

# Β Λυκείου Άλγεβρα

4 ΓΛΧ

2013-2014

Μ. Παπαγρηγοράκης  
Χανιά

[Άλγεβρα]



# 1 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.01 Δίνεται το σύστημα:  $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda - 1 \\ x + 2\lambda y = \lambda \end{cases}$ ,

$\lambda \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε για τη λύση  $(x,y)$  του συστήματος να ισχύει  $x - y = 0$

1.02 Να λύσετε το σύστημα:

$$7|x+2| + |3-y| = 31$$

$$3|x+2| - 4|3-y| = 0$$

1.03 Δίνεται το  $(\Sigma)$ :  $\begin{cases} (\mu-2)x + 5y = 5 \\ x + (\mu+2)y = 5 \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$

- A) Για ποιες τιμές του  $\mu$  έχει άπειρες λύσεις  
 B) Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση  $(x_0, y_0)$ , να βρείτε τη λύση αυτή.  
 Δ) Να υπολογίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού  $\mu$  ώστε για τη λύση του συστήματος  $(x_0, y_0)$ , του B) ερωτήματος, να ισχύει:  
 $2x_0 + y_0 > 5$

1.04 Έστω το σύστημα :

$\begin{cases} (\lambda-1)x + y = 2 \\ x + (\lambda-1)y = 2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ . Στην περίπτωση που το  $(\Sigma)$  έχει μοναδική λύση  $(x_0, y_0)$  και ισχύει  $x_0^4 + y_0^2 = 2$  να βρεθεί το  $\lambda$  στο  $\mathbb{R}$ .

1.05 Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{αν } x < 0 \\ 2x + \lambda^2 - 3 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

- A) Να βρεθούν ο  $\lambda$  ώστε  $f(0) = 1$ .

Για τη μεγαλύτερη τιμή του  $\lambda$  που βρήκατε

- Γ) να βρεθούν τα  $f(-2), f(3,5)$ ,

Δ) Να λύσετε το σύστημα :  $\begin{cases} f(-2)x + 4y = 12 \\ 6x + f(3,5)y = 10 \end{cases}$

1.06 Δίνεται ένα σύστημα  $(\Sigma)$  2 γραμμικών εξισώσεων με 2 αγνώστους  $x$  και  $y$  και  $D_x, D_y$  οι ορίζουσες του συστήματος οι οποίες ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα :

$$\Sigma_1: D.Dx + D.y = 0$$

$$Dx + D.Dy = 0$$

- A) Να λύσετε το  $\Sigma_1$ , με αγνώστους τους  $Dx, D.y$   
 B) Να λύσετε το  $(\Sigma)$ .

1.07 Δίνεται το σύστημα  $\begin{cases} x + 2y = -6 \\ 3x + y = \lambda \end{cases}$

Αποδείξτε ότι έχει μοναδική λύση  $(x_0, y_0)$  και βρείτε το  $\lambda$  ώστε να ισχύει  $x_0 - y_0 < 0$

1.08 Δίνεται το σύστημα  $\begin{cases} \lambda x + y = \lambda^2 \\ x + \lambda y = 1 \end{cases} (\Sigma_1)$  και

τα τριώνυμα

$$f(x) = x^2 + 3x - \lambda, \quad g(x) = -x^2 - \lambda x + 3.$$

- A. Να βρεθεί το  $\lambda$  ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση.

- B. Εάν η μοναδική λύση του  $\Sigma_1$  είναι  $(x_0, y_0)$  και ισχύει  $-x_0 + 3y_0 + 3 = 0$ , να λυθεί η ανίσωση  $f(x) \geq g(x)$ .

Γ. Βρείτε τη λύση του συστήματος

$$|D - \lambda_1| + |D_x - \lambda_2| + |D_x - D_y| = 0 \quad \text{όπου } \lambda_1 \text{ και } \lambda_2 \text{ είναι οι τιμές για τις οποίες το } (\Sigma_1) \text{ είναι αδύνατο και έχει άπειρες λύσεις αντίστοιχα}$$

## 2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

### MONOTONIA

2.01 Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων  $f(x) = x^2 - 5x$ ,  $x \in [3, +\infty)$

$$g(x) = -2x + 3 \quad h(x) = x + \sqrt{x-2}$$

2.02 Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων  $f(x) = x(4-x)$ ,  $x \in (-\infty, 2]$

$$g(x) = 2 - \sqrt{3x-1} \quad t(x) = 2 - \sqrt{3-x}$$

2.03 Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων

$$h(x) = \frac{1}{x^2} - 1 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1-x}{x}, \quad x < 0$$

2.04 Να αποδείξετε ότι η  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$

2.05 Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης  $f(x) = (\lambda^2 - 1)x + 3$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

2.06 Μια συνάρτηση  $f$  είναι γνήσια μονότονη στο  $\mathbb{R}$  και διέρχεται από τα σημεία  $(1, 2)$  και  $(3, 1)$ . Να αποδείξετε τη μονοτονία της.

2.07 Για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει ότι  $2f^5(x) + f(x) = 3x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

- A) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνήσια αύξουσα  
B) Να λυθεί η ανίσωση  $f(x^2 + x - 1) < 1$

2.08 Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση κάθε γνησίως μονότονης συνάρτησης τέμνει σε ένα το πολύ σημείο τον άξονα  $x'$ .

2.09 Οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι ορισμένες στο  $\mathbb{R}$ , είναι γνήσια μονότονες και έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

2.10 Να βρεθούν οι τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση  $f(x) = (\lambda^2 - 4)x + 3$  να είναι γνησίως αύξουσα.

2.11 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$  είναι γνησίως αύξουσα

2.12 Αν η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως φθίνουσα και  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι η  $g(x) = \frac{f^2(x)-3}{3f(x)}$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

2.13 Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με την ιδιότητα:  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ . Δίνεται ακόμα ότι ισχύει πρόταση: «Αν  $x > 0$  τότε  $f(x) > 0$ ». Να αποδείξετε ότι:

- A) η  $f$  είναι περιττή  
B) η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.  
Γ) Να λύσετε την ανίσωση  $f(4x^2 + 2005) + f(4x^2 - 2005) < 2f(8x - 4)$

2.14 Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει  $f(f(x)) = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι  $f(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

2.15 Δίνεται ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνήσια αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ . Να λύσετε την εξίσωση

$$f(\sqrt{x}) + f(x^2) = f(x) + f(x^3)$$

2.16 Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  με σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$  ώστε να ισχύει

$$f(x) + f^3(x) = x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα

2.17 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A)  $2 - x - x^{13} > 0$

B)  $x^{15} + x^3 + x - 1 > 0$

Γ)  $x^{11} + 2x^7 + 3x^5 + 5x^3 + 7x < 18$

2.18 Άντας  $f(x) = x^7 + x - 1$ , να λύσετε τις ανισώσεις  $f(x^2 + x) < f(2)$  και  $f(x^2 + 1) < f(2x - 2)$

2.19 Έστω συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

A) Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 \neq x_2$  οριζούμε  $\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ . Να δείξετε ότι:

a) η  $f$  είναι γν. αύξουσα αν και μόνο αν  $\lambda > 0$ .

β) η  $f$  είναι γν. φθίνουσα αν και μόνο αν  $\lambda < 0$

B) Αν η συνάρτηση  $f(x) = (1 - \alpha)x + 2$  είναι γνήσια αύξουσα, να βρείτε το  $\alpha \in \mathbb{R}$

Γ) Αν  $A = \mathbb{R}$  και για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1, \neq x_2$  ισχύει  $|f(x_1) - f(x_2)| < 2|x_1 - x_2|$ , να αποδείξετε ότι η  $g(x) = f(x) - 2x$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$  και ότι η  $h(x) = f(x) + 2x$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

2.20 Οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι γνήσια αυξουσες έχουν πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και ισχύει

$$f(x) > 0 \text{ και } g(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $\frac{f}{g}$  είναι

γνήσια μονότονη.

B) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x^2)g(x) - f(x)g(x^2) > 0$$

2.21 Άντας  $f(x) = x^7 + x^5 + x$ , να λύσετε την ανίσωση  $f(2x^2 - x + 3) < f(3x + x^2)$

2.22 Άντας  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  περιττή και γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$  με  $f(f(x)) = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι  $f(x) = -x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

2.23 Έστω συνάρτηση  $f$ , ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ , που είναι γνήσια μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία  $(1, 3)$  και  $(2, 0)$

A) Να αποδείξετε ότι είναι γνήσια φθίνουσα

B) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) > 3$

Γ) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) < 0$

Δ) Να βρείτε τα σημεία όπου η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'$

2.24 Έστω συνάρτηση  $f$ , ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ , που είναι γνήσια μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία  $(0, 1)$  και  $(-1, 0)$

A) Να αποδείξετε ότι είναι γνήσια αύξουσα

B) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) > 1$

Γ) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) < 0$

Δ) Να βρείτε τα σημεία όπου η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τους άξονες

2.25 Έστω συνάρτηση  $f$ , ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ , που είναι γνήσια μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία  $(-1, -1)$  και  $(1, 2)$

A) Να αποδείξετε ότι είναι γνήσια αύξουσα

B) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) > -1$

Γ) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) < 2$

Δ) Να λύσετε την εξισωση  $f(x) = 2$

E) Πόσες ρίζες μπορεί να έχει η εξισωση  $f(x) = 2014$

## AKPOTATA

2.26 Να μελετηθούν ως προς τα ακρότατα οι συναρτήσεις

- A)  $f(x) = -2(x+1)^2 + 3$
- B)  $f(x) = 1 - \sqrt{2x+3}$
- Γ)  $f(x) = x^4 + x^2 - 1$
- Δ)  $f(x) = -|x-5| + 3$

2.27 Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι συναρτήσεις

- A)  $f(x) = x^2 + 3$  στο  $[-2, -1]$
- B)  $f(x) = 2\sqrt{3-x^2} + 3$  στο  $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$
- Γ)  $f(x) = \sqrt{7+\sqrt{6-x}}$  στο  $[2, 5]$

2.28 Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της  $f$  είναι το 2

2.29 Να προσδιοριστεί ο κάτιος ώστε όταν η συνάρτηση  $f(x) = (3κ+1)x^2$  παρουσιάζει ελάχιστο, η συνάρτηση  $g(x) = (3-|κ+2|)x^2$  να παρουσιάζει για την ίδια τιμή του  $x$  μέγιστο

2.30 Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της  $f$  είναι το 2

2.31 Έστω η  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ ,  $x \geq 0$ . Να δείξετε ότι:

- A)  $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$
- B)  $f(x) \leq 1$ ,  $x \geq 0$
- Γ) η μέγιστη τιμή της  $f$  είναι το 1

**ΑΡΤΙΕΣ ΠΕΡΙΤΤΕΣ**

2.32 Για κάθε μια από τις συναρτήσεις εξετάστε πουα είναι άρτια ή περιττή.

