Γ Λυκείου

4 ΓΛΧ

2013 - 2014

Μ.Ι.Παπαγρηγοράκης
Χανιά

[Μαθηματικά]

Θετικής – Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

13.07

1 ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ C

1.01 Να γράψετε σε «κανονική» μορφή τους μιγαδικούς $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, όταν

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}, \qquad z_2 = \frac{i}{2i\sqrt{3}-2}$$

1.02 Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in R$ όταν:

Α) ισχύει ότι $(\alpha+\beta)+(\alpha^2-\beta^2)\,i = 5+5i$.

Β) ισχύει ότι $(\alpha+\beta i)^2 = \frac{12+5i}{i}$

1.03 Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1+i^{-1}}{1-i}+\frac{1-i^{-1}}{1+i}+\frac{1+i}{1-i^{-1}}+\frac{1-i}{1+i^{-1}}=4$$

1.04 Έστω οι αριθμοί $\kappa,\lambda,\mu,\nu \in N$ οι οποίοι αν διαιρεθούν με το 4 αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο. Να αποδείξετε ότι:

i) $i^{\kappa}=i^{\lambda}=i^{\mu}=i^{\nu}$ ii) $i^{\kappa+\lambda+\mu+\nu}=1$.

1.05 Να δείξετε ότι για κάθε $\nu \in N^*$ ισχύει

$$i^{2\nu}+i^{2\nu+1}+i^{2\nu+2}+i^{2\nu+3} = \frac{1}{i^{2\nu}}-\frac{1}{i^{2\nu+1}}+\frac{1}{i^{2\nu+2}}-\frac{1}{i^{2\nu+3}}$$

1.06 Να αποδείξετε ότι

$(2\alpha+3\beta i)^{30}+(3\beta-2\alpha i)^{30}=0$, $\forall\ \alpha,\beta \in R$

1.07 Αν $\nu \in N^*$, να βρείτε τα αθροίσματα:

$1-i+i^2-i^3+\ldots+(-1)^{100}i^{100}$ και

$i+(2+3i)+(4+5i)+\ldots+((2\nu-2)+(2\nu-1)i)$

1.08 Να βρείτε τις τιμές του $\nu \in IN$ για τις οποίες ισχύει κάθε μια από τις ισότητες:

Α) $i^{3\nu+1}=1$ Β) $(1+i)^{\nu}=(1-i)^{\nu}$

1.09 Έστω z ένας μιγαδικός και $f(\nu)=i^{\nu}\cdot z$, $z \in C$, $\nu \in N^*$, τότε

Α) να αποδείξετε:

$f(3)+f(8)+f(13)+f(18)=0$

Β) να υπολογίσετε την παράσταση

$f(8\kappa)+f(8\kappa+1)+f(8\kappa-1)+f(8\kappa+4)$, $\forall \kappa \in N^*$

1.10 Αν $f(\nu)=i^{\nu}(1-i)$, $\nu \in N^*$ να αποδείξετε ότι $f(4\nu)+f(4\nu+1)+f(4\nu+2)+f(4\nu+3)=0$ και $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(101)=1+i$.

1.11 Να αποδείξετε ότι:

$(3+4i)^{4\nu}+(4+3i)^{4\nu} \in R$ για κάθε $\nu \in N^*$.

1.12 Ο μιγαδικός $z=2+i$ να αναλυθεί σε άθροισμα δύο μιγαδικών u, w που οι εικόνες τους βρίσκονται στις ευθείες $y=x-2$ και $y=2x-1$ αντίστοιχα.

1.13 Να λύσετε στο C τις εξισώσεις:

Α) $(3-2x)^2+(4+x)^2=0$

Β) $2z(1-i)-z=z+1-i$

Γ) $\lambda^2 z-4=\lambda(-zi+4\lambda)$ για κάθε $\lambda \in C$

1.14 Αν $z,w \in C$, $x,y \in R$ να λύσετε τα συστήματα:

Α) $\begin{cases} 5iz-18w=7 \\ (2+i)z+6iw=5-4i \end{cases}$

Β) $\begin{cases} (1+i)z+3iw=5+6i \\ z+(2+i)w=6-i \end{cases}$

1.15 Αν $z \in C$ και $z^2+z+1=0$, να αποδείξετε ότι: $z^{2004}+\frac{1}{z^{2004}}=2$

1.16 Για το μιγαδικό $z \neq 0$ ισχύει ότι $z + \frac{1}{z} = -1$.
Να αποδείξετε ότι $z^{200} + z^{100} + 1 = 0$

1.17 Στο μιγαδικό επίπεδο να σημειώσετε το σύνολο των σημείων που είναι εικόνες των μιγαδικών z όταν:

Α) $z = 2\kappa - 1 + 5(1+\kappa)i$, $\kappa \geq 0$,

Β) $z = 3 + \left(\alpha^2 + 4\alpha + 1\right)i$, $\alpha \in R$.

Γ) $z = 3 + i\sigma\upsilon\nu\theta$, $\theta \in [0, \pi)$,

Δ) $z = \eta\mu\theta + \lambda^2 i$ για κάθε $\theta \in R$, $\lambda \in R$

Ε) $z = 2\eta\mu^2\theta - 2\eta\mu\theta\ \sigma\upsilon\nu\theta\, i$, $\theta \in R$

Στ) $z = 2\kappa - 1 + 5(1+\lambda)i$, αν $2\kappa - 3\lambda = 2$

Ζ) $z = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta} + i\varepsilon\varphi\theta$, $\theta \neq \frac{\kappa\pi + \pi}{2}$, $\kappa \in Z$

1.18 Έστω M_1, M_2 οι εικόνες των μιγαδικών $z_1 = 1 + \eta\mu\theta + i\sigma\upsilon\nu\theta$, $z_2 = 1 - \eta\mu\theta + i\sigma\upsilon\nu\theta$, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Α) Να δείξετε ότι τα M_1, M_2 ανήκουν στον ίδιο κύκλο

Β) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου M, του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_2,

1.19 Για τους $z, w \in C$ ισχύει ότι $z^2 - w + 1 = 0$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας M του z όταν οι εικόνες 0, z, w είναι σημεία συνευθειακά

1.20 Αν οι εικόνες των μιγαδικών z, 1, $-iz$ βρίσκονται στην ίδια ευθεία, να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(z)$ είναι κύκλος

1.21 Να βρείτε τη γραμμή C στην οποία ανήκει η εικόνα του μιγαδικού z σε κάθε μια από τις περιπτώσεις

Α) $z = \varepsilon\varphi\theta - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}i$, $\theta \in R - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in Z\right\}$

Β) $z = \sigma\varphi\theta + \frac{1}{\eta\mu\theta}i$, $\theta \neq \kappa\pi$, $\kappa \in Z$

1.22 Αν η εικόνα του μιγαδικού $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in R$ ανήκει σε κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα 1, να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής στην οποία κινούνται ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w με $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

1.23 Αν η εικόνα του w είναι στην ευθεία $x = 0$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του $z = \frac{w-1}{w+i}$

1.24 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων (x, y) αν ισχύει $x - \lambda(y-1)i = \lambda\left(\frac{3}{2} - i\right)$, $x, y, \lambda \in R$

1.25 Έστω ο $z = x + yi$ $x, y \in R$ και η ισότητα $(x^2 - 2x) + (4x - y^2)i = \alpha + (\alpha - 7)i$, η οποία είναι αληθής για κάθε $\alpha \in R$. Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha \in R$ τα σημεία $M(z)$ ανήκουν σε κύκλο

1.26 Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών $z = \frac{1}{\lambda} - \ln(\lambda) \cdot i$, $\lambda \in (0, +\infty)$

1.27 Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, ισχύει ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 16$. Αν $z = \frac{5}{4}\alpha + \frac{3}{4}\beta i$, να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι έλλειψη.

1.28 Έστω οι μιγαδικοί $z = \lambda - 1 + (2\lambda + 1)i$, $\lambda \in R$ και $w = z - (2 - i)$

Α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των z, w καθώς και τη σχέση τους

Β) Να βρείτε τον μιγαδικό z που έχει την πλησιέστερη εικόνα στην αρχή $O(0,0)$

Γ) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση των εικόνων των z και w για κάθε $\lambda \in R$

ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

1.29 Να βρεθούν οι $\alpha,\beta,\gamma \in R$ ώστε να είναι συζυγείς οι μιγαδικοί z,w όταν:

$z = |\alpha+2| + \left(|\gamma^2-4| + |\beta-2|\right)i$ και $w = 3 + |\gamma-2|i$

1.30 Αν $z_1,z_2 \in C-R$ να δείξετε ότι

$(z_1-z_2)(z_1-\overline{z}_2) \in R \Leftrightarrow Re(z_1) = Re(z_2)$

1.31 Αν $z,w \in C$ να αποδείξετε ότι

Α. είναι πραγματικοί οι αριθμοί οι:

$$\frac{\overline{z}+iz}{z+i\overline{z}} \quad \text{και} \quad \frac{(z+\overline{z})(z-\overline{z})}{2z\overline{z}} - \frac{z}{\overline{z}}$$

Β. είναι φανταστικοί οι αριθμοί οι:

$$\frac{(z+i)^2-(\overline{z}-i)^2}{(z+i)^3+(\overline{z}-i)^3} \quad \text{και} \quad \begin{vmatrix} z-u & \overline{z}-\overline{u} \\ w-u & \overline{w}-\overline{u} \end{vmatrix}$$

1.32 Έστω οι z,w με $z \in C-R$, $w \in C-\{0,1\}$.

Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\overline{z}w-z}{w-1} \in R \Leftrightarrow w = \dfrac{1}{\overline{w}}$.

1.33 Αν $w = \dfrac{\overline{z}-z_1z_2z-z_1+z_2}{z_1+z_2}$ με $z_1,z_2 \in C$, $z_1\overline{z}_1 = z_2\overline{z}_2 = 1$ και $z_1 \neq -z_2$. Να αποδείξετε ότι $w \in I$.

1.34 Να λύσετε την εξίσωση $z\overline{z} + i(z-\overline{z}) = 2$

1.35 Να λύσετε το σύσημα

$$\begin{cases} 3z+(1+i)\overline{w} = 2+3i \\ (2+i)\overline{z}+(1+i)w = 1 \end{cases}$$

1.36 Αν $z,w \in C$, $w \neq 0$, να δείξετε ότι:

$$Re\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\overline{w}z+w\overline{z}}{2w\overline{w}} \quad \text{και} \quad Im\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\overline{w}z-w\overline{z}}{2iw\overline{w}}$$

1.37 Αν $z_1,z_2,z_3 \in C$ να δείξετε ότι:

$z_1 Im(z_2\overline{z}_3) + z_2 Im(z_3\overline{z}_1) + z_3 Im(z_1\overline{z}_2) = 0$

1.38 Για κάθε μιγαδικό z να αποδείξετε ότι:

Α) $(z+\overline{z})^2 \geq 0$ Β) $(z-\overline{z})^2 \leq 0$.

1.39 Έστω ο μιγαδικός z με $z \neq 0$. Αν $w = \dfrac{z}{\overline{z}} + \dfrac{\overline{z}}{z}$, να αποδείξετε ότι

Α) ο w είναι πραγματικός

Β) $-2 \leq w \leq 2$

Γ) Αν $w = 2$ τότε $z \in R$

Δ) Αν $w = -2$ τότε $z \in I$

1.40 Να αποδείξετε ότι:

Α) $(3+4i)^{4\nu} + (4+3i)^{4\nu} \in R$, $\forall \nu \in N^*$

Β) $(1+i)^{\nu} + (1-i)^{\nu} \in R$, $\forall \nu \in N$

Γ) $(-1+i)^{4\nu} = (-4)^{\nu}$ και να υπολογίσετε την παράσταση Α) για κάθε $\nu \in N^*$

1.41 Να αποδείξετε ότι

$$\left(\frac{2+i}{1-2i}\right)^{2004} + \left(\frac{i-2}{1+2i}\right)^{2006} = 0$$

1.42 Αν $f(\nu) = i^{\nu}(1-i)$, $\nu \in N^*$, να δείξετε ότι

$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(101) = 1+i$

1.43 Έστω $z = x+yi$, $x,y \in R$ και $w = z\dfrac{4z-1}{4-z}$, $z \neq 4$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(z)$ του μιγαδικού επιπέδου, όταν $w \in R$.

1.44 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z, όταν ισχύει

$(\overline{z}-\alpha)(z+\alpha) = (\overline{z}+\alpha)(\alpha-z)$, $\alpha \in R_+^*$.

1.45 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων που είναι εικόνες των ριζών κάθε μιας από τις εξισώσεις:

Α) $z^2+4z = \overline{z}^2+4\overline{z}$ Β) $z^2+\overline{z}^2 = z\overline{z}$

1.46 Έστω $z=x+yi,\ x,y\in R$ και $M(z)$ εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο. Αν είναι $w=2z-\overline{z}$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του M, όταν $\mathrm{Re}\left(w^2\right)=1$

1.47 Αν $z\in C-\{0\}$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $\overline{z}$, $\frac{1}{z}$ και $-\overline{z}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία συνευθειακά.

