Γ Λυκείου

4 ΓΛΧ

2013 - 2014

Μ.Ι.Παπαγρηγοράκης
Χανιά

[Μαθηματικά]

Θετικής – Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

13.09

10 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ- ΟΡΙΣΜΟΣ

10.01 Αν $f(x)=\begin{cases} \alpha x+\beta & \alpha\nu \quad x\le 2 \\ \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \alpha\nu \quad x>2 \end{cases}$ να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 2

10.02 Αν $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}=-7$ και η f είναι συνεχής στο $x_0=3$ να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 3

10.03 Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $[0.+\infty)$ και ισχύει ότι $\eta\mu x\le f(x)\le x\sqrt{x}+\eta\mu x$, για $x\ge 0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$

10.04 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο 0 και στο 1 και ισχύει ότι $f(0)=f(1)$. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=\begin{cases} f(2x) & \alpha\nu \quad x\le \frac{1}{2} \\ f(2x\text{-}1) & \alpha\nu \quad x>\frac{1}{2} \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\frac{1}{2}$ αν και μόνο αν $f'(0)=f'(1)$

10.05 Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο 1 για την οποία ισχύει ότι $f'(1)=2$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left[f(1)-f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right]=2$

10.06 η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o\in R$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} f(x) & \alpha\nu \quad x\le x_0 \\ f'(x_o)(x\text{-}x_o)+f(x_o) & \alpha\nu \quad x>x_0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o

10.07 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο 0 και ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ για κάθε $x,y\in R$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R.

10.08 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o με $f(x_o)=3$, $f'(x_o)=2$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{2f(x)\text{-}6}{x\text{-}x_o}$

10.09 Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$, παραγωγίσιμη στο 0. Να αποδείξετε ότι

A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}=(\alpha-\beta)f'(0)$, $\alpha,\beta\in R^*$

B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(3x)-f^2(2x)}{x}=2f(0)f'(0)$

10.10 Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα Δ με $f(x)>0$ στο Δ και παραγωγίσιμη στο $x_0\ne 0$ να δείξετε ότι:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x_0)}}{x^2-x_0^2}=\frac{f'(x_0)}{4x_0\sqrt{f(x_0)}}$$

10.11 Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο R και παραγωγίσιμη στο $x\in R$, να δείξετε ότι

A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x-h)-f(x)}{h}=-f'(x)$

B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=2f'(x)$

10.12 Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$, ώστε να ισχύει $f(x+y)=ef(x)f(y)$ για κάθε $x,y\in R$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο με τετμημένη μηδέν και ισχύει ότι $f'(0)=e$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρείτε τον τύπο της.

10.13 Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο 1 και ισχύει $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in R^*$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R^*.

10.14 Έστω $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=3$. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=3$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ-ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

10.15 Βρείτε τις παράγώγους των συναρτήσεων

Α) $f(x)=\dfrac{e^x}{1+\sqrt{x}}$ Β) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

Γ) $g(x)=\sqrt{x}\eta\mu x+\dfrac{\ln x}{x-1}$ Δ) $f(x)=\dfrac{\ln x}{e^x}$

Ε). $g(x)=\dfrac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{1+\varepsilon\varphi x}$ Στ) $g(x)=\dfrac{\ln x}{x+2}$

Ζ) $f(x)=\dfrac{2+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}$ Η) $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$

Θ) $h(x)=\dfrac{2x+1}{e^x}$ Ι) $f(x)=\dfrac{1-\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$

10.16 Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα P με $P(x)=\left[P'(x)\right]^2$ για κάθε $x\in R$.

10.17 Να αποδείξετε ότι:

Α) Αν $f(x)=x^2\ln x$ τότε $2xf(x)-xf'(x)+x^2=0$

Β) Αν $y=\dfrac{x}{e^x}$ τότε $x\dfrac{dy}{dx}+(x-1)y=0$

10.18 Θεωρούμε μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f(x+y)=e^xf(y)+e^yf(x)+xy+\alpha$ για κάθε $x,y\in R$. Να αποδείξετε ότι:

Α) $f(0)=-\alpha$

Β) η C_f περνά από την αρχή των αξόνων.

Γ) Αν είναι παραγωγίσιμη στο R τότε ισχύει ότι $f'(x_o)=f(x_o)+f'(0)e^{x_o}+x_o$, $x_o\in R$.

Δ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 τότε είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x_o)=f(x_o)+f'(0)e^{x_o}+x_o$ για κάθε $x_o\in R$

10.19 Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R, με $g(e)=1$ και $g'(e)=2$. Αν $f(x)=x^2g(x)+\dfrac{x^2}{\ln x}$ να βρείτε τον $f'(e)$

10.20 Να αποδείξετε ότι

Α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ Β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^5-2^5}{x-2}=80$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

10.21 Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$f(x)=\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2 3x$,

$f(x)=\varepsilon\varphi^2(4x^3+1)$

$f(x)=\ln^3\left(x^2+3x\right)+\ln 3$

$f(x)=\sigma\upsilon\nu\sqrt{\ln^3(2x)}+\sqrt{2}$

$f(x)=\eta\mu\left(2^x+3^x\right)+\eta\mu t$, $t\in R$

$f(x)=\left(x^2+3\right)^4\left(x^3-5\right)^3+y^2$, $y\in R$

10.22 Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

Α) $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x} & \alpha\nu\quad x\neq 0\\ 0 & \alpha\nu\quad x=0\end{cases}$

Β) $f(x)=x^2+|x-3|+2$

Γ) $f(x)=x^{e^x}$ με $x>0$

Δ) $f(x)=2^{\varepsilon\varphi x}$

10.23 Δίνεται η $f(x)=e^x+x^3+x$, $x\in R$.

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

Β) Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $D_{f^{-1}}$, να δείξετε ότι $\left(f^{-1}\right)'(1)=\dfrac{1}{2}$.

10.24 Α) Αν $f(x)=c(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ με $c,\alpha,\beta,\gamma\in R$ και $x\neq\alpha,\beta,\gamma$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}$$

Β) Να βρεθεί η f' αν $f(x)=\dfrac{(x^2+5)^3(1+x^4)^2}{\sqrt{1+x^2}}$

10.25 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και ισχύει: $f^3(x)+x^2f(x)=2x^2\eta\mu x$, για κάθε $x\in R$ να βρεθεί η παράγωγος της f στο $x_0=0$.

10.26 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x\in R$ ισχύει $f(2x+3)=x^2+3x+5$ να βρεθεί το $f'(3)$

10.27 Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο R και για κάθε $x,y\in R$ ισχύει ότι $f(x+y)\text{-}g(x+y)=f(x)\text{-}g(x)$. Να δειχτεί ότι $f'(x)=g'(x)$, $\forall x\in R$

10.28 Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R. Να αποδειχτεί ότι

Α) Αν η f είναι άρτια τότε η f' είναι περιττή

Β) Αν η f είναι περιττή τότε η f' είναι άρτια

10.29 Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο 0 τέτοια ώστε για κάθε $x\in R$ να ισχύει $f(f(x))=f(x)+2x$. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=-1$ ή $f'(0)=2$

10.30 Οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο R και για κάθε $x\in R$ ισχύει ότι $g(x)=e^{f(x^2)}$, με $f'(1)\neq 0$, να αποδειχτεί ότι $g'(1)=2g(1)f'(1)$

10.31 Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία είναι $f(x+y)=f(x)f(y)$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x,y\in R$. Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=\ell\in R$ να αποδειχτεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R

10.32 Δίνεται ότι οι συναρτήσεις f,h είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $[0,2]$ και ισχύει $2f^2(x)-h^3(x)=-9$ για κάθε $x\in[0,2]$. Αν $f(1)=3$ και $f'(1)=-2$, να βρεθεί το $h'(1)$

10.33 Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x+x^2\eta\mu\dfrac{2}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Να εξετάστε αν η $f'(x)$ είναι συνεχής στο $x_o=0$

10.34 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$.

Α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $y=|f(x)|$ είναι παραγωγίσιμη στο R.

