Μ βρεθεί σταθερό τότε το Μ ανήκει σε ευθεία.

Π.χ. Να βρείτε το γ.τ. των μέσων των χορδών παραβολής που έχουν σταθερή διεύθυνση $λ=3$.

ΛΥΣΗ: Έστω $y^2=2px$. Αν $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ τα άκρα της χορδής ΑΒ με διεύθυνση $λ=3$, τότε $y_1^2=2px_1$, $y_2^2=2px_2$, $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$ και $λ=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=3$ τότε $y_1^2-y_2^2=2p(x_1-x_2)$ (*) ή $(y_1-y_2)(y_1+y_2)=2p(x_1-x_2)$ ή $\frac{(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)}=\frac{2p}{(y_1+y_2)}$ ή $3=\frac{p}{y_M}$ δηλαδή $y_M=\frac{p}{3}$ άρα $M(x_M,\frac{p}{3})$ άρα Μ ανήκει στην ευθεία $y=\frac{p}{3}$. Παρατηρούμε ότι εδώ που έχω συντελεστή διεύθυνσης τον δημιούργησα φτιάχνοντας τη διαφορά (*).

Να προσέχετε πάντοτε αν για τα x_0, y_0 υπάρχουν περιορισμοί που εξαιρούν κάποια σημεία της γραμμής από τον γ. τ.

π.χ. Η θέση ενός κινητού Α οποιαδήποτε χρονική στιγμή δίνεται με τις συντεταγμένες του $A(t+1,2t+3)$, όπου t χρόνος. Να βρεθεί ο γ.τ. του Α.

ΛΥΣΗ: Έστω $x_0=t+1$ τότε $t=x_0-1$, $y_0=2t+3$ άρα $y_0=2x_0-2+3$ ή $y_0=2x_0+1$. Όμως $t=x_0-1\geq 0$ δηλαδή $x_0\geq 1$, τότε $2x_0+1\geq 3$, άρα $y_0\geq 3$ και επομένως ο γ.τ. είναι η ημιευθεία $y=2x+3$ με αρχή το σημείο $(1,3)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται τα σταθερά σημεία Α, Β με $|\overrightarrow{AB}|=3$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, για τα οποία $\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2=6$. (Υπόδειξη: Μορφή $\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2$ άρα θεωρώ το μέσο του ΑΒ και το ύψος ΜΗ οπότε ...)

2. Δίνονται τα σταθερά σημεία Α, Β με $|\overrightarrow{AB}|=8$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, για τα οποία $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=50$.

3. Δίνονται τα σταθερά σημεία Α, Β με $|\overrightarrow{AB}|=8$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, για τα οποία $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=9$. (Υπόδειξη: Μορφή $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ άρα θεωρώ το μέσο του ΑΒ ...)

4. Έστω Ο και Α δύο σταθερά σημεία του επιπέδου με $|\overrightarrow{OA}|=3$. Ποια γραμμή γράφουν τα σημεία Μ του επιπέδου για τα οποία είναι $\overrightarrow{OM}\cdot(\overrightarrow{OM}-2\overrightarrow{OA})=7$;

5. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρείτε τον γ.τ των σημείων Μ για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma}=3(\overrightarrow{M\Delta}-\overrightarrow{MB})$.

6. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο γ.τ των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma}|=|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}|$.

7. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο γ.τ των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}//\overrightarrow{B\Gamma}$.

8. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο γ.τ των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AM}=0$.

9. Έστω Α,Β δύο σταθερά σημεία του επιπέδου με $(AB)=4$. Να βρεθεί ο γ.τ των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=3$.

10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=B\Gamma=2{,}5$ και $A\Gamma=3$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{MA}(2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{M\Gamma})=5$.

11. Δίνεται κύκλος $C: x^2-8x+y^2-4y=0$. **α)** Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Ρ από τα οποία φέρνουμε κάθετες εφαπτόμενες στον κύκλο C.
β) Να βρεθεί ο γ.τ. των μέσων Μ των χορδών του C που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
Ε 39 (2001)

12. Έστω η ευθεία $\varepsilon: x+(\alpha+1)y=\alpha$, όπου $\alpha\neq 1$ και το σημείο $A(1,2)$. Να αποδείξετε ότι: **α)** Το σημείο Α δεν ανήκει στην ευθεία ε **β)** Το συμμετρικό Α΄ του Α ως προς την ευθεία ε ανήκει σε κύκλο.
Ε 43 (2002)

13. Έστω Ρ ένα σημείο του κύκλου $C: x^2+y^2-2\lambda x-5=0$. Αν η ευθεία $\varepsilon: x+y-2=0$ τέμνει τον κύκλο C στα σημεία Α, Β έτσι ώστε $APB=90^o$:
α) Να βρείτε το λ. **β)** Για $\lambda=2$, να βρείτε την εφαπτόμενη του κύκλου C στο σημείο $\Gamma(1,2\sqrt{2})$ και μετά στο σημείο του $\Delta(1,-2\sqrt{2})$.
γ) Να βρείτε το γ.τ. των σημείων Μ του επιπέδου, από τα οποία οι εφαπτόμενες στον κύκλο είναι κάθετες.
Παπασπηλίου(2011)

Λύση

α) Επειδή $APB=90^o$ η ε διέρχεται από το κέντρο του κύκλου δηλαδή είναι διάμετρος και επειδή $K(\lambda,0)$ πρέπει $K\in(\varepsilon)$ δηλαδή $\lambda+0-2=0\Rightarrow\lambda=2$.

β) $C:(x-2)^2+y^2=3^2$ Πρέπει $\overrightarrow{K\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Gamma M}=0$ δηλαδή $(-1,2\sqrt{2})(x-1,y-2\sqrt{2})=0$ ή

$-x+1+2\sqrt{2}y-8=0 \Rightarrow$ $(\varepsilon): -x+2\sqrt{2}y-7=0$ ή $x-2\sqrt{2}y+7=0$. Λόγω συμμετρίας του Δ ως προς τον x΄x είναι $\varepsilon': x+2\sqrt{2}y+7=0$. Πράγματι, $d(\varepsilon',K)=\dfrac{|2+2\sqrt{2}\cdot 0+7|}{\sqrt{1+8}}=3=\rho$

γ) Έστω $M(x_0,y_0)$ σημείο του γ.τ. Επειδή $\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{M}=90^o$ και $KB=KA=\rho$ έχω ΚΒΜΑ τετράγωνο. Άρα το Μ ανήκει σε κύκλο κέντρου Κ και ακτίνας $\rho\sqrt{2}$, όπου $\rho=3$.

14. Δίνεται η $x^2+y^2-6x+8y+21=0$ (1), $x,y\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x,y)$, $x,y\in\mathbb{R}$, των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν την (1).

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση που έχουν τα σημεία του γεωμετρικού τόπου από την αρχή Ο των αξόνων.

15. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου όπου: **α)** $M(3\sqrt{\alpha},\frac{\alpha}{2})$, **β)** $M(2\alpha,6\sqrt{\alpha})$.

16. Θεωρούμε την παραβολή $C: y^2=2px$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=\lambda x+\kappa$, με $\lambda\neq 0$ εφάπτεται της C αν και μόνο αν $p=2\lambda\kappa$.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $\varepsilon_1\perp\varepsilon_2$.

17. Δίνεται μια ευθεία (ε) και ένα σημείο Α εκτός αυτής. Να βρεθεί ο γ.τ. των κέντρων των κύκλων που εφάπτονται στην (ε) και περνούν από το Α. **Ε 64 (2007)**

18. Δίνεται κύκλος $C: x^2-8x+y^2-4y=0$.

α) Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Ρ από τα οποία φέρνουμε κάθετες εφαπτόμενες στον κύκλο C.

β) Να βρεθεί ο γ.τ. των μέσων Μ των χορδών του C που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. **Ε 39 (2001)**

19. Θεωρούμε την έλλειψη $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Έστω Μ ένα τυχαίο σημείο της. Να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των ορθόκεντρων των τριγώνων Α΄ΜΑ (Α΄, Α είναι τα σημεία τομής της έλλειψης με τον άξονα x΄x) είναι έλλειψη.

20. Δίνονται τα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,2)$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου που ικανοποιούν τη σχέση $2|\overrightarrow{MA}|=3|\overrightarrow{MB}|$.

21. Να βρεθεί το σύνολο των σημείων του επιπέδου των οποίων οι συντεταγμένες επαληθεύουν την εξίσωση $4x^2+9y|y|=36$.