1.48 Αν οι $z=2(\alpha-2\beta)+(\gamma-\alpha)i$ και $w=-\gamma+(\beta-\alpha)i$ ικανοποιούν τη συνθήκη $z=2w$, να αποδείξετε ότι οι $\alpha,\beta,\gamma\in R$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

1.49 Έστω $z,w\in C$, με $z=w+\frac{1}{w}$. Αν η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$ τότε να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει σε έλλειψη, της οποίας να βρείτε τις εστίες.

1.50 Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στον κύκλο $x^2+y^2=4$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w=z+\frac{4i}{z}$ κινείται σε κύκλο.

1.51 Να λύσετε την εξίσωση $(3+2i)\overline{z}+(3-2i)z=2$ και να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των ριζών της είναι μια ευθεία κάθετη στη διανυσματική ακτίνα του $w=3+2i$.

1.52 Η εξίσωση $z^2+\alpha z+\beta=0$, $\alpha,\beta\in R$ έχει ρίζα τον μιγαδικό $2-i$. Να βρείτε την άλλη ρίζα και τα α, β.

1.53 Να αποδείξετε ότι ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $\eta\mu^2\theta\cdot z^2-2\eta\mu\theta\cdot z+5-4\eta\mu^2\theta=0$ $\theta\in(0,\pi)$ ανήκουν σε υπερβολή για κάθε $\theta\in(0,\pi)$

1.54 Στην ισότητα: $z^2+2iz-\alpha=0$, ο z είναι φανταστικός ενώ ο α πραγματικός. Να βρεθεί το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές ο α, και να βρεθεί ο z (συναρτήσει του α)

1.55 Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών Α) $z=-4$ Β) $z=2i$ Γ) $z=3-4i$

1.56 Έστω ότι $f(z)=\frac{(1+z)^\nu}{1+z^\nu}$ $\nu\in N^*$

Α) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{z}\right)=f(z)$.

Β) Αν είναι $z\overline{z}=1$, να αποδείξετε ότι $f(z)\in R$.

Γ) Να βρείτε για ποιά ν ορίζεται το $f(i)$.

Δ) Να αποδείξετε ότι το $f(i)$ είναι πραγματικός για κάθε επιτρεπτό ν.

1.57 Αν $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $w=1+z$, να αποδείξετε ότι

Α) $1+z+z^2=0$, Β) $z^3=1$,

Γ) $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=1$

Δ) $w^{2\nu}=z^\nu$ για κάθε φυσικό ν,

Ε) $w^{300}=1$ και $w^{333}=-1$

Στ) $z^{2004}+\frac{1}{z^{2004}}=z^{2001}+\frac{1}{z^{2001}}=2$

2 ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ

2.01 Να βρείτε το μέτρο του z, όταν:

Α) $z=\dfrac{(1+i)^2(1-i)^4}{2\sqrt{7}+6i}$ Β) $z=\left(\dfrac{2+i\sqrt{5}}{3}\right)^9$

Γ) $8+z^2=\left(\sqrt{3}z^2-6\right)i$

2.02 Αν $x,y\in C$ να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{x|y|-y|x|}{xy+|xy|}$ είναι φανταστικός

2.03 Αν $x,y\in C$ να αποδείξετε την συνεπαγωγή $|x|=|y|=1\Rightarrow\dfrac{x+y}{1+xy}\in R$

2.04 Αν $z,w\in C$ με $|z|=|w|$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{(z+w)^{2004}}{(z-w)^{2004}}\in R$ ενώ ο $\dfrac{(z+w)^{2003}}{(z-w)^{2003}}$ είναι φανταστικός

2.05 Δείξτε ότι $\dfrac{z}{|z|}+\dfrac{|z|}{z}\in R$, $z\in C-\{0\}$

2.06 Για κάθε $z\in C$, να αποδείξετε ότι

Α) $\left|\bar{z}^2+i\right|=\left|i-z^2\right|$ Β) $\left|z+|z|^2\right|=\left|z^2+z\right|$

2.07 Για κάθε $z,w\in C$, να δείξετε ότι

Α) $|z+w|^2+|z-w|^2=2\left(|z|^2+|w|^2\right)$

Β) $2|z|^2=|z+u-w|^2+|z-u+w|^2\Leftrightarrow u=w$

Γ) $\left|z+|z|\right|+\left|z-|z|\right|=2|z|\Leftrightarrow z\in R$

2.08 Αν $z_1,z_2\in C$ και ισχύει $\mathrm{Re}(z_1)\cdot\mathrm{Im}(z_2)=\mathrm{Re}(z_2)\cdot\mathrm{Im}(z_1)$, να αποδείξετε ότι $|z_1z_2|=\left|\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\right|$

2.09 Να αποδείξετε ότι

Α) $|z|=e\Leftrightarrow \ln\left|z+e^2\right|=1+\ln|z+1|$

Β) $\log|z+100|=1+\log|z+1|\Rightarrow|z|=10$

2.10 Αν $z_1,z_2\in C$ και ισχύει $z^2=z_1^2-z_2^2$, να δείξετε ότι $|z_1-z|+|z_1+z|=|z_1+z_2|+|z_1-z_2|$

2.11 Αν $z\in C$ με να αποδείξετε ότι:

Α) $\left|z+|z|\right|+\left|z-|z|\right|=2|z|\Leftrightarrow z\in R$

Β) $\left|z+|z|\right|+\left|z-|z|\right|>2|z|\Leftrightarrow z\in(C-R)$

2.12 Αν $z,w\in C$ με $w\neq1$ αποδείξτε ότι αν $\dfrac{z-\bar{z}w}{1-w}\in R$ τότε $z\in R$ ή $|w|=1$

2.13 Αν $z,w\in C$ και $|z+w|=|z|=|w|$, Να αποδείξετε ότι $|z-w|=\sqrt{3}|z|$.

2.14 Αν $z_1,z_2\in C$ με $\bar{z}_1\cdot z_2\neq1$ και ισχύει $\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|=1$ να αποδείξετε ότι $|z_1|=1$ ή $|z_2|=1$

2.15 Αν $z_1,z_2\in C-\{0\}$ και ισχύει $|z_1|^2+|z_2|^2=|z_1-z_2|^2$, να αποδείξετε ότι

Α) $|z_1-z_2|=|z_1+z_2|$

Β) $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2\left|z_1^2-z_2^2\right|$

2.16 Αν $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2\left|z_1^2-z_2^2\right|$ για κάθε $z_1,z_2\in C-\{0\}$ να αποδείξετε ότι:

Α) $|z_1-z_2|=|z_1+z_2|$

Β) $z_1\bar{z}_2\in I$ και $\dfrac{z_1}{z_2}\in I$

2.17 Έστω $z, z_1, z_2, z_3 \in C^*$ ώστε να ισχύει $\left(\frac{\bar{z}+z_1\bar{z}_2}{\bar{z}_2}\right)\overline{\left(\frac{\bar{z}+z_1\bar{z}_2}{\bar{z}_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{z_2}(z_1+z_2)$ να δείξετε ότι $z \in R$

2.18 Αν $z_1,\ z_2 \in C$ με $|z_1| = |z_2| = 1$, τότε:
Α) Να αποδείξετε ότι
$z_1+z_2+z_1z_2-1=0 \Leftrightarrow z_1+z_2-z_1z_2+1=0$
Β) να βρείτε το μέτρο του $\frac{z_1z_2+z_1+z_2-1}{z_1+z_2-z_1z_2+1}$

2.19 Έστω $z, w \in C$, $\lambda \in R$ με $|z| = |w| = 1$, να δείξετε ότι:
Α) $|z-w| = |1-\bar{z}w|$ Β) $\frac{z+w}{1+zw} \in R$
Γ) $|z+w+\lambda zw\text{-}1| = |z+w-zw+\lambda|$

2.20 Δίνεται ο $z \in C$ με $|z| = 1$. Να αποδείξετε ότι: Α) $|1+z|^2+|1-z|^2 = 4$ Β) $\frac{z^2+1}{z} \in R$

2.21 Να αποδείξετε ότι αν $z+u+w=0$ και $zu+uw+wz=0$ τότε $|z| = |u| = |w|$

2.22 Να αποδείξετε ότι
$z^2+z=-1 \Leftrightarrow |z| = |z+1| = 1, z \in C$

2.23 Αν $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1+z_2+z_3 = 1$ και $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 1$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3} = 1$ και να βρείτε τους z_1, z_2, z_3.

2.24 Αν $z_1, z_2, z_3 \in C$, $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ και οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 στο επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z_1z_2, z_2z_3, z_1z_3 είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

2.25 **Αν $z_1, z_2, z_3 \in C$ διαφορετικοί ανά δύο και ισχύει ότι $|z_1-z_2| = |z_2-z_3| = |z_3-z_1|$, να δείξετε ότι $z_1^2+z_2^2+z_3^2 = z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$

2.26 ** Α) Αν $z_1+z_2+z_3 = 0$ και $z_1^2+z_2^2+z_3^2 = 0$, να αποδείξετε ότι $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$ και ότι $|z_1| = |z_2| = |z_3|$
Β) Να αποδείξετε ότι
$(z-u)^2+(u-w)^2+(w-z)^2 = 0 \Rightarrow$
$|z-u| = |u-w| = |w-z|$

2.27 Αν $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ και $z_1+z_2+z_3 = 0$, με $z_1, z_2, z_3 \in C$, να αποδείξετε ότι $z_1^2+z_2^2+z_3^2 = 0$

2.28 Αν οι εικόνες των $z_1, z_2, z_3 \in C$ στο επίπεδο σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο, να αποδείξετε ότι $(z_2-z_1)^2+(z_3-z_2)^2+(z_1-z_3)^2 = 0$

2.29 Έστω ο θετικός αριθμός ρ και οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 τέτοιοι ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:
$|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho$, $|z_1+z_2+z_3| = \rho^2$ και $z_1^2+z_2^2+z_3^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι:
$|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1| = 8$

2.30 Έστω οι $z_1, z_2, z_3 \in C$ για τους οποίους ισχύει $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1 = 1$,
$|(z_1+z_2)(z_2+z_3)(z_3+z_1)| = 10$ να βρεθεί το
$|(1+z_1^2)(1+z_2^2)(1+z_3^2)|$

2.31 Αν $|z+w| = |z| = |w| = 1$, να δείξετε ότι
Α) $\left(\frac{z}{w}\right)^2+\frac{z}{w}+1 = 0$ Β) $\left|\frac{z}{w}-1\right| = \sqrt{3}$

2.32 Αν $z_1, z_2 \in C$ να αποδείξετε ότι:
Α) $|z_1z_2| = |z_1\bar{z}_2|$ Β) $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2 \le 2|z_1z_2|$
Γ) $(z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2)i \le 2|z_1z_2|$

2.33 Για κάθε $z, w \in C$ να δείξετε ότι

Α) $(z\overline{w}+w\overline{z})^2 \geq 0$

Β) $(z\overline{w}-w\overline{z})^2 \leq 0$

Γ) $-2|zw| \leq z\overline{w}+w\overline{z} \leq 2|zw|$

2.34 Για τους $\alpha, \beta, \gamma, w \in C$ να δείξετε ότι

Α) $|\alpha|+|\beta| \leq |\alpha+\beta|+|\alpha-\beta|$

Β) $|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|+|\gamma-\alpha| \leq 2|w-\alpha|+2|w-\beta|+2|w-\gamma|$

2.35 Να αποδείξετε ότι :

Αν $|z|=|w|=1$ τότε $\overline{z}w+z\overline{w} \leq 2$

2.36 Να αποδείξετε ότι:

Α) $|z-w|^2 \leq \left(1+|z|^2\right)\left(1+|w|^2\right)$

Β) $|z-i|+\left|\frac{1}{z}-i\right| \geq \left|z+\frac{1}{\overline{z}}\right|$, $z \in C^*$

2.37 Αν είναι $w=\frac{z+i}{\overline{z}-i}+\frac{\overline{z}-i}{z+i}$, να αποδείξετε ότι $w \in R$ και ότι $|w| \leq 2$.

2.38 Για κάθε $z, u, w \in C$ να δείξετε ότι:

Α) $|z+1|+|z-2|-|z-1|-|z| \leq 2$

Β) $|z+2|+|z+3| \leq |z|+|z+5|$

Γ) $\left|\frac{z+\overline{z}}{2}\right|+\left|\frac{z-\overline{z}}{2}\right| \leq \sqrt{2}|z|$

2.39 Για κάθε $z \in C$ να αποδείξετε ότι

Α) Αν $|1-z|>|z|$ τότε $2\mathrm{Re}(z)<1$

Β)*** Αν $\left|z+\frac{1}{z}\right|=1$ τότε $|z|+\frac{1}{|z|} \leq \sqrt{5}$, $z \in C^*$

2.40 Έστω $z \in C$ Να αποδείξετε ότι

Α) Αν $|z-2-i| \leq 5$ τότε $8 \leq |z-14-6i| \leq 18$

Β) Αν $|z| \leq \sqrt{3}-1$ τότε $\left|2z\eta\mu\theta+z^2\right| \leq 2$, $\theta \in R$

Γ) Αν $|z-1| \leq 1$ και $|z-2|=1$ τότε $1 \leq |z| \leq \sqrt{3}$

2.41 Για τους $z, w \in C$ ισχύουν ότι $|w-3+2i| \leq 3$ και $|(1+i)w+2| \leq 2\sqrt{2}$. Να αποδείξετε ότι $|z-w| \leq 10$

2.42 Αν για τους $z_1, z_2 \in C$ ισχύει ότι: $|z_1|<1$ και $|z_2|<1$ να αποδείξετε ότι: $|z_1-z_2|<|1-\overline{z}_1 z_2|$

2.43 Για τους μιγαδικούς z και w ισχύει ότι $\overline{w}=\frac{1-\overline{z}}{1+\overline{z}}$. Δείξτε ότι $\mathrm{Im}(z)>0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(w)<0$.