Β) Αν ισχύει ότι $f(-2)=-5$ και $f'(-2)=4$ να αποδείξετε ότι $|f(-2)|'=-4$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

10.35 Έστω μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Να αποδείξετε ότι:

Α) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+2h)-f'(x)}{h}=2f''(x)$, $x\in R$

Β) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x-h)-f'(x)}{h}=-f''(x)$, $x\in R$

Γ) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4f'(x+2h)+6f'(x-h)-10f'(x)}{h}=2f''(x)$ για κάθε $x\in R$

10.36 Να αποδειχτεί ότι:

Α) Αν $y=\ln(e^{2x}+1)-x$ τότε $y''=(1-y')(1+y')$

Β) Αν $y=\eta\mu(\ln x)+\sigma\upsilon\nu(\ln x)$ τότε $x^2y''+xy'+y=0$

10.37 Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x\in R$ ισχύει $f(x^2)=xf(x)$, να αποδείξετε ότι $f''(1)=0$.

10.38 Να αποδείξετε ότι:

Α) Αν $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, τότε $f^{(\nu)}(x)=\sigma\upsilon\nu\left(x+\dfrac{\nu\pi}{2}\right)$

Β) Αν $f(x)=xe^x$ τότε $f^{(\nu)}(x)=e^x(x+\nu)$

10.39 Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ για τα οποία ισχύει ότι $P(x)=[P'(x)]^2$

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

10.40 Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o = 1$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x^2}{x-1} = 7$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι κάθετη στην ευθεία $x+9y+5=0$

10.41 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3$. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από το $M(-2,-8)$

10.42 Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι: $x\ln x \le f(x) \le x^2 - x$ για κάθε $x\in\Delta$. Να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1,f(1))$.

10.43 Αν $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(x)=\dfrac{1}{x}$ και $\alpha>0$, να αποδειχτεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ημιάξονες Ox, Oy και η εφαπτομένη της καμπύλης στο $x_o = \alpha$ είναι ανεξάρτητο του α.

10.44 Να βρεθούν οι εφαπτόμενες των C_f, C_g όταν $f(x)=x^2+2$ και $g(x)=-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{1}{2}$ που τέμνονται στον $y'y$ και είναι κάθετες μεταξύ τους.

10.45 Αν $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+2\alpha x+\beta+\alpha & x\ge 2\\ \dfrac{\gamma}{x+1} & x<2\end{cases}$, να βρεθούν τα $\alpha,\beta,\gamma\in R$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(2,f(2))$ να είναι παράλληλη προς την $2x+y-1=0$

10.46 Αν $f(x)=\alpha\ln x+\beta x^2+3$, να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε η ευθεία ε: $2x-y+4=0$ να είναι εφαπτόμενη της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$.

10.47 Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει ότι $f(2+x)-f(2-x)=-2x$, $\forall x\in R$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $(2,f(2))$ είναι κάθετη στην $y=x$.

10.48 Αν $f(x)=4-x^2$ και $g(x)=-x^2+8x-20$. Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμένες των C_f και C_g.

10.49 Για ποια τιμή του $\alpha\ne 0$ η εφαπτόμενη της $f(x)=x^2-3x$ στο $(1,f(1))$ είναι εφαπτόμενη της $g(x)=\dfrac{\alpha}{x}$

10.50 Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ και $g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\sin x$ έχουν κοινή εφαπτομένη σε κάθε κοινό τους σημείο.

10.51 Θεωρούμε την συνάρτηση f που έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο R με $f'(x)\ne 0$ για κάθε $x\in R$. Αν η C_g της g με $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ τέμνει τον άξονα $x'x$, να αποδειχτεί ότι η εφαπτομένη στο σημείο τομής, σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^o

10.52 Να βρείτε τον $\alpha\in R$ ώστε η συνάρτηση f με $f(x)=\alpha^x$, να έχει εφαπτομένη την $y=x$.

10.53 Μία συνάρτηση $f:R\to R$ έχει την ιδιότητα: $f(x-2)\le x^2-3x+2\le f(x-3)+2x-4$, $\forall x\in R$.
Έστω μεταβλητή ευθεία η οποία διέρχεται από το $M\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ και τέμνει τη C_f σε δύο διαφορετικά σημεία Α και Β.
Να βρείτε τον τύπο της f και να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα Α και Β τέμνονται κάθετα.

10.54 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\alpha\cdot\ln x$, $x>0$, όπου $\alpha\in R$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο της $M(1,f(1))$ και αποδείξετε ότι διέρχεται από σταθερό σημείο P για κάθε $\alpha\in R$.

10.55 Αν η ευθεία $y-2x=0$ είναι η εφαπτομένη του διαγράμματος της $y=f(x)$, στο σημείο της με $x_o=-1$, να βρεθεί η εφαπτομένη (ε_1) του C_g της g με $g(x)=f\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ στο σημείο με $x_1=1$

10.56 * Αν $f(x)=\frac{1}{x}$ και $g(x)=e^{-x}$, να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη.

10.57 Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $g(x)=e^x$ και $f(x)=2x^2$, έχουν κοινή εφαπτομένη

10.58 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-4x^2-3x$. Να βρεθεί ευθεία που να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε δύο διαφορετικά σημεία της.

10.59 **Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R, και ισχύει $f(\ln x)=x\ln x-x$, $x>0$

Α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της παραγώγου, $C_{f'}$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη 0.

Γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου το οποίο σχηματίζεται από την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με $x_o=1$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

10.60 **Έστω η $f(x)=\frac{\ln(\alpha x)}{x}$ με $\alpha,x>0$

Α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x_o,f(x_o))$.

Β) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εφαπτόμενες στο σημείο $(x_o,f(x_o))$, καθώς μεταβάλλεται το α, διέρχονται από το ίδιο σημείο.

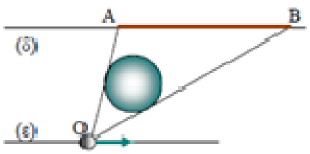
10.61 Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, με $f(x^2)+f(x)=3\cdot\ln x+4$

Α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της f στο $(1,f(1))$

Β) Να υπολογίσετε την τιμή του ορίου $\lim\limits_{x\to1}\frac{x\cdot f(x)-2}{x^2-1}$.

Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΩΣ ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

10.62 Το κινητό Ο κινείται με σταθερή ταχύτητα $2m/sec$ κατά μήκος της ευθείας (ε).
Κυκλικό εμπόδιο έχει το κέντρο του στην μεσοπαράλληλη των ευθειών $(\varepsilon),(\delta)$, έχει διάμετρο $2m$ ίση με το μισό της απόστασης των $(\varepsilon),(\delta)$ και δημιουργεί την «σκιά» AB. Να βρεθεί ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του μήκους AB την στιγμή κατά την οποία το τρίγωνο OAB γίνεται ορθογώνιο για πρώτη φορά
(Άσκηση από www.mathematica.gr)



10.63 Σημείο Μ ξεκινά από το $O(0,0)$ και κινείται πάνω στην καμπύλη $y=\sqrt{x}$, ώστε η γωνία $x\hat{O}M$ να ελαττώνεται με ρυθμό $\theta'(t)=-\frac{\pi}{14}rad/sec$.

Α) Να αποδείξετε ότι η τετμημένη $x(t)$ του σημείου Μ δίνεται από τη σχέση: $x(t)=\sigma\varphi^2\theta(t)$ και η απόσταση $s(t)$ του σημείου Μ από την αρχή των αξόνων ισούται με $s(t)=\frac{\sigma\upsilon\nu\theta(t)}{\eta\mu^2\theta(t)}$

Β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης OM, τη στιγμή t_o που είναι $x\hat{O}M=\frac{\pi}{6}$

11 Θ ROLLE

11.01 Αν $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x+\beta & x<0 \\ 3+(\gamma-\alpha)x & x\geq 0 \end{cases}$ να βρεθούν οι $\alpha,\beta,\gamma\in R$ ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[-1,1]$ και να βρεθεί $\xi\in(-1,1)$ ώστε $f'(\xi)=0$.

