Α Λυκείου Άλγεβρα

4 ΓΛΧ

2013-2014

Μ. Παπαγρηγοράκης
Χανιά

Άλγεβρα

13.09

0 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 0

Μαθηματική Λογική

0.01 Ποιες από τις παρακάτω φράσεις είναι λογικές προτάσεις;

Α) Η Κρήτη είναι νησί ,

Β) Ο αριθμός 8 είναι πρώτος ,

Γ) Αύριο θα βρέξει.

0.02 Να διατυπώσετε τις αρνήσεις των προτάσεων:

Α) Υπάρχει τρίγωνο που είναι ορθογώνιο

Β) Μερικοί ακέραιοι είναι πρώτοι ,

Γ) Υπάρχει πραγματικός αριθμός που το τετράγωνό του είναι αρνητικό ,

Δ) Κάθε τετράπλευρο είναι τετράγωνο.

0.03 Να διατυπώσετε τις αντίστροφες προτάσεις των προτάσεων:

Α) Αν $\alpha = 3$ τότε $\alpha^2 = 9$,

Β) Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες του ίσες τότε είναι ισοσκελές ,

Γ) Αν ένα τρίγωνο είναι ισόπλευρο τότε είναι ισοσκελές.

0.04 Δείξτε ότι $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$.

0.05 Να διατυπώσετε τις αντιθετοαντίστροφες προτάσεις των προτάσεων:

Α) Αν ο x^2 είναι περιττός τότε και ο x είναι περιττός ,

Β) Αν ένα τετράπλευρο έχει άνισες διαγωνίους, τότε αυτό δεν είναι ορθογώνιο.

0.06 Να αποδείξετε ότι:

Α) $(p \wedge q) \Rightarrow (q \wedge p)$ Β) $(p \wedge q) \Rightarrow p$,

Γ) $(p \wedge q) \Rightarrow q$ Δ) $p \Rightarrow (p \vee q)$.

0.07 Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή ή Λάθος κάθε μια από τις παρακάτω συνεπαγωγές:

Α) $\alpha < 2 \Rightarrow \alpha \le 2$

Β) $\alpha^2 < 4 \Rightarrow \alpha < 2$,

Γ) $\alpha^2 < 4 \Rightarrow -2 < \alpha < 2$.

Σύνολα

0.08 Α) Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο: Β={ (x, y) /x ακέραιος με $-2 \le x \le 1$ και $y \in R$ με $2x + y = 1$ }.

Β) Να γράψετε το σύνολο Γ={2,4,6,8} με περιγραφή

Δ) Για τα προηγούμενα σύνολα να χαρακτηρίσετε σωστές ή λάθος τις προτάσεις:

$3 \in \Gamma$, $(0,2) \in B$, $8 \notin B$, $-1 \notin \Gamma$, $0 \in \Gamma$

0.09 Να γραφούν με περιγραφή τα σύνολα $A = \{0, 1, 2, 3\}$ και $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

0.10 Δίνονται τα σύνολα:

$A = \left\{x \in R \,/\, (x^2 - 4)(x+1)(x^3 - 64) = 0\right\}$ και

$B = \left\{y \in R \,/\, (y-2)(y^2 - 16)(y^2 - 9) = 0\right\}$

Να βρείτε τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$.

0.11 Να βρεθεί η ένωση και η τομή των συνόλων:

α) $A = R - \{1, 2\}$ και $B = R - \{1, 3\}$,

β) $A = R - \{1, 2\}$ και $B = [1, +\infty)$,

γ) $A = (3, +\infty)$ και $B = (-\infty, 5]$.

0.12 Αν $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{2,3\}$ και $B = \{3,4\}$ τότε να αποδείξετε ότι: $(A \cup B)' = A' \cap B'$ και $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

0.13 Να συμπληρώσετε τις ισότητες

$N \cup Z = \dots$, $R \cap Z = \dots$, $R \cap Q = \dots$, $R \cap N = \dots$

0.14 Έστω ότι τα σύνολα A και B είναι υποσύνολα ενός συνόλου αναφοράς Ω . Να χαρακτηρίσετε αν είναι σωστή ή λάθος κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

Α) Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cup B = A$.

Β) Αν $B \subseteq A$ τότε $A \cap B = B$.

Γ) Αν $A \cup B = \Omega$ και $A \cap B = \varnothing$ τότε $A' = B$.

Δ) Είναι $\varnothing \subseteq A$, για κάθε A .

1 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Ισοπίθανα Ενδεχόμενα

1.01 Έστω τα σύνολα $\Omega=\{1,2,3,4,5\}$ $B=\{\omega\in\Omega\,/\,\omega \text{ περιττός}\}$ $A=\{\omega\in\Omega\,/\,\omega<4\}$. Αν εκλέξουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω, να βρείτε τις πιθανότητες να ανήκει: Α) στο Α ή στο Β,
Β) στο Α και στο Β
Γ) στο Α και όχι στο Β
Δ) σε ένα το πολύ από τα Α και Β.

1.02 Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια μαζί. Να βρείτε την πιθανότητα να φέρουμε 6 στο ένα και 5 στο άλλο.

1.03 Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι διαδοχικά δύο φορές. Βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων
Α) Το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης είναι μικρότερο από το αποτέλεσμα της δεύτερης ρίψης.
Β) Οι ενδείξεις και στις δύο ρίψεις είναι ίδιες.
Γ) Το άθροισμα των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι μεγαλύτερο του 9.

1.04 Έστω το σύνολο $\Omega=\{0,2,3,4\}$. Εκλέγουμε τυχαία ένα $\lambda\in\Omega$. Να βρείτε την πιθανότητα ο λ να είναι ρίζα της εξίσωσης $\lambda^2-3\lambda=0$

1.05 Σε ένα Λύκειο οι μαθητές της Α τάξης είναι 54. Αν εκλέξουμε τυχαία ένα μαθητή του Λυκείου η πιθανότητα να είναι μαθητής της Α τάξης είναι $0,36$ και η πιθανότητα να είναι της Β τάξης είναι $0,34$. Να βρείτε:
Α) το πλήθος όλων των μαθητών του Λυκείου,
Β) το πλήθος των μαθητών της Β τάξης,
Γ) την πιθανότητα να είναι ένας μαθητής που εκλέξαμε τυχαία μαθητής της Γ τάξης.

1.06 Ένα κουτί περιέχει 2 άσπρες και 3 κόκκινες σφαίρες. Βγάζουμε διαδοχικά δύο σφαίρες. Να βρεθεί η πιθανότητα:
Α) να είναι δύο κόκκινες,
Β) να είναι η πρώτη άσπρη και η δεύτερη κόκκινη,
Γ) να είναι και οι δύο άσπρες.

1.07 Ένα κουτί περιέχει 12 άσπρες, μερικές κόκκινες και μερικές μαύρες μπάλες. Παίρνουμε τυχαία μία μπάλα. Η πιθανότητα να πάρουμε κόκκινη μπάλα είναι $\frac{1}{2}$ και η πιθανότητα να πάρουμε μαύρη μπάλα είναι $\frac{1}{3}$. Να βρείτε πόσες κόκκινες και πόσες μαύρες μπάλες υπάρχουν στο κουτί.

1.08 Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια, ώστε $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{4}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων.
Α) Γ: «Πραγματοποιείται ένα μόνο από τα A και B».
Β) Δ: «Δεν πραγματοποιείται ούτε το A ούτε το B».

1.09 Από τους 50 μαθητές της A τάξης ενός οι 20 ασχολούνται με το ποδόσφαιρο, οι 40 με το μπάσκετ και καθένας ασχολείται με το ποδόσφαιρο ή το μπάσκετ. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Να βρεθεί η πιθανότητα:
Α) Να μην ασχολείται με το ποδόσφαιρο,
Β) Να ασχολείται με το ποδόσφαιρο και με το μπάσκετ,
Γ) Να ασχολείται με το ποδόσφαιρο αλλά όχι με το μπάσκετ.

1.10 Έστω A,B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει ότι η πιθανότητα
Να μην πραγματοποιείται κανένα από τα A και B είναι $\frac{1}{4}$,
να πραγματοποιείται μόνο ένα από τα A και B είναι $\frac{2}{3}$.
Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιείται ένα το πολύ από τα A και B.

1.11 Έστω A,B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με μη μηδενικές πιθανότητες, για τα οποία ισχύει $P(A)P(A')=P(A')+P^2(B)$. Να αποδείξετε ότι το A είναι βέβαιο ενδεχόμενο και το B αδύνατο.

1.12 Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου για τα οποία ισχύει ότι η πιθανότητα:

να πραγματοποιείται το A είναι $\frac{1}{5}$,

να μην πραγματοποιείται το B είναι $\frac{3}{5}$ και να πραγματοποιούνται συγχρόνως και τα δύο είναι $\frac{1}{6}$

Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιείται:

Α) ένα τουλάχιστον από τα A και B,

Β) το πολύ ένα από τα Α και Β,

Γ) κανένα από τα A και B,

Δ) μόνο το A,

Ε) μόνο ένα από τα A και B,

ΣΤ) το Α ή να μην πραγματοποιείται το B

1.13 Σε μια έρευνα που έγινε μεταξύ των μαθητών μιας τάξης βρέθηκε ότι το 50% θα πάει το καλοκαίρι διακοπές σε «νησί», το 50% θα πάει το καλοκαίρι διακοπές σε «βουνό», το 10% θα πάει διακοπές το καλοκαίρι σε «νησί» και σε «βουνό» ενώ τρείς μαθητές δεν θα πάνε πουθενά. Πόσα άτομα έχει η τάξη;

1.14 Σε ένα σχολείο το 50% των μαθητών έχει κινητό τηλέφωνο ή δεν έχει Η/Υ και το 25% των μαθητών έχει κινητό και Η/Υ. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Αν η πιθανότητα να έχει κινητό και να μην έχει Η/Υ είναι $\frac{1}{5}$, να βρείτε την πιθανότητα να μην έχει ούτε Η/Υ ούτε κινητό.

1.15 Ένα κουτί περιέχει 3 άσπρες και 2 κόκκινες σφαίρες. Βγάζουμε διαδοχικά δύο σφαίρες. Να βρεθεί η πιθανότητα:

Α) να είναι δύο κόκκινες,

Β) να είναι η πρώτη άσπρη και η δεύτερη κόκκινη

Γ) να είναι και οι δύο άσπρες.

1.16 Μέσα σε ένα κουτί υπάρχουν 5 μπάλες από τις οποίες οι 3 είναι άσπρες και οι 2 κόκκινες. Επιλέγουμε την μία μπάλα μετά από την άλλη μέχρι να μείνουν στο κουτί μπάλες του ίδιου χρώματος. Να βρείτε :

Α) Τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Α: «Οι μπάλες που επιλέξαμε ήταν του ίδιου χρώματος».

Β: «Στο κουτί έμεινε μόνο μία μπάλα».

Γ: «Από τις μπάλες που επιλέξαμε οι κόκκινες ήταν περισσότερες από τις άσπρες».

Β) Τις πιθανότητες των ενδεχομένων :

$A \cup B,\ B \cap \Gamma,\ \Gamma \cup A',\ (A \cap B)'$.

Λογισμός Πιθανοτήτων

1.17 Αν A,B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου και ισχύουν $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{2}{3}$, τότε βρείτε τις $P(A\cap B')$, $P(A'\cap B)$.

1.18 Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A,B ενός πειράματος τύχης, με πιθανότητες τέτοιες ώστε: $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$, $P(A')=\frac{2}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$. Να βρείτε τις $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cap B')$.

1.19 Αν για δύο ενδεχόμενα A,B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν: $P(A\cap B)=\frac{2}{5}$, $P(A')+P(B')=\frac{11}{10}$ να βρείτε την $P(A\cup B)$.

1.20 Αν για δύο ενδεχόμενα A,B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν: $P(A')=\frac{1}{2}$, $P(A\cup B)=\frac{5}{6}$ να υπολογίσετε την $P(B\cap A')$.

1.21 Αν A,B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και ισχύουν οι ισότητες $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(A)=\frac{1}{6}$ και $P(A\cap B)=\frac{2}{15}$, να βρείτε τις :

Α) $P(A')$,

Β) $P(A\cap B')$,

Γ) $P(A'\cap B)$.

1.22 Αν $\frac{3}{P(A')}-\frac{2}{P(A)}=\frac{25}{6}$ να βρείτε τις $P(A)$ και $P(A')$.

1.23 Αν για δύο ενδεχόμενα A,B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει: $3P(A\cup B)=1+3P(A-B)$ να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(B')$.

1.24 Αν για δύο ενδεχόμενα A,B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι: $P(A')=3P(A)$, $P(A)+2P(B)=1$ και $2P(A\cup B)=1$, να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A\cap B)$, $P(B-A)$, $P(A\cup B')$.

1.25 Εστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου για τα οποία ισχύουν $A\cup B=\Omega$, $P(A)=\alpha$, και $P(B)=\beta$. Να βρεθούν οι: $P(A'\cup B')$ $P(A'\cap B')$ $P(A'\cup B)$ $P(A'\cap B)$.

1.26 Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και ισχύουν $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$ και $P((A'\cap B)\cup(A\cap B'))=\frac{1}{6}$, να βρείτε την πιθανότητα $P(A'\cup B')$.

1.27 Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν:
$P(A-B)=\frac{1}{4}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{20}$ και $P(B'-A)=\frac{1}{2}$.
Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B.

1.28 Έστω A,B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει ότι: $P(A-B)=\frac{1}{4}$ και $P(B')=\frac{1}{2}$. Να βρείτε την πιθανότητα να μην πραγματοποιείται κανένα από τα A και B.

Παραμετρικές

1.29 Αν Ω δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα με $N(\Omega)=30$ και $N(A)=\frac{x^2+4}{2}$, $P(B)=\frac{x}{6}$, με A, B συμπληρωματικά ενδεχόμενα, να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$.

1.30 Αν A, B ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A)=\lambda^2$, $P(B)=7\lambda^2-6\lambda+2$, να δείξετε ότι $\frac{1}{4}\le\lambda\le\frac{1}{2}$.