22. Δίνεται η εξίσωση: $x^2-y^2-4\mu x+2\mu y+3\mu^2=0$, $\mu\in R$ **α)** Να αποδειχτεί ότι παριστάνει δύο ευθείες κάθετες **β)** Αν Α το σημείο τομής των ευθειών να δείξετε ότι το Α κινείται στην ευθεία ε: $x-2y=0$ **γ)** να βρεθεί το σημείο της ευθείας (ε) που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο $B\left(\frac{5}{2},0\right)$.

23. Τρίγωνο ΑΒΓ έχει κορυφές $B(-5,0)$, $\Gamma(5,0)$ και περίμετρο 30 μονάδες. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής του Α

24. Θεωρούμε τους κύκλους με εξίσωση $x^2+y^2-2\mu x-4(\mu+1)y+3\mu+14=0$, $\mu\in R$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων τους.

$$1+2+3+\ldots+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει:

i) $1^2+2^2+3^2+...+\nu^2=\dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$, ii) $1^3+2^3+3^3+...+\nu^3=\left(\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2$,

iii) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+...+\nu(\nu+1)=\dfrac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3}$,

iv) $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+...+\dfrac{1}{\nu(\nu+1)}=\dfrac{\nu}{\nu+1}$.

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει $1+x+x^2+...+x^{\nu-1}=\dfrac{x^\nu-1}{x-1}$, εφόσον $x\neq1$.

3. Να αποδείξετε ότι: i) $\nu^2>2\nu+1$, για κάθε ακέραιο $\nu\geq3$,

ii) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^\nu>\nu$, για κάθε ακέραιο $\nu\geq7$, iii) $5^\nu>5\nu-1$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.

4. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+...+\dfrac{1}{\nu^2}\leq2-\dfrac{1}{\nu}$.

5. Παρατηρούμε ότι: $1=\dfrac{1(1+1)}{2}$ $1+2=\dfrac{2(2+1)}{2}$ $1+2+3=\dfrac{3(3+1)}{2}$.

Ποιο νομίζετε ότι θα είναι το άθροισμα $1+2+3+...+\nu$; Αποδείξτε την ισότητα που συμπεράνατε με επαγωγή.

6. Μετράμε τον αριθμό των διαγωνίων μερικών πολυγώνων:

Αριθμός πλευρών	Αριθμός διαγωνίων
τετράπλευρο ($\nu=4$)	$2=\dfrac{4(4-3)}{2}$
πεντάγωνο ($\nu=5$)	$5=\dfrac{5(5-3)}{2}$
εξάγωνο ($\nu=6$)	$9=\dfrac{6(6-3)}{2}$
επτάγωνο ($\nu=7$)	$14=\dfrac{7(7-3)}{2}$

Ποιος νομίζετε ότι θα είναι ο αριθμός των διαγωνίων ενός πολυγώνου με ν πλευρές; Να αποδειχθεί η σχέση που συμπεράνατε με μαθηματική επαγωγή.

7. Να διαπιστώσετε ότι ο αριθμός $2^{4\nu}-1$, για $\nu=1,2,3,4$ είναι πολλαπλάσιο του 15. Να αποδείξετε με μαθηματική επαγωγή ότι $2^{4\nu}-1=\pi o\lambda 15$, $\nu\in N^*$. Υπάρχει άλλος τρόπος απόδειξης;

8. i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu\in N^*$ ισχύει $2+4+...+2\nu=\nu(\nu+1)$.

ii) Να δείξετε ότι η ισότητα $2+4+...+2\nu=\nu(\nu+1)-1$ αν αληθεύει για ν, τότε αληθεύει και για $\nu+1$. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε $\nu\in N^*$;
Να τη συγκρίνετε με την ισότητα (i) και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

9. Να αποδειχθεί ότι $2\cdot2^1+3\cdot2^2+4\cdot2^3+...+\nu\cdot2^{\nu-1}=(\nu-1)\cdot2^\nu$, για κάθε $\nu\in N$ με $\nu\geq2$.

10. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu\in N^*$ ισχύει:

α) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+...+\nu(\nu+1)(\nu+2)=\dfrac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{4}$,

β) $2^3+4^3+6^3+...+(2\nu)^3=2\nu^2(\nu+1)^2$.

11. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $\nu \geq 4$ ισχύει $\nu! > 2^{\nu}$, όπου $\nu! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \nu$.

12. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $\nu \geq 3$ ισχύει $\nu^{\nu+1} > (\nu+1)^{\nu}$.

13. Αν α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών ορθογωνίων τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$), να αποδειχθεί ότι $\alpha^{\nu} > \beta^{\nu} + \gamma^{\nu}$, για κάθε $\nu \geq 3$.

14. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\nu \in N$ είναι $2^{\nu} + 5^{\nu} + 7^{\nu} > 11\nu$.

15. Για κάθε φυσικό αριθμό ν, να αποδειχθεί ότι: i) $10^{\nu} \geq (1+\nu)(1+4\nu)$, ii) $27^{\nu} \geq (1+2\nu)^3$.

16. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει:

α) $2+4+6+\ldots+2\nu = \nu(\nu+1)$.

β) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + \nu(\nu+1) = \frac{1}{3}\nu(\nu+1)(\nu+2)$.

17. Με την μέθοδο της τέλειας επαγωγής να αποδείξετε ότι: αν $\alpha \in \mathbb{R}$ με $0 \leq \alpha \leq 1$, τότε για κάθε θετικό ακέραιο ισχύει:

α) $(1-\alpha)^{\nu} \geq 1 - \nu\alpha$. **β)** $(1-\alpha)^{\nu} \leq \frac{1}{1+\nu\alpha}$.

18. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει:

α) $12+24+36+\ldots+(12\nu) = 6\nu(\nu+1), \nu \geq 2$

β) $1+5+5^2+5^3+\ldots+5^{\nu} = \frac{5^{\nu+1}-1}{4}$.

γ) $\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots+\frac{1}{5^{\nu}} = \frac{5^{\nu}-1}{4 \cdot 5^{\nu}}$.

19. Με την βοήθεια της ανισότητας Bernoulli δείξτε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$, ισχύει:

α) $6^{\nu} > 5\nu$ **β)** $2(2\nu+3) \geq 5(2\nu)^{\nu}$ **γ)** $\left(\frac{4\nu+1}{\nu}\right)^{\nu} > 3\nu+2$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ –ΣΥΝΘΕΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=4$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1$ **α)** Να δείξετε ότι το σημείο $(1,-\sqrt{3})$ είναι κοινό τους σημείο και στη συνέχεια να βρείτε όλα τα κοινά σημεία. **β)** Να δείξετε ότι τα κοινά τους σημεία είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου και να βρείτε την οξεία γωνία των διαγωνίων του. γ) Να βρεθούν τα σημεία $M(x_0,y_0)$ ώστε $x_0^2+y_0^2=4$ και $(E'M)+(EM)=2\sqrt{6}$ (Ε, Ε΄ οι εστίες της έλλειψης). **δ)** Να βρεθεί η υπερβολή με τις ίδιες εστίες και ασύμπτωτη την ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(1,\sqrt{3})$.

2. Έστω τα σημεία $A(1,2)$, $B(3,1)$ και η σχέση $(2\kappa+3\lambda-7)\overrightarrow{OA}+(4-\kappa-\lambda)\overrightarrow{OB}+(3-\kappa-2\lambda)\overrightarrow{OM}=\vec{0}$. α) Να δειχθεί ότι τα Α, Β και Μ σημεία είναι συνευθειακά και να βρεθεί η ευθεία στην οποία κινείται το Μ. **(κ +2λ-3≠0)** β) Εάν $3\kappa+4\lambda=11$, τότε το Μ είναι μέσο του ΑΒ με $\kappa\neq 5$ και $\lambda\neq -1$. γ) Να βρεθούν οι τιμές του $\rho\in R$, ώστε η ευθεία $y=\rho x$ να τέμνει το τμήμα ΑΒ δ) Να δειχθεί ότι όταν $\rho=1$, τότε $4\kappa+5\lambda=15$, $\kappa\neq 5$ και $\lambda\neq -1$.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές $A(5,3)$, $B(0,0)$ και $\Gamma(6,0)$. Φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Δ αντιστοίχως. Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινείται το σημείο τομής των ΒΔ και ΓΕ.