2.44 Να αποδείξετε ότι

Α) $\left|\frac{z}{z+|z|}\right|+\left|\frac{z}{z-|z|}\right| \geq 1$

Β) $\frac{|3z+w|}{|2z-1|+|2w+1|} \leq \frac{1}{2}+\frac{|z|}{|z+w|}$

Γ) $\left|\frac{z}{\eta\mu x}\right|+\left|\frac{w}{\sigma\upsilon\nu x}\right| \geq |z+w|$, $0<x<\frac{\pi}{2}$

2.45 Αν $|z|=|w|=1$ να αποδείξετε ότι

Α) $|z+1|+|w+1|+|zw+1| \geq 2$

Β) $|z+1|+|z^2+1|+|z^3+1| \geq 2$

2.46 Για κάθε $z_1, z_2 \in C$, με $z_1 z_2=1$ να αποδείξετε ότι $\left|\frac{z_1-z_2}{2}+i\right|+\left|\frac{z_1-z_2}{2}-i\right|=|z_1|+|z_2|$

2.47 *Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w με $|z|=|w|=1$.Να αποδειχθεί ότι $\frac{(z-w)^2}{zw} \leq 0$

2.48 **Αν $z, w, z+w \in C-\{-i\}$, να αποδείξετε ότι ι $\frac{|z-i|}{|z+i|}+\frac{|w-i|}{|w+i|}<1 \Rightarrow \frac{|z+w-i|}{|z+w+i|}<1$

2.49 Για κάθε $z \in C$, να λύσετε τις ανισώσεις

Α) $z^2-4z>0$ Β) $z^2-4z+3<0$

2.50 Για κάθε $z \in C$ να αποδείξετε ότι
$|z-10| = 3|z-2| \Leftrightarrow |z-1| = 3$

2.51 Αν $(z+2+4i)^{15} = (2z+1+2i)^{15}$ τότε να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις εικόνες του z

2.52 Να βρείτε το σύνολο των σημείων του επιπέδου που είναι εικόνες του $z \in C$ αν
$\log|z-5| \le \log|z-1|$

2.53 Δίνονται οι μιγαδικοί z και w που συνδέονται με τη σχέση $w = \dfrac{\alpha}{z^2}$, $\alpha \in R^*$. Αν ισχύει ότι $|z-1| = 1$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του w κινείται σε παραβολή.

2.54 Αν $|\alpha+\beta| = |\alpha| = |\beta| = 1$ με $\alpha, \beta \in C$, να δείξετε ότι: $\alpha^{2010} = \beta^{2010}$

2.55 Αν η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$, να αποδείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του $w = \dfrac{\lambda z - i}{iz + \lambda}$, $\lambda \in R$.

2.56 Α) Αν $|z+1| = 2|z-2|$, να βρείτε τη γραμμή που διαγράφει η εικόνα του z
Β) Αν $\dfrac{|z_1+1|}{|z_1-2|} = \dfrac{|z_2+1|}{|z_2-2|} = 2$, να αποδείξετε ότι
$|z_1 - z_2|^2 \le 16$

2.57 Να αποδείξετε ότι: οι εικόνες των μιγαδικών $z = \dfrac{\lambda+2i}{1+\lambda i}$, $\lambda \in R$ ανήκουν σε ένα ορισμένο κύκλο.

2.58 Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $z \cdot w = 1$. Αν η εικόνα του z κινείται στον κύκλο $|z-3+4i| = 5$ να αποδεί ξετε ότι η εικόνα του w κινείται σε ένα κύκλο.

2.59 Δίνονται οι $z, w \in C^*$ ώστε $z^2 + w^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z, w και η αρχή των αξόνων σχηματίζουν ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

2.60 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z αν οι εικόνες των $1,\ z,\ 1+z^2$ στο επίπεδο είναι συνευθειακά σημεία.

2.61 Έστω $z_1, z_2 \in C$ με $|z_1| = |z_2| = |\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})| = 1$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z_1, z_2 στο μιγαδικό επίπεδο και η αρχή των αξόνων είναι σημεία συνευθειακά.

2.62 Έστω ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει $13\left(z^2+\overline{z}^2\right) + 24|z|^2 - 50 = 0$. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας M του z είναι υπερβολή

2.63 Α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C των εικόνων του $z \in C$ στο επίπεδο, αν
$$\frac{1}{|z-3i|} + \frac{1}{|z+3i|} = \frac{10}{|z^2+9|}$$
Β) Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 ανήκουν στη C και είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων, να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο του $|z_1 - z_2|$

2.64 Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 έχουν εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία A, B αντίστοιχα, που δεν ανήκουν στον κύκλο $(C): x^2 + y^2 = 1$, να αποδείξετε ότι ισχύει $|z_1 + z_2| > |1 + z_1\overline{z_2}|$ αν και μόνο αν ένα μόνο από τα σημεία A, B είναι εσωτερικό σημείο του (C)

2.65 Αν για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 3$, και $z \ne \pm 3i$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |z-3i|^2 + |z+3i|^2$. Να δοθεί γεωμετρική ερμηνεία της

2.66 Να προσδιορίσετε στο μιγαδικό επίπεδο το τα σύνολα των εικόνων των μιγαδικών z που αποτελούν τις γραφικές λύσεις των συστημάτων:

Α) $\begin{cases}|z+3|\le|z+1|\\|z+5|\ge|\bar{z}+2|\end{cases}$ Β) $\begin{cases}|z|=1\\|z-1|=2|z+1|\end{cases}$

Γ) $3<|z-4i|\le 5$ Δ) $1<|\bar{z}\text{-}1+i|<2$

2.67 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z σε κάθε μια από τις επόμενες περιπτώσεις

Α) $|z-3|+|z+3|=10$

Β) $|z-2i|+|z+2i|=6$

Γ) $|z-2i|-|z+2i|=6$

2.68 Για το μιγαδικό $z\ne 0$ ισχύει ότι $z+\frac{1}{z}=-1$. Δείξτε ότι $z^{200}+z^{100}+1=0$

2.69 Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει κάθε μια από τις σχέσεις:

Α) $|1\text{-}z|^2\le 1-|z|^2$ Β) $\log|z-2|<\log|z|$

2.70 Να δείξετε ότι οι εικόνες των $w_1=(z_1+z_2)^{2v}$, $w_2=(z_1-z_2)^{2v}$, $v\in N^*$ με $z_1,z_2\in C^*$, $|z_1|=|z_2|$, $z_1\ne z_2$, ορίζουν ευθεία που διέρχεται από το $(0,0)$

2.71 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2+2|z_1|x-|z_2|^2=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$ έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $z_1,z_2\in C$

2.72 Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2+\lambda z+4=0$ με $-4<\lambda<4$ βρίσκονται σε κύκλο.

2.73 Αν για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει $\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{\bar{z}-z}\in R$ να δειχθεί ότι οι εικόνες των $1,\ -1,\ z,\ \bar{z}$ είναι ομοκυκλικά σημεία.

2.74 Έστω οι διαφορετικοί μιγαδικοί z_1 και z_2 ώστε ο $w=\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ να είναι φανταστικός, να δείξετε ότι: Α) $w^{2004}\ge 0$ Β) $|z_1|=|z_2|$

2.75 Δίνεται η εξίσωση $z^2-\Delta z-\Delta=0$ όπου $\Delta\ne 0$ η διακρίνουσά της. Να βρείτε τις ρίζες της καθώς και το είδος του τριγώνου που σχηματίζουν οι εικόνες των ριζών της και η αρχή των αξόνων

2.76 Έστω $z_1,z_2\in C$ και το πολυώνυμο $P(x)=x^2+2|z_1-z_2|x+\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)$, $x\in R$. Να αποδείξετε ότι $P(x)\ge 0$ για κάθε $x\in R$

2.77 Να λύσετε στο C τα συστήματα

Α) $|z-i|=|iz-i|=|z-iz|$

Β) $\left|\frac{z-4}{z-8}\right|=1$ και $\left|\frac{3z-1}{z-3}\right|=1$

Γ) $|z|=|w|=1$ και $z+w+1=zw$.

2.78 Να λύσετε στο C τις εξισώσεις:

Α) $|z|^2-6\sqrt{z\bar{z}}+9=0$ Β) $z^2+|z|=0$

Γ) $z+|z+1|+i=0$ Δ) $z+\bar{z}-3|z|^2=0$

2.79 Να δείξετε ότι οι ρίζες των εξισώσεων $z^2-z+1=0$, και $z^2+\sqrt{3}z+1=0$ ορίζουν κορυφές ισοσκελούς τραπεζίου

2.80 Δίνονται οι $z,w\in C$ με $w=\frac{z+9i}{iz-1}$ και $|z|=3$

Α) Να αποδείξετε ότι $|w|=3$

Β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z-w|$

2.81 Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση $(iz-2)^v=w(z+2i)^v$ με άγνωστο το $z\in C$ $v\in N^*$, έχει πραγματική ρίζα τότε $|w|=1$.

2.82 Να εξετάσετε αν η εξίσωση $(1+iz)^{\nu} = \frac{2+3i}{2\sqrt{3}-i}$, έχει πραγματική ρίζα.

2.83 Για τον $z \in C$ ισχύει ότι: $|z-1-2i| \le 4$. Να βρείτε τις τιμές του z για τις οποίες η παράσταση $|z-13-7i|$ γίνεται μέγιστη ή ελάχιστη.

2.84 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z, αν ισχύει ότι $|z+3| = |\bar{z}-5+3i|$. Από τους παραπάνω μιγαδικούς z, ποιος έχει το μικρότερο μέτρο;

2.85 Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $w = \frac{3z+2i}{i\bar{z}+6}$. Η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο $O(0,0)$ και $\rho = 2$

Α) να αποδείξετε ότι η εικόνα του w ανήκει σε ομόκεντρο κύκλο ακτίνας $r = 1$

Β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z, w και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία.

Β) Να υπολογίσετε την ελάχιστο και τη μέγιστη τιμή του $|z-w|$

2.86 Έστω ο μιγαδικός z με $|z+4i| = 1$ και ο w με $w = 2z-4+7i$. Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του $|z-w|$

2.87 Δίνονται οι μιγαδικοί z και w για τους οποίους ισχύουν $|(1+i)z-2-4i| = \sqrt{18}$ και $w = 2z-11+5i$. Να βρείτε:

Α) Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z

Β) Την μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $|z|$

Γ) Την εξίσωση της καμπύλης που βρίσκονται οι εικόνες του μιγαδικού w

Δ) Τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $|z-w|$

2.88 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z αν ισχύει ότι $(z-i)(\bar{z}+i)-3|z-i|-4=0$

2.89 Έστω z, w μη μηδενικοί μιγαδικοί τέτοιοι ώστε $z \cdot 3^{|z|} + w \cdot 3^{|w|} = (z+w) \cdot 3^{|z+w|}$. Να αποδειχθεί ότι $\frac{z}{w} \in R$ ή $|z+w| = |z| = |w|$

2.90 Για τον $z \in C - R$ ισχύει η σχέση $z + \frac{1}{z} = 2011 \quad (1)$

Α) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z είναι σημείο κύκλου με κέντρο το $O(0,0)$

Β) Αν z_1, z_2, z_3 ικανοποιούν την (1) να δείξετε ότι $(z_1+z_2+z_3)\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right) \le 9$

2.91 Έστω ο μιγαδικός $z \ne 1$ για τον οποίο ισχύει $3z^{2001} + 2001\bar{z}^{2001} = 2004$. Να δείξετε ότι

Α) $(\bar{z})^{2001} = z^{2001} = 1$ Β) $z\bar{z} = 1$

Γ) αριθμός $w = \frac{1+z}{1-z}$ είναι φανταστικός.