1.31 Ένα μη αμερόληπτο ζάρι είναι έτσι φτιαγμένο ώστε η εμφάνιση κάθε αριθμού (κ) να είναι ανάλογη του (κ) με $\kappa=1,2,3,\ldots,6$. Να βρείτε τη πιθανότητα εμφάνισης κάθε αριθμού.

1.32 Έστω $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενά του $A=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ και $B=\{\omega_1,\omega_3\}$.
Αν ισχύουν : $P(A)=\frac{1}{\kappa}$, $P(B)=\frac{2\kappa-1}{2\kappa}$ και $P(\omega_4)=\frac{1-\kappa}{3\kappa}$, να βρεθεί ο $\kappa\in R^*$ και οι πιθανότητες $P(\omega_2)$, $P(\omega_4)$.

Ανισότητες

1.33 Αν A,B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , να αποδείξετε ότι:
A) $0\le 4P(A)P(A')\le 1$,
B) $\frac{1}{2}\le[P(A)]^2+[P(A')]^2\le 1$,
Γ) $P(A\cap B)\le P(A)P(B)+P((A\cup B)')$,
Δ) $2P(A\cap B)\le P(A)+P(B)\le 2P(A\cup B)$.

1.34 Έστω A , B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{2}{3}$.
A) Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.
B) Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{6}\le P(A\cap B)\le\frac{1}{2}$.

1.35 Έστω A , B ενδεχόμενα με $P(A)=0,32$, $P(B)=0,78$. Να δείξετε ότι: $0,1\le P(A\cap B)\le 0,32$.

1.36 Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$
Να δείξετε ότι $\frac{5}{12}\le P(B)\le\frac{3}{4}$.

1.37 Έστω A , B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B')=\frac{2}{3}$. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{6}\le P(A-B)\le\frac{1}{2}$.

1.38 Αν A, B συμπληρωματικά ενδεχόμενα και $25P^2(A)+8\le 29P(A)-P(B)$, να βρεθούν οι $P(A)$ και $P(B)$.

1.39 Έστω A, B, Γ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια, ώστε $\Gamma\subseteq A\cap B$.
Να αποδειχθεί ότι:
A) $2P(\Gamma)\le P(A)+P(B)$,
B) $3P(\Gamma)\le 2P(A\cap B)+P(A\cup B)\le 3P(A\cup B)$,
Γ) $P(A\cup B)\le P(A)+P(B\cup\Gamma')$.

2 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ιδιότητες των πράξεων

2.01 Αν $\alpha=-0,5$ και $\beta=0,001$ να υπολογιστεί η $3(2\alpha-3\beta)-4\left[-3\alpha+2(\alpha+2\beta-1)\right]$.

2.02 Να αποδείξετε ότι αν είναι αντίθετοι οι αριθμοί $A=x-3y+4z$ και $B=y-x-2z$, τότε $y=z$.

2.03 Αν οι αριθμοί $\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}$ και $\beta+\sqrt{\beta^2+1}$ είναι αντίστροφοι, να αποδείξετε ότι οι α και β είναι αντίθετοι.

2.04 Αν $\alpha-3\beta=1$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης $\alpha(\alpha-1)-4\beta(2+\alpha)+\beta(\alpha+8)$.

2.05 Αν $xy(2y-x)\neq 0$, να αποδειχτεί ότι η παράσταση $\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2y}}+\dfrac{1}{1-\dfrac{2y}{x}}$ είναι ανεξάρτητη των x,y.

2.06 Αν $\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{3}{2}$, $y\neq 0$ να βρεθεί ο λόγος $\dfrac{x}{y}$, και η τιμή της παράστασης $A=\dfrac{x^2-y^2}{2xy+x^2}$.

2.07 Αν ο α είναι περιττός ακέραιος να αποδείξετε ότι ο αριθμός $(\alpha+1)^2+2\alpha+2$ είναι πολλαπλάσιο του 4.

2.08 Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο διαδοχικών περιττών αριθμών είναι άρτιος.

2.09 Αν $\dfrac{\alpha}{x}=\dfrac{\beta}{y}=\dfrac{\gamma}{\omega}$ να αποδειχτεί ότι:

$$\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{2\nu}=\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{x^2+y^2+\omega^2}\right)^{\nu}=\left(\frac{\alpha^{\nu}+\beta^{\nu}+\gamma^{\nu}}{x^{\nu}+y^{\nu}+\omega^{\nu}}\right)^{2}.$$

Δυνάμεις

2.10 Υπολογίστε τις παραστάσεις

Α) $(-0,25)^{17}\,8^{11}$ Β) $\left[(-0,5)^{-3}\cdot(0,1)^{-3}\right]:(-10)^2$

2.11 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $\dfrac{\left(\alpha^2\beta^{-3}\right)^2\left(\alpha^{-2}\beta\right)}{\left(\alpha^3\beta^2\right)^{-1}\left(\alpha^2\beta^{-4}\right)}$, Β) $\dfrac{3x^2y^{-1}-4x^{-3}y}{x^{-2}y}$.

2.12 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

Α) $x^5\left(xy^2\right)^3:\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$ αν $x=0,4$ και $y=-2,5$.

Β) $\left(x^3y^{-1}\right)^2:\left[x^{-1}y\left(x^3y^{-3}\right)^{-1}\right]^{-2}$ αν $x=10^{-3}$ και $y=-0,1^{-2}$

2.13 Α) Να απλοποιηθούνοι παραστάσεις:

$\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-3}\cdot\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-2}$ και $\dfrac{\left(\alpha^2\beta\right)^{-3}}{\alpha^{-7}\cdot\beta^{-2}}\cdot\dfrac{\left(\alpha\beta^2\right)^{-3}}{\alpha^{-2}\cdot\beta^{-7}}$

2.14 Αν ν είναι φυσικός με $\nu>1$, δείξτε ότι: $(-1)^{\nu}+(-1)^{\nu+1}+(-1)^{\nu+2}+(-1)^{\nu+3}=0$.

2.15 Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορούμε να φτιάξουμε με: α) τρία δυάρια, β) τρία τριάρια, γ) τρία τεσσάρια;

2.16 Για ποια τιμή του κ η παράσταση $\alpha^{\kappa+1}\cdot\beta^{2\kappa}$ γράφεται με μορφή δύναμης με βάση $(\alpha\beta)$;

2.17 Να βρεθεί ο $\nu\in Z$ αν $\left(2^{3\nu-6}\right)^{\nu^2+6}=1$

2.18 Δείξτε ότι $\left(\dfrac{x^{\alpha}}{x^{\beta}}\right)^{\alpha+\beta}\cdot\left(\dfrac{x^{\beta}}{x^{\gamma}}\right)^{\beta+\gamma}\cdot\left(\dfrac{x^{\gamma}}{x^{\alpha}}\right)^{\gamma+\alpha}=1$

2.19 Να γράψετε την παράσταση:
$\{2^{101}:[(5^{171}:5^{170}-3)^{98}+2^{105}:(2^3\cdot 2^4)+(2^{11})^9]\}\cdot 2^{38}$
ως δύναμη με βάση το 8

Ταυτότητες – Παραγοντοποίηση

2.20 Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να είναι τέλεια τετράγωνα οι παραστάσεις:

α) $16+8x+\ldots=(\ldots)^2$ β) $9+4\sqrt{2}=(\ldots+\ldots)^2$.

2.21 Αν $\alpha-\beta=2$ να αποδείξετε ότι

$\alpha^2+\beta^2-4\alpha-2\alpha\beta+4\beta+3=-1$.

2.22 Να απλοποιήσετε τις ακόλουθες παραστάσεις, αφού βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται:

Α) $\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\cdot\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$, Β) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2\cdot\dfrac{x^3+x^2}{(x+1)^3}$,

Γ) $\dfrac{(x^2-x)+2x-2}{x^2-1}$, Δ) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x}\cdot\dfrac{x^2+2x}{x^2+x-2}$

2.23 Αν $x=-0,5$, y=-2, να βρείτε την τιμή της παράστασης $\left[\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right):\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right]\dfrac{xy}{(x+y)^2}$.

2.24 Να αποδείξετε ότι:

Α) Αν $2(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha+\beta)^2$ τότε $\alpha=\beta$.

Β) Αν $(\alpha+\beta)\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)=4$, $\alpha\beta\neq 0$ τότε $\alpha=\beta$.

2.25 Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in R$, δείξτε ότι: αν $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ τότε $\alpha=\beta=\gamma$.

2.26 Για κάθε $x,y,\omega\in R$, να αποδείξετε ότι: αν $(x+y+\omega)^2=3(x^2+y^2+\omega^2)$ τότε $x=y=\omega$.

2.27 Αν α,β,γ είναι τα μήκη πλευρών τριγώνου και ισχύει ότι $\dfrac{\alpha^2-\beta\gamma}{\beta+\gamma}=\dfrac{2\alpha-\beta-\gamma}{2}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

2.28 Αν $\beta=\alpha-1$ να αποδείξετε ότι:

$(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^4+\beta^4)(\alpha^8+\beta^8)=(\alpha^{16}-\beta^{16})$.

2.29 Αν $(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2=4(\alpha x+\beta y)$ τότε να αποδείξετε ότι $x=\alpha$ και $y=\beta$.

2.30 Αν $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=5$ να βρείτε τα $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$, $\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}$.

2.31 Αν $x+y=2$ και $xy=1$ να υπολογιστούν τα x^2+y^2, x^3+y^3, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, x^2y+xy^2, $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$.

2.32 Αν $x=4\alpha^3-3\alpha$, $y=4\beta^3-3\beta$ και $\alpha^2+\beta^2=1$ να αποδείξετε ότι $x^2+y^2=1$.

2.33 Αν $\alpha+\beta\neq 0$, $\beta+\gamma\neq 0$, $\gamma+\alpha\neq 0$ και $\alpha+\beta+\gamma=0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2-\gamma^2-2\alpha\gamma}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2-\alpha^2-2\alpha\beta}{\alpha+\gamma}=0.$$

2.34 Αν για τους θετικούς ακέραιους x,y,ω ισχύει ότι: $3^{x^3+y^3}=\left(\dfrac{27^{xy}}{3^{\omega^2}}\right)^{\omega}$ τότε να αποδειχτεί ότι $x=y=\omega$.

2.35 Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta\gamma\neq 0$ δείξτε ότι

$$\frac{\alpha^4}{\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma}+\frac{\beta^4}{\gamma^3+\alpha^3-3\alpha\beta\gamma}=\frac{-\gamma^4}{\alpha^3+\beta^3-3\alpha\beta\gamma}$$

2.36 Για κάθε φυσικό ν, δείξτε ότι

Α) Ο αριθμός 987^2-985^2 είναι άρτιος.

Β) Ο αριθμός 24 διαιρεί τον $5^{2\nu}-1$.

2.37 Αν $\alpha\beta\gamma=1$ και $\beta\gamma+\beta+1\neq 0$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha}{\alpha\beta+\alpha+1}+\frac{\beta}{\beta\gamma+\beta+1}+\frac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1}=1.$$

2.38 Να αποδείξετε ότι

αν $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=0$ τότε $\dfrac{\beta\gamma}{\alpha^2}+\dfrac{\gamma\alpha}{\beta^2}+\dfrac{\alpha\beta}{\gamma^2}=3$.

Διάταξη – Ανισότητες

2.39 Αν $-2<x<4$ και $3<y<7$ να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρουν οι παραστάσεις
$x-y$, $\frac{1}{y}$, $2x+\frac{3}{y}$, x^2, y^2, x^2+y^2.

2.40 Αν είναι $2<x<8$ να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών βρίσκονται οι παραστάσεις
$\frac{1}{x}+2$, $1-\frac{1}{1-x}$, $\frac{2x-3}{x}$, x^2

2.41 Να δείξετε ότι
$x<1<y \Rightarrow xy-x-y+1<0$.

2.42 Να αποδείξετε ότι:
Α) Αν $3\alpha<\beta$ τότε $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{4}<\frac{\beta}{3}$.
Β) Αν $\alpha>1$ τότε $\alpha^3>\alpha^2-\alpha+1$.
Γ) Αν $x>y$ τότε $x+7>y+5$.

2.43 Να αποδείξετε ότι αν:
Α) α,β είναι ομόσημοι τότε $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geq 2$.
Β) α,β είναι ετερόσημοι τότε $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\leq -2$
Γ) $\alpha>0$ τότε $\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}\leq 1$.

2.44 Αν για τους $\alpha,\beta,\gamma>0$ ισχύει ότι
$\alpha\beta\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma\right)+\beta\gamma\left(\frac{\beta+\gamma}{2}-\alpha\right)+\gamma\alpha\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}-\beta\right)\leq 0$ να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=\gamma$.

2.45 Να αποδειχτεί ότι
$\frac{1}{2}<\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+...+\frac{1}{2000}<1$.

2.46 Να συγκρίνετε τους αριθμούς
2^{51} και 3^{34}.

2.47 Αν $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in R$ να αποδείξετε ότι:
Α) $\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta$,
Β) $\left(\alpha^2+1\right)\left(\beta^2+1\right)\left(\gamma^2+1\right)\geq 8\alpha\beta\gamma$.

2.48 Αν $\alpha,\beta\in R$ αριθμοί να δείξετε ότι:
Α) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\geq 0$,
Β) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$.

2.49 Αν $\alpha,\ \beta$ θετικοί, να αποδείξετε ότι
Α) $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\leq\frac{\alpha+\beta}{4}$, Β) $\frac{\alpha+\beta}{2}\geq\sqrt{\alpha\beta}\geq\frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}$

2.50 Αν $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ είναι πλευρές τριγώνου και ισχύει ότι $\alpha^2+\beta^2\leq 2\gamma(\alpha+\beta-\gamma)$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

2.51 Για τους θετικούς α,β,γ, να αποδείξετε ότι:
$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{1+\alpha+\beta+\gamma}<\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{\beta}{1+\beta}+\frac{\gamma}{1+\gamma}$.

2.52 Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in R^*$, να αποδείξετε ότι:
$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2\geq 3\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

2.53 Να δείξετε ότι $\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2\geq 3\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)$
.