- A)  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 5}$   
 B)  $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$

2.33 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές ή άρτιες:

- A)  $f(x) = x^2 \cdot |x - 1|$   
 B)  $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 1} + \frac{x^3}{x^2 + 8}$   
 C)  $f(x) = |x+1|^5 + |x-1|^5 + 2$

2.34 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές ή άρτιες:

- A)  $f : (-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x^3 + x$   
 B)  $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$   
 C)  $f(x) = x^3 - x|x|$

2.35 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές ή άρτιες

- A)  $f(x) = \begin{cases} -2x + 7 & x \leq -1 \\ -2x - 7 & x \geq 1 \end{cases}$   
 B)  $f(x) = \begin{cases} -3x + 4 & x < 0 \\ 3x + 4 & x \geq 0 \end{cases}$

2.36 Αν η συνάρτηση  $f(x)$  είναι περιττή με πεδίο ορισμού  $A$ , να αποδείξετε ότι η  $g(x) = |f(x)|$  είναι άρτια

2.37 Να αποδείξετε ότι όταν μια συνάρτηση είναι είναι άρτια και περιττή, τότε είναι η μηδενική συνάρτηση

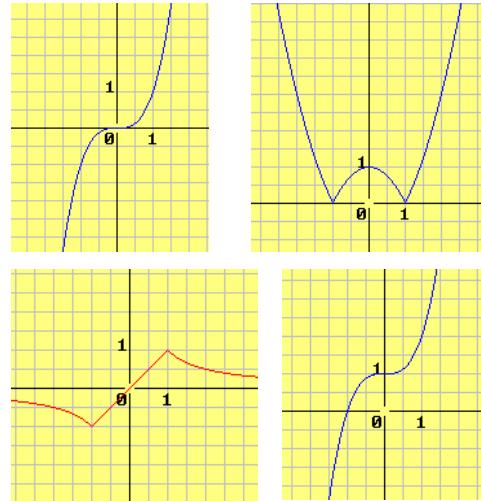
2.38 Δίνεται συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με την ιδιότητα για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \text{ Δείξτε ότι:}$$

- A)  $f(0) = 0$       B) η  $f$  είναι περιττή

2.39 Έστω συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = (\lambda - 1)x + 3\lambda - 1$ . Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  η  $f$  είναι  
 A) άρτια      B) περιττή

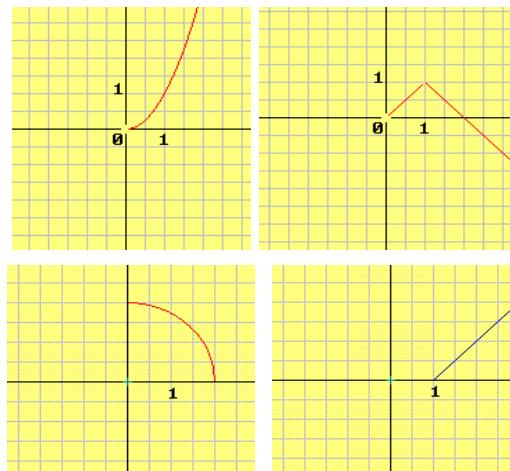
2.40 Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές;



2.41 Δίνεται η συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει ότι  $f(2) = 4$ . Να βρεθεί το  $f(-2)$  αν γνωρίζετε ότι :

- A) η  $f$  είναι άρτια  
 B) η  $f$  είναι περιττή

2.42 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω γραμμές ώστε να παριστάνουν γραφικές παραστάσεις άριτας ή περιττής συνάρτησης



## 3 TRIGONOMETRIA

3.01 Σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται το σημείο  $M$  αν  $x\hat{O}M = \omega$  και  $\eta\mu\omega \cdot \sigma\nu\omega > 0$

3.02 Αν  $5\pi < x < \frac{11\pi}{2}$  να αποδείξετε ότι  $\varepsilon\phi x - \eta\mu x > \sigma\nu x - \sigma\phi x$ .

### Ανισότητες – Μέγιστα Ελάχιστα

3.04 Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων :

$$A=2\eta\mu x - 5 \quad B=-4\sigma\nu x \quad \Gamma = \eta\mu x + 4\sigma\nu y$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\kappa \in \mathbb{R}$  υπάρχει γωνία  $\omega$  ώστε να ισχύει:  $\varepsilon\phi\omega = \frac{3\kappa}{\kappa-2}$  και  $\sigma\phi\omega = \frac{\kappa}{2-\kappa}$

3.05 Δείξτε ότι  $-\sqrt{2} \leq \eta\mu x + \sigma\nu x \leq \sqrt{2}$

### Να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί

3.07 Αν είναι  $\sigma\nu\omega = -\frac{12}{13}$  και  $90^\circ < \omega < 180^\circ$  να υπολογίσετε την παράσταση

$$A = 2\eta\mu\omega - \frac{5}{\varepsilon\phi\omega} + \sigma\nu\omega$$

3.08 Αν  $16\sigma\nu^2\omega - 5 = 0$  και  $90^\circ < \omega < 180^\circ$ , να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

3.09 Αν  $4\eta\mu^2\omega = 1$  και  $0^\circ < \omega < 180^\circ$ , να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

3.03 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

- A)  $\eta\mu 90^\circ + \eta\mu 180^\circ + \eta\mu 270^\circ + \eta\mu 360^\circ$
- B)  $2\varepsilon\phi^2 180^\circ - 5(1 - \sigma\nu^2 90^\circ)$
- C)  $\frac{\varepsilon\phi 60^\circ - \varepsilon\phi 30^\circ}{\varepsilon\phi 45^\circ + \varepsilon\phi 30^\circ + \varepsilon\phi 60^\circ}$

Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\kappa \in \mathbb{R}$  υπάρχει γωνία  $\omega$  ώστε να ισχύει:  $\varepsilon\phi\omega = \frac{3\kappa}{\kappa-2}$  και  $\sigma\phi\omega = \frac{\kappa}{2-\kappa}$

3.06 Να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει γωνία  $x$  τέτοια ώστε να ισχύει:

- A)  $\sigma\nu^2 x < 3\sigma\nu x - 2$
- B)  $\eta\mu x < \frac{1}{\sqrt{2}-2}$

3.10 Αν  $0 < \omega < 90^\circ$  και  $\varepsilon\phi\omega = \frac{3}{4}$  να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $A = \frac{3\eta\mu\omega + 2\sigma\nu\omega}{4\eta\mu\omega - 9\sigma\nu\omega}$

3.11 Αν  $17\sigma\nu\omega + 8 = 0$  και  $90^\circ < \omega < 180^\circ$  να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{\eta\mu\omega - \sigma\nu\omega}{\varepsilon\phi\omega}$$

## Βασικές Ταυτότητες

3.12 Να αποδείξετε ότι:

$$(2\sigma v \nu \theta \cdot \eta \mu \theta)^2 + x^2 (\sigma v \nu^2 \theta - \eta \mu^2 \theta)^2 = x^2$$

3.13 Να αποδείξετε ότι:

$$(\chi \eta \mu \omega \sigma v \nu \varphi)^2 + (\chi \eta \mu \omega \eta \mu \varphi)^2 + (\chi \sigma v \nu \omega)^2 = x^2$$

3.14 Να αποδείξετε ότι:

$$\eta \mu^3 \theta \cdot \sigma v \nu \theta - \eta \mu^5 \theta \cdot \sigma v \nu \theta = \eta \mu^3 \theta \cdot \sigma v \nu^3 \theta$$

3.15 Να αποδείξετε ότι:

$$\varepsilon \varphi \omega = \frac{1}{\eta \mu \omega \cdot \sigma v \nu \omega} - \frac{1}{\varepsilon \varphi \omega}$$

3.16 Να αποδείξετε ότι:

$$\eta \mu^4 x - \sigma v \nu^4 x = 1 - 2 \sigma v \nu^2 x = 2 \eta \mu^2 x - 1$$

3.17 Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\eta \mu \omega + \sigma v \nu \omega}{\eta \mu \omega - \sigma v \nu \omega} = \frac{\varepsilon \varphi \omega + 1}{\varepsilon \varphi \omega - 1}$$

3.18 Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sigma v \nu^2 \omega - \eta \mu^2 \omega}{\eta \mu \omega \cdot \sigma v \nu \omega} = \frac{1 - \varepsilon \varphi^2 \omega}{\varepsilon \varphi \omega}$$

3.19 Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{2 \varepsilon \varphi x + \frac{1}{\sigma v \nu^2 x}} = 1 + \varepsilon \varphi x, \text{ αν } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

3.20 Αποδείξτε ότι  $\frac{\varepsilon \varphi^2 x - 1}{\varepsilon \varphi^2 x + 1} = \eta \mu^4 x - \sigma v \nu^4 x$

3.21 Να αποδείξετε ότι

$$\left(1 + \frac{\sigma v \nu x - 1}{\eta \mu x}\right) \left(1 + \frac{\eta \mu x + 1}{\sigma v \nu x}\right) = 2$$

3.22 Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1 + \eta \mu \alpha}{1 + \sigma v \nu \alpha} \cdot \frac{1 + \frac{1}{\sigma v \nu \alpha}}{1 + \frac{1}{\eta \mu \alpha}} = \varepsilon \varphi \alpha$$

3.23 Να αποδείξετε ότι

$$\left(\frac{1}{\eta \mu \alpha} - \eta \mu \alpha\right) \left(\frac{1}{\sigma v \nu \alpha} - \sigma v \nu \alpha\right) (\varepsilon \varphi \alpha + \sigma \varphi \alpha) = 1$$

3.24 Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1 - \eta \mu x + \sigma v \nu x}{1 - \eta \mu x} = \frac{1 + \eta \mu x + \sigma v \nu x}{\sigma v \nu x}$$

3.25 Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\eta \mu^3 \omega + \eta \mu \omega \cdot \sigma v \nu^2 \omega}{\sigma v \nu \omega} = \varepsilon \varphi \omega$$

3.26 Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\varepsilon \varphi^4 x + \eta \mu^2 x}{\sigma \varphi^4 x + \sigma v \nu^2 x} = \varepsilon \varphi^6 x$$

3.27 Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1 + \varepsilon \varphi^7 x}{1 + \sigma \varphi^7 x} = \left( \frac{1 + \varepsilon \varphi x}{1 + \sigma \varphi x} \right)^7$$

3.28 Να αποδείξετε ότι:

$$\sigma v \nu^2 \alpha + \sigma v \nu^2 \beta + 2 \eta \mu \alpha \cdot \eta \mu \beta \leq 2$$

3.29 Να αποδείξετε ότι

$$\sigma v \nu^2 \alpha + \frac{1}{\sigma v \nu^2 \alpha} \geq 2$$

$$\text{Να αποδείξετε ότι} \sqrt{\frac{\frac{1}{\eta \mu \theta} - \sigma \varphi \theta}{\frac{1}{\eta \mu \theta} + \sigma \varphi \theta}} = \left| \frac{\eta \mu \theta}{1 + \sigma v \nu \theta} \right|$$

### Αναγωγή στο 1<sup>o</sup> Τεταρτημόριο

3.30 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών  $3510^\circ$ ,  $-11\pi$ ,  $\frac{11\pi}{2}$ ,  $-\frac{35\pi}{6}$   
 $\frac{2k\pi}{3}$ ,  $\frac{1000\pi}{3}$ ,  $-\frac{100\pi}{6}$ , με  $k \in \mathbb{Z}$

3.31 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

A)  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$

3.32 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{7\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{11\pi}{6}\right)}$$

3.33 Να αποδείξετε ότι:

A)  $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin x = 0$

B)  $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$

### τριγωνομετρικες συναρτησεις

3.37 Να βρείτε τα ακρότατα και την περίοδο της συνάρτησης  $f(t) = 2\eta\mu\left(\frac{t\pi}{2}\right)$ .

3.38 A) Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $\sin\frac{\pi}{12}$  και  $\sin\frac{\pi}{11}$

B) Av  $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \beta < \frac{7\pi}{4}$  να συγκρίνετε τις τιμές  $[0, \pi]$  και  $\eta\mu\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right)$

3.39 Av  $3 \cdot \eta\mu\theta + \sqrt{3} \cdot \sin\theta = 0$ ,  $t \in [0, 4\pi]$ . Να βρείτε

- A) Την περίοδο και το πλάτος της συνάρτησης  
B) Το  $t \in [0, 4\pi]$  ώστε  $f(t) = 0$ .