2.92 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί α, β, γ με $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 2$ και $\alpha+\beta+\gamma=1$

Α) Να δείξετε ότι $(\alpha+\bar{\beta})(\beta+\bar{\gamma})(\gamma+\bar{\alpha}) \in R$

Β) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$

Γ) Να αποδειχθεί ότι $|\alpha+\beta|+|\beta+\gamma|+|\gamma+\alpha| \ge 2$

2.93 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, w με $|z_1| = |z_2| = 2$, $z_1^2+z_2^2 \ne 0$ και $w = \frac{2z_1 \cdot z_2}{z_1^2+z_2^2}$

Α) Να δείξετε ότι $\overline{z_1} = \frac{4}{z_1}$ $\overline{z_2} = \frac{4}{z_2}$

Β) Να δείξετε ότι ο w είναι πραγματικός

Γ) Να δείξετε ότι ισχύει $\left|\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}\right| \le 2$

Δ) Αν $w = 2$, να δείξετε ότι

α) $|z_1 - z_2| = 2$

β) το τρίγωνο που έχει κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών O, z_1, z_2 είναι ισόπλευρο

3 ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΜΕ ΑΝΑΛΥΣΗ (ΕΩΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

3.01 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$

Α) Να ορίσετε την f^{-1}

Β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=1$

Γ) Αν z,w είναι μιγαδικοί τέτοιοι ώστε να ισχύει ότι $f^{-1}(\ln 1)+f^{-1}(\ln|z+\overline{w}|)=\frac{7}{6}$ να αποδείξετε ότι

α) $|z+\overline{w}|=2$

β) $|\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(w)|\le 2$

3.02 Έστω ο μιγαδικός $w=\frac{4z^2-|z|}{4z^2+|z|}$, $z\in C$

Α) Να λυθεί στο C η εξίσωση $4z^2+|z|=0$

Β) Αν ο w είναι φανταστικός, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C των εικόνων του z

Γ) Αν οι εικόνες των μη μηδενικών μιγαδικών z_1, z_2, w_1, w_2 είναι εσωτερικά σημεία του γεωμτρικού τόπου C, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_o\in(0,1)$ ώστε να ισχύει $|x_0z_1-z_2|+|x_0w_1-w_2|=x_o$

3.03 Έστω $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in R^*$ και η συνάρτηση $f(x)=\frac{|\overline{z}+iz|x^2+5x+2|z+i\overline{z}|}{x^2+3x+2}$. Αν $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=3$, να αποδείξετε ότι

Α) $|\overline{z}+iz|=1$ και $|z+i\overline{z}|=2$

Β) $|z|=\frac{\sqrt{5}}{2}$ Γ) $\alpha\beta=\frac{3}{8}$

3.04 Για τους μιγαδικούς z,w ισχύει $\lim\limits_{x\to1}\frac{|z-3-4i|x^2-|w-3+6i|x+2}{x^2-1}=\frac{1}{2}$

Α) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z.

Β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w.

Γ) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

3.05 Αν για τον μιγαδικό αριθμό $z=x+i\cdot f(x)$ ισχύει $|z|=1$ για κάθε $x\in\Delta_f$, να αποδείξετε ότι:

Α) Το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f είναι υποσύνολο του διαστήματος $[-1,1]$,

Β) Αν η f είναι συνεχής τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1,1)$.

3.06 Έστω $f:[\alpha,\beta]\to R$ συνεχής συνάρτηση και οι μιγαδικοί $z=\alpha+\beta i$, $z_1=\alpha+if(\alpha)$, $z_1=\beta+if(\beta)$. Αν ισχύει $3(z^2-\overline{z}^2)-4iz\overline{z}=4i\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)$, να αποδείξετε ότι η C_f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τον $x'x$.

3.07 Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)>\alpha>0$. Δίνεται και ο μιγαδικός $z=\dfrac{\beta+if(\beta)}{\alpha-if(\alpha)}$. Αν ο z είναι φανταστικός να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α,β).

3.08 Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0,2]$ και οι μιγαδικοί $z_1=f(0)+i$ και $z_2=1+f(2)\cdot i$. Αν ισχύει ότι $|z_1-z_2|=|z_1+z_2|$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[0,2]$.

3.09 Δίνονται οι μιγαδικοί $z,w\in C$ και η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)=|z|x^3+|w|x^2-|z+w|$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[-1,1]$.

3.10 Έστω συνάρτηση $f(x)=|2z+1|x^3-|z|x-1$ όπου z μιγαδικός με $z\neq 0$ και $x\in R$. Να αποδείξετε ότι αν $Re(z)>\dfrac{1}{12}$, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

3.11 Έστω $f:R\to R$ συνάρτηση συνεχής στο R για την οποία ισχύει ότι
$f^3(x)+|z_1-z_2|f^2(x)+\dfrac{|1-\bar{z}_1z_2|^2}{4}f(x)=2x^5+x^4-2$, $x\in R$, όπου z_1, z_2 μιγαδικοί που οι εικόνες τους είναι εσωτερικά σημεία του κύκλου $x^2+y^2=1$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

3.12 Α. Να δείξετε ότι για τους μιγαδικούς z, w ισχύει $|z-w|^2=|z|^2+|w|^2-2Re(z\bar{w})$

Β. Θεωρούμε συνάρτηση $f:R\to R$ η οποία είναι γνησίως μονότονη και οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=3+f(2)\cdot i$ και $z_2=f^{-1}(2)+3i$ για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z_1|^2+|z_2|^2=2Re(z_1\bar{z}_2)$. Να δείξετε ότι

Α) $z_1=z_2$

Β) οι f,g όπου $g(x)=f(2x-f(x))-x$, $x\in R$ είναι γνησίως φθίνουσες

γ) αν η f είναι συνεχής, με σύνολο τιμών το R, τότε η εξίσωση $2x-f(x)=f^{-1}(x)$ έχει μοναδική ρίζα η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2,3)$

3.13 Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z_{(\alpha)}=\dfrac{\alpha}{1+\alpha i}$. $\alpha\in R$

Α Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων Μ του $z_{(\alpha)}$

Β Βρείτε τους μιγαδικούς που απέχουν την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση από το $O(0,0)$

Γ Αν οι εικόνες Μ του $z_{(\alpha)}$ ανήκουν σε κύκλο κέντρου $K\left(O,-\dfrac{1}{2}\right)$ και ακτίνας $\rho=\dfrac{1}{2}$, να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z_{(\alpha)}$ $z_{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)}$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου αυτού.

Δ Να δείξετε ότι το τρίγωνο που έχει ως κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών $z_{(1)}$, $z_{(-1)}$, $z_{(2012)}$ είναι ορθογώνιο (www.mathematica.gr)

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

4 ΤΥΠΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

4.01 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ell n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

Α) Βρείτε το πεδίο ορισμού της

Β) Λύστε την εξίσωση $f(x)+1=0$

Γ) Λύστε την ανίσωση $f(x)<0$

Δ) Να δείξετε

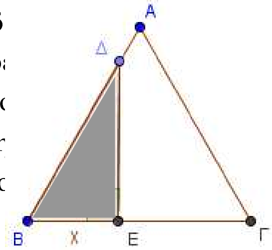
ότι $f\left(\sqrt{\frac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x-1}}\right)+f(\sqrt{2})=f\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)$

4.02 Αν $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$. Να αποδείξετε ότι $f(x)f(-x)=1$

4.03 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}\left(\alpha^x+\alpha^{-x}\right)$.

Να αποδείξετε ότι $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$, $x,y\in R$

4.04 Στο δ σχήμα να βρ συναρτήσει τ τη συνάρτησ περιγράφει τ εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής που δημιουργείται από τη ΔE και τις πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$ για τις διάφορες θέσεις του E πάνω στη $B\Gamma$. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο με μήκος πλευράς 1 η $BE=x$ και $\Delta E\perp BE$



4.05 Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R με $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$. Να υπολογίσετε το $f(x)+f(1-x)$ και το :

$f\left(\frac{1}{2004}\right)+f\left(\frac{2}{2004}\right)+...f\left(\frac{2002}{2004}\right)+f\left(\frac{2003}{2004}\right)$

Γραφική Παράσταση

4.06 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\left|\ln|x|\right|$ και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=10^{-6}$

4.07 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων

$f(x)=\sqrt{|x|}$ $g(x)=-\sqrt{|x|}+1$ $k(x)=\frac{1}{|x|}$

$h(x)=\sqrt{1-x}$ $m(x)=\frac{1}{x-1}$ $n(x)=\frac{1}{|x+1|}$

4.08 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$f(x)=\ln(-x),\ x<0$ $g(x)=-\ln(-x),\ x<0$

$k(x)=\ln|x|$ $m(x)=-|\ln x|$ $t(x)=-\ln|x|$

4.09 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

Α) $f(x)=x\sqrt{x^2}$

Β) $g(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ \ln x, & 0<x\le e \\ (x-1)^2, & x>e \end{cases}$

Γ) $f(x)=\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}$

Πεδίο ορισμου

4.10 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f(x)=x\cdot\ln(x^2)$

$g(x)=\dfrac{x+1}{x\sqrt{x}-3x+2\sqrt{x}}$ $t(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$

$h(x)=\dfrac{x-2}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$ $k(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{(x-1)\sqrt{x+1}}$

4.11 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{2\eta\mu x+1}$ $g(x)=\dfrac{2\varepsilon\varphi x}{\eta\mu x-\eta\mu 2x}$

$\varphi(x)=\dfrac{x^2+1}{e^{2x}-e^{-2x}}$ $t(x)=\dfrac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x+5\sigma\upsilon\nu x+3}$

4.12 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f(x)=\dfrac{\sqrt{e-e^x}}{(2x-1)\ln x}$ $t(x)=\dfrac{1}{x-1}\ln x$

$g(x)=\sqrt{e^x-1}+\sqrt{1-\ln x}$ $k(x)=\sqrt{\ln(1-x^2)}$

4.13 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{9^x-4.3^{x+1}+27}$ $g(x)=\sqrt{x^3-x^2}$

$h(x)=\sqrt{\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x+1}$ $f(x)=\sqrt{(e^x-1)\ln(x-1)}$

4.14 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f(x)=\dfrac{1}{x-1}\ln|x|$ $g(x)=\dfrac{1}{x+1}\ln(-x)$

$h(x)=\dfrac{1}{\sqrt[x]{4-x^2}}$ $k(x)=x^{\frac{1}{\ln x}}$

4.15 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $k(x)=\dfrac{x^2+1}{e^{2x}-e^{-2x}}$, $t(x)=\dfrac{x}{x-1}+\ln x$

$r(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+x-2}{x-x^2}}$, $k(x)=\dfrac{\sqrt{3-|x-2|}}{2x-4-|x-1|}$

4.16 Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις:

$f(x)=\sqrt{e^x-1}+\sqrt{1-\ln x}$ $m(x)=\sqrt{\ln(x-1)}$

4.17 Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις:

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[x]{4-x^2}}$ $g(x)=\log_x\dfrac{x+3}{3-x}$

Κοινά Σημεία

4.18 Για τη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει ότι $f^2(x)-2f(x)-2=x(x-1)$, $x\in R$. Να δείξετε ότι η C_f δεν τέμνει τον άξονα x'x

4.19 Έστω οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$ για τις οποίες ισχύει $f(x)+9=g(x)+x^2$ για κάθε $x\in R$. Να βρεθεί η σχετική θέση των C_f, C_g

4.20 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει ότι $f(x^2+2)+f(3x)=0$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα x'x σε δύο τουλάχιστον σημεία

4.21 Έστω οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$, ώστε να ισχύει $f(x)=g(x)+x^2-\kappa$ κάθε $x\in R$, $\kappa\in R$. Να βρεθεί ο κ ώστε οι γραφικές παραστάσεις τους, να τέμνονται στην ευθεία $x=1$ καθώς και τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από την C_g

4.22 Να βρεθούν τα διαστήματα όπου η C_f είναι πάνω από τη C_g όταν:

Α) $f(x)=4^x-2^{x+1}$ και $g(x)=2^{x+2}-8$

Β) $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{αν } x\geq 0\\ -1-2x & \text{αν } x<0\end{cases}$ και $g(x)=x+2$

καθώς και η απόστασή τους.

Ισότητα Συναρτήσεων

4.23 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+1$.

Α) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες με τη συνάρτηση f.

$f_1(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ $\quad f_2(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-x+1}$

$f_3(x)=\left(\sqrt{x+1}\right)^2$ $\quad f_4(x)=x\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$

$f_5(x)=\ln e^{x+1}$ $\quad f_6(x)=e^{\ln(x+1)}$

Β) Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις είναι όλες ίσες.

4.24 Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1+\text{συν}x}{\text{ημ}x}$ και $g(x)=\dfrac{\text{ημ}x}{1-\text{συν}x}$

4.25 Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις $f(x)=\left(1+\sqrt{2}\right)^x-\left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}$ και $g(x)=0$

4.26 Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$ και $g(x)=\dfrac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}$

4.27 Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις στις παρακάτω περιπτώσεις.