2.54 Για κάθε $\alpha,\beta\in R$ να δείξετε ότι
Α) $(\alpha+\beta)^2\leq 2\left(\alpha^2+\beta^2\right)$,
Β) $\left(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3\right)^2\leq 4\left(1+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6\right)$.

2.55 Αν α,β θετικοί ακέραιοι αριθμοί τέτοιοι ώστε $3\alpha+4\beta=120$, να αποδειχτεί ότι $30<\alpha+\beta<40$.

2.56 Αν είναι $x,y>0$ και $x^3+y^2\leq 64$ να αποδείξετε ότι $x^4+y^3<512$.

Απόλυτη Τιμή

2.57 Να βρείτε τις απόλυτες τιμές:

$|-7| = \ldots$, $|\sqrt{2}-1| = \ldots$, $|3-\pi| = \ldots$, $|\sqrt{2}-2| = \ldots$

$|-\alpha^2| = \ldots$, $|-x^2-\pi| = \ldots$, $|\sqrt{2}-1| = \ldots$

$|x^2-4x+4| = \ldots$, $|\eta\mu 38^0 - 1| = \ldots$

2.58 Αν $\alpha < \beta < \gamma$ να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση $A = 3|\alpha-\beta| - 2|\gamma-\alpha| + 3|\beta-\gamma|$.

2.59 Αν $-3 < x < 2$ γράψτε χωρίς τις απόλυτες τιμές τις παραστάσεις: $A = 2|x+3| - 6|x-2| + x - 1$,

$B = x + |8-4x|$, $\Gamma = |-2x-6|$ $\Delta = |2-x| - |x-4|$

2.60 Αν $-1 < x < 2$ να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: $A = |x+1| + |x-2| + |x+2| + |x-3|$

$B = 6\cdot|2x+3| + 3\cdot|4x-9|$

2.61 Αν $-1 < \alpha < \beta < 2$ να απλοποιήσετε την παράσταση: $|\alpha-\beta| + |2\alpha+3| - |3\beta-7|$

2.62 Να γράψτε χωρίς τις απόλυτες τιμές τις παραστάσεις:

$A = x + |8-2x|$, $B = |-2x-6|$, $\Gamma = x - |4-3x|$

2.63 Να γράψτε χωρίς τις απόλυτες τιμές τις παραστάσεις: $\Delta = -|-2x+4| + |2x-4|$,

$E = 2|x+3| - |2-x| + 1$, $\Sigma T = |2-x| + |x^2+4|$.

2.64 Να αποδείξετε ότι:

Α) $|x+y|^2 - |x-y|^2 = 4xy$

Β) $(x+|x|)(x-|x|) = 0$

Γ) $(|x|+|y|)(|x|-|y|) = x^2 - y^2$

2.65 Να αποδείξετε τις ισότητες:

Α) $|\alpha+\beta|^2 + |\alpha-\beta|^2 = 2\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)$.

Β) $|\alpha^2 - 2\beta - 3| = |2\beta - \alpha^2 + 3|$

Γ) $\dfrac{\alpha}{|\alpha|} = \dfrac{|\alpha|}{\alpha}$, $(\alpha \neq 0)$

2.66 Αν $x = \dfrac{\kappa}{|y|+|\kappa|}$, $m = \dfrac{y}{|\kappa|+|y|}$ να αποδείξετε ότι $|x|+|m| = 1$.

2.67 Να αποδείξετε ότι:

Αν $|x| \leq 2$ τότε $|x^2 - 2x + 6| \leq 14$

2.68 Να αποδείξετε ότι:

Αν $|x| \leq 1$ και $|y| \leq \dfrac{1}{2}$ τότε $|3x - 2y + 2| \leq 7$

2.69 Να αποδείξετε ότι:

Αν $|x| \leq 1$ και $|y| \leq 2$ τότε $|2x - 3y + 1| \leq 9$

2.70 Εάν $|x| \leq 2$, $|y| \leq 3$ να δείξετε ότι: $|2x - y| \leq 7$.

2.71 Να βρεθούν οι τιμές των αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_9$ αν

$|x-2011| + |x-\alpha_1| + |x-\alpha_2| + \ldots + |x-\alpha_9| = 0$.

2.72 Να αποδείξετε ότι:

Α) $\left|\dfrac{x}{y}\right| + \left|\dfrac{y}{x}\right| \geq 2$, αν $x, y \neq 0$.

Β) $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| = |x| + \left|\dfrac{1}{x}\right|$ αν $x \neq 0$.

Γ) $\left|\dfrac{2x+5y}{5x+2y}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{x}{y}\right| > 1$.

2.73 Αν $|\alpha-1| < 5$ και $|\beta-2| < 3$ να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών μεταβάλλεται η παράσταση $\alpha+\beta$.

2.74 Να βρεθεί το x όταν:

$d(x,3) \leq 7$, $d(x,3) = 2$,

$d(x,2) > 3$ $d(x,-1) > 2$.

1.7 Ρίζες

2.75 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ-ΛΑΘΟΥΣ:

Α) Ισχύει ότι $\sqrt[2]{x^2}=\sqrt[5]{x^5}$ για κάθε $x\in R$.

Β) Για κάθε $x\neq 0$ ισχύει: $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=1$.

Γ) Για κάθε x είναι $\sqrt{(-x)^2}=|x|$.

Δ) Αν x,y>0 τότε $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y}$.

Ε) Ισχύει πάντα ότι $\sqrt{\alpha^2}+\sqrt{\beta^2}=|\alpha+\beta|$.

2.76 Για κάθε x ≠0 να απλοποιηθούν οι παραστάσεις: $\sqrt[6]{x^{18}}$, $\sqrt[3]{x^6}$, $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$, $\sqrt{(2x)^2}$.

2.77 Αν $-3<x<2$, να απλοποιήσετε την παράσταση Α=$\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{x^2+6x+9}$

2.78 Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$\frac{\sqrt{x^2+4\cdot x+4}}{x+2}-\frac{\sqrt{x^2-4\cdot x+4}}{x-2}\ ,\ \text{αν}\ \ |x|<2.$$

2.79 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $\left(\sqrt{12}-\sqrt{27}\right)\cdot\left(\sqrt{75}+\sqrt{48}-\sqrt{108}\right)$,

Β) $\left(\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{20}\right)\cdot\left(\sqrt{50}-\sqrt{45}+\sqrt{125}\right)$,

Γ) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

2.80 Να υπολογίσετε τα $\left(2-\sqrt{2}\right)^3$, $\left(2+\sqrt{2}\right)^3$ και να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\sqrt[3]{20-14\cdot\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20+14\cdot\sqrt{2}}\ .$$

2.81 Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=1.$$

2.82 Να υπολογίσετε τον αριθμό

$$\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\ .$$

2.83 Αν $\alpha>0$ να δείξετε ότι:

Α) $\alpha>1\Leftrightarrow\sqrt{\alpha}<\alpha$ Β) $\alpha<1\Leftrightarrow\sqrt{\alpha}>\alpha$.

2.84 Να μετατραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

$$A=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}\ ,\quad B=\frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}\ ,$$

$$\Gamma=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}\quad \Delta=\frac{1}{\sqrt[3]{5}-1}\ .$$

2.85 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $\sqrt[3]{5\cdot\sqrt[5]{25\cdot\sqrt{25\cdot\sqrt{5}}}}$.

Β) $\sqrt{75+\sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{15+\sqrt{1}}}}}$.

Γ) $\sqrt{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}$.

2.86 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$, Β) $\sqrt{9-\sqrt{32}}$, Γ) $\sqrt{12-2\sqrt{6}}$.

2.87 Να δείξετε ότι: $\sqrt{10+2\sqrt{15}}>\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

2.88 Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{2}$ και $2-\sqrt{10}$.

2.89 Να λύσετε την εξίσωση:

$$\sqrt[4]{\left(x^2-6x+9\right)^2}=3-x\ .$$

2.90 Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\dfrac{\sqrt{1001+\sqrt{2001}}-\sqrt{1001-\sqrt{2001}}}{\sqrt{2}}$ είναι φυσικός.

2.91 Για ποια $x\in R$ έχουν έννοια οι παραστάσεις:

$$A=\frac{2x-1}{x^4+7x}\ ,\ E=\frac{x}{|x-1|-2}$$

2.92 Να αποδείξετε ότι:

Α) $\sqrt{\dfrac{1}{\left(\sqrt{7}+3\right)^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{\left(\sqrt{7}-3\right)^2}}\in Q$,

Β) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$.

2.93 Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A=\sqrt{1+1999\sqrt{1+2000\sqrt{4+2000\sqrt{1+2003\,2005}}}}\ .$$

3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

3.01 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{x}{x^2-4}$ Β) $\dfrac{x+1}{x^2-1}+\dfrac{2}{x^2-2x+1}=0$.

3.02 Να λυθούν για κάθε $\lambda\in R$ οι εξισώσεις:

Α) $(\lambda-1)x=\lambda^2-1$ Β) $\lambda^2x+1=\lambda(x+1)$

Γ) $\lambda^2(x-3)=\lambda x-3$, Δ) $\lambda^2x+3=3x+\lambda$.

3.03 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $(x+\alpha)^2-(x-\beta)^2=2\alpha(\alpha+\beta)$, $\alpha,\beta\in R$.

Β) $\alpha\left[(x+\alpha)^2-(x-\alpha)^2\right]=4x+\alpha^2+\alpha$, $\alpha\in R$

3.04 Να επιλυθεί ο τύπος:

$\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}$ ως προς R_1.

3.05 Από τις ισότητες $v=v_0+\alpha t$ και $S=v_0t+\dfrac{1}{2}\alpha t^2$, να δείξετε ότι $S=\dfrac{v+v_0}{2}t$.

3.06 Ένα βαρέλι Α περιέχει 524 κιλά κρασί των 2 ευρώ το κιλό και ένα βαρέλι Β περιέχει 456 κιλά κρασί των 1,5 ευρώ το κιλό. Αφαιρούμε από κάθε βαρέλι την ίδια ποσότητα κρασιού και βάζουμε αυτή που αφαιρέσαμε από το Α στο Β και αυτή που αφαιρέσαμε από το Β στο Α. Αν μετά το ανακάτεμα των κρασιών, το περιεχόμενο των δύο βαρελιών έχει την ίδια αξία, να βρείτε πόσα κιλά μεταφέρθηκαν από το ένα βαρέλι στο άλλο.

3.07 Ένα ελαιουργείο έχει δύο συγκροτήματα το Α και το Β. Όταν δουλεύουν και τα δύο μαζί τελειώνουν όλες τις ελιές μίας περιοχής σε 12 μέρες. Φέτος ξεκίνησαν μαζί και μετά από 2 μέρες το Α σταμάτησε οριστικά λόγω βλάβης ενώ το Β συνέχισε να δουλεύει.Το Β έχει τα $\dfrac{2}{3}$ της απόδοσης του Α . Να βρείτε σε πόσες μέρες συνολικά θα τελειώσουν οι ελιές της περιοχής

Εξισώσεις με Απόλυτα

3.08 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $2|x+2|-8=0$, Β) $|x^4-2|=-5$,

Γ) $|x-3|=2x$, Δ) $|7x-3|=|9x+5|$,

Ε) $|2x-4|=-|x+5|$, ΣΤ) $|2x-5|=2x-5$.

3.09 Να λύσετε τις εξισώσεις

Α) $\dfrac{|x-1|-3}{2}-\dfrac{|2-2x|}{6}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{|x-1|}{6}$,

Β) $1-\dfrac{|2x-1|-1}{4}=|1-2x|-\dfrac{|6x-3|-2}{8}$.

3.10 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $|x+1|+|x-5|=20$, Β) $\big||x-1|+2\big|=1$,

Γ) $|x^2-9|+|x^2-5x+6|=0$, Δ) $|x|+x=4$.

Ε) $|x-1|=|x-3|$ Στ) $|x-2|=2|x+1|$

3.11 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $\big|4-|x|\big|=\big||x|+3\big|$, Β) $\big|1-|x|\big|=0$,

Γ) $\Big|\big||x|-2\big|-3\Big|=1$, Δ) $\big||x|-2\big|=3$.

3.12 Να λύσετε τις εξισώσεις

Α) $x^4=-x$ Β) $x^4+x=0$

Γ) $5x^6+3x^2=0$ Δ) $2x^{10}+x^3=0$

3.13 Α)Να δείξετε ότι:

$\left(\dfrac{x}{|x|}-1\right)(x+|x|)=0$, $x\neq 0$.

Β) Να λύσετε την εξίσωση

$\lambda\dfrac{x}{|x|}=\lambda^2x+\lambda+1$, για κάθε $\lambda\in R$.

3.14 Α) Να λυθεί η εξίσωση $x^3+8=0$ (1).

Β) Αν η εξίσωση: $4\alpha^4x^2-1=0$ και η (1) έχουν κοινή λύση να βρείτε το α.

Γ) Αν η εξίσωση $(\beta+1)^5x^{10}+32=0$ και η (1) έχουν κοινή λύση να βρείτε το α.

Δευτεροβάθμια Εξίσωση

3.15 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

Α) $x^2-4x=0$, Β) $3x^2=4x$,

Γ) $2x^2+x-15=0$, Δ) $4x^2-1=0$,

Ε) $x^2-6x+7=0$, ΣΤ) $3x^2-x=0$.

3.16 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις ως προς x για κάθε τιμή των παραμέτρων τους

Α) $\alpha\beta x^2-(\alpha\gamma+\beta)x+\gamma=0$, $\alpha\beta\neq 0$.

Β) $\alpha\beta x^2-(\alpha-\beta)x-1=0$, $\alpha\cdot\beta\neq 0$.

Γ) $\beta^2x^2-2\alpha\beta^2x+\alpha^2\beta^2-1=0$, $\beta\neq 0$

3.17 Αν η εξίσωση $x^2-2x-2(\alpha\beta-1)=0$ έχει ως ρίζα τον αριθμό $\alpha+\beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=1$.

3.18 Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in R$ ώστε η εξίσωση $(\lambda^2-3\lambda+2)x^2+2(\lambda-2)x+1=0$ να έχει έχει δύο ρίζες πραγματικές.