4. Θεωρούμε τον κύκλο με κέντρο $K(-1,0)$ που διέρχεται από το σημείο $A(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$. α) Να βρείτε: i) την εξίσωση του κύκλου, ii) την εφαπτομένη ε του κύκλου . β) Αν η ε διέρχεται από την εστία της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον θετικό ημιάξονα Οx, τότε: i) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής. ii) Αν η διευθετούσα της παραβολής τέμνει τον κύκλο στα σημεία Μ, Ν να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΝ
Ε 40 (2001)

5. Δίνεται η εξίσωση $x^2+(\lambda-1)y^2=\lambda-1$, $\lambda\in R$. **α)** Για τις διάφορες τιμές του λ να βρείτε το είδος της γραμμής που εκφράζει η (1).
β) Στην περίπτωση που η (1) είναι εξίσωση υπερβολής να βρείτε την εξίσωση της και το εμβαδόν του ορθογωνίου της βάσης, όταν οι ασύμπτωτες που περιέχουν την υπερβολή σχηματίζουν γωνία **Ε 40 (2001)**

6. Δίνονται τα σημεία $M(1+\eta\mu\varphi, 2-\sigma\upsilon\nu\varphi)$, $\varphi\in[0,2\pi)$. **α)** Να δείξετε ότι τα σημεία κινούνται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα.
β) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου που άγονται από το $O(0,0)$ προς τον κύκλο.
γ) Αν Α, Β τα σημεία επαφής να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KB}$ και στη συνέχεια το εμβαδόν του τριγώνου ΚΑΒ.
δ) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με κορυφή $O(0,0)$, άξονα συμμετρίας τον x΄x και εστία το σημείο τομής Ε της ευθείας Αβ με τον άξονα x΄x. **Ε 48 (2003)**

7. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $C: x^2-y^2=16$ με εστίες στον άξονα x΄x. **α)** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων που διέρχεται από τις κορυφές της υπερβολής. **β)** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου c στο σημείο του Γ με τετμημένη $x_1=2$ και τεταγμένη $y_1>0$. **γ)** Έστω Μ το σημείο τομής της εφαπτομένης του κύκλου στο Γ με τον άξονα x΄x. Από το Μ φέρουμε παράλληλη στον y΄y που τέμνει τον έναν κλάδο της υπερβολής στα Δ και Ε. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο ΔΕ διέρχεται από το Γ. **Ε 48 (2003)**

8. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{O\Gamma}=(x-1,2x-4)$ και $\overrightarrow{O\Delta}=(x-2,x-3)$, όπου $x\in R$. Α. Να βρείτε το x ώστε $\overrightarrow{O\Gamma}\perp\overrightarrow{O\Delta}$. Β. Για τη μεγαλύτερη τιμή του x που βρήκατε στο Α
α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο ΓΔ.
β) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου στα Γ, Δ.
γ) Αν Β το σημείο τομής της εφαπτομένης στο Γ με τον y΄y και Α το σημείο τομής της εφαπτομένης στο Δ με τον x΄x, να βρεθεί η εξίσωση και η εκκεντρότητα της έλλειψης με κέντρο την αρχή των αξόνων και μία κορυφή στον άξονα y΄y το Β και μία στον x΄x το Α. **Ε 48 (2003)**

9. Δίνεται το σημείο $P(x_0,y_0)$**.** **α)** Αν το σημείο $P(x_0,y_0)$ κινείται σε κύκλο με εξίσωση $C: x^2+y^2=4$, να δείξετε ότι το σημείο $M(x,y)$ με $x=\frac{3}{2}x_0$ και $y=\frac{1}{2}y_0$, κινείται σε έλλειψη C_1 της οποίας να βρείτε την εκκεντρότητα**.** **β)** Αν Ε, Ε΄ τα σημεία τομής του κύκλου C με τον άξονα x΄x, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $A(x,y)$ του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων τους από τα Ε, Ε΄ είναι ίση με 1.
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής που είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}=(5,1)$. **Ε 48 (2003)**

10. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2\lambda x+2(2+\lambda)y+4\lambda+4=0$, $\lambda\in R^*$. **α)** Να δειχθεί ότι παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in R^*$**.** **β)** Για $\lambda=-2$, να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης η οποία έχει εστίες τα σημεία στα οποία ο κύκλος C τέμνει τον y΄y και μήκος μικρού άξονα τη διάμετρο του κύκλου.
γ) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής με κέντρο την αρχή των αξόνων, εστίες στον άξονα y΄y, ασύμπτωτη παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u}=(-4,-2)$ και εστιακή απόσταση ίση με το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης. **Ε 48 (2003)**

11.
Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(-6,8)$, $\vec{v}=(9,-12)$. **α)** Να δείξετε ότι είναι αντίρροπα.
β) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει ημιάξονες τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u},\vec{v}$ και μεγάλο άξονα στον y΄y. **γ)** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης που διέρχεται από το σημείο $K(20,0)$ και σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα x΄x.
Ε 48 (2003)

12. Δίνονται τα σημεία $A(-1,2)$, $B(-3,1)$, $\Gamma(3,-2)$ και $\Delta(4,-1)$. **α)** Να αναλύσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η μία να έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. **β)** Να δείξετε ότι η γραμμή που γράφουν τα σημεία $M(x,y)$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{\Gamma M}=0$ είναι κύκλος του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου που είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{u}=\text{προβ}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. **Ε 48 (2003)**

13. Δίνεται η παραβολή $c: y^2=2px$, $p>0$ και οι ευθείες $\varepsilon_1: y=\lambda x$, $\varepsilon_2: y=-\lambda x$, όπου λ θετικός ακέραιος. **α)** Δείξτε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ τέμνουν την παραβολή σε σημεία Α, Β συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x. **β)** Να βρείτε τον λ όταν η ΑΒ διέρχεται από την εστία της ε.
γ) Όταν το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ γίνεται μέγιστο, όπου Ο η αρχή των αξόνων, δείξτε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι κάθετες.

14. Τα σταθερά σημεία Ε΄, Ε είναι σημεία του x¨x συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων με $(Ε΄Ε) = 2\sqrt{5}$. Σημεία Μ του επιπέδου ικανοποιούν τις σχέσεις $\sqrt{[(ΜΕ΄)-(ΜΕ)]^2} = 4$ (1) και $\left|\overrightarrow{ΜΕ΄}^2 - \overrightarrow{ΜΕ}^2\right| = 24$ (2). **α)** Δείξτε ότι τα σημεία Μ ανήκουν σε δύο κωνικές τομές των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις. **β)** Αν $Μ(x_0, y_0)$ δείξτε ότι $x_0^2 = 9y_0^2$.

15.) Έστω Α και Β δύο σταθερά σημεία του επιπέδου. i) Να κατασκευάσετε τα σημεία Γ και Δ τα οποία ορίζονται από τις σχέσεις $\overrightarrow{ΓΑ} + 2\overrightarrow{ΓΒ} = \vec{0}$ και $\overrightarrow{ΔΑ} - 2\overrightarrow{ΔΒ} = \vec{0}$.
ii) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ του επιπέδου ισχύουν οι σχέσεις $\overrightarrow{ΜΑ} + 2\overrightarrow{ΜΒ} = 3\overrightarrow{ΜΓ}$ και $\overrightarrow{ΜΑ} - 2\overrightarrow{ΜΒ} = -\overrightarrow{ΜΔ}$ και να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία είναι $(\overrightarrow{ΜΑ} + 2\overrightarrow{ΜΒ}) \cdot (\overrightarrow{ΜΑ} - 2\overrightarrow{ΜΒ}) = κ$ με $κ \in R$. **κεφ. 3- 8Γ (1998)**

16.) Ενός ρόμβου ΑΒΓΔ η πλευρά ΑΒ έχει εξίσωση $2x + y - 5 = 0$, η διαγώνιος ΒΔ έχει εξίσωση $x - y - 1 = 0$ και η κορυφή Α έχει συντεταγμένες $(1,3)$. Να βρείτε: i) τις συντεταγμένες των τριών άλλων κορυφών του ρόμβου και ii) τις εξισώσεις των τριών άλλων πλευρών αυτού. **κεφ. 4- 4Γ (1998)**

17. i) Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών $ε_1 : λx - (λ+1)y - 1 = 0$ και $ε_2 : x - 2y + λ - 2 = 0$ για τις διάφορες τιμές του $λ \in R$. ii) Αν οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται, να αποδείξετε ότι το σημείο τομής τους Α κινείται σε σταθερή ευθεία. **κεφ. 4- 6Γ (1998)**

18. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τις ευθείες $ε_1 : x - 2y = 0$ και $ε_2 : x + 2y = 0$ είναι αντιστοίχως ίσος με 2. **κεφ. 4- 10Γ (1998)**

19. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2xy - 3x - 3y + 2 = 0$ παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες και στη συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου που σχηματίζουν οι ευθείες αυτές με τους άξονες. **κεφ. 4- 10Γ (1998)**