Α) $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$ και $g(x)=\dfrac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}$

Β) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}-2\right)$ και $g(x)=\ln(1-2x)-\ln x$

4.28 Να βρεθεί ο $\lambda\in R$ ώστε να είναι ίσες οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{-\lambda x^3+3x-4}{x^2-\lambda x+4}$ και $g(x)=-\lambda x-1$

4.29 Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}-2\right)$ και $g(x)=\ln(1-2x)-\ln x$

Πράξεις Συναρτήσεων

4.30 Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f+g$,και $\dfrac{g}{f}$ όταν

Α) $f(x)=\sqrt{4-|x|]}$ και $g(x)=\sqrt{x-1}$

4.31 Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f+g$,και $\dfrac{g}{f}$ αν $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 2\\ \sqrt{x}, & x>2\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}\ln x, & 0<x<3\\ -2x+3, & x\ge 3\end{cases}$

4.32 Για τις συναρτήσεις $f,g:R\to R$ ισχύει ότι $g(x)=f^2(x)-2f(x)+x^2+3,\ \forall x\in R$. Να δείξετε ότι η C_g τέμνει τον θετικό ημιάξονα Oy

4.33 Να βρείτε τις συναρτήσεις $f,g:R\to R$ αν για κάθε $x\in R$ ισχύει ότι $f^2(x)+g^2(x)+1=2\left(\text{ημ}x\cdot f(x)-\text{συν}x\cdot g(x)\right)$

4.34 Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:R\to R$ που ικανοποιούν την σχέση: $f^2(x)=x^2+1$, $x\in R$

4.35 Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:R\to R$ που ικανοποιούν την σχέση: $f^2(x)=4e^x\left(f(x)-e^x\right)$, $\forall x\in R$

4.36 Να προσδιορίσετε όλες τις γνήσια αύξουσες συναρτήσεις $f:R\to R$ για τις οποίες ισχύει ότι $f^2(x)=x^2$ (1) για κάθε $x\in R$

4.37 Να βρείτε τις συναρτήσεις τις συναρτήσεις $f:R\to R$ αν για κάθε $x\in R$ ισχύει ότι $\left(f(x)-1\right)\left(f(x)-2\right)=0$

4.38 Να αποδείξετε ότι $f=g$, αν ισχύει ότι $\left(f^2+g^2\right)(x)\le 2(f+g)(x)-2$ για κάθε $x\in R$

Άρτιες Περιττές

4.39 Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι συναρτήσεις

$$g(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \quad , \quad f(x)=\begin{cases} 2x+3 & x<0 \\ 3 & x=0 \\ 2x-3 & x>0 \end{cases}$$

4.40 Για τη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει ότι $x[f(x)+f(-x)+2]+2f(-x)=0, \quad \forall x\in R$. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή και να βρείτε τον τύπο της.

4.41 ** Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in R$. Να αποδείξετε ότι:

Α) Η C_f διέρχεται από το $(0,0)$

Β) η f είναι άρτια

Γ) $f(|x|)=f(x)$ για κάθε $x\in R$

4.42 Αν ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall x,y\in R$ να δείξετ ε ότι η f είναι περιττή

4.43 Αν ισχύει $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$, για κάθε $x,y\in R$ να δείξετε ότι η f είναι περιττή

4.44 Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ η οποία είναι περιττή και για την οποία ισχύει ότι $f(x)\left(x^2+2\right)\le 2x$ για κάθε $x\in R$. Να βρείτε τον τύπο της

4.45 Δύο συναρτήσεις $f,g:R\to R$ έχουν τις ιδιότητες: $f^2(x)=f(x)f(-x)$ και $g^2(x)=-g(x)g(-x)$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι η f είναι άρτια και η g περιττή

4.46 Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με $A_f=A_g\subseteq R$ Να αποδείξετε ότι: Αν οι f,g είναι περιττές τότε η $f+g$ είναι περιττή ενώ οι $f\cdot g$, f/g, ($g(x)\ne 0$) είναι άρτιες

Σύνολο Τιμών

4.47 Να βρείτε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων: Α) $f(x)=e^{1-x}+3 \quad x\in[-1,2]$

Β) $f(x)=-3\ln(1-2x)-1$, $x\in[-2,-1/2]$

4.48 Να βρείτε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων: Α) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1} \quad x\in[2,5]$

Β) $f(x)=\dfrac{6}{\sqrt{x^2-4}+2} \quad x\in(-\infty,-2]$

4.49 Να βρείτε τα σύνολα τιμών των

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{αν} \quad 2\le x<3 \\ x-1 & \text{αν} \quad 3\le x<5 \end{cases}, \quad g(x)=3+2|x-1|$$

4.50 Να βρείτε τα σύνολα τιμών των

$$f(x)=\log\left(\frac{1}{x}-1\right),\ g(x)=\frac{5+e^x}{5-e^{x+1}} \quad f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2-4}$$

4.51 Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=f(x)$. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων:

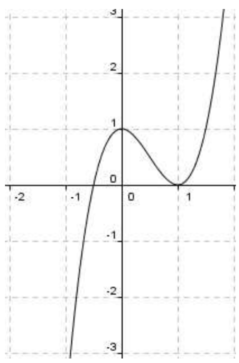
Α) $f(x)=-2$

Β) $f(x)=0$

Γ) $f(x)=1$

Δ) $f(x)=2$

Ε) $f(x)=\alpha,\ \alpha\in[-3,3]$



Σύνθεση Συναρτήσεων

4.52 Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσοτέρων (μη ταυτοτικών) συναρτήσεων, αν:

$f(x)=x^x$ $\quad g(x)=\ln\left(x^2+1\right)-\ln\left(x^2+3\right)$

$k(x)=\left(\ln(x+1)-\ln x\right)^2$

4.53 Να οριστεί η συνάρτηση $f\circ g$ αν

A) $f(x)=\sqrt{1-x}$ και $g(x)=\ln x$

B) $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{αν } x\in(0,2) \\ x+1 & \text{αν } x\in[2,4) \end{cases}$, $g(x)=|x-1|$

4.54 Αν $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $g(x)=3\sqrt{x}-2$ να ορίσετε τις συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$

4.55 Αν $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $g(x)=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$ να αποδείξετε ότι $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=x$, $\forall x\in R$

4.56 Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h, αν h $f:[0,5)\to R$ και

$h(x)=f(x^2-4)+f(x+1)$

4.57 Να βρεθεί ο τύπος μιας συνάρτησης f σε κάθε μια από τις περιπτώσεις:

A) Αν $f\left(\ln(2x)\right)=x+3$, $\forall x>e$,

B) Αν $(f\circ g)(x)=x^2+x+1$ και $g(x)=x+1$

Γ) Αν $(g\circ f)(x)=\text{συν}^2 x$ και $g(x)=x^2$

4.58 Έστω οι συναρτήσεις $f:A_f\to R$, $g:A_g\to R$ με $f\left(A_f\right)\subseteq A_g$. Να αποδειχτούν οι προτάσεις:

A) Αν η f είναι άρτια, τότε και η gof είναι άρτια.

B) Αν η f είναι περιοδική, τότε και η $g\circ f$ είναι περιοδική με την ίδια περίοδο.

4.59 Να αποδειχτεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση που να ικανοποιεί τη σχέση $f(x)+f(2-x)=x$, $\forall x\in R$

4.60 Αν $f(x)=x^2+x+2$ και $g(x)=x^2-x+2$ να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση h με $A_h=R$, ώστε να ισχύει $h\left(f(x)\right)+h\left(g(x)\right)=g\left(f(x)\right)$

4.61 Να βρείτε τη συνάρτησης $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει ότι $f\left(\frac{x}{e}\right)\le \ln x\le f(x)-1$ για κάθε $x>0$.

4.62 Αν $f\left(f(x)\right)=e^{2x}$ για κάθε $x\in R$, να δείξετε ότι η f παίρνει την τιμή 2014

4.63 Αν ισχύει ότι $(f\circ f)(x)=2x-1$ για κάθε $x\in R$ τότε να υπολογίσετε το $f(1)$

4.64 Να προσδιορισθεί ο τύπος της f :

A) Αν $(1-x)f(x-1)+f(1-x)+x=1$, $x\in R$

B) Αν ισχύει $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$, $\forall x\in R^*$

4.65 Για τησυνάρτηση $f:R\to R^*$ ισχύει ότι $f(x+y)=f(x)\cdot e^{f(y)-1}$ $x,y\in R$. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{f(x)-1}$ και $f(x)=e^{1-f(-x)}$ για κάθε $x\in R$ και να βρείτε την f

4.66 Αν $f(x)=\frac{\alpha x+3}{2-x}$ να βρεθεί ο $\alpha\in R$, αν ισχύει: $(f\circ f)(x)=x$, $x\neq 2$

4.67 Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f:R\to R$ αν για κάθε $x,y\in R$ ισχύει ότι

$f(x)+f(y)+f(xy)=x+y+xy$

5 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

5.01 Εξεταστε τη μονοτονία των συναρτήσεων

Α) $f(x)=\sqrt{5-\sqrt{5-x}}$ Β) $f(x)=\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

Γ) $f(x)=(x-1)^3-2$ Δ) $f(x)=e^{\sqrt{4-x}}-3$

Ε) $f(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$ Ζ) $f(x)=\begin{cases}4x+3 & \text{αν } x<2\\ 1-2x & \text{αν } x\geq 2\end{cases}$

5.02 Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x)=e^x+x^5+x^3+x-1$ και $g(x)=2-x-x^3-\ln x$. Να λυθούν οι ανισώσεις $f(x)>0$, $g(x)>0$

5.03 Α) Αν $f(x)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x-1$, $x\in R$ τότε να αποδειχθεί ότι η f είναι γν. φθίνουσα.

Β) Να λυθεί η ανίσωση $3^x+4^x>5^x$.

5.04 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $\ln x>1-x$ Β) $e^x>\dfrac{1-x}{1+x}$

5.05 Για τη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει ότι: $2f^5(x)+f(x)=3x$ για κάθε $x\in R$.

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα

Β) Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2+x-1)<1$

5.06 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=2^x+x$. είναι γνησίως αύξουσα και να λύσετε την ανίσωση $2^{3x-x^2}-2^{6-2x}\succ x^2-5x+6$

5.07 Δίνεται ότι η συνάρτηση f ορισμένη και είναι γνήσια αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Να λύσετε την εξίσωση $f(\sqrt{x})+f(x^2)=f(x)+f(x^3)$

5.08 Η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ έχει την ιδιότητα $f(x)$-$f(y)$=$f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ για κάθε $x,y>0$. Επιπλέον ισχύει ότι «αν $\alpha>1$ τότε $f(\alpha)>0$». Να δείξετε ότι η f είναι γν. αύξουσα στο $(0,+\infty)$

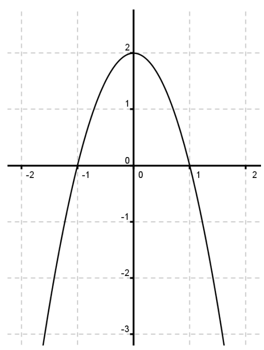
5.09 Έστω συναρτήσεις f,g με κοινό σύνολο ορισμού το $[\alpha,\beta]$, σύνολο τιμών το $[\alpha,\beta]$ ώστε $g(x)>f(x)$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$ και η f είναι γνήσια φθίνουσα. Δείξτε ότι $f(g(x))<g(f(x))$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$

5.10 Αν $f:R\to R$ περιττή και γνησίως φθίνουσα στο R με $f(f(x))=x$ για κάθε $x\in R$, να δείξετε ότι $f(x)=-x$, $x\in R$

5.11 Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f:R\to R$, γνήσια φθίνουσα με την ιδιότητα $2f^2(x^2)-2xf(6x-8)\leq 4-3x$, $\forall x\in R$

5.12 Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και για κάθε $x\in R$ ισχύει ότι: $f\left(\dfrac{2x+3f(x)}{5}\right)=x$, να αποδείξετε ότι $f(x)=x$, για κάθε $x\in R$

5.13 Αν $f:R\to R$ είναι η συνάρτηση του σχήματος, να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης $g(x)=f(f(x))$ στο $[-1,0]$



5.14 Για τη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει ότι $f(x)+2e^{f(x)}=x+2$ για κάθε $x\in R$

A) Να αποδειχτεί ότι η f είναι γνήσια αύξουσα

B) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $g(x)=x+2e^{x}$

Γ) Να υπολογίσετε το $f(1)$

Γ) Να βρείτε το πρόσημο της f

5.15 Έστω συνάρτηση f, ορισμένη στο R, που είναι γνήσια μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $(-1,-1)$ και $(1,2)$

A) Να αποδείξετε ότι είναι γνήσια αύξουσα

B) Να λύσετε τις ανισώσεις $f(2x-1)>-1$ και $f(1-x)<2$

Δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2)=2$

E) Πόσες ρίζες μπορεί να έχει η εξίσωση $f(x)=2014$

5.16 A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=x^5+x^3+x$, $x\in R$ είναι γνήσια αύξουσα.

B) Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο R ώστε να ισχύει $f^5(x)+f^3(x)+f(x)=x$ για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $h(x)=3$ και να υπολογίσετε το $f(3)$

5.17 Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ τέτοια ώστε $f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=0$ για κάθε $x>0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(h(x))$ όπου $h(x)=\frac{1-x}{1+x}$. Τότε:

A) Να αποδείξετε ότι η g είναι περιττή.

B) Να αποδείξετε ότι η h είναι γνήσια φθίνουσα στο $(-1,1)$

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $h(e^x)+h(e^{2x})=h(e^{11x})+h(e^{111x})$ στο $(-1,1)$

Ακρότατα

5.18 Να βρεθούν τα ακρότατα κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις

$v(x)=1-\sqrt{2x+3}$ $\qquad g(x)=4-|x-2|$

$t(x)=4-(x^3-4x)^4$ $\qquad r(x)=x^2-4x+5$

$f:[-1,4)\to R$ με $f(x)=2x-1$

$$\varphi(x)=\begin{cases} x+1 & \text{αν } x\le 2 \\ 3x-1 & \text{αν } x>2 \end{cases}$$

5.19 Να βρεθούν τα ακρότατα κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις

A) $f(x)=1-2\ln(x-1)$, $x\in[2,3]$

B) $f:[-1,4)\to R$ με $f(x)=2x-1$

5.20 Να βρεθούν τα ακρότατα κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις

A) $f(x)=x^2-4x+5$

B) $f(x)=e^{2x}-2e^{x}+3$

5.21 A)Να δείξετε ότι $x+\frac{1}{x}\ge 2$ αν $x>0$

B. Έστω $f(x)=\left(9+\sqrt{80}\right)^x+\left(9-\sqrt{80}\right)^x$. Να αποδείξετε ότι $f(x)\ge 2$ για κάθε $x\in R$ και ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο

5.22 Έστω $f:R\to R$ συνάρτηση με $f(0)=1$

A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{2f(x)}{1+f^2(x)}$ έχει μέγιστη τιμή το 1.