3.19 Έστω η εξίσωση $\lambda x^2+x+5=0,\ \lambda\in R$.

Α) Για ποιες πραγματικές τιμές του λ η εξίσωση έχει μία μόνο ρίζα;

Β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει διπλή ρίζα;

Γ) Αν ρ είναι η διπλή ρίζα της εξίσωσης, να υπολογίσετε την παράσταση $\sqrt{(x-\rho)^2}$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

3.20 Λύστε την εξίσωση $x^2-(\Delta+6)x+\Delta+11=0$ όπου Δ είναι η διακρίνουσά της

3.21 Να βρεθεί ο $\lambda\in R$ ώστε η εξίσωση $(\lambda^2-3\lambda+2)x^2+(\lambda-2)x+3=0$:

Α) να έχει μία μόνο ρίζα,

Β) να έχει διπλή ρίζα.

3.22 Η εξίσωση $\lambda^2x^2+(5\lambda-2)x+\lambda+2=0$, $\lambda\in R$ έχει ρίζα το -1. Να βρείτε το λ και μετά να δείξετε ότι το -1 είναι διπλή ρίζα.

3.23 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x^2+2(\alpha+\beta+\gamma)x+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)=0$, $\alpha,\beta,\gamma\in R$ έχει μια διπλή ρίζα, αν και μόνον αν $\alpha=\beta=\gamma$.

3.24 Δίνεται η εξίσωση $2x^2+2x-\mu+3=0$, $\mu\in R$. Να βρεθεί για ποιες τιμές του μ έχει μια διπλή ρίζα.

3.25 Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση $(2\alpha-\beta)x^2-4\alpha x+4\beta=0$, $\alpha,\beta\in R-\{0\}$ έχει διπλή ρίζα, τότε η εξίσωση $(\alpha^2+\beta^2)x^2-2x+3(\alpha-\beta)=0$ έχει ρίζες άνισες.

3.26 Αν η εξίσωση $x^2-2\beta x+2\gamma=0$, $\beta,\gamma\in R$, είναι αδύνατη στο R, να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2+3\beta x+5\gamma=0$ δεν έχει ρίζες στο R.

3.27 Για ποιες τιμές του $\alpha\in R$ οι εξισώσεις $x^2-\alpha x+1=0$ και $x^2-x+\alpha=0$ έχουν κοινή ρίζα;

3.28 Αν η εξίσωση $x^2+\mu x+\kappa=0$ έχει διπλή ρίζα, να αποδείξετε ότι το ίδιο θα συμβαίνει και για την εξίσωση: $\left(1-\kappa+\frac{\mu^2}{2}\right)x^2+\mu(1+\kappa)x+\kappa(\kappa-1)+\frac{\mu^2}{2}=0$.

3.29 Να λυθεί η εξίσωση $|x+1|+(x^2+3x+2)^2=0$

3.30 Αν $\alpha,\beta,\gamma\in(0,+\infty)$ να αποδείξετε ότι μια τουλάχιστον από τις παρακάτω εξισώσεις έχει ρίζες πραγματικές , $\alpha x^2+2\beta x+\gamma=0$, $\gamma x^2+2\alpha x+\beta=0$, $\beta x^2+2\gamma x+\alpha=0$

3.31 Αν $\alpha,\beta,\gamma\in R^*$ και ισχύει: $\alpha+\beta^2+2\alpha\gamma=29$ και $\beta+\gamma^2+2\alpha\beta=18$ και $\gamma+\alpha^2+2\alpha\gamma=25$, να υπολογιστεί η τιμή του $\alpha+\beta+\gamma$

3.32 Αν $\beta,\gamma\in A=\{1,2,3,4,5\}$, να βρείτε το πλήθος των εξισώσεων $x^2+\beta x+\gamma=0$ που έχουν ρίζες πραγματικές

3.33 Αν $x^2=xy+12y^2$ με $x,y\in R^*$ να βρείτε τις τιμές του $\frac{x}{y}$

Άθροισμα – Γινόμενο Ριζών

3.34 Δίνεται η εξίσωση $x^2-3x-1=0$ με ρίζες x_1, x_2. Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων $x_1^2+x_2^2$, $x_1^3+x_2^3$, $\frac{x_1}{x_2+1}+\frac{x_2}{x_1+1}$ και $x_1(x_1-3)$.

3.35 Έστω η εξίσωση $\sqrt{\alpha}x^2+\left(\sqrt{\alpha}+\beta\right)x+\beta=0$, $\alpha,\beta\in R$ με $\alpha>0$.

Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες για οποιεσδήποτε τιμές των α,β.

Β) Αν x_1, x_2 οι δύο ρίζες της εξίσωσης να αποδείξετε ότι $x_1+x_2+x_1x_2=-1$.

Γ) Αν μία ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός $-\sqrt{\alpha}$ με $\alpha\neq 1$, να αποδείξετε ότι $\beta=\alpha$

3.36 Ένας μαθητής αντί της εξίσωσης $x^2+\alpha x+\beta=0$ (1), έλυσε την $x^2+\beta x+\alpha=0$ και βρήκε δύο ρίζες. Από αυτές η μία ήταν ίση με μία ρίζα της (1) και η δεύτερη ήταν μικρότερη κατά 3 της άλλης ρίζας της (1). Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β.

3.37 Να βρεθούν οι $\alpha,\beta\in R$ αν οι ρίζες της $x^2+\alpha x+\beta=0$ είναι ίσες με α και β.

3.38 Έστω η εξίσωση $\sqrt{2}x^2-4x-1=0$ και ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της.

Α) Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων:

$A=\rho_1^3+\rho_2^3$ $\quad B=\frac{\rho_1^2}{\rho_2}+\frac{\rho_2^2}{\rho_1}$ $\quad \Delta=|\rho_1-\rho_2|$,

$E=|\rho_1|+|\rho_2|$.

Β) Να σχηματίσετε εξίσωση β΄ βαθμού με ρίζες x1, x2 τις παραστάσεις Δ, Ε του (Α) ερωτήματος και να υπολογίσετε το $x_1^2+x_2^2$.

3.39 Έστω η εξίσωση $x^2+\beta x+\gamma=0$, $\gamma<0$

Α) Αν x_1, x_2 οι δύο ρίζες της εξίσωσης να γράψετε συναρτήσει των αριθμών β,γ τις παραστάσεις x_1+x_2, x_1x_2, $x_1^2+x_2^2$.

Β) Να αποδείξετε ότι: $d\left(x_1,x_2\right)=\sqrt{\Delta}$, όπου Δ η διακρίνουσα της εξίσωσης.

3.40 Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-2+\lambda-1=0$ να βρεθεί ο πραγματικός λ, έτσι ώστε να ισχύει: $3x_1^2+8x_1x_2^2+8x_1^2x_2+3x_2^3=192$.

3.41 Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\in R-\{0\}$ και ρ_1, ρ_2 ρίζες της $x_1\left(x-x_2\right)^2+x_2\left(x-x_1\right)^2=0$, να αποδειχθεί ότι, αν οι x_1, x_2 είναι ετερόσημες, τότε και οι ρ_1, ρ_2 είναι ετερόσημες.

3.42 Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha,\beta,\gamma\in R$, $\alpha\neq 0$ και x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\kappa x^2+\lambda x+\mu=0$, $\kappa,\lambda,\mu\in R$, $\kappa\neq 0$ να βρείτε εξίσωση με ρίζες τις παραστάσεις $x_1\rho_1+x_2\rho_2$ και $x_1\rho_2+x_2\rho_1$.

3.43 Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in R$ για τις οποίες η εξίσωση $x^2-2x+\left(\lambda+2\right)=0$ έχει:

Α) δύο ρίζες ετερόσημες ,

Β) δύο ρίζες θετικές και άνισες ,

Γ) δύο ρίζες αντίστροφες.

3.44 Έστω η εξίσωση $x^2-\left(\lambda-1\right)x-\lambda=0$

Α) Να λυθεί η ανίσωση $d(x,\lambda)<5\text{-}\lambda$ όταν η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα.

Β) Να βρεθεί ο $\lambda\in R$ ώστε να έχει ρίζες αντίθετες

3.45 Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της $x^2-5x-7=0$, να βρεθεί εξίσωση που να έχει ρίζες τις:

Α) $\rho_1=2x_1-1$, $\rho_2=2x_2-1$,

Β) $\rho_1=x_1+x_2$ και $\rho_2=x_1x_2$.

3.46 Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x^2-7x+2=0$ έχει δύο θετικές ρίζες x_1, x_2

Β) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

$A=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ $\quad B=\sqrt[4]{x_1}+\sqrt[4]{x_2}$.

3.47 Έστω η εξίσωση
$\left(|\lambda-1|+3\right)x^2+2\lambda x+\left(|\lambda-1|-3\right)=0$

Α) Βρείτε το λ ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα την οποία και να υπολογίσετε.
Β) Βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες ετερόσημες.

3.48 Δίνεται η εξίσωση $x^2+10x+20=0$ η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς x_1 και x_2. Βρείτε το πρόσημο του $x_1+x_2^{2005}$

3.49 Δίδεται η εξίσωση
$x^2-(2\lambda+1)x+2\lambda^2+\lambda=0$ η οποία έχει δύο πραγματικές ρίζες, έστω x_1, x_2. Να αποδείξετε ότι:
$0\le x_1+x_2\le 2$ και $0\le x_1^2+x_2^2\le 2$.

3.50 Δίνεται η εξίσωση $x^2-\beta x+\gamma=0$ και ισχύει η σχέση $3\beta^2=16\gamma$.
Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και ομόσημες, τις ρ_1 και ρ_2.
Β) Να αποδείξετε ότι $\rho_1=3\rho_2$
Γ) Αν για το άθροισμα S των ριζών ισχύει $S=4$, να λύσετε την ανίσωση $|\beta x-1|-\gamma\ge 0$.

3.51 Δίνονται οι διαφορετικοί ανά δυο πραγματικοί αριθμοί x_1, x_2, x_3. Αν δίνεται ότι:
Η εξίσωση $x^2-3x+\alpha=0$, $(\alpha\in \mathrm{IR})$ έχει ρίζες τους x_1, x_2
Η εξίσωση $x^2-5x+\beta=0$, $(\beta\in \mathrm{IR})$ έχει ρίζες τους x_2, x_3
Η εξίσωση $x^2-4x+\gamma=0$, $(\gamma\in \mathrm{IR})$ έχει ρίζες τους x_1, x_3
Να προσδιορίσετε τους $\alpha,\beta,\gamma\in R$

Τριώνυμο – Παραγοντοποίηση- μορφές

3.52 Να απλοποιηθούν τα κλάσματα :
$\dfrac{x^2-\alpha x-6\alpha^2}{x^2+5\alpha x+6\alpha^2}$ και $\dfrac{x^2+(\alpha-\beta)x-2\alpha^2-2\alpha\beta}{x^2+(4\alpha+\beta)x+3\alpha^2+3\alpha\beta}$.

3.53 Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο $\gamma^2x^2+\left(\gamma^2-\alpha^2+\beta^2\right)x+\beta^2$ όπου τα α,β,γ είναι μήκη πλευρών ενός τριγώνου δεν έχει πραγματικές ρίζες.

3.54 Ένας επενδυτής πούλησε μια μετοχή αντί 21 euro και υπολόγισε ότι ζημιώθηκε τόσο επί τοις εκατό όσο την αγόρασε. Να βρείτε πόσα euro έχασε (2 λύσεις).

3.55 Ένα βαρέλι περιέχει 54 lt κρασί. Βγάζουμε μια ποσότητα κρασί και προσθέτουμε την ίδια ποσότητα νερού. Μετά ξαναβγάζουμε την ίδια ποσότητα από το μείγμα. Στο βαρέλι παραμένει ένα μείγμα που περιέχει 24 lt καθαρό κρασί. Να βρείτε πόσα λίτρα κρασί βγάλαμε αρχικά.

3.56 Σε μια γεωργική περιοχή αναλογεί ως έκτακτη ενίσχυση, εξ΄ αιτίας φυσικής καταστροφής, το ποσό των 3000 euro. Σε κάθε παραγωγό αναλογεί το ίδιο ποσό. Επειδή είχε γραφτεί κατά λάθος ένας παραγωγός παραπάνω, τον έσβησαν και οι υπόλοιποι πήραν, ο καθένας 100 euro περισσότερα. Να βρείτε πόσοι ήταν τελικά οι δικαιούχοι. (Απ: 5)

4 *ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ*

Ανισώσεις Πρώτου Βαθμού

4.01 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $\dfrac{(1-2x)(x-3)}{2}+2x>-(x+1)^2$

Β) $\dfrac{2x-1}{3}+1\le 2-\dfrac{3-2x}{2}$

4.02 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$\dfrac{x-2}{3}-\dfrac{12-x}{2}>\dfrac{5x-36}{4}-1$ και

$\dfrac{x+4}{3}-\dfrac{x-4}{5}\le 2+\dfrac{3x-1}{15}$

4.03 Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων.

$\dfrac{x}{2}+1>\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{2}$ και $\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{3}\le\dfrac{x}{6}-1$

4.04 Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων.