3.34 Σε κάθε τρίγωνο  $ABC$  να αποδείξετε ότι :  
 $\varepsilon\varphi(A + B) = -\varepsilon\varphi C$

3.35 Να αποδείξετε ότι

$$\eta\mu^4 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{3\pi}{8} = -\eta\mu^2 \frac{\pi}{8} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{8}$$

3.36 Να υπολογίσετε την τιμή του γινομένου:  
 $\sin 0^\circ \cdot \sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdots \sin 2006^\circ$

$$\text{Να δείξετε ότι } 0 < \frac{\sigma\varphi(\pi + \theta) - \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\sigma\varphi(\pi + \theta) - \varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)} < 2$$

Av  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , να αποδείξετε ότι

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) \cdot \varepsilon\varphi(\pi + \theta) > 2 \left[ 1 - \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - \theta\right) \right]$$

3.40 Δίνεται περιοδική συνάρτηση  $f$  με περίοδο  $T > 0$ , και και  $A_f = R$ . Στο διάστημα  $[0, T]$  η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή το 2004 για το μοναδικό  $x = \frac{\pi}{4}$  και στο διάστημα  $[2T, 3T]$  η

συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή για  $x = \frac{9\pi}{4}$ .

A. Είναι σωστό ή λάθος ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι το 2004;

B. Av  $f(x) = \sin(\omega x)$  να βρείτε το  $\alpha$  και το  $\omega$  και να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης στο διάστημα  $[0, 3T]$ .

## Eξισώσεις

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- A)  $\eta\mu(x - \pi) = -\sigma\text{vn}(x - 3\pi)$   
 B)  $\sigma\text{vn}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$   
 Γ)  $\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \varepsilon\varphi x$

3.41 Να λύσετε τις εξισώσεις:

- A)  $\eta\mu(x + 20^\circ) - \sigma\text{vn}(x + 50^\circ) = 0$   
 B)  $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\text{vn}x = 0$   
 Γ)  $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\text{vn}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$

3.42 Να λύσετε τις εξισώσεις:

- A)  $5\eta\mu^2x + \sigma\text{vn}^2x = 2$  στο  $[-\pi, \pi]$   
 B)  $\varepsilon\varphi x \cdot \eta\mu x + 1 = \varepsilon\varphi x + \eta\mu x$   
 Γ)  $\varepsilon\varphi 2x \cdot \sigma\varphi 5x = 1$  στο  $[0, \pi]$   
 Δ)  $\frac{1 + \eta\mu x}{\sigma\text{vn}x} + \frac{\sigma\text{vn}x}{1 + \eta\mu x} = 4$

3.43 Να λύσετε τις εξισώσεις:

- A)  $\eta\mu^2x + \eta\mu x = 0$   
 B)  $1 + \eta\mu x = \sigma\text{vn}^2x$

3.44 Να λύσετε τις εξισώσεις:

- A)  $2\eta\mu x \cdot \varepsilon\varphi x = 3$   
 B)  $\varepsilon\varphi^4x - 4\varepsilon\varphi^2x + 3 = 0$

3.45 Να λύσετε τις εξισώσεις:

- A)  $\varepsilon\varphi x = 3\sigma\varphi x$   
 B)  $\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x = -2$

## ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

3.51 Να λύσετε τις ανισώσεις:

- A)  $2\eta\mu x < 1$  B)  $-2\sigma\text{vn}x - 1 > 0$

3.46 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτή-

σεων  $f(x) = \frac{2\eta\mu x - 1}{\sigma\text{vn}x + 1}$ ,  $g(x) = \frac{1}{\varepsilon\varphi x + 1}$ ,  
 $h(x) = \frac{1}{2\sigma\text{vn}x - 1}$

3.47 Να λυθούν οι εξισώσεις στο  $[0, \pi]$ :

- A)  $(4\eta\mu^4x - 1) \cdot (1 - |\eta\mu x|) = 0$   
 B)  $2 \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\text{vn}x = \sqrt{2} \cdot \sigma\text{vn}x$   
 Γ)  $3 \cdot \eta\mu\theta + \sqrt{3} \cdot \sigma\text{vn}\theta = 0$

3.48 Να λύσετε τις εξισώσεις

- A)  $\eta\mu(\sigma\text{vn}x) = 0$   
 B)  $\eta\mu|x| = 1$   
 Γ)  $|\eta\mu x| + |\sigma\text{vn}x| = 0$   
 Δ)  $\eta\mu(\pi \cdot \sigma\text{vn}2x) = 1$

3.49 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων:

- A)  $\eta\mu 2x = 1$  και  $\sigma\text{vn}x = 1$   
 B)  $\varepsilon\varphi 3x = 1$  και  $\varepsilon\varphi 4x = \sqrt{3}$

3.50 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

- A)  $\eta\mu x = -\sqrt{3}$  B)  $\sigma\text{vn}x = e$   
 Γ)  $\eta\mu x = \pi$  Δ)  $\sigma\text{vn}x = 2\pi$   
 E)  $\eta\mu x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$

### Τριγωνομετρικοί Αριθμοί α+β

3.53 Να αποδείξετε ότι:

$$\sin\alpha + \sin(\alpha + 120^\circ) + \sin(\alpha + 240^\circ) = 0$$

3.54 Να αποδείξετε ότι:

$$(\sin x - \cos x) \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin x + \cos x$$

3.55 Να αποδείξετε ότι η παράσταση  $\sin^2 x - 2\sin x \cos x (\alpha + x) + \sin^2(\alpha + x)$  είναι ανεξάρτητη του  $x$ .

3.56 Να αποδείξετε ότι:

A)  $\operatorname{cosec}(45^\circ - \omega) = \frac{\sin\omega - \cos\omega}{\sin\omega + \cos\omega}$

B)  $\frac{\cos(45^\circ + \alpha) - \sin(45^\circ + \alpha)}{\cos(45^\circ + \alpha) + \sin(45^\circ + \alpha)} = \operatorname{cosec}\alpha$

3.57 Να δείξετε ότι  $\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}$

3.58 Να αποδείξετε ότι:

A)  $\operatorname{cosec}(\alpha + \beta)\operatorname{cosec}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{cosec}^2\alpha - \operatorname{cosec}^2\beta}{1 - \operatorname{cosec}^2\alpha \operatorname{cosec}^2\beta}$

B)  $\frac{\operatorname{cosec}^2 2\alpha - \operatorname{cosec}^2 \alpha}{1 - \operatorname{cosec}^2 2\alpha \operatorname{cosec}^2 \alpha} = \operatorname{cosec}\alpha \cdot \operatorname{cosec} 3\alpha$

3.59 Δείξτε ότι αν  $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \sin\beta$  τότε  $\cos^2(\alpha + \beta) = (\cos\alpha + \cos\beta)^2$

3.60 Να αποδείξετε ότι:

A)  $\frac{2\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)} = \operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{cosec}\beta$

B)  $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{cosec}\beta}{\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{cosec}\beta}$

3.61 Να αποδείξετε ότι αν

$$\cos(\beta - \alpha) = \sin(\beta - \alpha), \text{ τότε } \operatorname{cosec}\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{cosec}\alpha$$

3.62 Αν  $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$  να αποδειχθεί ότι:

A)  $\operatorname{cosec}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta + \operatorname{cosec}\beta \cdot \operatorname{cosec}\gamma + \operatorname{cosec}\gamma \cdot \operatorname{cosec}\alpha = 1$

B)  $\operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{cosec}\beta + \operatorname{cosec}\gamma = \operatorname{cosec}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta \cdot \operatorname{cosec}\gamma$

3.63 Αν  $\alpha + \beta = \gamma$  να αποδείξετε ότι:

$$\operatorname{cosec}\gamma - \operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{cosec}\beta = \operatorname{cosec}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta \cdot \operatorname{cosec}\gamma$$

3.64 Για τις γωνίες  $\alpha, \beta$  ισχύει  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$  Να

$$\text{αποδείξετε ότι } (1 + \operatorname{cosec}\alpha) \cdot (1 - \operatorname{cosec}\beta) = 2$$

3.65 Αν  $\cos x + \sin y = \frac{1}{2}$  και  $\sin x + \cos y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

να βρείτε το  $\cos(x+y)$

3.66 Αν  $\cos x + \cos y = \frac{1}{2}$  και  $\sin x + \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

να βρείτε το  $\sin(x-y)$

3.67 Αν  $0 < \omega, x < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < y < 0, \operatorname{cosec}\omega = \frac{2}{5}$ ,

$$\operatorname{cosec}x = \frac{3}{2} \text{ και } \operatorname{cosec}y = -\frac{15}{23}, \text{ τότε } x + y + \omega = \frac{\pi}{4}$$

3.68 Αν για τις γωνίες τριγώνου ΑΒΓ ισχύουν:

$$\operatorname{cosec}A = \frac{1}{2}, \operatorname{cosec}B = \frac{1}{3}, \text{ να αποδείξετε ότι:}$$

A)  $\operatorname{cosec}(A+B) = 1$

B)  $\hat{C} = 135^\circ$

3.69 Να βρεθεί γωνία  $x$  με  $0 < x < 2\pi$  ώστε να

$$\text{ισχύει } \cos x \cos 122^\circ + \sin x \sin 328^\circ = \frac{\sqrt{3} \sin 2^\circ + \sin 92^\circ}{2}$$

3.70 Αν ισχύουν  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ,

$$\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cosec}\frac{\beta}{2} = 2003 \operatorname{cosec}\frac{\gamma}{2} \text{ και } \gamma \neq (2k+1)\pi \text{ και να α-}$$

$$\text{ποδείξετε ότι: } \operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2} \operatorname{cosec}\frac{\beta}{2} = 2004$$

3.71 Αν η εξίσωση  $x^2 - 8x + 9 = 0$ , έχει ρίζες τους αριθμούς εφα και εφβ, δείξτε ότι  $\epsilon\phi(\alpha + \beta) = -1$

3.72 Να αποδείξετε ότι αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι  $\eta\mu A \cdot \sin B + \eta\mu B \cdot \sin A = 1$  τότε είναι ορθογώνιο.

### Τριγωνομετρικοί αριθμοί 2α

3.75 Να αποδείξετε ότι:

A)

$$(\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 4\sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2}$$

B)

$$\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2\epsilon\phi 2\alpha$$

Γ)

$$\frac{1 + \sin 2\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \sigma\phi x$$

3.76 Να αποδείξετε ότι :

$$A) \frac{1 + \eta\mu\alpha - \sin\alpha}{1 + \eta\mu\alpha + \sin\alpha} = \epsilon\phi \frac{\alpha}{2}$$

$$B) \frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha}{1 + \sin\alpha} = \epsilon\phi \frac{\alpha}{2}$$

3.77 Να αποδείξετε ότι :

$$A) \frac{\eta\mu \frac{x}{2} + \eta\mu x}{1 + \sin \frac{x}{2} + \sin x} = \epsilon\phi \frac{x}{2}$$

$$B) \frac{1 + \sin\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}}{\eta\mu\alpha + \eta\mu\frac{\alpha}{2}} = \sigma\phi\frac{\alpha}{2}$$

3.78 Να αποδείξετε ότι:

$$A) \eta\mu^4\theta + \sin^4\theta = \frac{3 + \sin 4\theta}{4}$$

$$B) \frac{\sigma\phi\alpha + 1}{\sigma\phi\alpha - 1} = \frac{\sin 2\alpha}{1 - \eta\mu 2\alpha}$$

3.79 Αν σε μη αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι  $2\eta\mu B \eta\mu \frac{A}{2} = \eta\mu A$ , να δειχτεί ότι είναι ισοσκελές

3.73 Να λύσετε την εξίσωση  $\sin(\sin x) \cdot \sin(\eta\mu x) = \eta\mu(\sin x) \cdot \eta\mu(\eta\mu x) + 1$

3.74 Να αποδείξετε ότι αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι  $\frac{\eta\mu\Gamma}{\sin(\Gamma - \beta) + \sin\alpha} = \sigma\phi B$  τότε  $B = 60^\circ$

3.80 Να αποδείξετε ότι:

$$A) \frac{4\sigma\phi\alpha (\sigma\phi^2\alpha - 1)}{(1 + \sigma\phi^2\alpha)^2} = \eta\mu 4\alpha$$

$$B) \frac{\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu\alpha} - \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 2$$

$$\Gamma) \quad \text{Av } 0 < \alpha < \frac{\pi}{6}, \text{ τότε}$$

$$2\sin 2\alpha - 1 = \sqrt{3 + 2\sin 4\alpha - 4\sin 2\alpha}$$

3.81 Να αποδείξετε ότι

$$A) \eta\mu^4 \frac{\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{3\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{5\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$$

$$B) 16(\sin 20)(\sin 40)(\sin 60)(\sin 80) = 1$$

$$\Gamma) \sin\alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 4\alpha \cdot \sin 8\alpha = \frac{\eta\mu 16\alpha}{16 \cdot \eta\mu\alpha}.$$

$$\Delta) \epsilon\phi^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1 + \eta\mu\theta}{1 - \eta\mu\theta}$$

3.82 Για τη γωνία α είναι γνωστό ότι

$$\alpha \in \left( \frac{\pi}{2}, \pi \right) \text{ και ότι } 9\sin 2\alpha - 6\sin\alpha + 5 = 0. \text{ Να}$$

υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $2\alpha$ .