B) Να βρείτε την μέγιστη τιμή της συνάρτησης $\Phi(x)=\frac{2e^x}{1+e^{2x}}+2013$

5.23 Να βρεθεί ο $\lambda\in R$, ώστε η συνάρτηση $f(x)=x^2-(\lambda+1)x+2$ να έχει ελάχιστο το -2

Συνάρτηση 1:1

5.24 Να εξεταστεί ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις, είναι $1-1$ και ποιες όχι:

Α) $f(x)=2\ln x-3$

Β) $f(x)=3e^{x-1}+2$

Γ) $f(x)=x(x-3)(x-4)+2004$

5.25 Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει $f(f(x))=2x^2-3x+2$, για κάθε $x\in[1,+\infty)$. Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$

5.26 Δίνεται ότι η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι $1-1$. Να αποδείξετε ότι η η $F(x)=f^3(x)+2f(x)-3$ είναι $1-1$.

5.27 Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ έχει την ιδιότητα $(f\circ f)(x)+3f(x)-x^{2003}=0$, $x\in R$ να δείξετε ότι είναι 1-1

5.28 Να αποδειχτεί ότι δεν είναι $1-1$ η συνάρτηση f αν ισχύει $6f(x^2)-f^2(x)\ge 9$ $\forall x\in R$

5.29 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2-x-\ln x$

Α) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f

Β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f(1)$

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $x+\ln x>1$

5.30 Να λύσετε τις εξισώσεις .

Α) $e^{x-1}+\ln x=2-x$ Β) $x^7+2x^5+3x^3+x=6$

5.31 Να λύσετε την εξίσωση

$\log(\lambda^2+1)-\log|5\lambda-5|=(5\lambda-5)^4-(\lambda^2+1)^4$

5.32 Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$ με $(f\circ f)(x)=x^2-5x+9$ και $g(x)=x^2-xf(x)+3$, $\forall x\in R$. Να αποδείξετε ότι $f(3)=3$ και ότι η g δεν είναι $1-1$

5.33 Δίνεται η $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $x>0$

Α Να μελετήσετε τη μονοτονία της f

Β Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(x^2-3x+2)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right] \text{ στο } [2,+\infty)$$

5.34 Να βρεθεί ο $\lambda\in R$ ώστε να είναι $1-1$ η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}4-x^2 & \text{αν } x<0\\ x+\lambda-8 & \text{αν } x\ge 0\end{cases}$

5.35 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f:A\to R$ και $g:B\to R$, να αποδείξετε ότι αν $B\subseteq f(A)$ και η $g\circ f$ είναι $1-1$ τότε η g είναι $1-1$

5.36 Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ με σύνολο τιμών το R και $f^3(x)+3f(x)-x=0$, $x\in R$

Να αποδείξετε η f αντιστρέφεται και να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$

5.37 Αν είναι $x+e^x=y+e^y$, $\forall x,y\in R$ τότε

Α) Να αποδείξετε ότι $x=y$.

Β) Να λυθεί η εξίσωση $x^2-3x+2=e^{3x}-e^{x^2+2}$

5.38 Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $e^{\alpha}-e^{\beta}=\beta^3-\alpha^3$ τότε $\alpha=\beta$ με $\alpha,\beta\in R$

5.39 Αν $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{4}{3}-2^x$ τότε:

Α) Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$

Β) Να λύσετε την εξίσωση $3\cdot 2^x+4\cdot 3^x=3\cdot 6^x$

5.40 Αν $f(x)=e^x+x^3+x+1$ τότε

Α) Να δείξετε ότι είναι $1-1$

Β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{x^2-x}+(x^2-x)^3+x^2-2x=e^{x+3}+(x+3)^3+3$$

Αντίστροφη

5.41 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x)=x^3+1$

5.42 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x)=2+(x-3)^2$, $x<3$

5.43 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x)=5+\sqrt{x-2}$

5.44 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x)=\log\sqrt{3-10^x}$

5.45 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{3+e^{3x}}{3-e^{3x}}$

5.46 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+4}$.

5.47 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x)=\log\dfrac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

5.48 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x)=\ln(2+e^x)-x$

5.49 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x)=x^3+3x^2+3x+2$

5.50 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & , \quad x<0 \\ 9x^2 & , \quad x\ge 0 \end{cases}$$

5.51 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$

5.52 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

5.53 Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_{f^{-1}}$ C_f αν $f(x)=\sqrt{1-x}$, $x\in[-1,0]$

5.54 Έστω συνάρτης f ώστε να ισχύει $f(f(f(x)))=2x-7$ για κάθε $x\in R$. Δίνεται ακόμη ότι $f(1)=3, f(3)=9$. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1 – 1 ' και να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=9$.

5.55 Για τη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(R)=R$ ισχύει ότι $f^3(x)+3f(x)-x=0$, για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}

5.56 Αν για τις συναρτήσεις f, g ορισμένες στο R, υπάρχουν οι συναρτήσεις $(f\circ g)^{-1}$ και $(g\circ f)^{-1}$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν και οι g^{-1}, f^{-1} αντίστοιχα.

5.57 Έστω η f με $f(x)=2x^3+x-2$.

Α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$.

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(5x+6)<1$.

5.58 Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3+x+2$

Α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται

Β) Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x)=12$, $f^{-1}(x)=-2$

Γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με τους άξονες και με την ευθεία $y=x$

Δ) Να λύσετε την την εξίσωση $(2-ημ^2x)^3=ημ^3x+ημ^2x+ημx-2$ και τις ανισώσεις: $f^{-1}(x)<3$, και $f^{-1}(x+1)\ge x+5$

6 ΓΕΝΙΚΕΣ

6.01 Για τη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει ότι $\underbrace{f\Big(f\big(f(...(x)...)\big)\Big)}_{\nu\ \text{όροι}}=2x-1$ να βρείτε το $f(1)$

6.02 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f,g:R\to R$ που είναι αντιστρέψιμες και ισχύει $f\circ g=g\circ f$ να αποδείξετε ότι: A) $f\circ g^{-1}=g^{-1}\circ f$ B) $f^{-1}\circ g^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$

6.03 Δίνεται η $1-1$ συνάρτηση $f:R\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ για κάθε $x,y\in R$. Να αποδείξετε ότι: $f^{-1}(xy)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$, $x,y\in f(R)$

6.04 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ με σύνολο τιμών το $(1,+\infty)$ και για κάθε $x\in R$ ισχύει $f^2(x)-2f(x)=e^{2x}-1$.
A) Να βρείτε την f
B) Να δείξετε ότι η f είναι "1-1" και να βρείτε την αντίστροφη της.

6.05 Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με την ιδιότητα: $f(x)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$ για κάθε $x,y>0$ Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα, τότε

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$

B) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f(x^2+3)=f(x^2+1)+f(x+1)$

6.06 Για τη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει ότι $f(x+y)=f(x)+f(y)$, για κάθε $x,y\in R$.
Δίνεται επιλέον ότι ισχύει η πρόταση: « Αν $x>0$ τότε $f(x)>0$ ».

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή και γνήσια αύξουσα

B) Να λύσετε την εξίσωση $f(4x^2+2005)+f(4x^2-2005)=2f(8x-4)$

6.07 Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι γνήσια μονότονη και η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(5,9)$ και $B(2,3)$ τότε:
A) Να αποδείξετε ότι η f είναι γν. αύξουσα
B) Να λυθεί η εξίσωση $f\left(3+f^{-1}(x^2+2x)\right)=9$

6.08 Για την συνάρτηση $f:R\to R$ είναι γνωστό ότι $e^{f(x)}+f(x)=x$ για κάθε $x\in R$

A) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη. B) Να βρείτε το $f(1)$.

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x-4}-e^{2x+1}=x+5$

6.09 Να αποδείξετε ότι η C_f της $f(x)=\frac{5x+2}{2x-5}$, έχει άξονα συμμετρίας την $y=x$

6.10 Έστω ένα ισοσκελές και οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα 2 και έστω ότι $B\hat{A}\Gamma = \Theta$ (rad).

Α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι $E(\theta) = 4(1+\text{συν}\theta)\text{ημ}\theta$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

Β) Αν η γωνία θ μεταβάλλεται στο χρόνο, σύμφωνα με τη συνάρτηση $\theta = f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{4}$, $0<t<2\pi$, να εκφράσετε το εμβαδόν E σε συνάρτηση με το χρόνο, να βρείτε σε ποια χρονική στιγμή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο καθώς και το εμβαδόν του τη στιγμή εκείνη.

6.11 Α) Αν f γν. αύξουσα στο R και $x_o \in R$, τότε $f(f(x_o)) = x_o \Leftrightarrow f(x_o) = x_o$

Β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^3-1}{3}$ αντιστρέφεται, να βρείτε την f^{-1} καθώς και τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

6.12 Για τη συνάρτηση $f: R \to R$ ισχύει ότι $f(x+y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in R$ και υπάρχει $\xi \in R$, ώστε $f(\xi) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

Α) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ και $f(0) = 1$

Β) $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ και $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$, $\forall x \in R$

Γ) $f(\nu x) = f^{\nu}(x)$ για κάθε $\nu \in N$ και $x \in R$

6.13 *Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει: $f(x) = \frac{3e^x}{2+f^2(x)}$, για κάθε $x \in R$

Α. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$.

Β. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ. Να λύσετε την ανίσωση: $\ln f(x) > 0$.

6.14 * Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει ότι $f(f(x)) = x^3$ για κάθε $x \in R$.

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

Β) Να αποδείξετε ότι $f(x^3) = f^3(x)$

Γ) Αν είναι $f(8) = 27$ να αποδείξετε ότι $f(2) = 3$

Δ) Αν η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x$.

Ε) Να αποδείξετε ότι $f^3(-1) + f^3(1) = f(0)$

6.15 Έστω η συνάρτηση $f: (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ με $f(1) = 1$ και η συνάρτηση $g(x) = xf(x) - 1$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα.

Α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - \ln(e \cdot x) = 0$

Γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) + f(x^7) = f(x^5) + f(x^9)$

ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

7 ΟΡΙΟ ΣΤΟ x_0

7.01 Να υπολογίσετε τα όρια

Α) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)$

Β) $\lim_{x\to 1}\frac{\nu x^{\nu+1}-(\nu+1)x+1}{x-1}$ με $\nu\in N^*$

7.02 Να υπολογίσετε τα όρια

Α) $\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{6-x}-\sqrt{x+6}}{x+2}$

Β) $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^3-x^2}$

Γ) $\lim_{x\to 9}\frac{x^2-81}{2x\sqrt{x}-6x+3\sqrt{x}-9}$

7.03 Να υπολογίσετε τα όρια

Α) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{x-2\sqrt{x}+1}$

Β) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4x^2+3}}{x-1}$

7.04 Να υπολογίσετε τα όρια

$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2-1}-|x+1|}{\sqrt{-x-1}}$, $\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|+x-1}{|2-x|-1}$

7.05 Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 0}f(x)$ αν

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x-2|+|x+2|}{4x} & \text{αν } x\neq 0\\ 0 & \text{αν } x=0\end{cases}$$

7.06 Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 0}\frac{6x-3\eta\mu x}{x+2\eta\mu x}$

7.07 Να βρείτε το $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}-\varepsilon\varphi\theta\right)$

7.08 Β) $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2x-2\sigma\upsilon\nu^2x+2}{\sqrt{x^2+4}-2}$

7.09 Να υπολογίσετε τα όρια

Α) $\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}\eta\mu\left(1-\frac{1}{x}\right)$

Β) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\eta\mu\left(\pi\frac{x-1}{2}\right)$

7.10 Να υπολογίσετε τα όρια:

Α) $\lim_{x\to 3}\frac{\eta\mu(\pi x)}{\sqrt{x+1}-2}$

Β) $\lim_{x\to 0^-}\frac{2x-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}$

7.11 Να υπολογίσετε τα όρια:

Α) $\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu\left(\sqrt{x+3}-2\right)}{\eta\mu(x-1)}$

Β) $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\left(\eta\mu^2x\right)}{x^2}$

Γ) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu\left(1-\sigma\upsilon\nu x\right)}{x^2}$

7.12 Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια

$\lim_{x\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)$ $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{x^2+x}$

$\lim_{x\to 0}\left[\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)\eta\mu\left(\frac{x^3+7}{x}\right)\right]$

7.13 Να βρεθεί ο $\nu\in N$ αν

$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x+\eta\mu 2x+...+\eta\mu\nu x}{x}=28$

7.14 Αν $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$ να βρείτε το

$\lim_{x\to 0}\frac{xf(3x)\text{-}f(\text{-}x)\,\eta\mu 2x}{3x^2-\eta\mu^2x}$

7.15 Αν $\lim_{x\to -2} g(x)=7$, να βρείτε το

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x}\frac{|2-g(x)|-g(x)+x^2+x}{x^2-4}$$

7.16 Αν $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+5}{f(x)-2}=0$ να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to 1} f(x)=-5$

7.17 Να βρεθεί το $\lim_{x\to 1}[f(x)g(x)]$ αν $\lim_{x\to 1}[f(x)(x-1)]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{g(x)}{\sqrt{x}-1}\right]=3$

7.18 Έστω συνάρτηση f με $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$

Α) Να δείξετε ότι $\lim_{x\to 0}\frac{f(\nu x)}{x}=3\nu$, $\nu\neq 0$

Β) Αν $f^2(\nu x)+\eta\mu^2 x\leq 2f(\nu x)\cdot\eta\mu x$ για κάθε $x\in R$ να δείξετε ότι $3\nu=1$

7.19 Να αποδείξετε ότι αν $\lim_{x\to \alpha} f^2(x)=0$, τότε $\lim_{x\to \alpha} f(x)=0$.