$3(x-1)+2x<x+1$, $2(x+3)-x\ge 2$ και

$-6\le\dfrac{3x-6}{3}\le 7$

4.05 Να λύσετε το (Σ): $\begin{cases}2x-4<x+1\\ \dfrac{x-7}{2}\ge\dfrac{x}{3}-8\end{cases}$

4.06 Να λύσετε τα συστήματα

Α) $-2<\dfrac{2x-1}{3}<4$ Β) $-2<\dfrac{-2x-1}{3}<-1$

4.07 Να λύσετε τα συστήματα:

Α) $-2<-x-\dfrac{x+1}{2}<4$

Β) $-5<\dfrac{1-x}{2}+1<-1$

4.08 Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ να λύσετε τις ανισώσεις

Α) $\lambda(x-1)>\lambda^2$ Β) $\lambda x>x+2$

Ανισώσεις με απόλυτα

4.09 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $|x-1|<5$ Β) $|5-x|-6>0$

Γ) $|2x-1|<-1$ Δ) $|1-2x|>-4$

Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $|2x+3|\ge 6$ Β) $|x+4|\le 0$

Γ) $1<|3x-2|<3$ Δ) $|x+6|\ge 0$

Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $-2\le|x|\le 5$ Β) $2|x|<x+5$

Γ) $|2x-1|\ge 2x-1$ Δ) $|x+5|\le 1$

4.10 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $3<|1-2x|\le 5$ Β) $3\le|x|\le 8$

Γ) $1\le|2x+3|\le 9$ Δ) $|2x-1|>4$

4.11 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $||5x+3|+2|\le 6$ Β) $||x+3|-1|<2$

4.12 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $|3-|2x+1||\le 2$ Β) $||x+1|-4|<3$

Γ) $|1-|x-1-|1-x|||<2$

Δ) $|1-|1-x||\le 1$

4.13 Αν $|x|<1$, γράψτε χωρίς απόλυτα την παράσταση $A=2|x+3|-6|x-2|+x-1$ και την παράσταση: $B=|2-|x+1||+|2+|x-1||$

4.14 Να λύσετε τις ανισώσεις

Α) $1\le|x-1|\le 6$ στο R^*

Β) $-1\le|2x-5|\le 4$ στο R_-

Γ) $0\le|x-2|-1\le 3$ στο R_+

Δ) $\left|x-\dfrac{1}{4}\right|<4$ στο Z

4.15 Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$-|15x-23|<7$ και $\left|\dfrac{4}{3x-2}\right|>\dfrac{1}{3}$

4.16 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $\dfrac{|2006-x|+|x-2006|}{3} \geq 2$

Β) $\dfrac{2|3-x|-1}{3}-|3-x|>\dfrac{|x-3|-8}{3}+1$

Γ) $2|x|+3|x-1|>5x-2$

4.17 Βρείτε τις τιμές του x ώστε να ισχύουν:
$(|x|-2)(2|x|-30)=0$ και $|x+5| \geq 7$

4.18 Αν $|\alpha| \leq 1$, όπου $\alpha \in Z$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $A=\alpha^{2005}+3$

4.19 Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται κάθε μια από τις παραστάσεις:

Α) $\sqrt{|x|-1}$ Β) $\sqrt{2|x|+6}$

Γ) $\sqrt{|x+3|-2}$ Δ) $\sqrt{4-|x|}$

Ε) $\sqrt{1-|x-2|}$ Στ) $\sqrt{2|x|-6}$

4.20 Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται κάθε μια από τις παρακάτω παραστάσεις:

Α) $A=\sqrt{5-|1-x|}+\sqrt{|x+2|-1}$

Β) $B=\sqrt{1-2|1-2x|}$

4.21 Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

Α $f(x)=\sqrt{|x|-2}-\sqrt{(x^2+4)(|x|+3)}$

Β $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^3-x^2+4}}{\sqrt{6-x}}$

Ανισώσεις Δευτέρου Βαθμού

4.22 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $4-x^2 \geq 0$

Β) $3x^2-5x+2 \geq 0$

4.23 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $-x^2+x-1>0$

Β) $-x^2+x-1 \leq 0$

4.24 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $(x^2-7x+12)(3x-x^2)(x^2+2x+6) \geq 0$,

Β) $x(x^2-3x+2)(2x^2+5x)(1+x+x^2)<0$.

4.25 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $(x+2)^2(2x^2-5x-3)(x^6+2)>0$,

Β) $(x-5)(x+1)^2(x+2)(x-3)<0$.

4.26 Να λυθούν οι ανισώσεις:

Α) $\dfrac{-x^2+5x+6}{x^2+x-6}>0$,   Β) $\dfrac{x^2-4x+3}{x-2} \geq 0$,

Γ) $\dfrac{(x^2-8x+7)(x^2-3x+9)}{x^2-4}<0$.

4.27 Να λυθούν οι ανισώσεις:

Α) $\dfrac{x+1}{7-x}>2$,   Β) $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+2} \leq 2$,

Β) $\dfrac{2x^2-4x+5}{x^2+2}>1$ Δ) $\dfrac{4x}{3x-x^2} \geq \dfrac{1}{2}$.

4.28 Να λύσετε τα συστήματα ανισώσεων:

Α) $5<x^2-14x+50<26$ Β) $-2<\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}<1$

4.29 Να λύσετε τις ανισώσεις

Α) $|x-1-x^2|<|x^2-3x+4|$

Β) $|x^2-6x+8| \leq 4-x$

Γ) $|x^2-3x-3|>|x^2+7x-13|$

4.30 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $|x^3-1| \leq x^2+x+1$.

Β) $|-x^2+x-4|>2(x+1)$

4.31 Να συναληθεύσετε τις ανισώσεις $\dfrac{3x+5}{3x-7}<0$ και $\dfrac{x^2-10x+16}{x-2}<0$;

4.32 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

A) $f(x)=\sqrt{3x^2-4x+1}$

B) $f(x)=\sqrt{-4x^2+4x+3}+3\sqrt{-x^2+2x}$

4.33 Το τριώνυμο $f(x)=x^2-5x-6$ έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 6. Ποια από τις παρακάτω ανισότητες είναι σωστή;

Α $f(0,1999)>0$ Β. $f(0,1999)\le 0$

Γ $f(1999)<0$ Δ. $f(-1999)>0$

4.34 Για κάθε $\kappa\in R$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $x^2-\kappa x+2\kappa-3=0$

4.35 Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε η εξίσωση $\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)x^2+(\lambda-2)x+3=0$

A) Να έχει μία μόνο ρίζα

B) Να είναι αδύνατη.

4.36 Έστω $f(x)=(\lambda+2)x^2-2\lambda x+3\lambda$, με $\lambda\neq -2$

A) Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η ανίσωση $f(x)<0$ να αληθεύει για κάθε $x\in R$

B) Αν $\lambda=-4$ να λύσετε την εξίσωση $|f(x)|=-8x+18$

4.37 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$ ώστε η ανίσωση: $(\lambda\text{-}1)x^2+(\lambda+1)x+\lambda+1>0$ να είναι αδύνατη για κάθε $x\in R$.

4.38 Δίνεται η εξίσωση $\left(\lambda^3-\lambda\right)x^2+\lambda x+\lambda(1+\lambda)(1-\lambda)=0$

A) Βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in R$ η εξίσωση έχει 2 ρίζες άνισες

B) Υπάρχει τιμή του λ ώστε να έχει η εξίσωση άπειρες ρίζες;

4.39 Να βρείτε το λ ώστε το τριώνυμο $(\lambda-1)x^2-4x+\lambda+2$ να έχει:

A) σταθερό πρόσημο για κάθε $x\in R$,

B) αρνητικό πρόσημο για κάθε $x\in R$.

4.40 Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ, βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)x^2+(\lambda-2)x+3=0$.

4.41 Να βρεθούν αν υπάρχουν οι τιμές του $\lambda\in R$ για τις οποίες η ανίσωση $(\lambda-2)x^2-2\lambda x+3\lambda<0$ να αληθεύει για όλες τις πραγματικές τιμές του x.

4.42 Να προσδιοριστεί ο $\lambda\in R^*$ ώστε η ανίσωση $\lambda x^2+(\lambda-1)x+(\lambda-1)<0$ να είναι αληθής για κάθε $x\in R$.

4.43 Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωης $-x^2+(2\lambda-1)x+\lambda^2+\lambda+1=0$, $\lambda\in R$ να βρεθεί ο $\lambda\in R$ ώστε $x_1^2+x_2^2+3x_1x_2\ge 0$.

4.44 Έστω x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $x^2-2\lambda x+\lambda^2-1=0$ $\lambda\in R$. Να βρεθεί ο λ ώστε να ισχύει $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\ge 1$.

4.45 Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha\in R$ ώστε η σχέση $-3<\dfrac{x^2+\alpha x-2}{x^2-x+1}<2$ να ισχύει για κάθε πραγματικό x.

4.46 Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-(\lambda+4)x+\lambda+6$, $x\in R$, $\lambda\in R$

Α Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$ για τις οποίες το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές

Β Αν $x_1, x_2\in R$ είναι ρίζες του $f(x)$ να βρείτε:

α) για ποιες τιμές του $\lambda\in R$ ισχύει $x_1^2+x_2^2<20$

β) για ποιες τιμές του $\lambda\in R$ ισχύει $|x_1-x_2|=2$

4.47 A) Να λυθεί η εξίσωση $x^2\text{-}(\lambda+1)x+2\lambda-2\lambda^2=0$: (1), $\lambda\in R$

B) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in R$ ισχύει ότι $d(x_1,x_2)<2$ όπου $x_1, x_2\in R$ οι ρίζες της (1)

4.48 Έστω η εξίσωση $x^2+3x+1=0$ με ρίζες τις α,β. Να αποδείξετε ότι $\left(\dfrac{\alpha}{\beta+1}\right)^2+\left(\dfrac{\beta}{\alpha+1}\right)^2=18$

4.49 Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$ όπου $\alpha,\beta\in R$. Αν x_1, $x_2\in R$ είναι οι ρίζες του $f(x)$ και ισχύει $\left|f(x_1+x_2)-5\right|+\left|x_1^2x_2+x_1x_2^2-30\right|=0$

Α Να δείξετε ότι $\alpha=-6,\quad \beta=5$

Β Να λυθεί η ανίσωση $f\left(|x-3|-4\right)<0$

4.50 Αν για τους αριθμούς α,β,γ ισχύει $\gamma(\alpha+\beta+\gamma)<0$, $\alpha\neq 0$,να αποδείξετε ότι:

Α) Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ δεν μπορεί να έχει ρίζες τους αριθμούς 0 και 1.

Β) Η $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει δύο ρίζες άνισες.

Γ) Αν x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι: $(x_1x_2)(1-x_1)(1-x_2)<0$.

Δ) Να αποδείξετε ότι μία μόνο ρίζα της εξίσωσης θα είναι στο διάστημα $(0,1)$

4.51 Δίδεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x-2$ με $x\in IR$ και $\alpha\neq 0$.

Α Αν ισχύει η σχέση $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in IR$ να αποδείξετε ότι $f(100)<0$

Β Αν ισχύει η σχέση $\alpha+\beta>2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

4.52 Να βρείτε ποιες πραγματικές τιμές του λ το τριώνυμο $f(x)=(\lambda-2)x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-3$ έχει δύο πραγματικές ρίζες μεγαλύτερες της μονάδας.

4.53 Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=\lambda x^2+\mu x+2011$ με $\lambda\neq 0$ όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί.

Α) Αν $f(x)\neq 0$ για κάθε x πραγματικό αριθμό να αποδείξετε ότι λ>0

Β) Να αποδείξετε ότι $f\left(2011^{2011}\right)>0$

4.54 Αν για κάθε $x\in IR$ ισχύει: $(x-\alpha)(x-\beta)\geq 0$ να δείξετε ότι: $\alpha=\beta$

Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει
$3(\alpha+\beta+1)^2+1\geq 3\alpha\cdot\beta$

4.55 Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή του πραγματικού α ώστε η εξίσωση $x^2-2x+\alpha=0$ να έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

4.56 Αν $\gamma>1$ και $|\beta|\geq 2\gamma$, να αποδείξετε ότι οι ρίζες x_1,x_2 της εξίσωσης $x^2+\beta x+\gamma=0$, ικανοποιούν τη σχέση: $\frac{1}{|x_1|}+\frac{1}{|x_2|}\geq 2$.

4.57 Για ποιες τιμές της παραμέτρου μ, μία ακριβώς ρίζα της εξίσωσης $x^2-2(\mu+1)x+\mu^2=0$ ανήκει στο διάστημα $(0,2)$;

4.58 Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί ($\alpha\neq 0$ α διαφορετικό του μηδενός) , τέτοιοι ώστε οι αριθμοί: α , $4\alpha+3\beta+2\gamma$ να έχουν το ίδιο πρόσημο.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, δε μπορεί να έχει δύο ρίζες στο διάστημα : (1,2).

4.59 Να ορισθεί το μ στην εξίσωση: $x^2-\mu x+\mu-1=0$ ούτως, ώστε το τετράγωνο της διαφοράς των ριζών της να είναι μεγαλύτερο του 4 και μικρότερο του 16

4.60 Να βρεθεί δευτεροβάθμια εξίσωση της μορφής $x^2+\beta x+\gamma=0$, όπου $\beta,\gamma\in R$ που να έχει ως λύσεις τους αριθμούς $\beta+1$ και $\gamma+1$

4.61 Έστω η εξίσωση $x^2+x-3=0$ η οποία έχει ώς ρίζες τους x_1,x_2 Βρείτε τις τιμές των παραστάσεων $A=x_1^3-4x_2^2+19$ και $B=x_2^3-4x_1^2+19$

4.62 Έστω $P(x)=\alpha x^2+\beta x-2001$ με $\alpha\neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

Α) Αν $P(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ τότε $P(2004)<0$.

Β) Αν είναι $\alpha+\beta>2001$, τότε η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x-2001=0$ έχει ρίζες πραγματικές.

4.63 Έστω η εξίσωση $(\lambda-1)x^2-\lambda x+2\lambda=0$, $\lambda\neq 1$. Α) Για ποια λ η εξίσωση έχει ρίζες στο R;

Β) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης για ποιες τιμές του λ είναι $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}<\frac{\lambda}{x_1}+\frac{\lambda}{x_2}$;

5 ΠΡΟΟΔΟΙ

Αριθμητική Πρόοδος

5.01 Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο όταν το ά-θροισμα των 20 πρώτων όρων της είναι 1030 και η διαφορά του τρίτου από τον δέκατο όρο είναι 35.

5.02 Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο στην οποία είναι $S_{20}=610$ και $S_{12}=222$.

5.03 Για ποια τιμή του ακεραίου x οι αριθμοί x^3-2x^2+x-1, $x^4+2x^3-x^2+3x+5$, x^2+2x+9 είναι διαδοχικοί αριθμ. προόδου;

5.04 Να βρείτε τρεις διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου αν έχουν άθροισμα 33 και γινόμενο 440.

5.05 Αν οι αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, δείξτε ότι οι $\alpha^2-\beta\gamma$, $\beta^2-\gamma\alpha$, $\gamma^2-\alpha\beta$ είναι επίσης διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος των διαφορών των δυο προόδων αυτών;

5.06 Αν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, δείξτε ότι είναι ανάλογα των αριθμών $3,\ 4,\ 5$.