3.83 Αν σε μη αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι  $2\eta\mu B \eta\mu \frac{A}{2} = \eta\mu A$ , να δειχτεί ότι είναι ισοσκελές

3.84 Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα:  $\eta\mu A \eta\mu B + \sin A \sin B (A + \Gamma) = 0$ , να αποδείξετε ότι είναι ορθογώνιο.

## Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

3.85 Να λύσετε τις εξισώσεις :

- A)  $2\eta\mu^2x = 3(1 - \sin vx)$
- B)  $\eta\mu 2x = 2\epsilon\varphi x$
- Γ)  $\eta\mu 2x - \eta\mu x = \sin v 2x - \sin vx + 1$
- Δ)  $\sqrt{3}\eta\mu x - \sin vx = 2$

3.86 Να λύσετε τις εξισώσεις :

- A)  $\sin vx = 2\eta\mu \frac{x}{2} + 1$
- B)  $\sin v 4x + 2\sin v 2x = 0$
- Γ)  $2\eta\mu x = \eta\mu \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$  στο  $[2\pi, 5\pi]$

3.87 Να λύσετε τις εξισώσεις :

- A)  $\eta\mu^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\eta\mu 2x = \frac{1}{2} - \sin vx$  στο  $[0, \pi]$
- B)  $\sin v 2x \cdot \eta\mu^2 x = -1$  στο  $[0, 2\pi]$ .
- Γ)  $3\epsilon\varphi^2 x - 2\sqrt{3}\epsilon\varphi x + 1 = 0$  αν  $x \in [-3\pi, 2\pi]$

## Γενικές

3.92 Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \kappa + \lambda \sin v 4x$ ,

$\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  που έχει μέγιστο το 7 και είναι  $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2$ .

- A) Να υπολογιστούν τα  $\kappa, \lambda$
- B) Να βρείτε το ελάχιστο και τη περίοδο της  $f$ .
- Γ) Να λύσετε την εξισωση  $f(x) = 10 \sin v 2x - 3$

3.93 Αν  $f(x) = 1 + \eta\mu x + \sin vx$  με  $x \in (0, 2\pi)$

τότε:

- A. Να δείξετε ότι  $f(x) = 2\sin v \frac{x}{2} \left( \eta\mu \frac{x}{2} + \sin v \frac{x}{2} \right)$  για κάθε  $x \in (0, 2\pi)$
- B. Να βρείτε τις τιμές του  $x \in (0, 2\pi)$  για τις οποίες ισχύει  $f(x) \neq 0$
- Γ. Για τις τιμές του  $x$  που βρήκατε στο β-ρώτημα να αποδείξετε ότι:  $\frac{f(\pi - x)}{f(x)} \operatorname{σφ} \frac{x}{2} = 1$

3.88 Να λύσετε την εξισωση

$$\eta\mu^{2004} \left( 3x - \frac{\pi}{2} \right) + \sin v^{2004} \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = 0 \text{ στο } (0, 2\pi).$$

3.89 Να λύσετε τις εξισώσεις:

- A)  $2\sin v^2 x + 8 = 17\eta\mu^2 x$
- B)  $4\eta\mu^3 x + 8\sin v^2 x + \eta\mu x = 5$
- Γ)  $|2\eta\mu x \sin vx + 1| + |3 - 2(2\sin v^2 x - 1)| = \eta\mu 2x + 3$

3.90 Αν  $\epsilon\varphi^{64^\circ} = 2$  να λυθεί η εξισωση :

$$\eta\mu x \sin vx + 3\sin v^2 x = 1$$

3.91 Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f(x) = 2x - \eta\mu 3x$  και  $g(x) = \sin v 3x + 2x$  στο διάστημα  $(0, 2\pi)$ .

3.94 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sin v^3 x \cdot \eta\mu x - \eta\mu^3 x \cdot \sin vx \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

- A) Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = \frac{1}{4}\eta\mu 4x$

B) Να λύσετε την εξισωση

$$f(x) + \epsilon\varphi \frac{\pi}{3} \cdot f\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \frac{1}{4}$$

- Γ) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης:  $g(x) = 8 \cdot f(x) - 1$ .

3.95 Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{-x + \eta\mu a - x \sin va}{1 - x \eta\mu a - \sin va} \text{ και } B = \frac{1 - \sin v 2a + x \epsilon\varphi^2 a}{1 + x + \sin v 2a}$$

- A) Να δείξετε ότι οι είναι ανεξάρτητες του  $x$ .

- B) Αν  $a = \frac{\pi}{3}$ , να αποδείξετε ότι

$$A + B = 3 + \sqrt{3}$$

3.96 Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{-\varepsilon\varphi^2 \frac{x}{2} + 2\varepsilon\varphi \frac{x}{2} + 1}{1 + \varepsilon\varphi^2 \frac{x}{2}}$$

- A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$
- B. Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \eta\mu x + \sigma v x$
- Γ. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = -1$
- Δ. Η εξίσωση  $f(x) = -1$  και η εξίσωση  $\eta\mu x + \sigma v x = -1$  είναι ισοδύναμες;

3.97 Δίνεται η  $g(x) = \sqrt{2}\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 3$

- A) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της
- Β) Για ποιά  $x$  έχουμε την μέγιστη τιμή της
- Γ) Να λυθεί η εξίσωση:  $g(x) - g\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

3.98 Άντε  $f(x) = (\kappa - \lambda)\sin[(\kappa + 3\lambda)x]$  και  $g(x) = (2\kappa - 3\lambda + 2)\sin[(2\kappa + \lambda + 5)x]$ , όπου  $\kappa, \lambda$  θετικοί αριθμοί τότε να βρείτε τους  $\kappa, \lambda$  ώστε οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  να έχουν την ίδια μέγιστη τιμή, και η περιόδος της  $f$  να είναι διπλάσια της περιόδου της  $g$

3.99 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (\eta\mu^4 x + \sigma v^4 x) \cdot (\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x)^2.$$

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
- Β) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \varepsilon\varphi^2 x + \sigma\varphi^2 x$ .
- Γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 2$ .

3.100 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = \alpha \cdot \sin 2x + \beta$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  διέρχεται από τα σημεία  $A(\pi, 1)$  και  $B\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$ .

- A) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς  $\alpha, \beta$ .
- Β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή καθώς και την περίοδο της  $f$ .
- Γ) Να λύσετε την εξίσωση  $2 \cdot f\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 3$

3.101 Δίνεται το γραμμικό σύστημα ( $\Sigma$ ) με α-

$$\text{γνώστους } x, y. \quad (\Sigma) \begin{cases} \eta\mu\theta \cdot x - \sin\theta \cdot y = 1 \\ \sin\theta \cdot x + \eta\mu\theta \cdot y = 1 \end{cases}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

- A) Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση  $(x_0, y_0)$ , την οποία και να βρείτε.
- Β) Να λυθεί η ανίσωση:  $3x - x^2 \leq x_0^2 + y_0^2$

3.102 Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τόπο:

$$f(x) = \sqrt{1 + \sin vx} + \sqrt{1 - \sin vx}$$

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- Β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι άρτια.
- Γ) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι περιοδική, με περίοδο  $T = \pi$ .
- Δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  με τους άξονες.

3.103 Τα ετήσια έξοδα μιας επιχείρησης σε χιλιάδες ευρώ δίνονται από τη συνάρτηση

$E(t) = 300 + 25\eta\mu \frac{\pi t}{6}$  όπου  $t$  ο χρόνος σε έτη. Η επιχείρηση λειτουργεί από την αρχή του 1991 έως και το τέλος του έτους 2002

- A) Ποια έτη τα έξοδα φτάνουν τα 312500 ευρώ
- Β) Ποιο έτος έχουμε το μέγιστο ποσό εξόδων;

## 4 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

### Εννοια του πολυωνύμου - πράξεις

4.01 Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο  $P(x) = (k-2)x^2 + (2\lambda+6)x + k + \lambda - 3$  δεν μπορεί να είναι το μηδενικό για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς  $k$  και  $\lambda$ .

4.02 Να βρεθεί για ποιες τιμές των  $k, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$  είναι ίσα τα πολυώνυμα:

$$\begin{aligned} P(x) &= \lambda x^2 - (\lambda - k)x + \mu - 2\lambda \text{ και} \\ Q(x) &= (\mu - \lambda)x^2 + 4x + k + \lambda. \end{aligned}$$

4.03 Να προσδιοριστεί ο  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε το πολυώνυμο  $P(x) = 9x^3 - 3x^2 + 8x + 27$  να παίρνει τη μορφή  $\alpha(x^3 + x) - 3x^2 + (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$ .

4.04 Να βρεθεί πολυώνυμο του οποίου το τετράγωνο να ισούται με το

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$$

4.05 Δίνονται τα πολυώνυμα  $P(x) = 2x^2 - 1$ ,  $\Pi(x) = 3x - 1$ , και  $\Phi(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma - \alpha$ , να βρείτε τα  $\alpha, \beta, \gamma$  ώστε  $P(\Pi(x-1)) = \Phi(x+1)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

### Διαιρεση Πολυωνύμων

4.11 Αν το υπόλοιπο της διαιρεσης του πολυωνύμου  $P(x) = x^{2000} + \alpha x^{1999} + \dots + \alpha x^2 + \alpha x + \alpha$  δια  $x-1$  είναι 2001, να υπολογίσετε το  $\alpha$ .

4.12 Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαιρεσης του  $P(x) = \lambda^2 x^2 + (2\lambda^2 - 3\lambda + 1)x - 3(2\lambda + 1)$  με το  $(x+2)$  είναι ανεξάρτητο του  $\lambda$ .