11.02 θεωρούμε μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής και μη μηδενική στο $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o)=f(x_o)\varepsilon\varphi x_o$.

11.03 Δίνεται ότι η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, α > 0 και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\beta)}{\beta}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $\xi f'(\xi)=f(\xi)$

11.04 Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $3\xi^2\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta^3-\alpha^3}=f'(\xi)$

11.05 Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R με $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$ και $\frac{f(2000)}{f(1999)}=e$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1999,2000)$.

11.06 Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=e^x+2x$ και $g(x)=e^{-x}-x^3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο που βρίσκεται στον $y'y$.

11.07 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5+3x-\alpha=0$ έχει μοναδική ρίζα στο R

11.08 Να δειχθεί ότι η εξίσωση $2013x^{2012}-2012(\lambda+1)x^{2011}+\lambda=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$ για κάθε $\lambda\in R$

11.09 Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύουν ότι είναι συνεχής στο $[1,e]$, παραγωγίσιμη στο $(1,e)$ και $f(e)-f(1)=1$. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $xf'(x)=1$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(1,e)$.

11.10 Δίνονται οι $\alpha,\beta,\gamma\in R$. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $\alpha\sigma\upsilon\nu x+\beta\sigma\upsilon\nu 2x+\gamma\sigma\upsilon\nu 3x=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,\pi)$.

11.11 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$ με $\beta^2<\alpha\gamma$, $\alpha\neq 0$ έχει μοναδική ρίζα στο R

11.12 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^8=7x+6$ δεν έχει περισσότερες από δύο διαφορετικές ρίζες στο R

11.13 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ έχει μέχρι τρείς ρίζες στο R

11.14 Να λύσετε τις εξισώσεις:
A) $\ln\left(1+xe^x\right)=x$ B) $2^x+5^x=2+5x$

11.15 Να δείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών της εξίσωσης $e^x\eta\mu x=1$ υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $e^x\sigma\upsilon\nu x=-1$

11.01 A) Να δείξετε ότι η $f(x)=x^3+\lambda x^3-3x+1$ για κάθε $x\in R$ με $\lambda\in R$ δεν είναι $1-1$.
B) Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το θ. Rolle για τη συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}+x^2+\lambda x-3$

…

11.02 Η απόσταση δύο πόλεων που συνδέονται με ευθεία σιδηροδρομική γραμμή είναι 51 km. Μια αμαξοστοιχία διανύει τη μεταξύ τους απόσταση σε 0,6 ώρες. Να αποδειχτεί ότι για κάποια χρονική στιγμή η αμαξοστοιχία έχει ταχύτητα 85 km / h.

11.03 Αν f συνεχής στο $[1,5]$ με $f(1)=-2$ και $|f'(x)|<2$, $\forall x\in(1,5)$ να δείξετε ότι $-10<f(5)<6$

11.04 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,4]$ και για κάθε $x\in R$ ισχύει $f(4x)=4f(x)$ και $f\left(\frac{25}{100}\right)=1$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(1,4)$ ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=12$

11.05 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log x$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,20)$ ώστε $\xi=\frac{19\cdot\log e}{1+\log 2}$.

11.06 Να αποδείξετε τις ανισότητες:

Α) $xe^{\frac{1}{x+1}}<x+1<xe^{\frac{1}{x}}$ για κάθε $x>0$.

Β) $2-\frac{e}{\pi}<\ln\pi<\frac{\pi}{e}$

11.07 Να αποδείξετε τις ανισότητες:

Α) $\frac{x}{x+1}\prec\ln(x+1)\prec x$ αν $x>0$

Β) $x\le e^{x-1}\le 1+(x-1)e$ αν $x\in(1,2)$

….-….

11.08 Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία της C_f, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in R$ με $f''(\xi)=0$.

11.09 Η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R. Αν οι αριθμοί $f(2),f(4),f(6)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(2,6)$ ώστε $f''(x_o)=0$.

11.10 Έστω $f:R\to R$ τρεις φορές παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι $f(1)=f(0)=f'(0)=f''(0)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x\in(0,1)$ ώστε $f'''(x)=0$.

11.11 Έστω f παραγωγίσιμη στο R της οποίας η παράγωγος είναι γνησίως φθίνουσα στο R. Να αποδείξετε ότι: $f(1999)+f(2002)<f(2000)+f(2001)$.

11.12 Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(\ln\alpha)=f(\ln\beta)$. Αν ισχύει $\ln\alpha<\ln\gamma<\ln\beta$, με $\alpha,\beta,\gamma>0$ και $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\beta}{\gamma}=e^2$, να δειχτεί ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in R$ με $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$

11.13 Έστω συνάρτηση f, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_o)=f(x_o)f''(x_o)$.

11.14 Έστω $f(x)=\alpha^2x^6+\beta x^4+x^2+\gamma+\delta$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R^*$ με $3\beta^2<5\alpha^2$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τρία διαφορετικά συνευθειακά σημεία που να ανήκουν στη γραφική παράσταση της.

11.15 Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R με $f(-1)=-1$, $f(1)=1$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχουν

Α) $-1<\xi_1<\xi_2<1$ ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2$

Β) $-1<\kappa_1<\kappa_2<1$ ώστε $\frac{1}{f'(\kappa_1)}+\frac{1}{f'(\kappa_2)}=2$

11.16 Η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β), με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι:

Α) αν υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ με $f(x_o)>0$, τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f''(\xi)<0$,

Β) αν υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ με $f(x_o)<0$, τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f''(\xi)>0$.

11.17 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\alpha]$ με $\alpha>1$ και ισχύει $f(0)=0$ και $f(x^2)=2f(x),\ \forall x\in[0,\alpha]$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,\alpha)$ ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=\dfrac{f(\alpha)}{2\left(\sqrt{\alpha}-1\right)}$.

11.18 Αν για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, τότε να αποδείξετε ότι:

Α) υπάρχουν αριθμοί $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ με $\xi_1<\xi_2$ και $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.

Β) υπάρχουν $\kappa_1,\kappa_2\in(\alpha,\beta)$ με $\kappa_1<\kappa_2$ ώστε $3f'(\kappa_1)+2f'(\kappa_2)=0$

Γ) ότι η εξίσωση $f'(x)=f(x)-f(\alpha)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α,β).

11.19 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(2)=0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in R$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $M(\xi,f(\xi))$, να τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $P(2\xi,0)$

11.20 Έστω η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=2\beta$, $f(\beta)=2\alpha$

Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

Β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=4$.

11.21 Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, με $f(\beta)<0$ και $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f''(\xi)<0$.

11.22 Η συνάρτηση $f:[1,4]\to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν $f(1)=2$ και $f(4)=8$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

11.23 Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι προυποθέσεις του θ Rolle στο διάστημα $[2,20]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν

Α) $x_1,\ x_2,\ x_3$ με $2<x_1<x_2<x_3<20$ ώστε $f'(x_1)+f'(x_2)+f'(x_3)=0$

Β) $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$ με $2<\xi_1<\xi_2<\xi_3<20$ ώστε $2f'(\xi_1)+3f'(\xi_2)+4f'(\xi_3)=0$

11.24 Αν $\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{3}+\frac{\gamma}{2}+\delta=0$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ μηδενίζεται για ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος $(0,1)$

11.25 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3+2\lambda x-\lambda-1=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$ για κάθε $\lambda\in R$.

11.26 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha\cdot\ln^3x+\beta\cdot\ln^2x+\gamma\cdot\ln x+\delta=0$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ ώστε $3(2\alpha+\gamma+\delta)+4\beta=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,e^2)$.

11.27 Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R με $f(x)>0\ \ \forall x\in R$ και $f(20)=e\cdot f(19)$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(19,20)$.