5.07 Πόσους αριθμούς πρέπει να παρεμβάλλουμε μεταξύ του 5 και του 50 ώστε να αποτελούν όλοι μαζί διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και ο τελευταίος από τους παρεμβαλλόμενους όρους να είναι 3-πλάσιος από τον δεύτερό τους;

5.08 Αν $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_\nu$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}+\sqrt{\alpha_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{\alpha_{\nu-1}}+\sqrt{\alpha_\nu}}=\frac{\nu-1}{\sqrt{\alpha_\nu}+\sqrt{\alpha_1}}$$

5.09 Αν $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ είναι -μη μηδενικοί- διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να δείξετε ότι

$$\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_2\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_3\alpha_4}+\ldots+\frac{1}{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}=\frac{\nu-1}{\alpha_1\alpha_\nu}.$$

5.10 Σε μία αριθμητική πρόοδο ισχύει $\alpha_7+\alpha_{17}=30$ και $\alpha_9+\alpha_{20}=40$. Να βρείτε το άθροισμα των όρων της που βρίσκονται μεταξύ του α_8 και α_{25}.

5.11 Ο ν-οστός όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu=4\nu-5$, $\nu\in\mathbb{N}^*$. Να δειχθεί ότι η (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος. Να βρείτε το άθροισμα των όρων της που είναι μεταξύ των 17 και 99.

5.12 Να αποδείξετε ότι η ακολουθία για την οποία ισχύει ότι $S_\nu=3\nu^2+\nu$ είναι αριθμητική πρόοδος.

5.13 Δίνεται η αριθμητική πρόοδος 1,2,3,4,5,... και παίρνουμε ομάδες όρων ως εξής: $\{1\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5,6,7\}$, $\{4,5,6,7,8,9,10\}$ ... Να υπολογιστεί το άθροισμα των όρων της ν-οστής ομάδας.

5.14 Έχουμε ν κιβώτια μέσα στα οποία τοποθετούμε αριθμημένες μπάλες ως εξής: Στο πρώτο κιβώτιο τη μπάλα με τον αριθμό $\{1\}$ στο 2ο τις μπάλες $\{2,3\}$ στο 3ο τις $\{4,5,6\}$ στο τέταρτο τις $\{7,8,9,10\}$ κ.ο.κ.

Α. Πόσες μπάλες έχει το ν -οστό κιβώτιο;

Β. Να δειχτεί ότι στο ν -στό κιβώτιο η μπάλα με τον μικρότερο αριθμό είναι αυτή με τον αριθμό $\frac{\nu(\nu-1)}{2}+1$.

Γ. Σε ποιο κιβώτιο βρίσκεται η μπάλα με τον αριθμό 100;

Δ. Αν $\nu=50$, πόσες μπάλες έχουμε συνολικά;

Γεωμετρική Πρόοδος

5.15 Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε σε καθέναν από τους αριθμούς 2, 16, 58 για να γίνουν τρεις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου;

5.16 Να βρεθούν τρεις αριθμοί που αποτελούν αύξουσα γεωμετρική πρόοδο, αν το άθροισμά τους είναι 65 και η διαφορά των άκρων όρων τους είναι 40.

5.17 Να βρεθούν τέσσερις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν έχουν γινόμενο 16 και άθροισμα μεσαίων όρων 5.

5.18 Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο σε κάθε μια από τις περιπτώσεις:
Α) Αν $S_4 = 30$ και $\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 = 480$.
Β) Αν $S_3 = 26$ και $\alpha_4 - \alpha_1 = 52$.

5.19 Αν (α_ν), (β_ν) είναι δυο γεωμετρικές πρόοδοι και για κάθε $\nu \in N^*$ είναι $\beta_\nu \neq 0$, εξετάστε σε ποια περίπτωση σχηματίζεται γεωμετρική πρόοδος:
$2\alpha_\nu + 3$, $2\alpha_\nu + 3\beta_\nu$, $(\alpha_\nu)^2$, $\alpha_\nu \cdot \beta_\nu$

5.20 Α) Να αποδειχτεί ότι η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = 3 \cdot 2^\nu$ είναι γεωμετρική πρόοδος .

5.21 Σε μια γεωμετρική πρόοδο έχουμε $\alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_3$. Να βρεθεί ο λόγος της.

5.22 Αν $\alpha\beta$, β^2, γ^2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί β, γ, $2\beta - \alpha$ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

5.23 Α) Να δειχθεί ότι η ακολουθία για την οποία ισχύει ότι $S_\nu = 2\left(3^\nu - 1\right)$ είναι γεωμετρική πρόοδος.
Β) Πόσους όρους της πρέπει να πάρουμε, για να έχουμε άθροισμα 484;

5.24 Να αποδείξετε ότι ο Αριθμητικός μέσος δύο θετικών αριθμών είναι μεγαλύτερος ή ίσος του γεωμετρικού μέσου τους

5.25 Να βρείτε τρεις ακέραιους αριθμούς, για τους οποίους ισχύουν τα εξής:
Είναι διαδοχικοί γεωμετρικής προόδου, αν αυξηθεί ο δεύτερος κατά 8, η πρόοδος γίνεται αριθμητική και αν αυξηθεί και ο τρίτος κατά 64, γίνεται πάλι γεωμετρική.

5.26 Να βρείτε τρεις αριθμούς για τους οποίους ισχύουν τα εξής: είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, έχουν άθροισμα 15 και αν σε αυτούς προσθέσουμε τους αριθμούς $1, 4, 19$ αντίστοιχα θα γίνουν διαδοχικοί γεωμετρικής προόδου.

5.27 Να βρείτε τέσσερις ακέραιους αριθμούς για τους οποίους ισχύουν τα εξής:
α) οι τρεις πρώτοι είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου,
β) οι τρεις τελευταίοι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και
γ) το άθροισμα των άκρων όρων είναι 14 και των μεσαίων 12.

5.28 Να βρεθούν τρεις αριθμοί x, y, ω αν αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, έχουν άθροισμα 28 και αν ο μεσαίος αυξηθεί κατά 2 τότε οι αριθμοί που προκύπτουν είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

5.29 Αν $\alpha \in R - \{-1\}$, δίνεται η εξίσωση
$(\alpha+1)x^3 - (\alpha^2 + 5\alpha - 5)x^2 + (\alpha^2 + 5\alpha - 5)x - (\alpha + 1) = 0$.
Α) Δείξτε ότι για τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση έχει τρεις πραγματικές ρίζες αυτές αποτελούν γεωμετρική πρόοδο
Β) Αν είναι x_2 η ρίζα της εξίσωσης που δεν εξαρτάται από την παράμετρο α, βρείτε ε το α ώστε οι ρίζες x_1, x_2, x_3 να αποτελούν αριθμητική πρόοδο.
Γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές της παραμέτρου α που βρήκατε στην Β) ερώτηση η εξίσωση έχει τρεις ίσες ρίζες.

6 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Η έννοια της Συνάρτησης

6.01 Απλοποιείστε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2} & \text{αν} \quad x\neq 2\\ 3 & \text{αν} \quad x=2\end{cases}$ και να βρείτε την τιμή της παράστασης: $f(-1)\left[f(0)+2f(2)\right]$

6.02 Έστω οι συναρτήσεις f και g με $f(x)=\begin{cases}x^2\ , & x<1\\ 2x\ , & x\geq 1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-x+1 & x<0\\ \sqrt{x} & x\geq 0\end{cases}$ Βρείτε τα $f(-1),\ f(0),\ f(\sqrt{3}),\ f(3/4),\ g(0)$.

6.03 Αν είναι $f(x)=2x-6$, να βρεθούν οι πραγματικοί α και β ώστε να ισχύει: $f(\alpha)=8$ και $f(8)=\beta$.

6.04 Για την συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3-2\beta x$ ισχύουν $f(1)=-2$ και $f(2)=20$.Βρείτε το $f(3)$

6.05 Αν f(x)=$\begin{cases}\alpha x^2+\beta x & x>1\\ 2x-\beta & x\leq 1\end{cases}$ να υπολογίσετε τα α, β ώστε να ισχύει f(3)=1 και f(1)=3.

6.06 Έστω ότι $f(x)=\begin{cases}\alpha x-4\ , x\leq 1\\ \alpha x-2\beta\ , x\geq 1\end{cases}$.
Να βρεθούν τα α,β ώστε f(-1)=f(2).

6.07 Αν f(x)=$\begin{cases}2x & |x|\leq 3\\ 5x+1 & x>5\end{cases}$ να βρείτε την τιμή του πραγματικού λ ώστε να ισχύει $-2f(-1)+\lambda f(10)=157$.

6.08 Αν $f(x)=3x$, να δείξετε ότι:
Α) $f(\alpha+1)+f(\alpha+2)+f(\alpha+3)=3f(\alpha)+18$.
Β) $f(\kappa\alpha+\lambda\beta+\mu\gamma)=\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)+\mu f(\gamma)$.

6.09 Αν $f(x)=2x-1$ για κάθε $x\in R$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
Α) $f(x+3)$, Β) $f(1-x^2)$, Γ) $f(2x+f(0))$, Δ) $f(x+f(x))$.

6.10 Αν $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x^2}$ τότε να δείξετε ότι ισχύει $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$.

6.11 Αν $f(x)=x^2$, $x\in R$,δείξτε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in R$ ισχύει $f(\alpha)+f(\beta)\geq 2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

6.12 Αν $f(x)=x^2-x$ να λύσετε την εξίσωση $f(x+1)-2f(x)+3f(0)=f(1)$.

Πεδίο Ορισμού

6.13 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των:
Α) $f(x)=\dfrac{2x}{9-x^2}$ Β) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}}{x-3}$
Γ) $h(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x^2-4x+3}$ Δ) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$

6.14 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των:
$f(x)=\dfrac{3}{|x-2|-1}$ $g(x)=\dfrac{1}{|x|+x^2}$
$k(x)=\sqrt{2-|x+3|}$ $m(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$

6.15 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των:
Α) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}$ Β) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}}{|x|-2}$
Γ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}}{x^3-x}$ Δ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{|x|+4}}{|x|-2}$

6.16 Για ποιες τιμές του $\alpha\in R$ η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2+\alpha}$ ορίζεται στο R;

Γεωμετρικές–Απόσταση Σημείων

6.17 Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(1,2)$, $B(0,1)$, $\Gamma(2,1)$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

6.18 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x$. Να βρεθεί η απόσταση των σημείων $A(1,f(1))$ και $B(-1,f(-1))$.

6.19 Να βρεθεί σημείο Γ του άξονα xx' τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΑΓ, ΒΓ, όπου $A(1,1)$, $B(4,2)$.

6.20 Δίνονται τα σημεία $A(-1,-1)$, $B(2,4)$.
Να βρείτε σημείο Μ της ευθείας y=x ώστε το τρίγωνο ΑΜΒ να είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΜΑ και ΜΒ.

Συμμετρικά Σημεία

6.21 Δίνονται τα σημεία $A(3,4\alpha+2)$, $B(3,-2)$, $\Gamma(4,2\beta-6)$, $\Delta(3\gamma+1,4)$, $E(1,1)$, και $Z(2\delta,-1)$.
Να βρείτε τους πραγματικούς α, β, γ, δ αν γνωρίζετε ότι: Τα Α και Β είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$, τα Ε και Ζ είναι συμμετρικά ως προς το $(0,0)$, το Γ
βρίσκεται πάνω στον $x'x$ και το σημείο Δ
βρίσκεται στον $y'y$.

6.22 Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε τα σημεία:
Α) $A(|\lambda|,\lambda^2+2)$, $B(-3,4-5\lambda)$ να είναι συμμετρικά ως προς το σημείο $O(0,0)$.
Β) $A(\lambda^2,4\lambda)$, $B(\lambda^2+3,\lambda)$ να είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y=x$.
Γ) $A(-4,3)$, $B(-4,|\lambda^2-1|)$ να είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.

Γραφική Παράσταση

6.23 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\sqrt{x-3}$. Να βρεθεί το $\alpha\in R$ ώστε η Cf να διέρχεται από το σημείο $M(4,2)$.

6.24 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $y'y$, $x'x$ και την ευθεία $y=-1$.

6.25 Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=(3\mu-1)x+2$ με μ<0. Να βρεθεί το μ ώστε το Cf να τέμνει τους άξονες σε σημεία που απέχουν απόσταση ίση με $\sqrt{5}$.

6.26 Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:
Α) $f(x)=x-1$ και $g(x)=-x+1$.
Β) $f(x)=x^3-x$ και $g(x)=x^2-1$.

6.27 Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: f(x)=x+2 , g(x)=-x+3, h(x)=2x+1 στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων και να υπολογίσετε το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από αυτές.

6.28 Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)= $\begin{cases} x+4 & ,x<-1 \\ 0 & ,-1\le x\le 2 \\ -x+3 & ,x>2 \end{cases}$.

6.29 Εξηγήστε γιατί ο κύκλος δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

Ευθεία

6.30 Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η ευθεία y= $\sqrt{3}$ x+3 με τον άξονα xx΄.

6.31 Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y=\frac{\lambda-2}{\lambda}x+\frac{3(2-\lambda)}{\lambda}$. Να προσδιοριστεί ο λ ώστε η ε να είναι:
Α) παράλληλη στην ευθεία y=-2 ,
Β) παράλληλη στην ευθεία $x+y=5$,
Γ) κάθετη στην ευθεία 2y=-8x+1 ,
Δ) να διέρχεται από το σημείο (3,-1).

6.32 Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: y=(\lambda-1)x+\lambda^2$ και $\varepsilon_2: y=2\lambda x$ είναι παράλληλες να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_3: y=\frac{\lambda^2+3}{4}x-1$, $\varepsilon_4: y=\lambda(1+x)+8$ είναι κάθετες.

Άρτιες – Περιττές

6.33 Σε κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις εξετάστε ποια είναι άρτια και ποια είναι περιττή:
Α) f(x)=$|x+1|+|x-1|+2$,
Β) f: (-1,2]$\to$R με f(x)= x^3+x .