20. Να βρείτε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα Α, Β, Γ ώστε ο κύκλος $C: x^2 + y^2 + Ax + By + Γ = 0$: i) να διέρχεται από την αρχή των αξόνων,
ii) να έχει το κέντρο του α) στον άξονα x΄x , β) στον άξονα y΄y, γ) στην ευθεία $y = x$,
iii) να εφάπτεται α) στον άξονα x΄x , β) στον άξονα y΄y, γ) και στους δύο άξονες.,
iv) να έχει ακτίνα $ρ = 1$. **5.1- 3Β (1998)**

21. Δίνονται δύο κύκλοι C_1 και C_2 που διέρχονται από το σημείο $Α(14,2)$, έχουν τα κέντρα τους στην ευθεία $ε : y = \frac{1}{2}x$ και εφάπτονται του άξονα x΄x. Να βρείτε:
i) τις εξισώσεις τους, ii) την εξίσωση της άλλης κοινής εφαπτομένης **5.1- 4Β (1998)**

22. Δύο κύκλοι (K,R) και $(Λ,ρ)$ με $ρ < R$ βρίσκονται ο ένας εντός του άλλου. Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που εφάπτονται εσωτερικά του (K,R) και εξωτερικά του $(Λ,ρ)$ κινούνται σε μια κωνική. **κεφ. 5- 1Γ (1998)**

23. i) Αν $Μ(x, y)$ είναι σημείο του κύκλου $C: x^2 + y^2 = 1$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $3x + 4y$. Ποιο σημείο του κύκλου απέχει λιγότερο και ποιο περισσότερο από την ευθεία $ε: 3x + 4y + 10 = 0$; ii) Ομοίως, αν το $Μ(x, y)$ είναι σημείο της έλλειψης $C: x^2 + 4y^2 = 4$. **κεφ. 5- 2Γ (1998)**

24. Έστω η παραβολή $C: y^2 = 4x$ και μια ευθεία ε που διέρχεται από την εστία Ε της παραβολής και την τέμνει στα σημεία Α και Β. Έστω επιπλέον Γ, Δ οι προβολές των Α, Β πάνω στη διευθετούσα της παραβολής C και M το μέσο του ΓΔ.

i) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των Α, Β, Γ, Δ και Μ ως συνάρτηση της τεταγμένης του Α.

ii) Να αποδείξετε ότι η αρχή των αξόνων είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τραπεζίου ΑΒΓΔ. iii) Να αποδείξετε ότι $AMB = 90^o$ και ότι το ΜΕ είναι ύψος του τριγώνου ΑΜΒ.

iv) Να αποδείξετε ότι $\Gamma E \Delta = 90^o$ και να υπολογίσετε το (ΜΕ) συναρτήσει της τεταγμένης του Α. **κεφ. 5- 7Γ (1998)**

25. Να σχεδιάσετε την καμπύλη με εξίσωση $\frac{x|x|}{9} + \frac{y|y|}{4} = 1$ **κεφ. 5- 10Γ**

26. Δίνεται η εξίσωση $\frac{x^2}{25-\lambda} + \frac{y^2}{16-\lambda} = 1$. Να αποδείξετε ότι: i) Η εξίσωση αυτή παριστάνει έλλειψη αν $\lambda < 16$, υπερβολή αν $16 < \lambda < 25$, ενώ είναι αδύνατη αν $\lambda > 25$.

ii) Για όλες τις τιμές του λ οι κωνικές τομές που παριστάνει η εξίσωση έχουν κοινές εστίες.

κεφ. 5- 12Γ (1998)

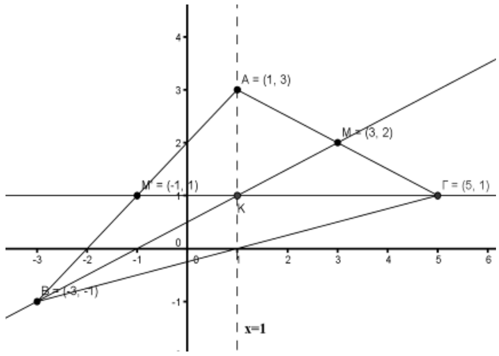
27. Δίνεται η εξίσωση $C: x^2 + y^2 + 2x - y - 3 + \lambda(x + y - 2) = 0 \ (1), \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δειχθεί ότι η (1) παριστάνει κύκλο C για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να δειχθεί ότι ο κύκλος C διέρχεται από 2 σταθερά σημεία.

γ) Να βρεθεί ο γ.τ. των κέντρων των παραπάνω κύκλων. **Ε 39 (2001)**

28. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ αν είναι $A(1,3)$ και $x - 2y + 1 = 0$, $y - 1 = 0$ οι εξισώσεις των διαμέσων του. **Ε 70 (2008)**



ΛΥΣΗ

Έστω $BM: x - 2y + 1 = 0$, $\Gamma M': y = 1$. λύνω το σύστημα και έχω $K(1,1)$ $x_A = x_\kappa = 1$ άρα $AK: x = 1$. Ισχύει $x_M = \frac{x_\Gamma + 1}{2}$, $y_M = \frac{y_\Gamma + 3}{2}$ $\Rightarrow x_\Gamma = 2x_M - 1, y_\Gamma = 2y_M - 3$. Ομοίως $x_B = 2x_{M'} - 1$, $y_B = 2y_{M'} - 3$. Επειδή $M' \in \Gamma M' \Rightarrow$ $y_{M'} = 1 \Rightarrow y_B = -1$ $\Rightarrow$ $x_B + 2 + 1 = 3$ $\Rightarrow$ $x_B = -3 \Rightarrow x_{M'} = -1$. Επειδή $\Gamma M': y_\Gamma = 1 \Rightarrow y_M = 2 \Rightarrow BM: x_M = 3.$ .... $AB: y = x + 2$........$A\Gamma: y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$. Λύνω το σύστημα $A\Gamma, \Gamma M'$... $x_\Gamma = 5$ τότε $B\Gamma: y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$.

29. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ αν είναι γνωστή η κορυφή του $\Gamma(8,-2)$ και οι εξισώσεις της διχοτόμου του $A\Delta: 3x + y - 12 = 0$ και της διαμέσου του $AM: 11x + 6y - 58 = 0$. (Υποδ: το συμμετρικό του Γ ως προς την διχοτόμο είναι σημείο της ΑΒ γιατι;)

Ε 70 (2008)

30. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, αν είναι $B(2,-2)$ και $x - 3y + 2 = 0$, $x + y + 2 = 0$ οι εξισώσεις μιας εσωτερικής διχοτόμου του και ενός ύψους του αντιστοίχως, που άγονται από διαφορετική κορυφή. **Ε 70 (2008)**

31. Αφού διαπιστωθεί ότι το σημείο $M(5,-1)$ είναι εξωτερικό του κύκλου $C: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης, που άγεται από το Μ προς τον κύκλο. **Ε 39 (2001)**

32. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο $K(2,3)$ και κόβει από την ευθεία $\varepsilon: x + 2y - 1 = 0$ χορδή μήκους 4 μονάδες. **Ε 39 (2001)**

33. Δίνεται κύκλος $C: x^2+y^2+\lambda x-\lambda y=0$ και η ευθεία $\varepsilon: y=x+1$. Να βρεθούν οι τιμές του λ, ώστε: **α)** η ε να εφάπτεται του C, **β)** η ε να τέμνει τον C κατά χορδή ΑΒ, **γ)** η χορδή ΑΒ να φαίνεται από το Ο(0,0) υπό ορθή γωνία. **Ε 39 (2001)**

34. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ διάφορα του μηδενικού για τα οποία ισχύει: $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|=\sqrt{21}$, $|2\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=2$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$. **α)** Να βρεθούν τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

β) Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. **γ)** Να δείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=\vec{\alpha}$

δ) Αν $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, όπου Ο η αρχή των αξόνων, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ. **Ε 64 (2007)**

35. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2|\vec{\alpha}|x+y=5$, $\varepsilon_2: 4|\vec{\beta}|x+y=-3$, $\varepsilon_3: x-4y=2$, όπου $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δυο διανύσματα και $\vec{u}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$. Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 \perp \varepsilon_3$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\dfrac{2\pi}{3}$, τότε να δείξετε ότι:

α) $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$ και $|\vec{u}|=2\sqrt{3}$, **β)** $\vec{\beta}\cdot\vec{u}=-3$, **γ)** $(\widehat{\vec{\beta},\vec{u}})=5(\widehat{-2\vec{\beta},\vec{u}})$. **Ε 64 (2007)**

36. Δίνονται τα συνεπίπεδα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=\sqrt{2}$ και $2\vec{\gamma}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+6$. Να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=2\vec{\gamma}$. **Ε 61 (2006)**