4.06 Να βρεθεί πολυώνυμο  $P(x)$  για το οποίο ισχύει  $(2x-1)P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 11x - 7$ ,  $x \in \mathbb{R}$

4.07 Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^2 + 2x + 5$ . Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός  $\alpha$  αν ισχύει  $P(\alpha - 1) = 13$

4.08 Να προσδιορίσετε τα  $A, B, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  ώστε

$$A) \quad \frac{2x}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$B) \quad \frac{2x^2 + 10x - 3}{(x+1)(x^2 - 9)} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x+3} + \frac{\gamma}{x-3}$$

4.09 Προσδιορίστε τα  $A, B$  ώστε:

$$\frac{1}{(2v-1)(2v+1)} = \frac{A}{2v+1} + \frac{B}{2v-1} \text{ για κάθε τιμή του φυσικού αριθμού } v. \text{ Να υπολογίσετε το} \\ \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2v-1)(2v+1)}$$

4.10 Να βρείτε για το βαθμό κάθενός από τα πολυώνυμα για κάθε  $\lambda$  ή  $\alpha$  με  $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$

$$A) \quad P(x) = (1 - \lambda^2)x^3 + (\lambda + 1)x^2 + x - 3.$$

$$B) \quad P(x) = (\alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha)x^3 + (\alpha^2 - \alpha)x + 1 - \alpha$$

4.13 Για το πολυώνυμο  $P(x)$  ισχύει ότι

$$P(0) = P(1) = 4. \text{ Δείξτε ότι } P(x) = x(x-1)\pi(x) + 4$$

4.14 Αν το υπόλοιπο της διαιρεσης ενός πολυωνύμου  $P(x)$  δια του  $x+2$  είναι 5 και το υπόλοιπο της διαιρεσης του  $P(x)$  με το  $x-1$  είναι 2, να βρεθεί το υπόλοιπο της διαιρεσης του  $P(x)$  δια του  $(x+2)(x-1)$

4.15 Δίνονται τα πολυώνυμα

$$\Phi(x) = x^3 - 2\lambda x + 1 \text{ και } P(x) = \lambda x^2 + 3(\lambda - 1)x + 3.$$

Βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε οι διαιρέσεις  $P(x):(2x-1)$  και  $\Phi(x):x+1$  να δίνουν το ίδιο υπόλοιπο.

4.16 Να βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  αν το πολυώνυμο

$$P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta \text{ διαιρείται με } x^2 - x - 6$$

4.17 Αν το πολυώνυμο  $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$

διαιρείται ακριβώς με το  $x-2$  και εάν επιπλέον  $f(1) = 8$ , να προσδιοριστούν τα  $\alpha, \beta$ .

4.18 Έστω  $P(x) = 3x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$ . Βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  αν το  $-2$  είναι ρίζα του  $P(x)$ , και το υπόλοιπο της διαιρεσης του  $P(x)$  δια  $(x-1)$  τισούται με  $-9$ .

4.19 Να βρεθούν τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , αν το πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 - 18x^2 + 15x - 5 \text{ διαιρούμενο με το } g(x) = x^2 - 3x + 2 \text{ δίνει υπόλοιπο } v(x) = 4x + 7.$$

4.20 Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς  $\kappa, \lambda$  ώστε το πολυώνυμο  $P(x) = x^4 + 1$ , αν διαιρεθεί με το  $x^2 + \kappa x + \lambda$  να αφήνει υπόλοιπο  $0$ .

4.21 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί  $\kappa, \lambda$  ώστε το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - \kappa x^2 + (\lambda - 1)x + 5$  να έχει παράγοντα το  $(x-1)(x+2)$ .

4.22 Αν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων

$$P(x):(x-1) \text{ και } P(x):(x+1) \text{ είναι αντίστοιχα } 3 \text{ και } 1 \text{ να βρεθεί το υπόλοιπο της διαιρεσης του } P(x):(x-1)(x+1)$$

4.23 Αν το πολυώνυμο  $P(x)$  έχει παράγοντα

το  $x-5$  να δείξετε οτι το  $P(2x-3)$  έχει παράγοντα το  $x-4$

4.24 Έστω πολυώνυμο  $P(x)$  με σταθερό όρο  $1$ .

Το  $P(x)$  διαιρούμενο με το  $x-\alpha$  δίνει πηλίκο  $x^2 - 3x + 4$  και διαιρούμενο με το  $x-\beta$  δίνει πηλίκο  $x^2 - 4x + 2$ . Να βρείτε το  $P(x)$  και τα  $\alpha, \beta$ .

4.25 Να βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  αν το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - x^2 - (3+\alpha)x + \beta + 10 \text{ έχει για παράγοντα } (x-2)^2$$

4.26 Το πολυώνυμο  $P(x)$  διαιρούμενο με  $x-2$  και  $x+3$  δίνει υπόλοιπο  $10$  και  $5$  αντίστοιχα. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαιρεσης του  $P(x)$  με  $(x-2)(x+3)$

4.27 Αν το πολυώνυμο

$$P(x) = (v+1)x^v - vx^{v+1} + \alpha \text{ διαιρείται με το } x-1, \text{ τότε αποδείξτε ότι διαιρείται και με το } (x-1)^2.$$

4.28 Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = 2x^2 - 3\lambda x + 5 \text{ και } \Phi(x) = 3x^3 + (\lambda - 1)x + 3,$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ . Αν  $v_1, v_2$  είναι τα υπόλοιπα των διαιρέσεων  $P(x):(x-2)$  και  $\Phi(x):(x+1)$  αντίστοιχα να βρεθεί το  $\lambda$  ώστε: A)  $v_1 = v_2$  B)

$$v_1 = 2v_2 - 1 \quad \Gamma) \quad v_1 + v_2 = 0$$

4.29 Αν  $\rho$  είναι ρίζα του  $P(2x-1)$  να αποδείξετε ότι ο  $\rho-1$  είναι ρίζα του πολυωνύμου

$$P(2x+1)$$

4.30 Πολυώνυμο  $P(x)$  διαιρούμενο δια του

$$(2x+1)(x-1)(x-3) \text{ δίνει υπόλοιπο}$$

$Y(x) = 4x^2 + 3x + 2$ . Ποιο υπόλοιπο προκύπτει αν διαιρεθεί δια  $2x+1$ , δια  $x-1$  και δια  $x-3$  αντίστοιχα στην κάθε περίπτωση

4.31 Αν το πολυώνυμο

$P(x) = x^2 + (a - 1)x + 2a$  έχει ρίζα το  $-1$  να αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει και για το  
 $K(x) = x^3 + 4x^2 + (a^2 - 1)x$ . Το αντίστροφο ισχύει;

4.32 Ένα πολυώνυμο  $P(x)$  διαιρούμενο με  $x - 3$  δίνει πηλίκο  $\pi_1(x)$  και διαιρούμενο με  $x - 4$  δίνει πηλίκο  $\pi_2(x)$ . Να αποδείξετε ότι:  $\pi_1(4) = \pi_2(3)$

4.33 Δίνεται η εξίσωση  $x^5 + x^4 + kx + \lambda = 0$ . Να προσδιοριστούν οι  $k, \lambda$  ώστε το πολυώνυμο να έχει ρίζα το  $-1$  με πολλαπλότητα 2 (διπλή ρίζα). Μετά να βρεθούν και οι άλλες ρίζες της εξίσωσης.

4.34 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  έτσι ώστε η εξίσωση  $x^5 - \alpha x^3 + \beta x^2 + x - 1$  να έχει το ανώτερο δυνατό πλήθος ακεραίων ρίζων.

4.35 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  ώστε το  $(x+1)^2$  να είναι παράγοντας του πολυώνυμου:  $P(x) = x^3 - \alpha x^2 + (\alpha + \beta)x - 1$

4.36 Να βρεθούν τα πολυώνυμα  $f(x), g(x)$  αν  
A)  $f(x+1) = x^2 - 2x + 3$  B)  
 $g(3x+1) = 9x^2 - 6x + 1$

4.37 Δίνεται πολυώνυμο  $P(x)$  που ικανοποιεί τη συνθήκη:  $P(x^2 + 1) = [P(x)]^2 + 1$ . Αν  $P(0) = 1$  και  $P(2) = 2$ , να βρείτε τα  $P(1), P(5)$  και  $P(26)$ .

4.38 Έστω πολυώνυμο  $\Phi(x)$  για το οποίο ισχύει ότι  $\Phi(x) = \Phi(4x + 3)$ . Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο  $P(x) = \Phi(x) - \Phi(1)$  διαιρείται με το  $2x + 1$

4.39 Αν το πολυώνυμο  $P(x)$  έχει την ιδιότητα:

$P(x) = P(1-x)$  και  $P(0) \neq 0$ , να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαιρεσης  $P(x) : (x - x^2)$  είναι σταθερός αριθμός.

4.40 Δίνονται τα πολυώνυμα  $P(x) = x^3 - 1$  και  $Q(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ . Να βρείτε τους  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε το  $P(x)$  να διαιρείται ακριβώς με το  $Q(x)$ .

4.41 Δίνονται τα πολυώνυμα

$P(x) = x^3 - 2x^2 + x + 4\lambda$ ,  $Q(x) = \lambda \cdot x^4 - 2x^3 + x + 2$  με  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Να βρεθεί το  $\lambda$  ώστε το υπόλοιπο της διαιρεσης  $P(x) : (x-1)$  να είναι τριπλάσιο από το υπόλοιπο της διαιρεσης  $Q(x) : (x+1)$ .

4.42 Αν ισχύει  $P(1-2x) = 3 \cdot P(x) + 8$  και  $P(1) = \kappa$  για ένα πολυώνυμο  $P(x)$ , να βρεθεί η τιμή του  $\kappa \in \mathbb{R}$  ώστε  $P(-5) = 23$ .

4.43 Αν η πολυωνυμική εξίσωση  $x^3 + \alpha x + \beta = 0$  έχει παράγοντα το  $(x - \lambda)^2$ , να δείξετε ότι  $\frac{\alpha^3}{27} + \frac{\beta^2}{4} = 0$

4.44 A) Να βρεθεί πολυώνυμο 3 ου βαθμού ώστε να ισχύουν ότι  $P(0) = 0$  και

$P(x) - P(x-1) = x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

B) Να υπολογίσετε το  $S = 1^2 + 2^2 + \dots + v^2$

## Πολυωνυμικές Εξισώσεις - Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

4.45 Να λύσετε τις εξισώσεις:

A)  $(x^2 + 3x - 2)^6 - 9(x^2 + 3x - 2)^3 + 8 = 0$

B)  $(x+2)^8 - 3(x+2)^4 - 4 = 0$

4.46 Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$  οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν ακέραιες ρίζες:

A)  $5x^{2\kappa} + 9\kappa x - 1 = 0$

B)  $8\lambda x^{2\kappa} - 2(\kappa - 1)x + 1 = 0$

4.47 Να λύσετε τις ανισώσεις

A)  $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$  B)  $x^3 + 3x \geq 5x^2 - 9$

4.48 Να λύσετε τις ανισώσεις

A)  $\sqrt{3x+7} < \sqrt{x+3}$  B)  $x-1 \geq \sqrt{x+5}$

### Συνδυαστικές Πολυώνυμα με Τριγωνομετρία

4.52 Αν το πολυόνυμο

$$P(x) = (2\eta\mu^2\alpha - 3\eta\mu\alpha + 1)x^3 + (2\eta\mu\alpha - 1)x^2 - 2x + 4$$

είναι 2ου βαθμού, να βρεθεί το  $\alpha \in (0, \pi)$ .

4.53 Αν το πολυόνυμο

$$P(x) = (\sigma\omega\alpha)x^3 + (\eta\mu^2\alpha)x^2 - 3x + 2$$

έχει παράγοντα το  $(x - \sigma\omega\alpha)$ , βρείτε το  $\alpha \in (-\pi, \pi)$ .

4.54 Βρείτε τις τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ώστε το πολυόνυμο  $P(x) = x^4 \eta\mu^3\alpha + x^2 \eta\mu^2\alpha + x\eta\mu\alpha$ , διαιρείται ακριβώς με το  $x - 1$ .