6.34 Α) Έστω f περιττή συνάρτηση.
Να αποδείξετε ότι αν $0\in D_f$ τότε $f(0)=0$.
Β) Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή κάθε μια από τις συναρτήσεις:
Α) $f(x)=\begin{cases}1-x & x\geq 0\\ 1+x & x<0\end{cases}$
Β) $f(x)=\begin{cases}-3x+4 & x<0\\ -3x-4 & x\geq 0\end{cases}$

6.35 Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f(2)=4$. Να βρεθεί το $f(-2)$ αν γνωρίζετε ότι:
Α) Η f είναι άρτια.
Β) Η f είναι περιττή.

6.36 Δίνεται συνάρτηση $f: R\to R$ με την ιδιότητα για κάθε $x,y\in R$ να ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)$.
Δείξτε ότι $f(0)=0$ και ότι η f είναι περιττή.

Μονοτονία

6.37 Να βρείτε τη μονοτονία των συναρτήσεων:
Α) $f(x)=-2x+3$ και $f(x)=2-\sqrt{3x-1}$.
Β) $f(x)=-4x^3+1$ και $f(x)=\frac{x}{x-1}$ στο $(-\infty,1)$.

6.38 Δίνεται η συνάρτηση f(x)= $f(x)=(|\lambda|-3)x+10$. Να προσδιοριστεί ο λ ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα.

6.39 Η συνάρτηση f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο R με f(x)>0 για κάθε x$\in$R. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

6.01 Να αποδείξετε ότι:
Α) μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση δεν μπορεί να είναι άρτια
Β) η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης τέμνει τον x΄x σε ένα το πολύ σημείο.

6.02 Να αποδειχτεί ότι
Α) αν μια συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα σε διάστημα Δ τότε η $-f$ είναι γνήσια αύξουσα στο Δ
Β) αν οι συναρτήσεις f,g είναι γν. φθίνουσες σε ένα διάστημα Δ τότε η $f+g$ είναι γν φθίνουσα στο Δ
Γ) αν οι συναρτήσεις f , g με $D_f=D_g=\Delta$ παίρνουν θετικές τιμές στο Δ και είναι γνησίως αύξουσες τότε η $\frac{1}{f}+\frac{1}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

6.03 Έστω συνάρτηση f , ορισμένη στο R, που είναι γνήσια μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $(1,3)$ και $(2,0)$
Α) Να αποδείξετε ότι είναι γνήσια φθίνουσα
Β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>3$
Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<0$
Δ) Να βρείτε τα σημεία όπου η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x′x

6.04 Α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=x^5+x^3+x$, $x\in R$ είναι γνήσια αύξουσα.

Β) Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο R ώστε να ισχύει $f^5(x)+f^3(x)+f(x)=x$ για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $h(x)=3$

Δ) Να υπολογίσετε το $f(3)$

6.05 Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο R με σύνολο τιμών το R ώστε να ισχύει $f(x)+f^3(x)=x+1$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

6.06 Αν $f(x)=x^7+x-1$, να λύσετε τις ανισώσεις $f(x^2+x)<f(2)$ και $f(x^2+1)<f(2x-2)$

6.07 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $2-x-x^{13}>0$

Β) $x^{15}+x^3+x-3>0$

6.08 Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο R. Να λύσετε την εξίσωση $f(\sqrt{x})+f(x^2)=f(x)+f(x^3)$

Ακρότατα

6.09 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

Α) $f(x)=-2(x+1)^2+3$,

Β) $f(x)=1+\sqrt{2x+3}$,

Γ) $f(x)=x^4+x^2-1$

6.10 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

Α) $f(x)=-|x-5|+3$,

Β) $f(x)=1-(2x-4)^4$,

Γ) $f(x)=6-\sqrt{x-2}$,

Δ) $f(x)=-3x+4$ αν $x\in[-1,2]$.

6.11 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in R$. Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι το 2

6.12 Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2+\dfrac{4}{x^2}$, $x\in R$. Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι το 4

6.13 Να βρεθούν τα ακρότατα κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις

Α) $f(x)=1-\sqrt{2x+3}$

Β) $f(x)=4-|x-2|$

Γ) $f:[-1,4)\to R$ με $f(x)=2x-1$

6.14 Έστω η $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$, $x\ge 0$. Να αποδείξετε ότι: Α) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$, $x\ge 0$

Β) $f(x)\le 1$, $x\ge 0$

Γ) η μέγιστη τιμή της f είναι το 1

6.15 Α. Να δείξετε ότι $x+\dfrac{1}{x}\ge 2$ για κάθε $x>0$.

Β. Έστω $f(x)=\left(9+\sqrt{80}\right)^x+\left(9-\sqrt{80}\right)^x$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια

β. Να δείξετε ότι $f(x)\ge 2$ για κάθε $x\in R$ και ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο.

Γενικές Ασκήσεις

6.16 Για την ευθεία ε: $y=\dfrac{\lambda+4}{\lambda\text{-}1}x+5$, να βρείτε:

Α) Τις τιμές του λ ώστε η ευθεία ε να είναι παράλληλη προς την ευθεία δ: $y=6x+1$.

Β) Τις τιμές του λ ώστε το σημείο $A(2,-3)$ να ανήκει στην γραφική παράσταση της ευθείας ε.

Γ) Τις τιμές του λ ώστε η ευθεία ε να είναι παράλληλη προς τον άξονα xx'.

Δ) Τα σημεία τομής της με τους άξονες.

6.17 Αν $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x<1 \\ 2x-1 & x\geq 1 \end{cases}$ τότε:

Α) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+2f(2)=0$.

Β) Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή.

Γ) Να μελετήσετε τη μονοτονία της στο $[1,+\infty)$

Δ) Να γίνει η γραφική της παράσταση.

6.18 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\lambda x+2$, $\lambda<0$.

Να βρείτε:

Α) Τα σημεία τομής της γραφικής της παρά στασης με τους άξονες.

Β) Το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση και τους άξονες.

Γ) Την τιμή του λ ώστε το εμβαδόν του παραπάνω τριγώνου να είναι 2 τ.μ.

6.19 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\lambda x+2$, $\lambda<0$. Να βρείτε:

Α) Τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες.

Β) Το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση και τους άξονες.

Γ) Την τιμή του λ ώστε το εμβαδόν του παραπάνω τριγώνου να είναι 2 τετραγωνικές μονάδες.

6.20 Να επιλυθούν γραφικά οι ανισώσεις: $2x-4>0$, $-2x+4>0$, $|x|<2$ και $|x|>2$.

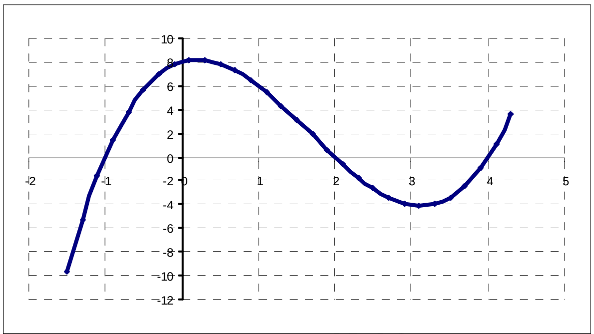
6.21 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το R.

Α) Να βρείτε το $f(0)$ και $f(1)$.

Β) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=0$.

Γ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x)\leq 0$.

Δ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x)>0$.



6.22 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x-2|+1$.

Α) Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή.

Β) Να βρείτε το ακρότατο της f.

Γ) Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία.

Δ) Να γραφτεί ο τύπος της χωρίς την απόλυτη τιμή.

Ε) Να γίνει η γραφική της παράσταση.

ΣΤ) Να βρείτε –αν υπάρχουν- τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.

Ζ) Να βρείτε τα σημεία τομής της συνάρτησης με την ευθεία $y=3$.

Η) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης και την ευθεία $y=3$

Θ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές.

6.23 Να προσδιοριστεί ο κ ώστε όταν η συνάρτηση $f(x)=(3\kappa+1)x^2$ παρουσιάζει ελάχιστο, τότε και η συνάρτηση $g(x)=(3-|\kappa+2|)x^2$ να παρουσιάζει για την ίδια τιμή του x μέγιστο.

6.24 Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\begin{cases} x^2 & , x\geq 0 \\ -1-2x & , x<0 \end{cases}$ και $g(x)=x+2$. Να βρεθούν τα σημεία τομής των Cf , Cg καθώς και η απόστασή τους.

6.25 Έστω μια συνάρτηση y=g(x), της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρώντας την γραφική παράσταση να απαντήσετε στα ερωτήματα

Α) Ποιό είναι το πεδίο ορισμού της g;

Β) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της g.

Γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ,η g παρουσιάζει ακρότατα, και ποια είναι αυτά.

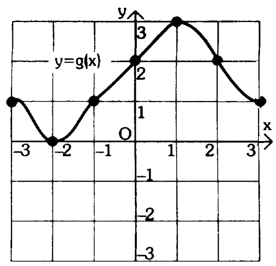
Δ) Να ελέγξετε αν η g άρτια ή περιττή.

Ε) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $g(2)-\left(g(-2)-g(-3)\right)$.

Στ) Είναι σωστό ότι g(0)>g(3); (γιατί;)

Ζ) Για ποιες τιμές του x ισχύει ότι g(x)=1;

Η) Για ποιες τιμές του x ισχύει ότι g(x)>1;



7 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

7.01 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{|x|-1}$.

Α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

Β) Να αποδειχτεί ότι είναι άρτια.

Γ) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

Δ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$.

7.02 Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\kappa\sqrt{x+1}\ ,\ x\geq -1\ ,\ \kappa\in R$.

Α) Να βρεθεί η τιμή του κ ώστε το σημείο Α(3,8) να ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

Για την τιμή του κ που βρήκατε στο Α ερώτημα:

Β.1) Να βρεθεί η απόσταση των σημείων Α(3 , 8) και Β(8 , f(8)).

Β.2) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

7.03 Αν $f(x)=\begin{cases} 2x-3\ ,\ x<2 \\ -2x^2\ ,x\geq 2 \end{cases}$, να λυθεί η ανίσωση: $\left|x-\dfrac{f(2)}{4}\right|<3-f(1)$.

7.04 Δίνονται οι ευθείες: (ε_1): $y=(\lambda-4)x+11$ και (ε_2): $y=(11-2\lambda)x+2$ με $\lambda\in R$.

Α) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε οι (ε_1) και (ε_2) να είναι παράλληλες.

Β) Για $\lambda=5$:

α) Να γράψετε τη μορφή που παίρνουν οι (ε_1) και (ε_2).

β) Αν Α και Β είναι τα σημείο στα οποία η (ε_1) τέμνει τον $x'x$ και η (ε_2) τον $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την απόσταση (AB).

7.05 Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x)=\begin{cases} 1-x & \text{αν} \quad x<0 \\ x+6\lambda-\lambda^2 & \text{αν} \quad x\geq 0 \end{cases} \quad \text{με } \lambda\in R.$$

Α) Να βρείτε το λ ώστε $f(0)=f(-8)$.

Β) Αν $\lambda=3$ τότε:

α) Να βρείτε την απόσταση των σημείων $A(3,f(3))$ και $B(-5,f(-5))$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\sqrt{\left(\sqrt{f(1)}-4\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{f(-9)}+4\right)^2}$.

7.06 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x-1|-2}}{x-4}$.

Α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

Β. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες και σε ποια σημεία ;

Γ. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $\left[f(-1)-3f(7)\right]\left[2f(12)-\dfrac{9}{8}f(-5)\right]$.

7.07 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-\frac{1}{x}}{x^2-1}$

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να απλοποιήσετε τον τύπο της.

Β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $|f(x)|>1$.

7.08 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-|x|}}{x^3-x}$.

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

7.09 Έστω τα σημεία $A(\kappa,2)$ και $B(1,2\kappa)$, όπου $\kappa\in R$.

Α) Να αποδείξετε ότι $(AB)=\sqrt{5}|\kappa-1|$.

Β) Αν $(AB)\leq\sqrt{5}$ να βρείτε τις τιμές του κ .

Γ) Αν $\kappa=0$ να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y=-2x+2$ διέρχεται από τα Α και Β.

7.10 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{4-|x|}}$

Α) Να αποδείξετε ότι είναι περιττή.

Β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\sqrt{(f(2)-1)^2}+\sqrt{(f(-2)-1)^2}$.

7.11 Δίνεται η συνάρτηση :

$f(x)=\begin{cases} 1-x & \text{αν } x<0 \\ x+6\lambda-\lambda^2 & \text{αν } x\geq 0 \end{cases}$ με $\lambda\in R$

Α) Να βρεθεί ο λ ώστε $f(0)=f(-8)$

Β) Αν $\lambda=3$ τότε:

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\sqrt{3\sqrt[3]{f(18)}}$.

β) Να βρείτε την απόσταση των σημείων $(-3,f(-3))$ και $(0,f(0))$.

7.12 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{10x^2-2|x|}{2-10|x|}$

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Af της f ,

Β) Να δείξετε ότι f(x) = –|x|, για κάθε x∈Af

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $\left|\dfrac{2x+9}{x+2}\right|=-f(x)$.

7.13 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|-3}}{x^2-9}$

Α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

Β) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

Γ) Υπολογίστε την τιμή της παράστασης $f(2008)-f(-2008)$.

7.14 Για κάθε $\lambda\in R$, δίνονται οι ευθείες (ε_1): $y=(\lambda^2+6)x+5$ και (ε_2): $y=5\lambda x+8$.

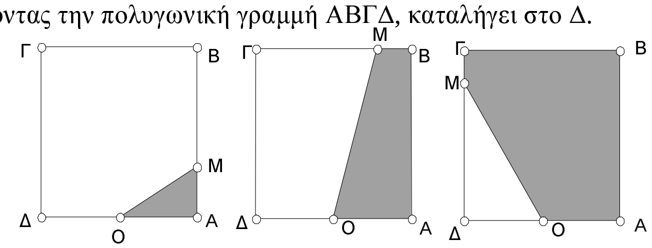
Α) Να βρείτε –αν υπάρχει- τιμή του λ ώστε η (ε_1) να διέρχεται από το σημείο $(2,4)$.