37. Δίνονται τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2$. Να δειχθεί ότι: **α)** $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{x}=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{x}}{\vec{\alpha}^2}\vec{\alpha}$

β) Αν για ένα διάνυσμα $\vec{x}$ ισχύει $(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\vec{x}=12\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{x}+4\vec{\beta}$ (1): i) $\vec{x}=3\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$, ii) Αν το διάνυσμα $\vec{x}$ που ικανοποιεί την (1) είναι μοναδικό τότε να βρεθεί το λ. **Ε 61 (2006)**

38. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,-3)$ και $\vec{\beta}=(1,2)$. α) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}=|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|$

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ με τον άξονα x΄x. δ) Να αποδείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=-\dfrac{1}{2}\vec{\alpha}$ **ε)** Να υπολογίσετε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{Z}$, ώστε το διάνυσμα $\vec{u}=(\lambda^2-4,-\lambda)$, να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\gamma}$. **Ε 76 (2010)**

39. Δίνονται τα σημεία Α(2,9), Β(–6,15) και Γ(4,–5) **α)** Να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι κορυφές τριγώνου. **β)** Αν ΑΜ διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι $AM\perp AB$ **γ)** Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\text{προβ}_{\overrightarrow{BA}}\overrightarrow{B\Gamma}=2\overrightarrow{BA}$. **Ε 76 (2010)**

40. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2\lambda^2x-4\lambda y+4\lambda^2=0$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$ (1). Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}^*$, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Κάθε κύκλος που προκύπτει από την εξίσωση (1) εφάπτεται στον άξονα y΄y.

γ) Τα κέντρα όλων των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε παραβολή.

δ) Από το σημείο Ο(0,0), άγονται προς κάθε κύκλο που προκύπτει από την εξίσωση (1) δύο εφαπτομένες. **Ε 76 (2010)**

41. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+8\lambda^2x-8\lambda y+16\lambda^2(\lambda^2+1)=5$, $\lambda\in\mathbb{R}$ (1). Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση (1) είναι ίσοι μεταξύ τους.

γ) Τα κέντρα όλων των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε παραβολή, της οποίας να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα.

δ) Δύο μόνο από τους παραπάνω κύκλους διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

Ε 76 (2010)

42. Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2x^2+(2-\lambda)y^2-6\lambda x-8y+16\lambda^2=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο (C) μόνο για $\lambda=1$.

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου (C).

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου (C) που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

δ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (C_1), που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται εξωτερικά του κύκλου (C). **Ε 76 (2010)**

43. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1:\lambda x-2y=-2\lambda$ και $\varepsilon_2:x+2\lambda y=2$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε_1 και ε_2, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, ανήκει στην έλλειψη με μεγάλο άξονα 4 και εστίες τα σημεία $(\sqrt{5},0)$ και $(-\sqrt{5},0)$ **Ε 76 (2010)**

44. Δίνεται έλλειψη με εστίες Ε΄ και Ε στον άξονα x΄x, η οποία στο σημείο της $P(4,\frac{9}{5})$ έχει εφαπτομένη την ευθεία $\varepsilon:4x+5y=25$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης.

β) Αν η ευθεία ε τέμνει τις εφαπτόμενες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ της έλλειψης στα άκρα Α΄, Α του μεγάλου της άξονα στα σημεία Γ΄ και Γ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\Gamma'E'$, ΓΕ και η κάθετη ζ στην ε στο σημείο της Ρ, συντρέχουν στο σημείο Σ.

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ΄, Ε΄, Ε και Γ ανήκουν στον κύκλο με κέντρο το σημείο τομής Κ της ευθείας ε και του άξονα y΄y. **Ε 76 (2010)**

45.α) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις εστίες της στον άξονα x΄x και για την οποία ισχύουν: i) Έχει ασύμπτωτη η οποία σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 30^o.

ii) Ο δεξιός κλάδος της έχει εφαπτομένη την ευθεία ε με εξίσωση $x-\sqrt{2}y=1$

β) Αν οι εφαπτόμενες της υπερβολής στις κορυφές της Α και Α΄ τέμνουν τις ασύμπτωτές της στα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά ανήκουν στον κύκλο διαμέτρου ΕΕ΄, όπου Ε και Ε΄ οι εστίες της υπερβολής.

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν είναι κορυφές ορθογωνίου του οποίου και να βρείτε το εμβαδόν του. **Ε 76 (2010)**

46. Οι κορυφές Α και Γ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ έχουν συντεταγμένες $(8,-6)$ και $(2,2)$ αντιστοίχως. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Δ. **Ε 79 (2011)**

47. Δίνεται η εξίσωση $5x^2+5y^2-20x+16=0$.

α) Να δειχθεί ότι η δοσμένη εξίσωση παριστάνει κύκλο του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

β) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες αυτού του κύκλου που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ που έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες του ερωτήματος (β) όταν επιπλέον γνωρίζουμε ότι $\beta^2+\alpha^2=20$ **Ε 79 (2011)**

49. Ή παραβολή με εξίσωση $x^2=\kappa y$ με $\kappa\in\mathbb{R}$ διέρχεται από το σημείο $M(2,1)$.

α) Να βρεθεί η εστία και η διευθετούσα της παραβολής.

β) Έστω Ε΄ το συμμετρικό της εστίας Ε ως προς τον άξονα x΄x. Να βρεθεί η γραμμή (γ) στην οποία κινούνται τα σημεία $M(x,y)$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{ME}^2 = \overrightarrow{ME'} \cdot \overrightarrow{ME}$.

γ) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία που η γραμμή (γ) τέμνει την παραβολή.

δ) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα δύο σημεία επαφής και από το σημείο τομής των εφαπτόμενων. **Ε 79 (2011)**

50. Δίνονται οι ελλείψεις $C_1 : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ και $C_2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των C_1, C_2 βρίσκονται στις ευθείες που διχοτομούν τις γωνίες του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου που ορίζουν τα σημεία τομής. **Ε 79 (2011)**

51. Δίνεται η έλλειψη $C: 4x^2 + y^2 = 4$ και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x + \kappa$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του κ για τις οποίες η ε και η C έχουν δύο κοινά σημεία.

β) Από τις τιμές του κ που βρέθηκαν στο ερώτημα (α), να προσδιοριστούν εκείνες για τις οποίες η C αποκόπτει από την ε ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ το οποίο φαίνεται από το κέντρο Ο της C υπό ορθή γωνία. **Ε 43 (2002)**

52. Έστω η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\lambda y + 2\lambda^2 - 4 = 0$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ένα σύνολο ίσων κύκλων.

β) Να υπολογίσετε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων.

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος εφάπτεται σε δύο σταθερές ευθείες, των οποίων να υπολογίσετε τις εξισώσεις. **Ε 43 (2002)**

53. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $M(1,-2)$, τέμνουν τον κύκλο $C: x^2 + y^2 - 14x + 10y + 49 = 0$ σε δύο σημεία Ε και Ζ και το μήκος της χορδής ΕΖ είναι 8. **Ε 75 (2010)**

54. Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon: 2x - y - 3 = 0$ και τον κύκλο $C: x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$.

α) Να δείξετε ότι η ευθεία ε και ο κύκλος C τέμνονται. Ονομάζουμε Μ και Ν τα σημεία τομής.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 - x + y - 2 + \lambda(2x - y - 3) = 0$ (1), για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, παριστάνει ένα κύκλο C_λ, ο οποίος διέρχεται από τα σημεία Μ και Ν.

γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων C_λ, όταν το λ διατρέχει το $\mathbb{R}$. **Ε 75 (2010)**

55. Θεωρούμε την παραβολή $C: y^2 = 4x$ και την ευθεία $\varepsilon: 4x - 3y - 12 = 0$ Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της C, του οποίου η απόσταση από την ευθεία ε είναι η ελάχιστη δυνατή. Ποια είναι η ελάχιστη αυτή απόσταση; **Ε 75 (2010)**

56. Δίνονται τα σημεία $A(-1,0)$, $B(3,4)$ και η ευθεία $\varepsilon: x + y + 1 = 0$. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα Α και Β και τέμνει την ευθεία ε ορίζοντας σε αυτήν χορδή μήκους $8\sqrt{2}$. **Ε 68 (2008)**

57. Δίνεται η εξίσωση $C: x^2 + y^2 + 2tx - 2ty - 4 = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (C) παριστάνει κύκλο. Επίσης να δείξετε ότι τα κέντρα αυτών των κύκλων ανήκουν σε σταθερή ευθεία.