11.28 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln(2x)$. Να αποδείξετε ότι:

Α) Υπάρχει $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2x)^x=e^{2-2x}$ έχει ρίζα στο $\left(\frac{1}{2},1\right)$

11.29 Έστω f παραγωγίσιμη στο R. Αν $f(x)\geq\dfrac{f(0)+f(10)}{2}$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(0,10)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o)=0$

ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

11.30 Δίνεται συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε: $f'''(x)+2f'(x)=f''(x)+2f(x)$, για κάθε $x\in R$ και $f(0)=f'(0)=f''(0)=1$. Να αποδείξετε ότι :

Α) Οι συναρτήσεις $h(x)=f(x)e^{-x}$ και $g(x)=\left[f''(x)-f'(x)\right]^2+2\left[f'(x)-f(x)\right]^2$ είναι σταθερές συναρτήσεις

Β) Να βρεθεί ο τύπος της f.

11.31 Θεωρούμε συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει ότι: $|f(x)-f(y)|+\text{συν}(x-y)\le 1$ για κάθε $x,y\in R$. Να αποδειχτεί ότι η f είναι σταθερή

11.32 Να βρείτε την f αν $f'(1-2x)=7-12x$, $x\in R$ και $f(1)=2$

11.33 Να βρείτε την f αν $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, $x\in R^*$ και $f(-1)=f(1)=2$

11.34 Να αποδειχτεί ότι:

Α) αν $f''(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=f'(0)=1$ τότε $f(x)=e^x$, $x\in R$,

Β) αν $\delta''(x)=\delta(x)+5x$ για κάθε $x\in R$, $\delta(0)=1$ και $\delta'(0)=-4$, τότε $\delta(x)=e^x-5x$, $x\in R$.

11.35 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f με $f(0)=2$, αν ισχύει $\left(f(x)-e^x\right)\left(f'(x)-e^x\right)=0$, $\forall x\in R$

11.36 Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο R παραγωγίσιμη στο R^* με $f(0)=0$, της οποίας όλες οι εφαπτόμενες διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Να βρείτε εκείνη τη συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $(2,1)$ και $(-2,1)$

11.37 Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x)=(2x+1)f(x)$, $\forall x\in R$ αν και μόνο αν υπάρχει $c\in R$ ώστε $f(x)=ce^{x^2+x}$

11.38 Να βρείτε την f, αν για κάθε $x\in R$ ισχύει $f'(x)-f(x)=\text{ημ}x+\text{συν}x$ και $f(0)=1$.

11.39 Αν η $f:(0,\pi)\to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ και $f''(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ να αποδείξετε ότι $f(x)=\alpha\text{ημ}x$, $\alpha\in R$.

11.40 Να βρεθεί η συνάρτηση $f:R\to R$ αν ισχύει: $(x-2)f'(x)=2x^2-5x+2$, $x\in R$ και $f(3)=7$

11.41 Να βρεθεί συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ παραγωγίσιμη, αν ισχύει ότι $f'(x)=f(x)\cdot\ln[f(x)]$ για κάθε $x>0$ και $f'(1)=0$

11.42 Να βρεθεί, αν υπάρχει, συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο R^* και για κάθε $x\in R^*$ ισχύει $f(x)=xf'(x)$, $f(1)=1$ και $f(-1)=2$.

11.43 Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης που διέρχεται από το $M(0,-3)$ και σε κάθε σημείο της με τετμημένη x_o έχει εφαπτομένη με $\lambda_{\varepsilon\varphi}=\dfrac{4x_o}{4x_0^2+1}$

11.44 Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, αν ισχύει ότι $f'(1)=0$ και $f'(x)=f(x)\cdot\ln[f(x)]$ για κάθε $x>0$

11.45 Αν η $f:(0,\pi)\to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ και $f''(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in(0,\pi)$, να αποδείξετε ότι $f(x)=\alpha\text{ημ}x$, $\alpha\in R$.

11.46 Να βρεθεί συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f(x)>0$, $x\in R$ της οποίας η γραφική παράσταση σε κάθε σημείο $M(x,f(x))$ έχει εφαπτομένη με κλίση $4x\sqrt{f(x)}$, $x\in R$ και ισχύει $f(1)=9$

11.47 Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f αν είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, η C_f διέρχεται από το $O(0,0)$ η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $O(0,0)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $-2x+y+3=0$ και ισχύει $\left(x^2+1\right)\cdot f''(x)+4x\cdot f'(x)+2f(x)=0,\ x\in R$

11.48 Έστω οι συναρτήσεις f και g δυο φορές παραγωγισιμες στο R με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ Αν δέχονται κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο τους και ισχύει $f''(x)g(x)=f(x)g''(x)$ για κάθε $x\in R$, να δείξετε ότι $f(x)=g(x)$

11.49 A) Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $f''(x)+f(x)=0$, $x\in R$ και $f(0)=f'(0)=0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι η μηδενική συνάρτηση.

B) Έστω συνάρτηση $g:R\to R$ με $g''(x)+g(x)=0$ για κάθε $x\in R$ και $g(0)=0$, $g'(0)=1$. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=\eta\mu x$.

11.50 Έστω η περιττή και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(-\alpha,\alpha)\to R$ για την οποία ισχύει ότι $\left|f'(x)\right|\leq f(x)$ για κάθε $x\in(-\alpha,\alpha)$. Να αποδείξετε ότι $f''(0)=0$

11.51 Να βρείτε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R, αν η εφαπτομένη στη γραφική της παράσταση σε κάθε σημείο $(x,f(x))$ να έχει κλίση $2xe^{-x}-f(x)$ και το $A\left(1,\dfrac{2}{e}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f

11.52 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ για την οποία υποθέτουμε ότι $f(2x-f(x))=x$ για κάθε $x\in R$ και επιπλέον υπάρχει α με $f(\alpha)=\alpha$. Να δείξετε ότι $f(x)=x$ για κάθε $x\in R$

11.53 Δίνεται η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R ώστε να ισχύει $[f'(x)+f(x)]e^{2x}=f(x)-f'(x)$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=1$. Να βρείτε τον τύπο της f.

11.54 * Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,\ y\in(0,+\infty)$ και $f(e)=e$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$. Αποδείξτε ότι

A) η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

B. $f(x)=e\ln x$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

11.55 * Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f(0)=0$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x)\left(e^{f(x)}+1\right)=2x+\dfrac{2x}{x^2+1}$ για κάθε $x\in R$. Να βρεθεί ο τύπος της f.

11.56 Έστωι η συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε να ισχύει ότι $f(1)=-1$, $f(2)=2$ και $f(x+y)=xy+y^2+f(x)$ για κάθε $x,y\in R$, . Να αποδειχτεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρεθεί ο τύπος της

11.57 Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ και $\nu\in N$. Αν $\nu\geq 2$ και ισχύει $\left|f(x)-f(y)\right|\leq\left|x-y\right|^{\nu}$, $\forall x,y\in R$ τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

11.58 Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R με $f'(0)=2$ και ισχύει $f(y+x)=f(y)f(x)e^{2xy}$, για κάθε $x,y\in R$. Να αποδείξετε ότι:

A) $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=1$

B) η f είναι παραγωγίσιμη στο R, με $f'(x)=2f(x)(x+1)$, για κάθε $x\in R$

Γ) ο τύπος της f είναι $f(x)=e^{x^2+2x}$

11.59 Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1)=1$ για την οποία ισχύει $f(xy)=x^2f(y)+y^2f(x)$. για κάθε $x,y>0$.

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ ισχύει $x^2f'(x)=2xf(x)+x^3$

B) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)=x^2\ln(x)$

12 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

12.01 Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων A) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

B) $f(x)=x+\sigma\upsilon\nu x,\quad x\in[0,2\pi)$

12.02 Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων A) $f(x)=\begin{cases} e^x-ex-1 & x\le 0\\ x^2\ln x & x>0\end{cases}$

B) $f(x)=\ln(1+x^2)-e^{-x}+1$

12.03 Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x^2|x-1|}$ στο $\left[0,\dfrac{2}{3}\right]$

12.04 Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln(x-1)+x^2+x-6=0$

12.05 Να λύσετε την εξίσωση $\ln(x+1)-\dfrac{2x}{x+2}+x=0$.