Β) Να βρείτε το λ ώστε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) να είναι παράλληλες.

Γ) Αν $\lambda=3$ να βρείτε τα σημεία στα οποία η (ε_2) τέμνει τους άξονες.

7.15 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Δίνεται ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 20 cm και το μέσον Ο της ΑΔ. Ένα κινητό σημείο Μ ξεκινά από το Α και, διαγράφοντας την πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔ, καταλήγει στο Δ.



Αν με x συμβολίσουμε το μήκος της διαδρομής που έκανε το κινητό Μ και με $f(x)$ το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου,

Α) Να βρείτε τον τύπο της f και να την παραστήσετε γραφικά

Β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ισχύει $f(x)=120$ cm2 .

8 ΓΕΝΙΚΕΣ - ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

8.01 Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2-(\lambda-1)x+2\lambda-2=0$ (1), $\lambda\in R$.

Α) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε να έχει 2 πραγματικές και ίσες ρίζες.

Β) Αν $4\lambda=1$ και x_1,x_2 είναι οι ρίζες της (1), να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A=\frac{6}{x_1}+\frac{6}{x_2}-x_1^2x_2-x_1x_2^2$.

8.02 Δίδονται τα τριώνυμα $P(x)=-x^2+4x-4$ $\quad Q(x)=x^2+1$, $K(x)=x^2-5x+6$.

Α) Να βρεθεί το πρόσημο σε κάθε ένα από τα παραπάνω τριώνυμα για κάθε $x\in R$.

Β) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{P(x)\cdot Q(x)}{K(x)}\le 0$.

8.03 Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{\alpha}\,x^2+\left(\sqrt{\alpha}+\beta\right)x+\beta=0$ με $\alpha>0$, $\beta\in R$.

Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες για όλες τις τιμές των α,β .

Β) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης να αποδείξετε ότι $x_1+x_2+x_1x_2=-1$.

Γ) Αν μία ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός $-\sqrt{\alpha}$,με $\alpha\neq 1$ να αποδείξετε ότι $\beta=\alpha$.

8.04 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^2-(\lambda+1)x+\left(\kappa^2-2\kappa\right)$, $x\in R$ και $\kappa,\ \lambda\in R$. Γνωρίζουμε ότι για $x=1$ η f έχει ελάχιστο το -3 .

Α) Να βρείτε τα κ και λ .

Β) Αν $\kappa=1$ και $\lambda=3$ τότε:

α) Να λυθεί η εξίσωση: $\left|f(x)-2x^2\right|=2x^2-f(x)$.

β) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g με $g(x)=\sqrt{x^2-f(x)+4}$.

8.05 Οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης 2ου βαθμού με $S=\rho_1+\rho_2$, $P=\rho_1\rho_2$ τέτοια ώστε $P+2S=2$ και $P-2S=-10$.

Α) Να δείξετε ότι $S=3$ και $P=-4$.

Β) Να βρείτε την εξίσωση $x^2+\kappa x+\lambda=0$ που έχει ρίζες τους ρ_1+2 και ρ_2+2.

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $x^2+\kappa x+\lambda\le 0$.

8.06 Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2+(\lambda-1)x+\lambda-1=0$, $\lambda\neq 0$.

Α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και ίσες.

Β) Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο (Α) ερώτημα, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $y=(2\lambda+1)x+2$ και $y=3\lambda(\lambda x-1)$ είναι παράλληλες.

8.07 Έστω η εξίσωση $(\lambda-2)x^2-2\lambda x+3\lambda=0$ με $\lambda\neq 2$.

Α) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 1;

Β) Για ποιες τιμές του λ η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες;

Γ) Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι δύο οι ρίζες της παρα πάνω εξίσωσης να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε για αυτές να ισχύει η ανίσωση: $(\rho_1+\rho_2)>2\rho_1\rho_2$.

8.08 Έστω $f(x)=(\lambda+2)x^2-2\lambda x+3\lambda$, όπου $\lambda\neq -2$.

Α) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η ανίσωση $f(x)<0$ αληθεύει για όλες τις πραγματικές τιμές του x.

Β) Αν $\lambda=-4$ να λύσετε την εξίσωση $|f(x)|=-8x+18$.

8.09 Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2-(\lambda\text{-}1)x\text{-}\lambda$.

Α) Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η f να έχει δύο ρίζες άνισες.

Β) Αν x1, x2 ρίζες της συνάρτησης f να βρεθεί η τιμή του $\lambda\in R$ ώστε: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1$.

Γ) Να λυθεί η ανίσωση $d(x,\lambda)<5\text{-}\lambda$ όταν η f έχει μία διπλή ρίζα.

8.10 Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in R$ για τις οποίες η ανίσωση $2\lambda x^2+(5\lambda+2)x+4\lambda+1>0$, $\lambda\neq 0$, αληθεύει για όλες τις πραγματικές τιμές του x.

8.11 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\lambda-1)x2 - \lambda 2x + 3$ με $\lambda\in IR_+$, της οποίας η γραφική παράσταση είναι μια παραβολή που περνά από το σημείο Α(1,0).

Α) Να βρείτε το λ.

Β) Για την τιμή λ=2 να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ) Να σχηματίσετε την εξίσωση που έχει ρίζες τις $\rho 1=\frac{1}{x_1}$, $\rho 2=\frac{1}{x_2}$, όπου x1, x2 οι ρίζες της f(x)=0.

8.12 Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\sqrt{\frac{x-6}{x^2+x-6}}$.

Α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της .

Β) Να βρεθούν τα σημεία τομής Α , Β της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Γ) Να υπολογίσετε την απόσταση ΑΒ .

8.13 Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=(\lambda-2)x^2-2|\lambda|x+\lambda$ με $\lambda\in R-\{2\}$.

Α) Να βρείτε το λ, ώστε το τριώνυμο $f(x)$ να έχει ελάχιστο στο 2.

Β) Αν $\lambda=4$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξί σωσης $f(x)=0$, να λύσετε την ανίσωση $\frac{f(x)+2}{-8x}\geq x_1\cdot x_2$.

8.14 Δίνεται η συνάρτηση f(x)=κx2-x+κ , όπου $\kappa\in R$.

Α) Αν $\kappa\neq 0$,για ποιες τιμές του κ, η συνάρτηση f γράφεται σαν τέλειο τετράγωνο ;

Β) Για κ=0 να λυθεί η ανίσωση $f(x)>-\frac{100}{x}$.

Γ) α. Βρείτε την τιμή $\kappa\in R$ ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο Μ(1,3).
β. Για την τιμή του κ που βρήκατε στο ερώτημα (α) να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

8.15 Δίνονται οι Α(x) = x2– 4 , Β(x) = 2x2+3x–2 .

Α) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις Α(x) και Β(x).

Β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να απλοποιήσετε την παράσταση $f(x)=\frac{(x-2)B(x)}{A(x)}$

Γ) Να λύσετε την ανίσωση f(x) ≥ 0.

8.16 Έστω η εξίσωση $x^2+\lambda x+\lambda\text{-}1=0$ με $\lambda \neq 2$.

Α) Να αποδείξετε ότι έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες x_1, x_2.

Β) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις x_1+x_2 και $x_1 \cdot x_2$.

Γ) Να βρείτε το λ ώστε: $(x_1+x_2)^2=5+2\cdot x_1x_2$

8.17 Δίνεται η εξίσωση: x2 – (λ – 3)x + 2 λ – 4 = 0

Α) Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της συναρτήσει του λ.

Β) Να βρείτε το λ, ώστε να ισχύει $\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{1}{\lambda}$, όπου ρ1 , ρ2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης.

8.18 Δίνεται η εξίσωση $x^2+x+\lambda\text{-}1=0$ (1) με ρίζες x_1, x_2.

Α) Να βρείτε για ποια τιμή του λ είναι: $x_1\cdot x_2+3\cdot(x_1+x_2)+5=0$.

Β) Για την τιμή αυτή του λ να λυθεί η (1).

Γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε να σχηματίσετε άλλη εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες $\rho_1={x_1}^2$, $\rho_2={x_2}^2$.

8.19 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{αν } |x|<1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{αν } |x|\geq 1 \end{cases}$

Α) Να βρείτε τα $f(3)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ και $f(-2)$.

Β) Να υπολογίσετε την απόσταση των σημεί ων $(-1,f(-1))$ και $(-2,f(-2))$.

Γ) Να βρείτε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $f(-1)$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

8.20 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^2-(\lambda+1)x+(\kappa^2-2\kappa)$ με $x\in R$ και $\kappa,\ \lambda\in R$ παράμετροι. Γνωρίζουμε ότι για $x=1$ η f έχει ελάχιστο το -3.

Α) Να βρεθούν τα κ και λ.

Β) Να λυθεί η εξίσωση $|f(x)+1|=|4x-2|$.

Γ) Να βρεθεί για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{x^2-f(x)+4}$.

Δ) Εάν α, β είναι οι τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της g τέμνει τον $x'x$ με $|\alpha|<|\beta|$, θεωρούμε τα σημεία $M(1,\ \beta)$, $N(10,\ 2\alpha)$ Δείξτε ότι το τρίγωνο ΟΜΝ είναι ορθογώνιο.

Ε) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{1}{\left[f(x)+3\right]^2}\geq\frac{1}{4}$.

8.21 Έστω η εξίσωση: $(\lambda\text{-}2)x^2+2\lambda x+\lambda+2=0$ με $\lambda\in R-\{2\}$.

Α) Δείξτε ότι για κάθε $\lambda\in R-\{2\}$ η παραπά νω εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις.

Β) Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε $x_1\cdot x_2<3$ όπου x_1, x_2 οι άνισες ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.

Γ) Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε το τριώνυμο $f(x)=(\lambda\text{-}2)x^2+2\lambda x+\lambda+2$, με $\lambda\in R-\{2\}$, να έχει ελάχιστο το 2.

8.22 Δίνεται η παράσταση $A=\frac{3x^2-3x+2}{2x^2+x-3}$

Α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α;

Β) Να απλοποιηθεί η παράσταση Α.

Γ) Να λυθεί η ανίσωση $A\leq 1$.

8.23 Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\alpha+1)x-\alpha^2=0$, $\alpha\in R$ (1).

Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε τιμή του α.

Β) Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

α) να βρείτε τις τιμές του α ώστε, $|x_1+x_2|\leq 2005$.

β) για $\alpha=2$, να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες x_1+2 και x_2+2.

8.24 Έστω η εξίσωση: $(8\lambda\text{-}6)x^2-\sqrt{8}\lambda x+1=0$ (1).

Α) Για ποια τιμή του λ η (1) είναι δευτέρου βαθμού;

Β) Για ποιες τιμές του λ η (1) έχει μία διπλή ρίζα;

8.25 Έστω οι συναρτήσεις: $f(x)=(\lambda+1)x^2-4\lambda x+3$ και $g(x)=x^2+4\mu x+\mu$ με $\mu\neq 0$.

Α) Να βρεθεί η τιμή του $\lambda\in R$ ώστε η γραφι- κή παράσταση της f να είναι ευθεία.

Β) Να βρεθεί η τιμή του $\mu\in R$ ώστε η γραφική παράσταση της g να εφάπτεται στον xx'.

Γ) Για τις τιμές των λ, μ που βρήκατε να βρεί- τε τα κοινά σημεία των C_f, C_g.

Δ) Να βρεθούν τα σημεία που τέμνει η Cf τους άξονες x x΄και y y΄ και να βρεθεί το μήκος της υποτείνουσας του ορθογωνίου τριγώ- νου που σχηματίζεται.

8.26 Έστω η εξίσωση $x^2-3x-\mu^2=0, \mu\in R$ (1).

Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε $\mu\in R$.

Β) Αν ρ_1,ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του μ:

α) η παράσταση $A=\rho_1\mu+\rho_2(\mu-\rho_1)$ παίρνει το πολύ την τιμή -2.

β) οι ευθείες $\varepsilon_1: y=\rho_1^2x+2006$ και $\varepsilon_2: y=(27-\rho_2^2)x-2007$ είναι παράλληλες.

8.27 Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $\varepsilon: \alpha x+y=4$ η οποία διέρχεται από το σημείο $M(-1,\ 6)$.

Α) Να βρεθεί η τιμή του α.

Β) Να βρεθούν τα κοινά σημεία της ευθείας ε με τους άξονες.

Γ) Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ε.

Δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας ε με την παραβολή $y=x^2-\frac{13}{4}x+\frac{17}{4}$.

8.28 Δίνεται ο πραγματικός αριθμός λ και η εξίσωση $x^2+(1-\lambda)x+1=0$, η οποία έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις x_1 και x_2.

Α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία παίρνει τιμές ο λ.

Β) Να λύσετε την ανίσωση: $(x_1^2+x_2^2+1)(x_1+x_2-2x_1\cdot x_2)<0$, ως προς λ.

8.29 Δίνονται τα τριώνυμα: $P(x)=x^2-5x+4$, $Q(x)=9-x^2$ και $K(x)=x^2+x+1$.

Α) Να λύσετε κάθε μια από τις ανισώσεις: $P(x)\geq 0$, $Q(x)\geq 0$ και $K(x)\leq 0$.

Β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{P(x)}+\dfrac{K(-1)}{\sqrt{Q(x)}}$.

8.30 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{|x|-2}$.

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Β) Να εξετάσετε αν έχει, άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, ή κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

Γ) Να εξετάσετε αν η ευθεία $y=x-\sqrt{3}+1$ διέρχεται από το σημείο $(1,f(1))$.

8.31 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$.

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να απλοποιήσετε τον τύπο της.

Β) Να λύσετε την εξίσωση $|f(x)|=2$.

Γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $0\leq f(x)\leq 2$.

8.32 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|-x^2+x-2|-4}{x^2-6x+8}$.

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Af της f.

Β) Να αποδείξετε ότι: $-x^2+x-2<0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Γ) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f απλοποιείται στη μορφή $f(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$, $x\in A$.

Δ) Να λύσετε την ανίσωση $x\cdot f(x)>-\dfrac{f(5)}{2}$