7.20 Η συνάρτηση f είναι άρτια στο R και ισχύει ότι $\lim_{x\to -3}(f(x)+2x-5)=4$. Να βρείτε το $\lim_{x\to 3} f(x)$

7.21 Αν $\lim_{x\to 3}\left(12f(x)-4f^2(x)\right)=9$, να βρεθεί το $\lim_{x\to 3} f(x)$

7.22 Αν $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+4}{x-2}=1$ και ισχύει $f(x)=f(1-x)$, $x\in R$ βρείτε το $\lim_{x\to -1} f(x)$

7.23 Να βρεθούν τα $\lim_{x\to 1}[f(x)]$ και $\lim_{x\to 1}[g(x)]$, αν $\lim_{x\to 1}[f(x)-g(x)]=5$ και $\lim_{x\to 1}[2f(x)+g(x)]=4$

7.24 Αν για τη συνάρτηση $f:R\to R$ είναι $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+x}{x-1}=2$, να βρείτε τα όρια

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+1}{f^2(x)-x^2} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)-f(x)-2}{\sqrt{f^2(x)+3}-2x}$$

7.25 Αν $f^2(x)-2f(x)+\sigma\upsilon\nu^2 x\leq 0$ για κάθε $x\in R$ να αποδείξτε ότι $\lim_{x\to -0} f(x)=1$.

7.26 Η συνάρτηση f έχει πραγματικό όριο στο $x_o=2$ και ισχύει $(x-2)f(x)\leq x^2-7x+10$ για κάθε $x\in R$. Να βρεθεί το $\lim_{x\to 2} f(x)$.

7.27 Για τη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει $x^2+2xf(x)\leq f^2(x)+\eta\mu^2(x)\leq 2xf(x)+\eta\mu^2(x)$ για κάθε $x\in R$, να αποδείξετε ότι: $\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$.

7.28 Αν η f: $R\to R$ είναι περιττή με $\lim_{x\to 1} f(x)=2$ να βρεθεί το $\lim_{x\to 0}[f(x-1)-f(1-x)]$

7.29 Αν $\lim_{x\to 3}\frac{|f(x)+x|}{x-3}=2$, να βρεθεί το $\lim_{x\to 3} f(x)$

7.30 Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $x,y\in R$.

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή

Β) Αν ισχύει ότι $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, να αποδείξτε ότι $\lim_{x\to \alpha} f(x)=f(\alpha)$ για κάθε $\alpha\in R$

Γ) Αν ισχύει ότι $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2012$ να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x-2}=2012$ και ότι $\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu(x))-\eta\mu(f(x))}{x}=0$

8 ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ X_O

8.01 Να βρεθούν(αν υπάρχουν)τα όρια

Α) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-x}{x-3\sqrt{x}+2}$ Β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-2x+1}$

Γ) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5-2x}{x\sqrt{x}-2x+2\sqrt{x}-4}$ Δ) $\lim\limits_{x\to \pi^+}\dfrac{5-x^2}{\eta\mu x}$

Ε) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^3-3x^2+3x-1}$ Στ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{(x-1)^3}$

8.02 Να βρεθούν(αν υπάρχουν)τα όρια

Α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x^2-2|x|+1}$ Β) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x|x|}\right)$

Γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}$ Δ) $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{3x^2-2}{\sigma\upsilon\nu x-1}$

Ε) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x+5}{|x+1|}-\dfrac{x+3}{(x+1)^2}\right)$ Ζ) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{3-2x^2}{1-\sigma\upsilon\nu^3 x}$

8.03 Α) Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{h(x)}{|x-2|}=-\infty$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1}g(x)$

8.04 Αν $\lim\limits_{x\to -1}\left[(x^2-4)f(x)-3x+2\right]=+\infty$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$

8.05 Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+3}-5}{f(x)}=+\infty$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

8.06 Αν $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=-3$ να βρεθεί το

$$\lim_{x\to 1}\frac{|g(x)+2x|+g(x)-6+4x}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1}$$

Όρια Παραμετρικών Συναρτήσεων στο X_o

8.07 Αν $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu(\alpha x)}{x} & \alpha\nu \quad x<0\\[2mm] \dfrac{\sqrt{x}-x}{x^2+2\sqrt{x}} & \alpha\nu \quad x>0\end{cases}$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ για κάθε $\alpha\in R$

8.08 Αν $f(x)=\begin{cases}2x-1 & \alpha\nu \quad x<\lambda\\ x^2-x+\lambda & \alpha\nu \quad x\geq\lambda\end{cases}$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 4}f(x)$ για κάθε $\lambda\in R$

8.09 Να βρείτε τους $\lambda,\mu\in R$ ώστε :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-(\lambda-\mu)x^2-(2\lambda-\mu+1)x+3-\mu}{x^3-3x+2}=\ell\in R$$

8.10 Να βρείτε το $\lambda\in R$ ώστε

$$\lim_{x\to 9}\frac{x-5\lambda}{(x-\lambda^2)^2}=-\infty$$

8.11 Να βρείτε τα $\lambda,\mu\in R$ αν

$$\lim_{x\to 1}\frac{\lambda x-\mu\sqrt{x}+2}{\sqrt{\sqrt{x}+3}-2}=8$$

8.12 Να αποδειχτεί ότι για κάθε $\lambda\in R$ η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2\text{-}\lambda x+2}{x^3\text{-}3x^2+3x\text{-}1}$ δεν έχει πραγματικό όριο στο 1 .

Να βρεθούν για κάθε $\alpha\in R$ τα όρια:

Α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-\alpha x}$ Β) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-\alpha}{(x-4)(\sqrt{x}-2)}$

Όριο συναρτησης στο απειρο

8.13 Να υπολογίσετε τα όρια

Α) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$

Β) $\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x^2+3}-x^2\right)$

Γ) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2}+2x\right)$

8.14 Να υπολογίσετε τα όρια

Α) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-x}{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}$

Β) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+3^{x+1}}{e^{x+2}+3^{x+3}}$

Γ) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\left|x^2-2x-3\right|-4}{\left|x^2+2x+5\right|}$

Δ) $\lim_{x\to0}\dfrac{3-2\log x}{1+2\log x}$

8.15 Να υπολογίσετε τα όρια

Α) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x-2\eta\mu x}{x^2+\sqrt{x^2+3}}$

Β) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x^2}{x^3}$

8.16 Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$

8.17 Να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty}\eta\mu\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

8.18 Να βρείτε το $\lim_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(t+\sqrt{t^2+1})}{\ln t}$

8.19 Για την συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ ισχύει $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1\in(0,+\infty)$ Να βρεθεί το $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(f(x))}{\ln x}$

Παραμετρικά όρια στο απειρο

8.20 Αν $f(x)=\dfrac{(\lambda-1)x^3-(\lambda-\mu)x^2+\mu x-3}{x+1}$ να βρεθεί το $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ για κάθε $\lambda,\mu\in R$

8.21 Αν $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$-αx-β να βρεθούν οι $\alpha,\beta\in R$ ώστε $\lim_{x\to+\infty}f(x)=3\beta+11$

8.22 Αν $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}-\lambda x$ να βρεθεί το $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ για κάθε $\lambda\in R$

8.23 Αν $f(x)=\sqrt{x^2-4}+x\eta\mu\varphi-\sigma\upsilon\nu\omega$ με $0<\varphi,\omega<\pi$. Να βρείτε τα φ,ω ώστε $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

8.24 Να βρεθούν οι $\alpha,\beta\in R$ ώστε:

$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+2x+3}+\alpha x+\beta\right]=12$

8.25 Για κάθε $\alpha>0$, να υπολογίσετε το

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\alpha^x+2^x-1}{\alpha^x-2^x+1}$,

8.26 Για κάθε $\alpha>0$, να υπολογίσετε το

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha^x+2^{x+1}}{\alpha^{x+1}+2^x}$

8.27 Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\in R$ και $f(x)=\alpha\sqrt{x^2+1}+\beta\sqrt{x^2+2}+\gamma\sqrt{x^2+3}$

8.28 Έστω η $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+\kappa^2}{x}\right)$ $\kappa>0$ Να βρείτε τα όρια $\lim_{x\to0}f(x)$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\ln(x))$.

…

8.29 Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $2\sqrt{2x} \le f(x) \le x+2$, για κάθε $x \ge 0$. Να βρείτε τα

Α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-4}{x-2}$ Β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-4}{\sqrt{x+2}-2}$

Γ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-16}{x-2}$ Δ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|f(x)-1|-3}{x^2-4}$

8.30 Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ αν $f^2(x)+g^2(x)+2f(x)-4g(x)+5 \le \sqrt{x}$, για κάθε $x \in R$.

8.31 Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_o}\left(f^2(x)+g^2(x)\right)=0$, τότε να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = 0$

8.32 Αν $f^2(x)-2f(x)+\sigma\upsilon\nu^2 x \le 0$ για κάθε $x \in R$, να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=1$

8.33 Αν $\lim\limits_{x\to 3}\left(12f(x)-4f^2(x)\right)=9$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

8.34 Η συνάρτηση f έχει πραγματικό όριο στο $x_o=2$ και για κάθε $x \in R$ ισχύει $(x-2)f(x) \le x^2-7x+10$.Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

8.35 Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{x^2+x}$

8.36 **Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $2f(x)+\eta\mu f(x)=x$ για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{2}$

8.37 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h ώστε να ισχύουν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2g(x)-4}{x-2}=2$

$g(x) \le f(x)+|x-2|+\dfrac{\eta\mu(x-2)}{(x-2)} \le h(x)+2$ και

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{h(x)}=1$ και για κάθε $x \in R-\{2\}$. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$ και $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

8.38 Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{x-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x+\eta\mu x}}=1$

8.39 Βρείτε το $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+\eta\mu x+1}-x\right)$

8.40 Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+\eta\mu x}{x-\eta\mu x}$

8.41 Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu 2x}{\sqrt{x}}$

8.42 Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-2\eta\mu x}{x^2+\sqrt{x^2+3}}$

8.43 Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x^2}{x^3}$

8.44 Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+3}{3+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}$

8.45 Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\dfrac{4\eta\mu x}{3+\sigma\upsilon\nu x}\right)$

8.46 Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x}{x^2+2x+2}$

9 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

9.01 Να βρεθεί ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης f αν ισχύει ότι
$xf(x)+5x^2+2=ημx+(x-1)(x-2)$, $\forall x\in R$

9.02 Αν $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-2x}{x-2}=1$ και η f είναι συνεχής, βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\frac{xf(x)-2x^2+3f(2)-6x}{x-2}$

9.03 Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=1$ και ισχύει ότι
$f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in R$ τότε είναι συνεχής στο R

9.04 Αν για κάθε $x\in R$ ισχύει ότι
$ημ^2x+2xf(x)\le f^2(x)\le ημ^2x+x(x+2f(x))$.Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_o=0$.

9.05 Για τις συναρτήσεις $f,g:R\to R$ ισχύει ότι
$f^2(x)+g^2(x)+2f(x)+5\le 4g(x)+συν^2x$, $\forall x\in R$.
Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι συνεχείς στο
$x_o=\frac{π}{2}$.

9.06 Μια συνάρτηση $f:R\to R$ έχει την ιδιότητα $f^5(x)+f(x)=x$ $\forall x\in R$. Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_o=0$.

9.07 ** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 και ισχύει $xf(x)\ge e^x-1$ για κάθε $x\in R$, να βρείτε το $f(0)$

9.08 Αν $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$ και η f^{-1} είναι συνεχής, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^{-1}(x)-x^2}{x+f^{-1}(x)}=1$

9.09 Έστω $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2ημ\frac{1}{x}, & αν\ x\prec α\\ x^3+x, & αν\ x\ge α\end{cases}$

A) Να αποδείξετε ότι αν $α\ne 0$ τότε η f είναι ασυνεχής στο $x_o=α$.