12.06 Να λύσετε την εξίσωση $e^{x+1}+2x-e=0$

12.07 Έστω $f:(0,+\infty)\to R$, παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει $f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}=2\ln x$, $f(1)=2$. Να βρεθεί ο τύπος της f και η μονοτονία της

12.08 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln(x-1)}{\ln x}$, $x\ge 2$

A) να μελετήσετε τη μονοτονία της f

B) να αποδείξετε ότι:

α) $\ln\left(e^{\pi}-1\right)\ln\left(e^{\pi}+1\right)<\pi^2$.

β) $\ln(x-1)\cdot\ln(x+1)<\ln^2 x$, $x>2$

12.09 Για κάθε $x\in[2+\infty)$ να αποδείξετε ότι $(x+1)\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{x+1}-x\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{x}>1$

12.10 Να αποδείξετε ότι $2-\dfrac{e}{2}<\ln 2<\dfrac{2}{e}$

12.11 Να αποδείξετε ότι $e^{\pi}>\pi^{e}$

12.12 Να αποδείξετε ότι $2\ln(\eta\mu x)<\eta\mu^2 x$ για κάθε $x\in(0,\pi)$

12.13 Εστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[0,3]$ με $f'(x)>0$ και $f(1)=-1$, $f(2)=1$. Αν $g(x)=\dfrac{f(x)}{1+f^2(x)}$, $0\le x\le 3$, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και το σύνολο τιμών της g

12.14 Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0)=0$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x>0$ είναι γνησίως φθίνουσα.

12.15 Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f με $f(x)=\ln\left(1+x^2-e^{-x}\right)$ είναι γνησίως αυξουσα

12.16 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία, ισχύουν $f(x)>0$ και $f^3(x)+\ln(f(x))+e^{f(x)}=x^3+x^2+2x-1$ για κάθε $x\in R$. Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x)=f\left(1-x^2\right)$

12.17 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f'(x)\ne 0$ για κάθε $x\in R$. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f\left(e^{-x}\right)=f(x+\alpha)$

12.18 Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(1-x)=-f(1+x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $f'(x)\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

12.19 Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο R με $f(0)=g(0)$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύουν $f'(x)g(x)>f(x)g'(x)$ και $g(x)>0$. Να αποδείξετε ότι: $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ και $f(x)\leq g(x)$ για κάθε $x\in(-\infty,0]$.

12.20 *Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[0,+\infty)$ ώστε $[f(x)]^5+2[f(x)]^3+3f(x)=$

$$=(x+1)\ln(x+1)-\frac{4}{5}x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+2004$$. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία της.

12.21 Αν $xg'(x)>\text{συν}x-g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $g(x)\succ\frac{\eta\mu x}{x}$ για κάθε $x\neq 0$.

12.22 Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x)>2f(x)$ και $f(0)=1$. Να αποδείξετε ότι $f(x)>e^{2x}$ για κάθε $x>0$.

12.23 Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0)=0$ και $f'(x)+f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε $xf(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$.

12.24 Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f, που είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και ισχύει ότι $f'(x)\leq f(1)-f(0)$ για κάθε $x\in(0,1)$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

12.25 Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα:

Α) $f(x)=x^2\ln x$ Β) $f(x)=2^{\text{συν}x}, 0\leq x<2\pi$

Γ) $f(x)=\frac{\ell nx}{x^2}$ Δ) $f(x)=\frac{e^x}{2x}$ Ε) $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

12.26 Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα:

Α) $$f(x)=\begin{cases} x^3, & x<1\\ 7, & x=1\\ (x-2)^2, & x>1\end{cases}$$

Β) $$f(x)=\begin{cases} 1-e^{x-1}, & x\geq 1\\ \ln(1-x), & x\prec 1\end{cases}$$

12.27 Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα:

Α) $$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leq 0\\ \frac{1}{x} & x>0\end{cases}$$

Β) $$f(x)=\begin{cases} \sqrt{-x}, & x\leq 0\\ \frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$$

12.28 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^2(x+\alpha)^2(x-\beta)^2$ με $\alpha,\beta>0$ έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

12.29 Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, η συνάρτηση f με $f(x)=x^3+(\alpha-1)x^2+2x+10$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

12.30 Να βρεθεί ο $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=xe^{2\kappa-x}$ να είναι το e.

12.31 Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\alpha\ln 2x+\frac{\beta}{x}+\alpha$ να έχει στη θέση $x_o=1$ τοπικό ακρότατο με τιμή $2+\ln 2$.

12.32 Α) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x}{x^\nu}, \nu\in\mathbb{N}^*$

Β) Να δείξετε ότι $e^x\geq\left(\frac{ex}{\nu}\right)^\nu$, $\forall x\in(0,+\infty)$

12.33 Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x+x^2-x-1$

Α) Να αποδείξετε ότι η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη σε ένα μόνο σημείο της.

Β) Να λύσετε την εξίσωση $e^x+x^2=x+1$.

Γ) Να αποδείξετε ότι $e^x-1\ge x(1-x)$, $\forall x\in R$

12.34 Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύουν: $f(0)=1$ και $e^{2x}f(x)-1\le 0$, για κάθε $x\in R$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,1)$.

12.35 Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $(f(x))^2+x^2=1+2xf(x)$, $\forall x\in R$. Δείξτε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

12.36 Έστω η συνάρτηση $f(x)=x\ln^2 x$. Να βρείτε το σημείο της C_f όπου η f έχει τη μικρότερη κλίση.

12.37 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$ αν η συνάρτηση $f(x)=x^3-(\lambda-1)x^2+(\lambda+5)x-2$ δεν έχει ακρότατα.

12.38 Έστω η συνάρτηση $f:(0,1)\to R$, η οποία είναι παραγωγίσιμη τρεις φορές με $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Αν υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,1)$ με $x_1\ne x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=f(x_2)=0$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με $f^{(3)}(\xi)=0$.

12.39 Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$. Αν υπάρχουν $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιοι ώστε $f(\alpha),f(\beta)\in(f(x_1),f(x_2))$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ ώστε $f''(\xi)=0$.

12.40 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-\alpha,\alpha]$ που παρουσιάζει ακρότατο στο $\beta\in(-\alpha,\alpha)$ με την f' να είναι περιττή. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(-\alpha,\alpha)$ ώστε $f''(\xi_1)+f''(\xi_2)=\dfrac{2\alpha f'(\alpha)}{\alpha^2-x_o^2}$

12.41 Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x\in R$ ισχύει: $f^2(3x+1)+4\le 4f(2x^2+x+1)$. Να αποδείξετε ότι:

Α Υπάρχει $\xi\in(1,4)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=0$

Β Η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται

Γ $f'(1)=f'(4)$

Δ Η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο R

12.42 Έστω οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και ισχύουν: $f(x)\ge x+1$ και $f(x)e^{g(x)}=e^x-x$ για κάθε $x\in R$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στο $x_o=0$ τέμνονται κάθετα

12.43 Έστω g,f παραγωγίσιμες συναρτήσεις για κάθε $x\in R$. Αν ισχύει $f(x)\le x^2+g(x)$ και $f(3)-g(3)=9$, να δείξετε ότι ισχύει $f'(3)-g'(3)=6$.

12.44 Αν ισχύει ότι $\ln x+\dfrac{\alpha}{x}\ge\alpha$, $\forall x>0$, να βρείτε το α

12.45 Αν $\alpha,\beta>0$ και ισχύει $\alpha^{\frac{\ln x}{x}}+\beta^{\frac{x-1}{x}}\le 2$ για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι $\alpha\cdot\beta=1$.

12.46 ¨Εστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-x^\alpha$, x>0, λ>0 με $f(x)\ge 0$, $\forall x>0$. Να δείξετε ότι $\alpha=e$ και ότι η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[e,+\infty)$.

12.47 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{e^x}+1-\lambda$, $\lambda\in R$

Α) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ για την οποία ισχύει $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in R$.