4.55 Να βρείτε το  $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  αν το  $x+1$  είναι παράγοντας του

$$P(x) = x^4 - (3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha)x^3 + 2x^2 \eta\mu^2\alpha - x\eta\mu\alpha - 1$$

.

4.56 Να βρεθεί το  $\omega$  με  $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$  ώστε να ισχύει  $3\eta\mu^3\omega + 5\eta\mu^2\omega - 4\eta\mu\omega - 4 = 0$ .

4.49 Να λύσετε τις ανισώσεις

a)  $\frac{x^3 + 2x - 4}{x - 2} < 1$  β)  $\frac{x^2}{x + 1} - \frac{4}{x - 1} \leq \frac{2}{x^2 - 1}$

4.50 Να λύσετε τις εξισώσεις

A)  $\sqrt{x-8} = x - 10$

B)  $\sqrt{2 + \sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$

Γ)  $x^2 + 2x - 7 + \sqrt{x^2 + 2x + 8} = 5$

4.51 Να λύσετε τις εξισώσεις

A)  $\sqrt{x-1} - 1 = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$  B)  $\frac{4 - \sqrt{x}}{2} = \frac{\sqrt{4x+20}}{4 + \sqrt{x}}$

4.57 Να λυθεί η εξισωση  $3\sigma\omega\alpha x - \sqrt[3]{\sigma\omega\alpha x} = 2$  αν

$$\alpha \in \left(2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right) \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

4.58 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $(2\eta\mu\alpha - 1)^4 + 6(\eta\mu\alpha - 1)^2 - 7 = 0$

β)  $2\eta\mu^3x + 5\eta\mu^2x + 5\eta\mu x + 2 = 0$

γ)  $2\sigma\omega^4x - 5\sigma\omega^3x + 5\sigma\omega x - 2 = 0$

4.59 Έστω  $f(x) = 1 - \sigma\omega\alpha x$  και το πολυόνυμο

$$P(f(x)) = f^3(x) - (1 + f(x))^2.$$

Να βρεθούν για ποιες τιμές του  $x$  μηδενίζεται το πολυόνυμο.

4.60 Δίνεται το πολυόνυμο

$$P(x) = \kappa x^3 + \lambda x^2 + x - 1$$

το οποίο έχει παράγοντα το πολυόνυμο  $x^2 - 1$ .

A) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί  $\kappa, \lambda$

B) Να λυθεί η εξισωση  $P(x) = 0$

Γ) Να λυθεί η ως προς  $x$  η ανισωση:

$$\eta\mu\alpha \cdot P(x) \leq P(x), \text{ με } 0 < \alpha < \pi$$

## Γενικές Ασκήσεις στα Πολυώνυμα

**4.61** Έστω το πολυώνυμο

$P(x) = x^3 - (\kappa + 2)x^2 + (\kappa - 1)x + 3\kappa - 1$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$  για το οποίο είναι γνωστό ότι έχει παράγοντα το  $(x+1)$ .

- A. Να βρίτε την τιμή του  $\kappa$ .
- B. Να λυθεί η εξίσωση  $P(x) = 0$ .

**4.62** Το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + ax^2 + 11x + \beta$  διαιρούμενο δια  $(x-1)(x-2)$  δίνει πηλίκο  $\Pi(x)$  και αφήνει υπόλοιπο  $v(x) = 4$

- A. Να υπολογιστούν τα  $a, \beta \in \mathbb{R}$ .
- B. Να βρεθεί το  $\Pi(x)$ .
- C. Να λυθεί η ανίσωση  $P(x) \leq 4$

**4.63** Δίνεται τι πολυώνυμο

$$P(x) = \kappa \cdot x^4 - x^3 - (\kappa^3 + 1) \cdot x^2 + \kappa^2 \cdot x + 4.$$

- a) Να βρεθεί το  $\kappa$ , ώστε το  $P(x)$  να έχει παράγοντα το  $x-1$ .
- b) Για την τιμή του  $\kappa$  που βρήκατε, να λύσετε την ανίσωση  $P(x) > 0$

**4.64** Έστω το πολυώνυμο

$$P(x) = (\alpha - 1)x^4 + \alpha x^3 + 3x^2 + (1 - \alpha)x + \beta$$

- A. Να διερευνηθεί ο βαθμός του  $P(x)$  για τις διάφορες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$
- B. Στην περίπτωση που είναι τρίτου βαθμού, βρείτε την τιμή του  $\beta \in \mathbb{R}$  ώστε το  $-1$  να είναι ρίζα του  $P(x)$  και να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

**4.65** Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + \kappa x + 1, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}.$$

- A) Για  $\kappa = -3$ , να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου  $P(x)$  με το πολυώνυμο  $(x-3)$ .
- B) Να βρείτε τις τιμές του  $\kappa$  ώστε το  $P(x)$  να έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα.
- C) Για  $\kappa = 0$ , να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

**4.66** Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = (\kappa - 3)x^3 + (\kappa + \lambda)x^2 + (31 - \lambda)x + 24,$$

$$Q(x) = x^3 + 9x^2 + 26x + 24 \text{ όπου } \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$$

- A. Να βρείτε για ποιες τιμές των  $\kappa, \lambda$  τα πολυώνυμα  $P(x), Q(x)$  είναι ίσα.
- B. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $-2$  είναι ρίζα του πολυωνύμου  $Q(x)$ .
- C. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $Q(x) = 0$  δεν έχει θετική ρίζα.

**4.67** Έστω το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^2 - ax + a$ , όπου  $a$  πραγματικός αριθμός.

- A) Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης  $P(x) : (x - a + 1)$  είναι  $v = (a - 1)^2 + 1$
- B) Να βρείτε την τιμή του  $a$  ώστε αυτό το υπόλοιπο να είναι το μικρότερο δυνατό.

**4.68** Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 - (\kappa + 1)x^2 + (\kappa - 1)x + 2, \quad \kappa \in \mathbb{R}, \text{ για το οποίο ισχύει ότι } P(2) = 0.$$

- A) Να αποδείξετε ότι  $\kappa = 2$ .
- B) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του  $P(x)$  με το πολυώνυμο  $x + 3$ .
- C) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = x - 2$

**4.69** Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha x^3 + \beta x + 2, \text{ όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- A) Να αποδείξετε ότι  $P(2004) + P(-2004) = 4$
- B) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου  $P(x)$  με το πολυώνυμο  $Q(x) = x$
- C) Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου  $P(x)$  με το πολυώνυμο  $x - 1$  είναι  $v = \alpha + \beta + 2$ .
- D) Αν  $\alpha = 1$  και το πολυώνυμο  $P(x)$  έχει ρίζα τον αριθμό  $1$ , τότε να υπολογίσετε το  $\beta$  και να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$

# 5

## ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

5.01 Να βρείτε τις τιμές του  $a \in \mathbb{R}$  ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να ορίζονται για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

A)  $f(x) = \left(\frac{1-a}{a+2}\right)^x$ .      B)  $f(x) = \left(\frac{2a-1}{1+a}\right)^x$ .

5.02 Έστω η συνάρτηση  $f(x) = (1-\kappa^2)^x$ .

- A) Για ποιες τιμές του  $\kappa$  η  $f$  ορίζεται στο  $\mathbb{R}$ ;
- B) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του  $\kappa$  για τις οποίες η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.
- Γ) Να βρείτε το  $\kappa$  ώστε η γραφική παράσταση της  $f(x)$  να περνάει από το σημείο  $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$ .
- Δ) Να βρείτε τις τιμές του  $\kappa$  ώστε η γραφική παράσταση της  $f$  να περνάει από το σημείο  $(2, 1)$

5.03 Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \left(\frac{\alpha+1}{3-\alpha}\right)^x$  με

πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ . Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η συνάρτηση:

- A) είναι γνησίως αύξουσα
- B) είναι σταθερή.

5.04 Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \left(\frac{2\lambda+1}{\lambda-1}\right)^x$

- A) Για ποιές τιμές του  $\lambda$  ορίζεται,  $\forall x \in \mathbb{R}$
- B) Να υπολογίσετε τις τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες ισχύει  $f(1) + f(2) + f(3) = 3f(0)$ .
- Γ) Αν για κάθε  $x < 0$  ισχύει  $f(x) > 1$  να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$ .

5.05 Αν  $f(x) = e^x$  τότε να αποδείξετε ότι:

Για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$  ισχύουν:

- A)  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$
- B)  $f(x) = f(y) \cdot f(x-y)$ .
- Γ)  $[f(x)]^v = f(vx)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{N}^*$
- Δ)  $\frac{f(x)+f(y)}{2} > f\left(\frac{x+y}{2}\right)$  με  $x \neq y$

### Εξισώσεις

5.06 Να λύσετε τις εξισώσεις

A)  $2^{x^2-5x+6} = 1$   
 B)  $4^{3x} = 2^4 \cdot 16^{\frac{x}{2}}$   
 Γ)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$   
 Δ)  $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} \left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11} = \left(\frac{5}{3}\right)^9$

5.07 Να λύσετε τις εξισώσεις

A)  $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$   
 B)  $5 \cdot 2^x = 2^{x+3} - 3\sqrt{2}$

5.08 Να λύσετε τις εξισώσεις

A)  $3^{\frac{2}{x}} - 4 \cdot 3^{\frac{1}{x}} + 3 = 0$   
 B)  $3^{x+1} - 28 + 9 \cdot 3^{-x} = 0$   
 Γ)  $4^x - 3^{\frac{x-1}{2}} = 3^{\frac{x+1}{2}} - 2^{2x-1}$   
 Δ)  $2^x - 5\sqrt{2^x} + 4 = 0$ .

5.09 Να λύσετε τις εξισώσεις:

A)  $e^{2x} + e = e^x + e^{x+1}$   
 B)  $7^{3x+2} + 4^{x+2} = 7^{3x+4} + 4^{x+3}$

5.10 Να λύσετε τις εξισώσεις:

A)  $2^{2x-1} + 3^x + 4^{x+1} - 9^{\frac{x+1}{2}} = 0$   
 B)  $\sqrt[3]{64^{2x-1}} = \sqrt{16^{2x-1}}$   
 Γ)  $9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x$

5.11 Να λύσετε τις εξισώσεις:

A)  $(3^x - 2)^2 + 3^x (3^x - 1) = 7$   
 B)  $3 \cdot 2^{2x} = 2(4^x + 1)(1 - 4^x)$ .  
 Γ)  $5^{x^2+1} + 25^{x^2} = 6$

5.12 Να λύσετε τις εξισώσεις:

A)  $2^x + 6x - 40 = 0$     B)  $7(11+6\sqrt{2})^x = 3-\sqrt{2}$

5.13 Να λύσετε τις εξισώσεις:

A)  $9^x + 1 = 2 \cdot 3^x \cdot \sin x$

B)  $2^x + 2^{-x} = 2 |\sin x|$

Γ)  $x^2 (2^{|x-3|+4} - 2^{x+1}) = 2^{|x-3|+2} - 2^{x-1}$

### Ανισώσεις

5.14 Να λύσετε τις ανισώσεις

A)  $3^{x^2-7x+6} < 1$     B)  $3^{2-|x|} > 1$

Γ)  $(0,5)^{5x-x^2-1} < 0,125$     Δ)  $9^{\frac{1}{x}} \leq \sqrt{3^x}$

Ε)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} < \left(\frac{1}{4}\right)^{x+\frac{5}{2}}$     ΣΤ)  $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x^2-x+1} \geq 1$

5.15 Να λύσετε τις ανισώσεις

A)  $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$

B)  $3^{\frac{x+1}{2}} + 3^{\frac{x-1}{2}} \geq 4^{\frac{x+1}{2}} - 2^{2x-1}$

Γ)  $e^{2x} + e \geq e^x + e^{x+1}$

### Προβλήματα

5.21 Σ' ένα ασθενή με υψηλό πυρετό χορηγεί-

ται ένα αντιπυρετικό φάρμακο. Η θερμοκρασία

$\Theta(t)$  του ασθενούς t ώρες μετά την λήψη του

φαρμάκου δίνεται από τον τύπο  $\Theta(t) = 36 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^t$

βαθμοί Κελσίου.