B) Να εξετάσετε τη συνέχεια της f στο $α=0$

9.10 Έστω $f:R\to R$ με $f^3(x)+3f(x)=e^{2x}-1$, για κάθε $x\in R$

A) Να δείξετε ότι $|f(x)|\le\left|e^{2x}-1\right|$, $x\in R$

B) Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο μηδεν

9.11 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, για την οποία ισχύει $(f(x))^2-2f(x)+συν^2x=0$, $x\in R$

A) Να αποδείξετε ότι $|f(x)-1|\le|x|$

B) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0

Γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(xf\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

9.12 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+2}{2^{\frac{1}{x}}+1}, & x\ne 0\\ α, & x=0\end{cases}$

A) Να υπολογίσετε τα όρια:
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$

B) Υπάρχει τιμή του $α$ ώστε η f να είναι συνεχής;

9.13 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=1$ και ισχύει ότι $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in R$.
Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο R

9.14 Έστω συνάρτηση f τέτοια ώστε :
$f(x+y)=f(x)+f(y)-1$, $x,y\in R$. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο σημείο $α\in R$, τότε είναι συνεχής στο R.

Βασικά Θεωρήματα

9.15 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x-1}{x-2x^2}=\text{εφ}x$ έχει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ τουλάχιστον μια ρίζα

9.16 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\kappa^2}{x}+\frac{\lambda^2}{x+1}+\frac{\mu^2}{x-1}=0$ με $\kappa,\lambda,\mu\neq 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις ρ_1, $\rho_2\in(-1,1)$ και ισχύει ότι $\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{\mu^2-\lambda^2}{\kappa^2}$

9.17 Έστω η εξίσωση $x^3+\alpha x^2+\beta=0$, με $\alpha,\beta\in R$, $\beta>0$, $\alpha+\beta+1<0$. Να αποδειχτεί ότι έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1,1)$

9.18 Έστω $f:[\alpha,\beta]\to R$, συνεχής συνάρτηση, ώστε $f(\alpha)\geq\alpha^2$ και $f(\beta)\leq\beta^2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_o\in[\alpha,\beta]$, ώστε $f(x_o)=x_o^2$.

9.19 Εστω $f:[0,\pi]\to R$ συνεχής συνάρτηση, ώστε $f(0)=f(\pi)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_o\in[0,\pi]$, ώστε $f(x_o)=f\left(x_o+\frac{\pi}{2}\right)$.

9.20 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και για κάθε $x\in R$ είναι $f(x)+f(x+2)=0$ Να αποδείξετε ότι:
Α) Η f είναι περιοδική
Β) Υπάρχουν άπειροι $\alpha\in R$ ώστε $f(\alpha)=f(\alpha+2)$

9.21 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,2]$ με $f(-1)\neq f(2)$, δείξτε ότι υπάρχει $x_o\in(-1,2)$ ώστε $3f(-1)+4f(2)=7f(x_o)$

9.22 Εστω $f:[\alpha,\beta]\to R$, συνεχής και γνήσια φθίνουσα συνάρτηση με $f(\alpha)-f(\beta)\neq 0$, $\kappa,\lambda,\mu\in N^*$ και $\gamma\in(\alpha,\beta)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$, ώστε
$(\kappa+\lambda+\mu)f(x_o)=\kappa f(\alpha)+\lambda f(\gamma)+\mu f(\beta)$

9.23 Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους $f(x)=20\cdot\alpha\cdot x\cdot e^x$, $g(x)=21\cdot\beta\cdot(\text{ημ}x+\text{συν}x)$. Αν το (α,β) είναι σημείο της ευθείας $21y=20x$, με $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_o\in(0,1)$

9.24 Αν $\alpha,\beta>0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha\text{ημ}x+\beta=x$ έχει (μία τουλάχιστον) ρίζα της οποίας η απόλυτη τιμή δεν υπερβαίνει τον $\alpha+\beta$.

9.25 Αν η f είναι συνεχής στο R και ισχύει ότι $f(x)+f(2-x)=0$ για κάθε x, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο R.

9.26 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,2]$ με $f(2)\neq 6$, και ακόμη $f(1)+f(2)=8$, να αποδείξετε ότι υπάρχει, $x_o\in(1,2)$ ώστε $f(x_o)=x_o+x_o^2$.

9.27 Η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ είναι συνεχής και υπάρχουν $0<\alpha<\beta<\gamma$ ώστε $f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)f\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)f\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)=1$. Να δείξετε ότι υπάρχει x_o ώστε $f(x_o)=x_o^{2010}$

9.28 Να βρείτε τη συνάρτηση f, συνεχή στο R αν ισχύει $e^{f(x)}-4x-4e^{-f(x)}=0$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=\ln 2$

9.29 Αν $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{1994} \in [0,1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον $x_o \in [0,1]$ ώστε $|x_o - \alpha_1| + |x_o - \alpha_2| + ... + |x_o - \alpha_{1994}| = 997$.

9.30 Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f: R \to R$ αν ισχύει ότι $f^2(x) - 2f(x)\eta\mu x = 1$, $\forall x \in R$

9.31 *Δίνεται συνάρτηση $f: R \to R$ συνεχής με $f^2(x) \neq 9$ για κάθε $x \in R$ και $f(0) > 3$. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 3$ για κάθε $x \in R$

9.32 Ν βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{4-x} - \sqrt{2+x}$ και να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$

9.33 Έστω η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $4x^2 + 9[f(x)]^2 = 36$ για κάθε $x \in (-3,3)$.
Να βρείτε τον τύπο της αν $f(0) = -2$

9.34 Να βρείτε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων

A) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x}$, $0 < x \leq 1$

B) $f(x) = x^3 - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, \pi/2]$

9.35 Μια συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ ικανοποιεί τη σχέση: $f(1) + f(2) = f(3) + f(4)$. Θα μπορούσε η f να είναι αντιστρέψιμη;

9.36 Αν $\alpha, \beta, \gamma \in R$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_o \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ώστε

$$\eta\mu^2(x_o + \alpha) + \eta\mu^2(x_o + \alpha) + \eta\mu^2(x_o + \alpha) = \frac{3}{2}$$

9.37 Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$ τέμνονται σε ένα μόνο σημείο του διαστήματος $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

9.38 Οι συναρτήσεις $f, g: [0,1] \to [0,1]$ είναι συνεχείς και ισχύει $f \circ g = g \circ f$ για κάθε $x \in [0,1]$. Έστω ακόμα ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει (τε) $x_o \in [0,1]$ ωστε $f(x_o) = x_o$ και $g(x_o) = x_o$

9.39 Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f αν $f(x) = (4x^2 - 5\pi x + \pi^2)\eta\mu x$, $0 \leq x \leq 2\pi$

9.40 Έστω συνεχής συνάρτηση $f: R \to Z$ και $f(1) = 2$, να αποδείξετε ότι $f(x) = 2$, $\forall x \in R$.

9.41 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \gamma \in R$ και $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \delta \in R$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_o > 0$ ώστε $f(x_o) + e^{x_o + 1} + \ln(x_o) = 1$.

9.42 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και ισχύει $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in R$ ώστε $f(\alpha) = \alpha$

9.43 Έστω $f: R \to R$ συνεχής με $f(10) = 9$ και για κάθε $x \in R$ ισχύει ότι $f(x)f(f(x)) = 1$. Να βρείτε το $f(5)$

9.44 Έστω $f: [0,1] \to [0,1]$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $x_o \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = x_o$ (S. Banach)

Γενικές Ασκήσεις

9.45 Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x+2(x-1)=0$ έχει μοναδική ρίζα

Β) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^3+2(\alpha-1)x^2-1 & \text{αν} \quad x<1 \\ x^2-x\ln\alpha-1 & \text{αν} \quad x\geq 1 \end{cases} \quad \text{με} \quad \alpha\in R.$$

Αν η f είναι συνεχής στο R, να βρείτε την τιμή του $\alpha\in R$

9.46 Για τη συνεχή συνάρτηση f, ισχύει ότι:

$$2\left(\sqrt{x+4}-\sqrt[3]{2x+8}\right)\leq xf(x)\leq \eta\mu\frac{x}{6}+x^6, \ \forall x\geq -4.$$

Να υπολογίσετε το $f(0)$ και να αποδείξετε ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον $\kappa\in(0,1]$ ώστε

$$f(\kappa)=\eta\mu\frac{\kappa}{6}+\kappa^6.$$

9.47 Έστω $g(x)=x^2+x\eta\mu x$ και

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x^2\sigma\upsilon\nu x}{g(x)}, & \text{αν } g(x)\neq 0 \\ \alpha & \text{αν } g(x)=0 \end{cases}$$ Να βρείτε το

$\alpha\in R$ αν η f είναι συνεχής

9.48 Έστω $f:R\to R$ συνάρτηση, ώστε $f^2(x)+\eta\mu^2 x=x^2$, $\forall x\in R$.

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0

Β) Αν η f είναι συνεχής στο R και ισχύει $f(\alpha)f(\beta)<0$ να δείξετε ότι $\alpha\beta<0$.

9.49 Έστω συνεχής συνάρτηση f στο $[1,4]$ για την οποία ισχύουν: $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,4]$, $f(1)>0$, $f(1)f(2)=f(3)f(4)$ Να αποδείξετε ότι:

Α) $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,4]$,

Β) Η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-f(1)f(2)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[1,2]$.

Γ) Η f δεν είναι αντιστρέψιμη.

9.50 Έστω η συνάρτηση $g(x)=x+\dfrac{\beta-\alpha}{5}$ ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$. Αν ισχύει $f\left(g\left(\dfrac{4\alpha+\beta}{5}\right)\right)=f(\alpha)$ όπου f είναι μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο R, να δείξετε ότι υπάρχει $x_o\in[\alpha,\beta]$ ώστε $f(x_o)=f(g(x_o))$

9.51 Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[0,+\infty)\to R$ με $g(0)=1$ και $x[f(x)-g(x)]=\sqrt{x}[3f(x)+g(x)]$

Α) Να βρείτε το $f(0)$

Β) Αν $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[0,4]$ να δείξετε ότι: α) Η εξίσωση $(x-2)f(x)+xf(x+2)=x(x-2)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$.

β) $g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,4]$.

9.52 Έστω η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:(0,1)\to R$ για την οποία ισχύουν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-3}{x}=3$ και $2\eta\mu(x-1)\leq(x-1)f(x)\leq x^2-1$ για κάθε $x\in(0,1)$

Α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της $h(x)=f(x)-\ln x-3$

Β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=e^{f(x)-3}$ τέμνει την ευθεία $y=x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$

9.53 Α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και $1-1$ σε διάστημα Δ. Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$ με $\alpha<\beta<\gamma$, να αποδείξετε ότι θα είναι είτε $f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)$ είτε $f(\gamma)<f(\beta)<f(\alpha)$

Β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και $1-1$ στο Δ, να αποδείξετε ότι είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

9.54 Έστω συνάρτηση f, συνεχής στο R και ισχύει η σχέση

$f^3(x)+4f^2(x)+6f(x)=x^3-2x^2+6x-1$ για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$

9.55 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, και ισχύει $f(f(x))+x=4-2f(x)$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι:

Α. η f είναι $1-1$

Β. Αν η f είναι γνήσια μονότονη τότε είναι γνήσια φθίνουσα

Γ. υπάρχει $x_o\in R$ ώστε $f(x_o)=x_o$

Δ. $f(1)=1$

9.56 Η ανάβαση - όπως και η κατάβαση - στην ψηλότερη κορυφή του Ολύμπου διαρκεί 6 ώρες. Ένας ορειβάτης ξεκινάει την ανάβαση στις 6 το πρωί και χωρίς να σταματήσει βρίσκεται σε 6 ώρες στην κορυφή. Την άλλη μέρα ξεκινάει στις 6 το πρωί την κατάβαση, σε 6 ώρες, ακολουθώντας την ίδια διαδρομή, επιστρέφει στη βάση. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της διαδρομής όπου βρίσκεται την ίδια ώρα και τις δύο ημέρες

9.57 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq 0$, $x\in[\alpha,\beta]$. Για κάθε $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_\nu\in[\alpha,\beta]$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in[\alpha,\beta]$ ώστε

$$f(\xi_1)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots+f(x_\nu)}{\nu}$$

$$f(\xi_2)=\sqrt[\nu]{f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot f(x_3)\cdot\ldots\cdot f(x_\nu)}$$

9.58 Έστω η συνάρτηση $f:IR\to IR$ ώστε $f^2(x)+f(f(x))=4$ για κάθε $x\in IR$ και $f(2)=1$

Α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=1$, να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 1}(f(x)-3)\eta\mu\frac{1}{x-1}$$

Β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $[1,2]$

9.59 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x)=\ln x-\ln(x-1)$

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την f^{-1}

Β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x)=f(x)-e^x$

Γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)e^{-x}-1=0$ έχει μοναδική λύση μεγαλύτερη του ένα

9.60 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to IR$ για την οποία ισχύει $f^3(x)+xf(x)+x^3=0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Α) Να αποδείξετε ότι $-x^3<f(x)<0$

Β) Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} f(x)\eta\mu\frac{2}{x}+\frac{f(x)}{x}-1 & , \ x>0 \\ -1 & , \ x=0 \\ \frac{f(-x)}{x^2} & , \ x<0 \end{cases}$

9.61 Δίνεται η $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2^{\frac{1}{x}}+2}{2^{\frac{1}{x}}+1}, & x\neq 0 \\ \alpha, & x=0 \end{cases}$

Α) Να υπολογίσετε τα $\lim_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim_{x\to 0^+}f(x)$, $\lim_{x\to 0^-}f(x)$

Β) Υπάρχει τιμή του α ώστε η f να είναι συνεχής;