Β) Αν $\lambda\ge 1+\dfrac{1}{e}$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=(1-\lambda)x-\dfrac{x+1}{e^x}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

12.48 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x)>f''(x)$, $x\in R$ που παρουσιάζει για $x_o=0$ τοπικό ακρότατο το $f(0)=0$ να δείξετε ότι: Αν $x<0$ τότε $f(x)<f'(x)$, Αν $x>0$ τότε $f(x)>f'(x)$

12.49 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $(x_0, f(x_0))$, όπου x_o η θέση του τοπικού ακροτάτου της $f(x)=x\ln x+\lambda x$, $\lambda\in R$ όταν το λ διατρέχει το R

12.50 Αν $f(x)=x^{\lambda}\cdot e^{2\lambda - x}$, $\lambda>0,\ x>0$, να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το μέγιστο της f παίρνει την ελάχιστη τιμή του.

12.51 Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\lambda}-\ln(x)$, $\lambda>0$

A) Να βρείτε την μικρότερη τιμή του λ για την οποία ισχύει ότι $x^{\lambda}\ge \ln(x)$ για κάθε $x>0$

B) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το ελάχιστο της f παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

12.52 Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $2\ln x=\lambda x^2+1$, $\lambda>0$

12.53 Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $8x^2\sqrt{x}-\alpha\sqrt{x}+1=0$ όταν το $\alpha\in R$

12.54 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3-\alpha x^2-4x+\alpha=0$ έχει τρεις ρίζες για κάθε $\alpha\in R$

12.55 Μία συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο R. Αν υπάρχει $\alpha\in R$ ώστε $f(\alpha)=f'(\alpha)=f''(\alpha)=0$ και $f'''(x)>0$ για κάθε x, τότε να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις $f''(x)=0$, $f'(x)=0$ και $f(x)=0$ έχουν μοναδική ρίζα.

12.56 Έστω $z=\ln x-2i\sqrt{x}$, $x>0$. Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή του $|z-2|$ είναι το $\sqrt{8}$

12.57 Έστω η συνάρτηση $f(x)=|z|$, $x\in[0,1]$ όπου $z=(1-x)\sqrt{e^{2x}-1}+i(1-x)$, $x\in[0,1]$.

A) Να βρείτε το μιγαδικό του οποίου το μέτρο γίνεται μέγιστο.

B) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

Γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f και η ευθεία $y=x$, τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο.

12.58 Αν $(x^2-4x)f'(x)+f(x)=0$, $\forall x\in[0,4]$ να αποδείξετε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[0,4]$.

12.59 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln(1+x^2)-e^{-x}+1$ είναι γνησίως αύξουσα στο R

12.60 Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha>0$ η εξίσωση $2\alpha e^x=2+2x+x^2$ έχει μοναδική ρίζα στο R

12.61 Έστω συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f(0)=2$, $f'(0)=0$, και $f''(x)+x>0$ για κάθε $x\in R$, δείξτε ότι $f(x)\ge 2\left(1-\frac{x^3}{12}\right)$ για κάθε $x\in R$

12.62 Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f(0)=f'(0)=0$ και $f''(x)<2x$ για κάθε $x\in R$. Δείξτε ότι $f(1)<\frac{1}{3}$

12.63 Να αποδείξετε ότι από το σημείο $A(1,1)$ άγονται ακριβώς δύο εφαπτόμενες προς τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^x$

12.64 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f^3(x)+f(x)=\text{συν}x$, $\forall x\in[0,\pi]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,\pi)$

13 ΚΥΡΤΕΣ-ΚΟΙΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

13.01 Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες καθώς και τα σημεία καμπής των γραφικών τους παραστάσεων.

Α) $h(x)=x^2+\dfrac{8}{x}$ Β) $g(x)=3x^5-5x^3$

Γ). $g(x)=1+2x^2+2x^2(\ln x-2)^2$ Δ) $f(x)=xe^{-x}$

13.02 Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)$, $x\in IR$ έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής

13.03 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\ln^2 x+2x\ln x+x^2-3$ είναι κυρτή

13.04 Αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $f(x)=x^5+5\alpha x^4+10\beta x^3+x^2$, $x\in R$, $\alpha,\beta\in R$ έχει τρία σημεία καμπής, να αποδείξετε ότι $\alpha^2>\beta$.

13.05 Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν $f(x)<x$ και $f'(x)=\dfrac{x}{x-f(x)}$ για κάθε $x>0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

13.06 Δίνεται ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha\sqrt{x}+\beta\ln x+\beta x$ με $\alpha,\beta\in R$, έχει σημείο καμπής το $A(1,3)$

Α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=4$ και $\beta=-1$:

Β) Να βρείτε τα διαστήματα που η C_f είναι κυρτή ή κοίλη.

Γ) Βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της και να αποδείξετε ότι $4\sqrt{x}-\ln x\le x+3$, $\forall x\ge 1$.

13.07 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ με την ιδιότητα $(x^2+x+1)f''(x)+xe^{f(x)}=0$ για κάθε $x\in R$. Να αποδειχθεί ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

13.08 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)\neq 0$, $\forall x\in R$ και g συνάρτηση ώστε να ισχύει $g(x)\cdot f'(x)=8f(x)$ για κάθε $x\in R$. Αν η C_f έχει σημείο καμπής το $A(2,f(2))$ να δείξετε ότι $g'(2)=8$

13.09 Να δείξετε ότι για κάθε $x\in IR$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2x^4+4\alpha x^3+3\left(2\alpha^2-4\alpha+5\right)x^2+\alpha x+1$ με $\alpha\in R$, δεν έχει σημεία καμπής.

13.10 Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f(x)+e^{f(x)}=1+x-x^2-e^x$ για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση

Α) δεν έχει σημεία καμπής

Β) έχει ένα ακριβώς κρίσιμο σημείο.

13.11 Η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και $xf''(x)-\eta\mu 2x=0$, $x\in R$. Να δείξετε ότι το $A(0,f(0))$ δεν μπορεί να είναι σημείο καμπής της C_f

13.12 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f''\searrow$ στο R $f'(x)\neq 0$, $\forall x\in R$, $f'(1)>0$ και η συνάρτηση $g(x)=f(x)-f(2-x)$, $\forall x\in R$.

Α) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της g.

Β) Να βρείτε τα διαστήματα που η g είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής της C_g

13.13 Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ η οποία είναι κυρτή με $f(0)=0$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ είναι γνήσια αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

13.14 Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Να αποδείξετε ότι δεν είναι δυνατόν η f να έχει στο x_o τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής.

13.15 Αν $f(x)=2e^{\lambda x}-x^2-\frac{2}{\lambda^2}$, $\lambda>0$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων καμπής της γραφικής παράστασης της f, για κάθε $\lambda\in(0,+\infty)$

13.16 Α) Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σε διάστημα Δ. Να δείξετε ότι για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ ισχύει $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

(Jensen)

Β) Να αποδείξετε ότι: $e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}-1>\sqrt{(e^{\alpha}-1)(e^{\beta}-1)}$,

$\forall\alpha\ne\beta\in R_+$

Γ) Να αποδείξετε ότι $\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\ge\sqrt{\ln\alpha\cdot\ln\beta}$,

$\forall\alpha,\beta\in A_f$

13.17 Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ που η γραφική της παράσταση στρέφει τα κοίλα άνω και περνά από την αρχή των αξόνων. Να αποδειχτεί ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει $3f(x)\ge 4f\left(\frac{3x}{4}\right)$

13.18 Έστω η συνάρτηση $f:(-\infty,0]\to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x)=x^2-2x,\quad\forall x\le 0$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν παρουσιάζει σημείο καμπής

13.19 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)=\frac{e^{x-1}}{e^{x-1}+1}$ για $x\in R$.