β) Να προσδιορίσετε εκείνον τον κύκλο που με την ευθεία $y = 2$ τέμνονται στα σημεία Α και Β ώστε $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$. **Ε 68 (2008)**

58. Δίνονται τα μη συγγραμμικά και μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $(\widehat{\alpha,\beta}) = \frac{\pi}{4}$ το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + (\lambda - 1)\vec{\beta}, \lambda \in \mathbb{R}$ και η εξίσωση $\varepsilon: \vec{\alpha}\vec{\gamma}x + \vec{\beta}\vec{\gamma}y + (\vec{\alpha} + \vec{\beta})\vec{\gamma} = 0$.

Να αποδείξετε ότι: **α)** Η ε παριστάνει ένα σύνολο ευθειών **β)** Όλες οι ευθείες ε διέρχονται από ένα σταθερό σημείο το οποίο να βρεθεί. **Ε 58 (2005)**

59. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2+y^2=25$, $C_2: 25x^2+25y^2-100x-261=0$.

α) Να βρείτε την εφαπτομένη ε του κύκλου C_1 στο σημείο του $A(3,\mu)$, $\mu>0$.

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C_2.

γ) Να δείξετε ότι η ε να εφάπτεται στον κύκλο C_2.

δ) Να δείξετε ότι οι κύκλοι τέμνονται.

ε) Να βρείτε την άλλη κοινή εφαπτομένη των κύκλων C_1 και C_2. **Παπασπηλίου**

Λύση

α) $C_1: x^2+y^2=5^2$, άρα $K_1(0,0)$, $\rho_1=5$. Η εφαπτόμενη του C_1 στο $A(3,\mu)$ είναι $\varepsilon: 3x+\mu\cdot y=25$ και επειδή $\mu\in C_1 \Rightarrow 9+\mu^2=25 \Rightarrow \mu=4$. Άρα η εφαπτόμενη είναι η $\varepsilon: 3x+4y=25$.

β) $C_2: x^2+y^2-4x-\dfrac{261}{25}=0$, $A^2+B^2-4\Gamma=16+\dfrac{1044}{25}=\left(\dfrac{38}{5}\right)^2>0$, άρα $K_2(2,0)$, $\rho_2=\dfrac{19}{5}$,

δηλαδή $C_2: (x-2)^2+y^2=\left(\dfrac{19}{5}\right)^2$.

γ) Πρέπει $d(\varepsilon,K_2)=\rho_2$ δηλαδή $\dfrac{|3\cdot 2+\mu\cdot 0-25|}{\sqrt{9+\mu^2}}=\dfrac{19}{5} \Rightarrow |6-25|=\dfrac{19}{5}\sqrt{9+\mu^2} \Rightarrow 19=\dfrac{19}{5}\sqrt{9+4^2}$ που ισχύει., άρα η ε είναι εφαπτόμενη του C_2.

δ) $d(C_1,C_2)=|2-0|=2<5+\dfrac{19}{5}$, άρα C_1, C_2 τέμνονται.

ε) Η διάκεντρος έχει εξίσωση $y=0$ διότι $K_2(2,0)$ και $K_1(0,0)$, άρα η άλλη εφαπτόμενη θα είναι συμμετρική ως προς τον x΄x ($y=0$) δηλαδή αν $\varepsilon: 3x+4y=25$, τότε $\varepsilon': 3x-4y=25$. Πράγματι,

$d(\varepsilon',K_1)=\dfrac{|3\cdot 0-4\cdot 0-25|}{\sqrt{9+16}}=5=\rho_1$ και $d(\varepsilon',K_2)=\dfrac{|3\cdot 2-4\cdot 0-25|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{19}{5}=\rho_2$.

60. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2\lambda^2 x-\lambda y=2$ και $\varepsilon_2: 4\lambda x+y=\dfrac{1}{\lambda}$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε_1 και ε_2, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε το είδος της γραμμής στην οποία ανήκει το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}^*$. **Ε 76 (2010)**

61. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-(\lambda+8)x+\lambda y+7=0$ με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να δειχθεί ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

β) Να βρεθεί η γραμμή πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα αυτών των κύκλων.

γ) Να δειχθεί ότι όλοι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από δύο σταθερά σημεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

δ) Θεωρούμε τον κύκλο που ορίζεται για $\lambda=0$. Να βρεθούν τα σημεία αυτού του κύκλου που απέχουν από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση αντίστοιχα.

Ε 79 (2011)

62. Θεωρούμε τον κύκλο $C: (x-1)^2+y^2=4^2$ και την ευθεία $\varepsilon: y=2x+3$.

α) Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία ε δεν έχουν κοινό σημείο.

β) Από ένα σημείο Μ της ευθείας ε φέρνουμε τις εφαπτόμενες στον κύκλο C και ονομάζουμε Α και Β τα σημεία επαφής. Να δείξετε ότι, όταν το σημείο Μ διαγράφει την ευθεία ε, η ευθεία ΑΒ διέρχεται από ένα σταθερό σημείο. **Ε 75 (2010)**

63. Δίνονται τα μη συγγραμμικά ανά δύο διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ και οι ευθείες

$\varepsilon_1: x+y-2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}(y-x)=0$, $\varepsilon_2: x+y+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}(x-y-1)=0$. Αν οι ευθείες ταυτίζονται να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha}+\vec{\gamma})$. **Ε 58 (2005)**

64. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\gamma}|=2$ και $|\vec{\beta}|=1$. Αν η εξίσωση $C: x^2+y^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}x+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}y+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0$ παριστάνει κύκλο, να αποδείξετε ότι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\gamma}$ βρίσκεται στο διάστημα $(\frac{\pi}{3},\pi)$. **Ε 58 (2005)**

65. Η ευθεία $\varepsilon: x-y-3=0$ τέμνει τον κύκλο $C: x^2+y^2-2\alpha x-4\alpha y=0$ στα σημεία Α, Β. Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$, όπου Ο η αρχή των αξόνων. **Ε 58 (2005)**

66. Δίνεται η εξίσωση $\varepsilon_\lambda: (1+\lambda)x+(\lambda-1)y+1+\lambda=0$, $\lambda\notin\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: i) Η ε_λ παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\notin\mathbb{R}$.

ii) Οι ευθείες ε_λ διέρχονται από σταθερό σημείο Ρ το οποίο να βρείτε.

β) Να προσδιορίσετε την εξίσωση του κύκλου C που εφάπτεται στον άξονα y΄y και έχει κέντρο το σημείο Ρ. **Ε 58 (2005)**

67. Να βρείτε τη μικρότερη απόσταση του σημείου $A(4,4)$ από τον κύκλο $C: x^2+y^2-2x=0$. **Ε 58 (2005)**

68. Δίνονται οι εξισώσεις $(\lambda^2-4\lambda)x+(\lambda^2-1)y+4\lambda-1=0$ (1) και $(\lambda+1)x+(\lambda-2)y+3=0$ (2) με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) να δειχθεί ότι κάθε μια από τις εξισώσεις (1), (2) αποτελεί εξίσωση ευθείας για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Να δειχθεί ότι κάθε μια από τις παραπάνω ευθείες με εξισώσεις (1), (2) διέρχεται από σταθερό σημείο.

γ) Να εξεταστεί αν υπάρχει ευθεία που να ανήκει συγχρόνως και στις δύο οικογένειες ευθειών που ορίζονται από τις εξισώσεις (1) και (2) και να βρεθεί η εξίσωση της.

δ) Να βρεθεί η τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ για την οποία οι ευθείες του ερωτήματος (α) είναι κάθετες, **Ε 78 (2010)**

69. Δίνεται η παραβολή $C: y^2=2px$ και ένα σημείο της Μ, διαφορετικό από το 0. Η εφαπτόμενη (ε) της C στο Μ και η κάθετη (η) προς αυτή στο σημείο Μ τέμνουν τον άξονα x΄x στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι $EA=EB$, όπου Ε είναι η εστία της παραβολής. **Παπασπηλίου**

Λύση

$\varepsilon: y\cdot y_M=p(x+x_M)$. Για $y=0$, $x=-x_M$ άρα $A(-x_M,0)$ και $d(E,A)=\left|\frac{p}{2}+x_M\right|=\frac{p}{2}+x_M$,

$\lambda_{MB}=-\frac{y_M}{p}$ και $MB: y-y_M=-\frac{y_M}{p}(x-x_M)$. Για $y=0$ έχω

$0-y_M=-\frac{y_M}{p}(x-x_M)\Rightarrow x_B=p+x_M$. Άρα $d(E,B)=\left|p+x_M-\frac{p}{2}\right|=\left|\frac{p}{2}+x_M\right|=\frac{p}{2}+x_M$.

Άρα $EA=EB$.

70. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ με $AOB=90^o$ είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $C: y^2=2px$. Αν το τρίγωνο στρέφεται γύρω από το Ο, να αποδειχθεί ότι η χορδή ΑΒ της παραβολής διέρχεται από σταθερό σημείο. **Παπασπηλίου**

Λύση

Αφού $y_A^2=2px_A$, $y_A\neq 0$, $y_B\neq 0$, $y_B^2=2px_B$, $\lambda_{AB}=\dfrac{y_A-y_B}{\dfrac{y_A^2-y_B^2}{2p}}=\dfrac{2p}{y_A+y_B}$, άρα

$AB: y-y_A=\frac{2p}{y_A+y_B}(x-x_A)$. Για $y=0$ έχω

$-y_A=\frac{2p}{y_A+y_B}(x-x_A)\Rightarrow -\cancel{y_A^2}-y_Ay_B=2px-\cancel{2px_A}\Rightarrow x_M=\frac{-y_Ay_B}{2p}$, $y_M=0$ (1). Ακόμα

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ δηλαδή $\left(\dfrac{y_A^2}{2p},y_A\right)\cdot\left(\dfrac{y_B^2}{2p},y_B\right)=0\Rightarrow \dfrac{y_A^2y_B^2}{4p^2}+y_Ay_B=0\Rightarrow y_Ay_B\left(\dfrac{y_Ay_B}{4p^2}+1\right)=0$, άρα

$\dfrac{y_Ay_B}{4p^2}=-1\Rightarrow y_Ay_B=-4p^2$ (2). Η (10 από την (2) γίνεται $x_M=\dfrac{4p^2}{2p}=2p=$ σταθερό, άρα $M(2p,0)$.

71. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-4)$ και $\vec{\beta}\neq\vec{0}$, για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=6$ και $|2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}|=4\sqrt{14}$.

α) Να δειχθεί ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ και να βρεθεί το $|\vec{\beta}|$.

β) Να βρεθεί το διάνυσμα της προβολής του διανύσματος $\vec{v}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και το διάνυσμα της προβολής του διανύσματος $\vec{v}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{\beta}$.

γ) Να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{\beta}$. **Ε 69 (2008)**

72. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ο του επιπέδου του τριγώνου, για το οποίο ισχύει ότι $|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|+|\overrightarrow{O\Gamma}|=1$ και $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}$.

α) Να υπολογιστεί η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$.

β) Να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. **Ε 69 (2008)**

73. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $|\overrightarrow{AB}|=4$, $|\overrightarrow{A\Gamma}|=6$, Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ και η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ ίση με $\dfrac{\pi}{3}$.

α) Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$.

β) Να βρεθεί το μέτρο της προβολής του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ πάνω στο διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$. **Ε 69 (2008)**

74. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,1)$ και $\vec{\beta}=(1,-1)$. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{\gamma}$ συνεπίπεδο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για το οποίο ισχύουν τα ακόλουθα: i) $\vec{\gamma}\perp\vec{\alpha}$, ii) σχηματίζει αμβλεία γωνία με το διάνυσμα $\vec{\beta}$ και iii) $|\vec{\gamma}|=|\vec{\alpha}|$. **Ε 69 (2008)**

75. Δίνονται η ευθεία $\varepsilon: 5x+3y+2=0$ και ο κύκλος $C: x^2+y^2-x-2=0$, που τέμνονται στα σημεία Μ και Ν.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ η $x^2+y^2-x-2+\lambda(5x+3y+2)=0$ (1), παριστάνει κύκλο, ο οποίος περνάει από τα σημεία Μ και Ν. Για ποια τιμή του λ, ο κύκλος αυτός περνάει και από την αρχή των αξόνων;

β) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων της ερώτησης (α) ανήκουν σε ευθεία ε_1, της οποίας να βρείτε την εξίσωση. **Ε 82 (2011)**

76. Δίνονται τα σημεία $A\left(-2,\dfrac{\lambda-2}{\lambda+1}\right)$ και $B\left(\dfrac{-1}{\lambda},-1\right)$, $\lambda>1$.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που διέρχονται από τα σημεία Α, Β για τις διάφορες τιμές του λ ανήκουν στην οικογένεια των ευθειών $(\varepsilon_\lambda): \lambda x+(\lambda+1)y+\lambda+2=0$.

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες (ε_λ) διέρχονται από σταθερό σημείο.

γ) Να βρείτε την ευθεία (ε) της οικογένειας (ε_λ) ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ να είναι ίσο με 1.

δ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο $x^2+(y-3)^2=13$.

ε) Να βρείτε σημείο Λ του άξονα x΄x ώστε το συμμετρικό του Κ ως προς την ευθεία (ε) να βρίσκεται στον άξονα y΄y. **Ε 60 (2006)**

77. Δίνονται τα σημεία $A(1,5)$, $B(5,-2)$ και $\Gamma(-3,-3)$.

α) Αν $M(x,y)$ είναι τυχαίο σημείο του επιπέδου, να αποδείξετε ότι: i) $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{M\Gamma}^2\geq 70$.

ii) Αν ισχύει $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{M\Gamma}^2=85$, τότε το σημείο Μ κινείται σε κύκλο (C), του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $P(3,1)$ περιέχεται στον κύκλο αυτό και να βρείτε την εφαπτομένη που διέρχεται από το Ρ.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες του κύκλου που άγονται από το σημείο $T(0,3)$. **Ε 60 (2006)**

78. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ και το σημείο της $P(2,3)$.

α) Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της έλλειψης στο Ρ και την κάθετη (η) στην εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των προβολών Μ και Ν της εστίας Ε στις ευθείες (ε) και (η).

γ) Να αποδείξετε ότι: i) Τα σημεία Ο, Μ, Ν είναι συνευθειακά. ii) $(MNE)=3(ONE)$.

δ) Αν για τους αριθμούς x_1,x_2,y_1,y_2 ισχύει $3x_1^2+4y_1^2=3x_2^2+4y_2^2=48$, να αποδείξετε ότι $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\le 64$. **Ε 60 (2006)**

79. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$, τα οποία ανά δύο δεν είναι συγγραμμικά. Αν $\vec{\alpha}//(\vec{\beta}+2\vec{\gamma})$ και $\vec{\beta}//(\vec{\gamma}+2\vec{\alpha})$, να αποδείξετε ότι $\vec{\beta}=-4\vec{\alpha}-2\vec{\gamma}$. **Ε 49 (2003)**

80. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Αν $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{A\Delta}+y\overrightarrow{AE}$ με $x+y=2$, να αποδείξετε ότι: α) $\overrightarrow{\Delta E}//\overrightarrow{B\Gamma}$, β) Τα Μ, Β, Γ είναι συνευθειακά. **Ε 49 (2003)**

81. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,3)$.

α) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}=-10\vec{\alpha}+6\vec{\beta}$ και τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x΄x.

β) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{v}=(8,13)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. Στη συνέχεια να αναλύσετε το $\vec{v}$ σε δύο συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$ και η άλλη στο $\vec{\beta}$. **Ε 49 (2003)**

82. Δίνονται τα σημεία $A(1,-\frac{3}{2})$, $B(2,-1)$ και $M(\alpha,\frac{\alpha-4}{2})$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα Α, Β, Μ είναι συνευθειακά για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

β) Αν $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, να υπολογίσετε τον α.

γ) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του α, έτσι ώστε $|\overrightarrow{OM}|<\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **Ε 49 (2003)**

83. Θεωρούμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, πλευράς α και το ύψος του ΑΔ. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα: i) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$, ii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$, iii) $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{BA}$. **Ε 49 (2003)**

84. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ ώστε $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$, $|\vec{\gamma}|=\sqrt{2}$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}})$. **Ε 49 (2003)**

85. Έστω τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq 0$ με $4|\vec{\alpha}|=3\sqrt{3}|\vec{\beta}|$ (1). Αν $\vec{\alpha}\perp(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta})$, να αποδείξετε ότι $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{6}$. **Ε 49 (2003)**

86. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και το μέσο Δ της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, που είναι τέτοια ώστε $\overrightarrow{\Delta M}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+2\overrightarrow{\Delta M}\cdot\overrightarrow{BA}=0$ ανήκουν σε μια ευθεία. **Ε 49 (2003)**

87. Έστω $\vec{\alpha}=(-3,4)$ και $\vec{\beta}=(1,2)$. Να υπολογίσετε το διάνυσμα $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$. **Ε 49 (2003)**

88. Δίνεται το σταθερό σημείο Α. Αν τα σημεία Ο, Μ είναι τέτοια ώστε $\overrightarrow{OM}^2+\overrightarrow{OA}^2=4+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$, να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ανήκει σε έναν κύκλο. **Ε 49 (2003)**

89. Έστω το διάνυσμα $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}|=1$ και $|\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}|=\frac{1}{2}$. Να υπολογίσετε τη γωνία

$(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$. **Ε 49 (2003)**

90. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}$ με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$. Αν για ένα τυχαίο διάνυσμα $\vec{\gamma}\neq\vec{0}$ ισχύει

$|\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|=|\vec{\gamma}+\vec{\beta}|$,

α) Να δείξετε ότι $\vec{\beta}=-\vec{\alpha}$.

β) Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\delta}$ για το οποίο ισχύει η σχέση $|\vec{\delta}+\vec{\alpha}|=|\vec{\delta}+\vec{\beta}|$, είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

γ) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα $\vec{\delta}$ του (β) ερωτήματος είναι παράλληλο στην ευθεία $\varepsilon: 2x+3y+1=0$ και ότι $|\vec{\alpha}|=\sqrt{13}$, να βρείτε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. **Ε 84 (2012)**

91. Δίνονται τα σημεία $B(1,2)$ και $\Gamma(4,6)$. Γνωρίζουμε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ διέρχονται από τα σημεία Β, Γ αντίστοιχα και τέμνονται κάθετα σε σημείο Α του άξονα y΄y.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α.

β) Να βρείτε το συμμετρικό Ε του μέσου Μ του ΒΓ ως προς την ΑΓ.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΜΓΕ. **Ε 84 (2012)**

92. Δίνονται τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(0,3)$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x,y)$, για τα οποία ισχύει $AMB=90^o$.

93. Έστω η ευθεία $\varepsilon: y=\lambda x+1$ και η παραβολή $C: y=\frac{1}{4}x^2$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η ευθεία ε τέμνει την C σε δύο σημεία Α και Β.

β) Οι εφαπτόμενες της C στα σημεία Α και Β είναι κάθετες μεταξύ τους.

γ) Το κοινό σημείο των παραπάνω εφαπτόμενων ανήκει σε σταθερή ευθεία.

94. Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες του κύκλου $C_1: y^2=8px$, όπου $p>0$ και να αποδείξετε ότι είναι κάθετες μεταξύ τους.

95. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής η οποία έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα x΄x, κορυφή $O(0,0)$ και τέμνεται από την ευθεία $\varepsilon: y=x-3$ σε δύο σημεία Α και Β με $(AB)=8\sqrt{2}$.

96. Να βρείτε τις εξισώσεις των κοινών εφαπτόμενων των παραβολών $C_1: y^2=16x$ και $C_2: x^2=2y$.

97. Θεωρούμε μία ευθεία ε και το σημείο Α που δεν ανήκει στην ε. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων, οι οποίοι εφάπτονται στην ε και διέρχονται από το σημείο Α.

98. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $C: y^2=8x$, η οποία σχηματίζει με την ευθεία $\varepsilon: y=3x-2$, γωνία 45^o.

99. Σε αγώνα ποδοσφαίρου του ισπανικού πρωταθλήματος μεταξύ Barcelona και Real ύστερα από εκτέλεση κόρνερ του Alves η μπάλα ακολουθώντας παραβολική τροχιά στο επίπεδο του γηπέδου έφθασε στον Villa που βρισκόταν στο ημικύκλιο της μεγάλης περιοχής. Εάν τα σουτ του Villa δίνονται από την οικογένεια των ευθειών $\varepsilon_\lambda: (\lambda+1)x+(\lambda-1)y=5\lambda-3$, να βρείτε:

α) Τη θέση του Villa στο γήπεδο. (Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, όπου το σημείο του κόρνερ είναι το $O(0,0)$.

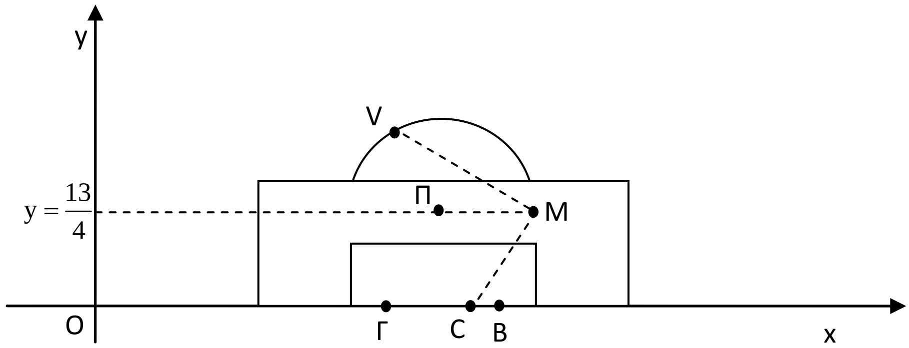
β) Την εξίσωση που περιγράφει το κόρνερ που εκτέλεσε ο Alves.

γ) Αν το τέρμα του Casillas βρίσκεται στον άξονα x΄x και έχει άκρα τα σημεία $\Gamma(2,0)$ και $B(3,0)$, να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες ο Villa σημαδεύει το εσωτερικό του τέρματος.

δ) Αν ο Messi κινούμενος στην ευθεία $y=\frac{13}{4}$, βρίσκεται στο ύψος του πέναλτι, να βρείτε την εξίσωση του «ημικυκλίου» της μεγάλης περιοχής, γνωρίζοντας ότι το σημείο του πέναλτι είναι το κέντρο του.

ε) Στο 32΄ λεπτό του πρώτου ημιχρόνου, ύστερα από πάσσα του Villa στο Messi, το ευθύγραμμο σουτ του Messi κατέληξε στα χέρια του Casillias που βρισκόταν στο μέσο του τέρματος. Αν η πάσα του Villa και το σουτ του Messi είχαν κάθετες πορείες, να βρείτε τη θέση του Messi στο γήπεδο.

(Όλα τα σουτ γίνονται στο επίπεδο του γηπέδου) (Δημήτρης)



100. Τα σχέδια επέκτασης του υπογείου metro της πόλης του ΠΕΚΙΝΟΥ, περιλαμβάνουν:

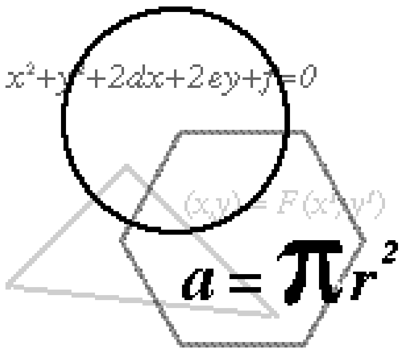
i) Τη γραμμή γ_1 κάθε σημείο της οποίας σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων (στο χάρτη) είναι της μορφής $A(\lambda+1, 3\lambda+1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii) τη γραμμή γ_2 που περνάει από το σταθμό $\Sigma(-3,2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u}=(-10,5)$.

α) Βρείτε τις εξισώσεις των νέων γραμμών γ_1 και γ_2.

β) Στο σημείο $O(0,0)$ στην αρχή των αξόνων κατασκευάζεται το στάδιο που θα φιλοξενήσει το αγώνισμα της Άρσης βαρών. Δεδομένου ότι το κόστος κατασκευής ανά μονάδα μήκους γραμμής είναι το ίδιο με ποια γραμμή από τις γ_1 και γ_2 συμφέρει να συνδεθεί το στάδιο της Άρσης Βαρών;

γ) Αν το Ολυμπιακό χωριό βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου με κέντρο το σημείο $B(3,1)$, ποια θα είναι η εξίσωση του κύκλου αυτού, ώστε να εφάπτεται της γραμμής γ_2; **Ε 64 (2007)**



Η επιλογή των ασκήσεων έγινε από το σχολικό βιβλίο : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ, από το περιοδικό ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ , από το σχολικό βιβλίο :ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ(ΑΛΓΕΒΡΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ-ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ) και από ασκήσεις Καθηγητών που δόθηκαν σε σχολεία της Καλλιθέας.

ΚΕΝΤΡΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ & ΜΕΛΕΤΗΣ
ΝΤΙΝΟΣ ΖΑΦΕΙΡΟΠΟΥΛΟΣ & ΣΙΑ ΟΕ

ΣΠΟΥΔΑΣΤΗΡΙΟ ΦΙΛΟΛΟΓΙΑΣ
ΣΟΦΙΑ ΤΕΡΕΖΑΚΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ - ΛΥΚΕΙΟ - ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Ελ. Βενιζέλου 150, 176 76 Καλλιθέα
τηλ.: 210 95 92 070
fax: 210 95 65 108
e-mail: zafirop@acci.gr

Μαντζαγριωτάκη 89, 176 72 Καλλιθέα
τηλ. / fax: 210 95 33 254
e-mail: ster14@otenet.gr