A) Να βρείτε πόσο πυρετό είχε ο ασθενής τη στιγμή που του χορηγήθηκε το φάρμακο.

B) Να βρείτε σε πόσες ώρες η θερμοκρασία του ασθενούς θα πάρει την τιμή  $36.5^\circ C$

Γ) Αν η επίδραση του αντιπυρετικού διαρκεί 4 ώρες πόση θα είναι η θερμοκρασία του ασθενούς μόλις σταματήσει η επίδρασή του

5.16 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A)  $e^x + 3 \geq 3e^x + e^{2x}$

B)  $27^x + 12^x - 2 \cdot 8^x > 0$

Γ)  $9^{x+1} - 108 \cdot 3^x + 243 > 0$

Δ)  $4^{\eta \mu^2 x} + 4^{\sigma \nu v^2 x} \leq 5$

5.17 Να λύσετε την ανίσωση  $\frac{e^{2x} - e^x}{e^x - e} < -1$

5.18 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A)  $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} > \frac{1}{2}$

B)  $\frac{2e^x - 3}{e^x - 1} > 2$

### Συστήματα

5.19 Να λύσετε τα συστήματα:

A)  $\begin{cases} 4^x \cdot 2^{y-2} = 32 \\ 3^{x+2} \cdot 3^{y-4} = 27 \end{cases}$

B)  $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 54 \\ 3^x \cdot 2^y = 24 \end{cases}$

Γ)  $\begin{cases} 3^{x-y} - 4^{x-2y+1} = -13 \\ 2 \cdot 3^{x-y} + 3 \cdot 4^{x-2y} = 18 \end{cases}$

Δ)  $\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}} - 3^{\frac{x-y}{4}} = 6 \\ 2^{\frac{x+y}{3}} - 2^{\frac{x+y}{6}} = 2 \end{cases}$

5.20 Να λύσετε τα συστήματα:

A)  $\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2^{x+y} + 2 = 0 \\ 5 \cdot 2^{x+1} - 2^{x+y-1} - 16 = 0 \end{cases}$

B)  $\begin{cases} 3^x - 2^{y+3} = 15 \\ 2^y - 3^{x-3} = 3 \end{cases}$

5.22 Μελετώντας την ανάπτυξη ενός είδους

βακτηριδίων παρατηρήθηκε ότι 2 ώρες μετά την

έναρξη της παρατήρησης τα βακτηρίδια ήταν 400

ενώ 4 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης

ήταν 3200. Αν ο αριθμός των βακτηριδίων είναι

$P(t) = P_0 \cdot 2^{ct}$ , όπου  $P(t)$  ο αριθμός των βακτηρι-

δίων σε χρόνο  $t$ ,  $P_0$  ο αρχικός αριθμός και  $c$  στα-

θερά τότε:

A) Να βρείτε τη σταθερά  $c$  και τον αρχικό αριθμό των βακτηριδίων.

Γ) Σε πόσα λεπτά ο αρχικός αριθμός των βα-  
κτηριδίων είχε διπλασιαστεί;

# 6 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

6.01 Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

- A)  $3\log 2 + \log 5 - \log 4 = 1$
- B)  $\frac{1}{2}\log 25 + \frac{1}{3}\log 8 + \frac{1}{5}\log 32 = 1 + \log 2$
- Γ)  $\log \frac{11}{3} - 2\log \sqrt{\frac{7}{44}} + \log \frac{21}{121} = 2\log 2$

6.02 Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες

- A)  $\frac{\log 2 + \log 3}{\log 3,6 + 1} = \frac{1}{2}$
- B)  $\log \left( \eta \mu \frac{\pi}{6} \right) = -\log 2$
- Γ)  $\log \left( \eta \mu \frac{\pi}{6} \right) \cdot \log \left( \eta \mu \frac{\pi}{3} \right) \cdot \log \left( \eta \mu \frac{\pi}{2} \right) = 0$

6.03 Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$\ln \frac{1}{e} - \ln \sqrt{e} + \ln(\ln e) - \ln 2^{\log_2 e} + \ln(\log_2 4)$$

6.04 Να αποδείξετε ότι

$$(\log 5)^3 + (\log 20)^3 + \log 8 \log 0,25 = 2$$

6.05 Αν  $\alpha, \beta, \gamma$  διάφοροι μεταξύ τους θετικοί

αριθμοί, και ισχύει:  $\frac{\log \alpha}{\beta - \gamma} = \frac{\log \beta}{\gamma - \alpha} = \frac{\log \gamma}{\alpha - \beta}$  να αποδείξετε ότι  $\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma = 1$ .

6.06 Να αποδείξετε ότι

A)  $\log(1 - \frac{1}{2}) + \log(1 - \frac{1}{3}) + \dots + \log(1 - \frac{1}{100}) = -2$

B) Αν  $0 < \alpha, \beta, \gamma \neq 1$  τότε  $\alpha^{\log_{\gamma} \beta} \cdot \beta^{\log_{\alpha} \gamma} \cdot \gamma^{\log_{\beta} \alpha} = 1$

6.07 Αν  $x > 0, y > 0$  και  $x^2 + y^2 = 7xy$ , να αποδείξετε ότι:  $\log_a \frac{x+y}{3} = \frac{1}{2}(\log_a x + \log_a y)$

## Εξισώσεις

6.08 Να λύσετε τις εξισώσεις:

- A)  $\log(4x - 1) = 2\log 2 + \log(x^2 - 1)$
- B)  $\frac{1}{2}\log(x+2) + \log\sqrt{x-3} = 1 + \log\sqrt{3}$

6.09 Να λύσετε τις εξισώσεις :

- A)  $x + \log(1 + 2^x) = x \log 5 + \log 6$
- B)  $\log_2(3^{2x-2} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$
- Γ)  $x(\log 10 - \log 5) = \log(4^x - 12)$

6.10 Να λύσετε τις εξισώσεις

- A)  $\log(3^x + 2.5^x) - x \log 5 = \log 39 - \log 15$
- B)  $3^{2x} + 9^x = 11 \cdot 4^{x-1} + 4^{x+1}$
- Γ)  $2^{2x-1} + 3^x + 4^{\frac{x+1}{2}} - 9^{\frac{x}{2}} = 0$

6.11 Να λύσετε τις εξισώσεις:

- A)  $\log(\log(2x^2 + x - 11)) = 0$
- B)  $\log(3^x + 2) = 2x \log 3$

6.12 Να λύσετε τις εξισώσεις:

- A)  $\log(2^x + 2 \cdot 3^x) + \log 81 = x \log 3 + \log 243$
- B)  $2^{\log x} + 2^{5-\log x} = 12$
- Γ)  $27^{\frac{x+2}{3}} + 3^{2x+2} = 810$

6.13 Να λύσετε τις εξισώσεις:

- A)  $(\log_2 x)^4 - 5(\log_2 x)^3 + 5(\log_2 x)^2 + 5\log_2 x = 6$
- B)  $\ln(\sigma v x) = 0$
- Γ)  $\log_x 1000 = (\log_x 10)^2 + 2$
- Δ)  $2 \cdot (\log_x 8)^2 + \log_x 64 + \log_x 8 = 9$

**6.14** Να λυθούν οι εξισώσεις:

A)  $\frac{1}{2} \log x - \log 4 = \log(x+1) - 1$   
 B)  $\log(1-2x^2) + \log(1-x) = -\log 4$

**6.15** A) Να υπολογίσετε τον αριθμό  $5^{2\log_5 10 - 3}$

B) Να αποδείξετε ότι:  $3^{\log x} = x^{\log 3}$  και  
 $x^{\log 5} = 5^{\log x}$   
 Γ) Να λύσετε τις εξισώσεις  
 α)  $3^{\log x} = 54 - x^{\log 3}$  και  
 β)  $5^{2\log x} = 5 + 4 \cdot x^{\log 5}$

**6.16** Να υπολογίσετε τον αριθμό  $100^{\log \sqrt{3}}$  και  
 να λύσετε την εξισωση

$$3^{2\log x} - 2 \cdot 3^{\log x} - 100^{\log \sqrt{3}} = 0$$

**6.17** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \frac{\sqrt{1-\ln x}}{\ln x}$ .

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της,  
 B) Να λύσετε την εξισωση  $f(x) = \sqrt{2}$ .

**6.18** Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

A)  $f(x) = \sqrt{1-x} + \ln x$   
 B)  $f(x) = \frac{1}{x-1} + \ln 2x$   
 Γ)  $f(x) = \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{e^x}$   
 Δ)  $f(x) = \sqrt{1-\ln x}$

**6.19** Να λύσετε τις εξισώσεις:

A)  $2 \cdot 4^{x^3} \cdot 16^{x^2-x} = 8$   
 B)  $\log_{x+2}(17x^2 - 6x + 8) = 3$

### Ανισώσεις

**6.20** Να βρεθεί το πρόσημο των αριθμών:

$$\log_4 3, \quad \log_{\frac{2}{5}} \left(\frac{4}{5}\right), \quad \log_2 \frac{5}{3}, \quad \log_3 \frac{1}{4}.$$

**6.21** Να συγκριθούν οι αριθμοί:

A)  $\log_2 \frac{6}{5}, \quad \log_2 \frac{11}{5}$   
 B)  $\log_6 4, \quad \log_5 4$ .  
 Γ)  $\log(1-4x)$  και  $2\log(x-2)$ .

**6.22** Να λύσετε τις ανισώσεις:

A)  $-2\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{5}\right)^x - 1 \leq 0$   
 B)  $\log^2 x \geq \log x + 2$   
 Γ)  $5 \cdot 25^x - 2 \cdot 5^{x+1} - 5^x + 2 > 0$

**6.23** Να λυθούν οι ανισώσεις:

A)  $\ln^2 x - \ln \frac{1}{x} - 2 > 0$ .  
 B)  $\ln(\ln(x+3)) > 0$ .

**6.24** Να αποδειχτεί ότι:  $2 < 4 \log_3 2 < 3$ .

**6.25** Να λύσετε τις ανισώσεις:

A)  $\ln^2 x - 5 \ln x + 6 > 0$   
 B)  $\ln^2 x > \ln x$   
 Γ)  $(\log x^3)^2 - 2 \log x^2 - 5 < 0$   
 Δ)  $\log(x^2 - 4) > \log 3|x|$ .

**6.26** Να λυθούν οι ανισώσεις:

A)  $[\log(2x-1)]^2 - \log(2x-1) - 2 \leq 0$   
 B)  $\log[\log(\log x)] \geq 0$ .

**6.27** Έστω  $\alpha, \beta > 0$ , ώστε  $(\log \beta)^2 = \log \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ .

Να αποδείξετε ότι: α)  $\beta \geq \alpha$ . β)  $\alpha \leq \sqrt{10}$

## Συστήματα

6.28 Να λύσετε τα συστήματα :

A)  $\begin{cases} y^{\log x} = 100 \\ \log(xy) = 3 \end{cases}$

B)  $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ 9^{x-2y} \cdot 3^y = 81 \end{cases}$

6.29 Να λύσετε το σύστημα  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$

6.30 Να βρείτε δύο θετικούς αριθμούς που οι φυσικοί τους λογάριθμοι έχουν άθροισμα 2 και γινόμενο -8.