Α) Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

Β) Να δειχθεί ότι για κάθε $x>1$ ισχύει $f(\ln x)+f'(x-1)<f(x-1)+f'(\ln x)$

13.20 αν $x>0$, $y>0$, $\alpha>1$ και $x+y=1$, να αποδείξετε ότι ισχύει $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\alpha}+\left(y+\frac{1}{y}\right)^{\alpha}\ge\frac{5^{\alpha}}{2^{\alpha-1}}$

ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

13.21 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια

Α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$ Β) $\lim\limits_{x\to1}[\ln x\cdot\ln(\ln x)]$

Γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right)$ Δ) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$

13.22 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

Α) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{x(e^x-1)\eta\mu x}$ Β) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

Γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}}$ Δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}+2x+1}{4e^{-x}-x+3}$

13.23 Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{x\ln x}{1-x}, & 0\prec x\ne1\\ -1, & x=1\end{cases}$ και ότι $f'(1)=-0,5$.

13.24 Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\eta\mu x}x^2\eta\mu\frac{1}{x}$

13.25 Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $xf(x)+e^{\eta\mu x}=f(x)\eta\mu x+e^x$ για κάθε $x\in R$. Να βρείτε το $f(0)$.

13.26 Έστω $f:R\to R$, συνεχής συνάρτηση, για την οποία ισχύει $(1-\sigma\upsilon\nu x)f(x)=\ln(1+x)-x$ για κάθε $x>-1$. Να βρείτε το $f(0)$. Η συνάρτηση f έχει συνεχή 2η παράγωγο στο R με $f''(0)=\frac{3}{2}$ και $f(0)=f'(0)=0$. Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f(-x)}{1-\sigma\upsilon\nu x}=3$

13.27 Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Αν για κάθε $x\in R$ ισχύει $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+4h)-2f(x+2h)+f(x)}{h^2}=24x-8$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1,f(1))$ έχει εξίσωση $y=5x-8$, να βρείτε τον τύπο της f

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

13.28 Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $h(x)=\frac{e^x}{x^3}$ $f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$ $k(x)=xe^{\frac{1}{x^2}}$

13.29 Έστω οι συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to R$ με $g(x)=f(x)+x+\ln(x+1)-\ln x$ για κάθε $x>0$. Αν η ευθεία $y=x+3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

13.30 Να αποδείξετε ότι η $y=2x-2\ln 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)=2\ln\left(e^x+1\right)-2\ln 2$

13.31 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ και η g με $g(x)=xf\left(e^{-x}\right)$. Αν η ευθεία $y=2x+1$ εφάπτεται της C_f στο 0, να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

13.32 Έστω συνάρτηση $f:R\to R$, τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf(x)-x^2}{\ln x+x}=2$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

13.33 Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in R$ ώστε η γραφική παράσταση της f με $f(x)=\frac{(\alpha-1)x^2+\beta x+5}{3x+\gamma}$ να έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες $x=-2$ και $y=3$.

13.34 Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει $e^{-x}\le xf(x)\le 1$ για κάθε $x>0$. Να αποδείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι ασύμπτωτη της C_f.

13.35 Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu\ln x$, $x>0$ δεν έχει ασύμπτωτες.

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

13.36 Να μελετήσετε τις συναρτήσεις

Α) $f(x)=x^3-12x$ Β) $f(x)=\eta\mu x+x$, $x\in[-\pi,\pi]$ Γ) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ Δ) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

13.37 Αν M το σημείο του διαγράμματος της f με $f(x)=x\ln x-\lambda x+3$ που αντιστοιχεί στο τοπικό της ελάχιστο, να βρεθεί η απόσταση OM όταν ο ρυθμός μεταβολής του OM ως προς λ γίνει μηδέν.

13.38 Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A=90^o$, για το οποίο ισχύουν τα εξής. Η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες $(-4,0)$, η κορυφή Α είναι στο διάστημα $[0,4]$ του άξονα x'x και η κορυφή Β είναι σημείο της παραβολής $y=4x-x^2$. Για ποια τιμή των συντεταγμένων του Β το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ γίνεται μέγιστο;

14 ΓΕΝΙΚΕΣ – ΣΥΝΔΥΑΣΤΚΕΣ ΜΕ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

14.01 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+12x$, όπου $\alpha,\beta\in R$, η οποία παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_o=2$ και η εφαπτόμενη της στο σημείο $A(1,f(1))$ διέρχεται από το $(3,5)$.

Α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in R$ και το σύνολο τιμών της f.

Β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

Γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2004$ έχει μόνο μία λύση.

Δ) Να βρεθούν τα $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\kappa}$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^\kappa}$, $\kappa\in Z$

14.02 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R για την οποία για κάθε $x>0$ ισχύει $f'(\ln x)=x+3$. Αν η γραφική παράσταση αυτής διέρχεται από το σημείο $M(1,3)$, τότε:

Α) Να βρεθεί ο τύπος της f.

Β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $e^x+3x=e$ έχει μόνο μία ρίζα στο $(0,+\infty)$.

14.03 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη ώστε να ισχύει $f''(x)\cdot f'(x)<0,\ x\in R$.

Α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο R.

Β) Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης $g(x)=|f'(x)|,\ x\in R$.

Γ) Αν $\mu\in R$ και ισχύει $g(x^4+\mu)\le g(4x),\ x\in R$ να βρείτε την μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει ο μ.

14.04 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{\alpha}{x}+\alpha$ με $x>0$. Αν για κάθε $x>0$ είναι $f(x)\ge 0$ τότε

Α) να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$,

Β) να λύσετε την εξίσωση $x^x=e^{x-1},\ x>0$

Γ) να λύσετε την ανίσωση $\ln\left(2x^2+2\right)-\frac{1}{x^2+3}>\ln\left(x^2+3\right)-\frac{1}{2x^2+2}$

14.05 Θεωρούμε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)=e^{x-f(x)}+e^{2\ln x-f(x)}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $f(0)=0$. Να αποδείξετε ότι:

Α) Η f δεν παρουσιάζει ακρότατο σε κανένα σημείο του διαστήματος $(0,+\infty)$.

Β) Το θεώρημα του Rolle δεν εφαρμόζεται σε κανένα διάστημα της μορφής $[0,x_o]$.

Γ) Ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x)=\ln\frac{3e^x+x^3}{3}$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

Δ) Η f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

Ε) Η ευθεία (ε): $y=-\frac{3e+1}{3e+3}x+1$ είναι κάθετη στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_o=1$

14.06 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\lambda-\ln x$, $\lambda\in R$

Α) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f

Β) Να αποδείξετε ότι $\ln x\le\frac{x}{e}$ για κάθε $x>0$

Γ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Δ) Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in R$ το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $xe^{\lambda}=e^{x}$

14.07 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{x}{\alpha}\right)-\frac{x}{\alpha}+1$ με $\alpha>0$

Α) Να βρείτε το πρόσημο της f.

Β) Να λύσετε την εξίσωση $e\frac{x}{\alpha}=e^{\frac{x}{\alpha}}$ για κάθε $\alpha>0$

Γ) Αν ισχύει ότι $\ln\left(\frac{x}{\alpha}\right)\le\frac{\beta x}{\alpha}-\beta$ για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι $\beta=1$.

14.08 *Εστω συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R, που ικανοποιεί τις σχέσεις $f(x)-e^{-f(x)}=x-1$, $x\in R$ και $f(0)=0$

Α. Να εκφράσετε την f' συναρτήσεις της f και να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R

Β. Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{2}<f(x)<xf'(x)<x$, για κάθε $x>0$.

Γ. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

14.09 * Έστω συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με, $g(1)=-2-\lambda$, $g'(1)=-8$, $g(x)+\lambda x+4\le\frac{2}{x}$ και $g(x)\ge-4-6x+\frac{1}{4x}$ για κάθε $x>0$

Α) Να βρείτε τον αριθμό λ

Β) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$ και να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)+\eta\mu x+4}{xg(x)+6x^2+\ln x}$

14.10 Έστω συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty,4)$ για την οποία ισχύουν: $e^{f(x)}=3f'(x)f''(x)$ για κάθε $x<4$, $f'(x)\ne0$ για κάθε $x<4$ και $f(1)=0$, $f'(1)=1$

Α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,4)$, να βρείτε το πρόσημο της f και να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ σε ένα μόνο σημείο.