6.31 A) Να δείξετε ότι  $x^{\log y} = y^{\log x}$  με  $x, y > 0$

B) Να λύσετε το σύστημα:  $\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log \sqrt{x \cdot y} = 1 \end{cases}$

Γ) Αν οι λύσεις του (ii) είναι ρίζες της εξίσωσης:  $\log[\log(x^2 + x \log \theta - 110)] = 0$  να βρείτε το  $\theta \in \mathbb{R}_+^*$

6.32 Αν οι ρίζες τις εξίσωσης

$\log[\log(x^2 + x \log \theta + 110)] = 0$  αποτελούν λύση του συστήματος:  $\begin{cases} y^{\log z} + z^{\log y} = 20 \\ \log \sqrt{yz} = 1 \end{cases}$  να αποδείξετε ότι  $\theta = 10^{-20}$

**A.B.**

6.33 Να αποδειχθεί ότι για κάθε  $0 < \alpha, \beta \neq 1$

ισχύει:  $[\log_\alpha(\alpha\beta)]^{-1} + [\log_\beta(\alpha\beta)]^{-1} = 1$

6.34 Να αποδειχτεί ότι:

$\log_{\alpha\beta} \theta = \left( \frac{1}{\log_\alpha \theta} + \frac{1}{\log_\beta \theta} \right)^{-1},$  με  $0 < \alpha, \beta \neq 1,$

$\theta > 0.$

6.35 Αν  $\log_\beta x = \alpha$  και  $0 < \alpha, \beta, x \neq 1$ , να αποδείξετε ότι:

A)  $\log_{\frac{1}{\beta}} x = -\alpha$     B)  $\log_{\alpha\beta} x = \frac{\log_\alpha x}{1 + \log_\alpha \beta}.$

6.36 Αν  $0 < \alpha, \beta \neq 1$ , να αποδειχτεί ότι:

$$\log_\alpha \left( \frac{1}{\beta^{10}} \right) \cdot \log_\beta \alpha^{10} + 100 = 0.$$

6.37 Αν  $0 < x \neq 1$  και  $0 < \alpha, \beta \neq 1$  και ισχύει:

$$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_\alpha x} + \frac{1}{\log_\beta x} = 0 \text{ να δείξετε ότι } \alpha \cdot \beta = \frac{1}{3}.$$

6.38 Αν οι αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με  $0 < \alpha, \beta, \gamma, \theta \neq 1$ ,

να αποδειχτεί ότι:  $\frac{2}{\log_\beta \theta} = \frac{1}{\log_\alpha \theta} + \frac{1}{\log_\gamma \theta}.$

6.39 Αν  $\log_{\alpha^2} \alpha = x, \log_{\alpha^3} \alpha^2 = \psi, \log_{\alpha^4} \alpha^3 = \omega$  με  $0 < \alpha \neq 1$ , να αποδειχτεί ότι:

$$x + \psi + \omega = x\psi\omega + \frac{20}{12}.$$

6.40 Αν  $0 < \alpha \neq 1$  και

$x = \log_{\sqrt{\alpha}} \alpha, y = \log_\alpha \alpha^2, z = \log_{\alpha^2} \alpha^4$ , να αποδειχτεί ότι:  $x + y + z + 2 = xyz.$

### Συνδιαστικές με τριγωνομετρία

6.41 Αν  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  να αποδείξετε ότι:

$$\ln(\eta\mu 2x) - \ln 2 = \ln(\eta\mu x) + \ln(\sigma v x)$$

6.42 Να λύσετε τις εξισώσεις

A)  $2^{\sigma v x} + 2 \cdot 2^{-\sigma v x} = 3$  στο  $[0, 2\pi]$

B)  $e^{3\ln x} = 7 \cdot e^{\ln x} + 6$

6.43 Να λύσετε την εξισωση

$$\log(\eta\mu^2 x) + \log(\sigma v^2 x) = -4 \log 2, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

6.44 Να λύσετε την εξισωση

$$4^{\eta\mu x+1} - 9 \cdot 2^{\eta\mu x} + 2 = 0$$

6.45 Να λύσετε την εξισωση

$$\sqrt{6} \cdot 10^{\log(\eta\mu x)} + \sqrt{2} \cdot e^{\ln(\sigma v x)} = 2 \text{ στο } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

6.46 Να λύσετε στο  $[0, \pi]$  την εξισωση:

$$\sigma v x + e^{-x} = 2$$

6.47 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A)  $(4x)^{\log 2 + \log \sqrt{x}} > 100$

B)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{(\log x)^2 - 3\log x + 2} > 1$

### Συνδιαστικές με πολυώνυμα

6.48 Να βρείτε το  $a \in \mathbb{R}$ , ώστε το πολυώνυμο

$$P(x) = 4^a x^3 - 2^{a+1} x^2 - 9x + 1 \text{ να έχει παράγοντα το } x - 1$$

6.49 Δίνεται ότι το πολυώνυμο

$$P(x) = (2 \ln \kappa - 1)x^4 + x^3 + (e - 1)x^2 - ex + 1 + 2\eta\mu\theta$$

με  $\theta \in (0, 2\pi)$ ,  $\kappa \in (0, +\infty)$  είναι τρίτου βαθμού και έχει παράγοντα το  $x - 1$

A) Να βρείτε τα  $\kappa$  και  $\theta$

B) Να λύσετε την ανίσωση  $P(x) < 0$

Γ) Να βρείτε τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της  $f(x) = e^{3x} + (e - 1)e^{2x} - e^{x+1}$  βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'$ .

6.50 Έστω ότι το πολυώνυμο

$$P(x) = (\ln \alpha)x^3 + (2 - \ln \alpha)x^2 + \alpha^{\ln \beta}x + 1 \text{ έχει θετικούς ακέραιους συντελεστές και αρνητική ακέραια ρίζα. Τότε}$$

A) Να βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

B) Για  $\alpha = e$ ,  $\beta = 1$  να βρείτε τα διαστήματα που η γραφ. παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = P(e^x) \text{ βρίσκεται κάτω από τη γρ. παράσταση της } g(x) = e^x + 3$$

## Εκθετικές- Λογαριθμικές

6.51 Να λυθούν οι εξισώσεις:

- A)  $\log(4^x + 26) = 1 + \log(2^x + 1)$ .  
 B)  $x + \log(1 + 2^x) = \log 6 + x \log 5$ .  
 Γ)  $2 + \log 15 - \log 3 = \log(23^x - 29)$

6.52 Να λυθούν οι εξισώσεις:

- A)  $e \cdot x^{\ln x} - x^3 \cdot \sqrt[3]{x} = 0$   
 B)  $\frac{1}{2} \log(x + 24) = 1 - \log \sqrt{x + 3}$ .  
 Γ)  $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

6.53 Να βρείτε τις τιμές του  $\theta \in \mathbb{R}$  ώστε η εξισωση  $x^2 - x \log \theta + 3 \log \theta - 8 = 0$  να έχει δύο ίσες ρίζες.

6.54 Να λύσετε τα συστήματα:

- A)  $\begin{cases} |\log x - 2| < 1 \\ \frac{\sqrt{\log x - 1}}{12 - x} > 0 \end{cases}$   
 B)  $\begin{cases} 3^x \cdot 3^{2\psi} = 243 \\ \log x - 2 \log \psi = \log 3 \end{cases}$ .

6.55 Να λυθούν οι ανισώσεις:

- A)  $(\log x^3)^2 - 2 \log x^2 - 5 < 0$   
 B)  $\log(x^2 - 4) > \log 3|x|$ .

6.56 Να λύσετε τα συστήματα

- A)  $\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$       B)  $\begin{cases} x^y = y^x \\ x = y^2 \end{cases}$

6.57 Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτη-

$$\text{σης } \varphi(x) = \ln(x - 2) + \left(x + \frac{1}{x}\right)^x + \sqrt{\ln \frac{x^2 + 1}{2}}$$

6.58 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

- A)  $f(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x + 3)$   
 B)  $g(x) = \sqrt{\ln(\ln(x^2 - (2 + e)x + 3e))}$ .  
 Γ)  $f(x) = \sqrt{-2\left(\frac{1}{7}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{7}\right)^x - 1}$

6.59 Δίνεται η  $f(x) = \log |\log(x - 3)|$ . Να βρείτε:

- A) Το πεδίο ορισμού της.  
 B) Για ποιές τιμές του  $x$  η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'$ .  
 Γ) Τις ακέραιες τιμές του  $x$  για τις οποίες ισχύει  $f(x) > 0$ .

6.60 Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \ln(e^x - 1)$ .

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  
 B) Να βρείτε τα διαστήματα του  $x$  που η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'$   
 Γ) Να συγκρίνετε τους  $f(\ln 2)$  και  $f(1)$   
 Δ) Να λύσετε την εξισωση  $f(2x) - f(x) = f(1)$

6.61 Δίδεται η συνάρτηση με τόπο

$$f(x) = 5^{\ln x} - 3^{\ln x - 1} + 5^{\ln x - 1} - 3^{\ln x + 1}.$$

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .  
 B) Να λύσετε την εξισωση  $f(x) = 0$ .

6.62 Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = \log(\alpha \cdot 2^{x+1}) - \log(6), g(x) = \log(x \cdot 2^x), x > 0$$

Αν οι  $C_f, C_g$  τέμνονται στο σημείο  $M$  με τετμημένη  $x_0 = 1$

- A) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 3$   
 B) Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $f(3)$  και  $g(3)$   
 Γ) Να λύσετε την εξισωση  $g(x) + \ln 10 = f(x) + (\log e)^{-1}$   
 Δ) Να παραστήσετε την  $f$  στο επίπεδο

6.63 Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \ln(e^x - 3^{x-1})$

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
- B) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = x - 2 \ln 2$
- C) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) < x$

6.64 Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2 \log x + 1}{2 \log x - 1}$

- A) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της  $f$
- B) Να λυθεί η εξίσωση  $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{10}{3}$

6.65 Να βρείτε:

- A) τα σημεία τομής με τους άξονες της γραφικής παράστασης της  $f(x) = \log(x+1) - 2$
- B) Το  $\kappa \in \mathbb{R}$  ώστε το σημείο  $P\left(-\frac{9}{10}, \kappa\right)$  να ανήκει στη γραφική της παράσταση.

6.66 Δίνεται η  $f(x) = 10 + \frac{\log(\log x)}{\log e}$ . Να βρείτε

το πεδίο ορισμού της και να υπολογίσετε το  $x$  ώστε να ισχύει  $f(y^x) - f(y) = 2$ .

6.67 Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)}$ .

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- B) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 2$ .
- C) Αν  $g(x) = 1$  με  $x > 6$ , να λύσετε την ανίσωση  $f(x) > g(x)$ .

6.68 Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και η συνάρτηση

$$g(x) = f(x) + e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως μονότονη στο  $\mathbb{R}$
- B) Να λυθεί η ανίσωση  $f(\ln x) - f(1) < \frac{1}{e} - \frac{1}{x}$

6.69 Να λυθεί η ανίσωση  $\frac{\ln(1-\ln x)}{2^{\ln x} - 2^{\log x}} \geq 0$

(mathematica.gr)

6.70 Να λυθεί η ανίσωση  $\frac{36^x - 18^x}{\ln(x+1)} \geq 0$

(mathematica.gr)

6.71 Να λυθεί η ανίσωση  $\frac{e^x - 2^x}{\ln x + 1} \geq 0$

(mathematica.gr)

6.72 Να λυθεί η ανίσωση  $\frac{\ln(x+1) + \ln 2x}{2 - 4^{\log x}} \leq 0$

(mathematica.gr)

6.73 Να λυθεί η ανίσωση  $\frac{e^{2x+1} - e^{x-1}}{\ln(x+1) - 1} \leq 0$

(mathematica.gr)