Β) Να δείξετε ότι $3f''(x)=(f'(x))^2$ και ότι η C_f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(-\infty,4)$

Γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_o\in(0,1)$ ώστε $f(x_0)=-x_0f'(x_0)$ (3)

Δ) Να βρείτε τον τύπο της f για $x<4$

Ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μοναδική λύση στο $(-\infty,4)$ για κάθε $\kappa\in R$

Στ) Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

Ζ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

14.11 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$.

Α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x) = |f(x)|$

Β) Αν επιπλέον είναι $0 < f(x) \neq 1$ για κάθε $x \in R$ και $f(1) = e$, $f'(1) = 1$ τότε:

α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x) = |\ln(f(x))|$

Β) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = |\ln(f(x))|$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$

14.12 Έστω η συνάρτηση $f : R \to R$ η οποία είναι έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο IR.

Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2f(x-3h)-5f(x)+3f(x+2h)}{h^2} = \dfrac{60}{x^3}$ και $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(f(x) - \sqrt{4x^2+9}\right) = 2004$, να δείξετε ότι

Α) $f''(x) = \dfrac{4}{x^3}$

Β) η ευθεία $y = 2x + 2004$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Γ) $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2x + 2004$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$

14.13 ** Δίνεται συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία γνωρίζουμε ότι: $f(0) = 0$ και $f'(x) = \dfrac{1}{3f^2(x)+1}$ για κάθε $x \in R$.

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f^3(x) + f(x) - x$, $x \in IR$ είναι σταθερή.

Β) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$

Γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_o = 0$

Δ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^3} = 0$

14.14 **Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει ότι $f(f'(x)) + f(x) = 0$ για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι:

Α) η f είναι $1-1$

Β) $f'(f'(x)) = x$ για κάθε $x > 0$

Γ) αν $f(1) = 1$ τότε $f(x) = \ln x$.

14.15 Έστω f συνεχής στο , παραγωγίσιμη στο (α,β)) με $f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$

Α) Να δείξετε ότι υπάρχει τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 1$

Β) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια ώστε $2f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 3$

Γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_o \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = \dfrac{2\alpha+\beta}{3}$.

Δ) Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha,\beta)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε $\dfrac{1}{f'(x_1)} + \dfrac{2}{f'(x_2)} = 3$

14.16 * Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμη στο (α,β) και κυρτή στο $[\alpha,\beta]$. Αν $f(\alpha)<f(\beta)$ να αποδείξετε ότι:

Α) υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

Β) υπάρχουν $x_1\in(\alpha,\beta)$ και $x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1\neq x_2$ τέτοια ώστε: $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2\cdot\dfrac{\beta-\alpha}{f(\beta)-f(\alpha)}$

Γ) το x_o του (Α) ερωτήματος βρίσκεται πλησιέστερα στο β απ' ότι στο α.

14.17 Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,e]$ με $f(1)=2$, $f(e)=e+1$ και σύνολο τιμών το $[-1,4]$. Να αποδείξετε ότι :

Αα) Υπάρχουν $x_1,x_2\in(1,e)$ με $x_1\neq x_2$ ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

β) Υπάρχει $\xi\in(1,e)$ ώστε $f''(\xi)=0$

γ) Υπάρχει $x_o\in(1,e)$ ώστε $f(x_o)\big(f'(x_o)-4f^4(x_o)\big)=x_o$

Βα) Η ευθεία $y=-x+e+2$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο $(1,e)$

β) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,e)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ ώστε να ισχύει ότι $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$

14.18 Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x\in R$ ισχύει: $f^2(3x+1)+4\le 4\,f(2x^2+x+1)$. Να αποδείξετε τα εξής:

Α Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,4)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=0$

Β Η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται

Γ $f'(1)=f'(4)$

Δ Η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο R

****

14.19 Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=e^x+(x-\alpha)i$, $x\in R$ και $\alpha\in R$. Αν για κάθε $x\in R$ ισχύει $\mathrm{Re}(z)+x\,\mathrm{Im}(z)\ge 1$, τότε

Α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

Β. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(z)>\mathrm{Im}(z)$ για κάθε $x\in R$

Γ. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ ώστε ο $w=z^2+z+2i$ να είναι πραγματικός

Δ. Να βρείτε το μιγαδικό z του οποίου το μέτρο γίνεται ελάχιστο.

14.20 Έστω οι μιγαδικοί $w=x+yi$ και $\bar{z}=\bar{w}(3+4i)+w(3-4i)$ όπου $x,y\in R$.

Α) Να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός

Β) Να βρεθεί ο μιγαδικός w αν ισχύει ότι $|w|^2=z-25$.

Γ) Έστω $z=50$ τότε:

α) Να βρείτε το σύνολο των σημείων $M(w)$ που είναι εικόνες των w

β) Να βρεθεί ο μιγαδικός w με το μικρότερο μέτρο.

14.21 Έστω συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, ($\alpha>0$), παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν για τους μιγαδικούς $z=\alpha+if(\alpha)$ και $w=\beta+if(\beta)$ ισχύει η σχέση $|z+iw|=|z-iw|$, να αποδειχτεί ότι υπάρχει (τ.ε) $x_0\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f'(x_0)=\dfrac{f(x_0)}{x_0}$

14.22 A) Αν για τους μιγαδικούς z_1,z_2 ισχύει η σχέση: $\big||z_1|-|z_2|\big|=|z_1+z_2|$, (1) να δείξετε ότι $\mathrm{Im}\left(z_1\overline{z}_2\right)=0$

B) Έστω η συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1=f(\alpha)+if(\beta)$ και $z_2=f(\beta)-if(\alpha)$, για τους οποίους ισχύει η ισότητα (1) του ερωτήματος (A). Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1\neq\xi_2\in(\alpha,\beta)$ ώστε να ισχύει $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$

14.23 Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to R$, ισχύει ότι $2\cdot\dfrac{f(x)}{\ln x}+x\cdot f'(x)=0$. Αν $f(e)=1$ τότε A) Να βρεθεί ο τύπος της f.

B) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z αν ισχύει ότι $z\cdot\overline{z}-\left(z^2+\overline{z}^2\right)+\lim\limits_{x\to e}\left(f'(x)+\dfrac{2}{e}\right)=-1$

14.24 Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, συνεχείς το $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες στο (α,β) με $g(x)g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ και οι μιγαδικοί $w=2f(\alpha)-ig(\beta)$, $z=g(\alpha)-2if(\beta)$ ώστε να ισχύει ότι $|2w+\overline{z}|=|2\overline{w}-z|$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=0$

14.25 Δίνονται οι συναρτήσεις f,g παραγωγίσιμες στο $(0,+\infty)$ για τις οποίες ισχύει: $f(x)=g(x)+\alpha\cdot x\cdot e^{\frac{1}{x}}$ για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x. Ο αριθμός α είναι ένας αρνητικός πραγματικός και ο β ο θετικός πραγματικός για τον οποίο ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\beta$.

A. Να αποδείξετε ότι η $y=\alpha x+\alpha+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

B. Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in R$ βρίσκεται στην ασύμπτωτη ευθεία της γραφικής παράστασης της f όταν $x\to+\infty$ και το μέτρο του είναι $\sqrt{2}$ να γράψετε τους $w_1=\dfrac{z^2}{2}$ και $w_2=\dfrac{z^{2003}}{2^{1001}}$ στη μορφή $x+\psi i$.

Γ. Να αποδείξετε ότι: $f(x)\le g(x)+\alpha\cdot e$ για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x.

14.26 Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(0)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1]$. Να αποδείξετε ότι:

A) Υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $(1-\xi)\cdot f'(\xi)=f(\xi)$.

B) Υπάρχουν α,β με $0<\alpha<\beta<1$, ώστε $\mathrm{Re}(z_1\cdot z_2)<0$ με $z_1=\beta+i$, $z_2=f'(\alpha)+i\cdot f'(\beta)$