Η γωνία - Ο κύκλος

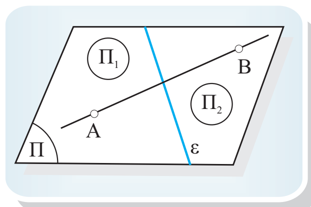
Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ημιεπίπεδο

Κάθε ευθεία ε επιπέδου Π χωρίζει τα σημεία του επιπέδου που δεν ανήκουν στην ε σε δύο σημειοσύνολα $Π_1$, $Π_2$ τα οποία ονομάζονται ***ημιεπίπεδα*** με την ιδιότητα:

Αν Α σημείο του $Π_1$ και Β σημείο του $Π_2$ τότε η ευθεία ε τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ,ενώ αν Α και Β σημεία του ίδιου ημιεπιπέδου η ευθεία ε και το ΑΒ δεν τέμνονται.

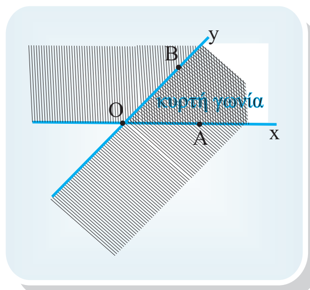
Το ημιεπίπεδο $Π_1$ το συμβολίζουμε (ε,Α) και το $Π_2$ αντίστοιχα (ε,Β).



Η γωνία

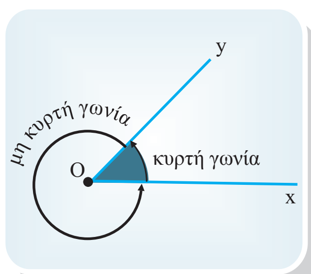
Θεωρούμε δύο ημιευθείες Οx και Οy και τα σημεία Α και Β αυτών.

Κυρτή γωνία ή ***γωνία*** ονομάζεται το μέρος του επιπέδου που ορίζεται από τα κοινά σημεία των ημιεπιπέδων (Οx,Β) και (Οy,Α).Το σημείο Ο λέγεται ***κορυφή*** της γωνίας.



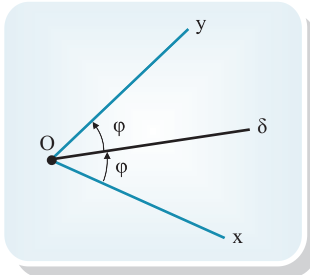
Συμβολίζουμε με $x\hat{O}y$ ή $y\hat{O}x$, ή $A\hat{O}B$ ή $B\hat{O}A$.Τα σημεία του επιπέδου που δεν ανήκουν στις πλευρές είναι τα εσωτερικά σημεία της γωνίας.

Τα σημεία του επιπέδου που δεν ανήκουν στην κυρτή γωνία μαζί με τα σημεία των ημιευθειών Οx και Οy λέγεται ***μή κυρτή γωνία***.



Σύγκριση γωνιών

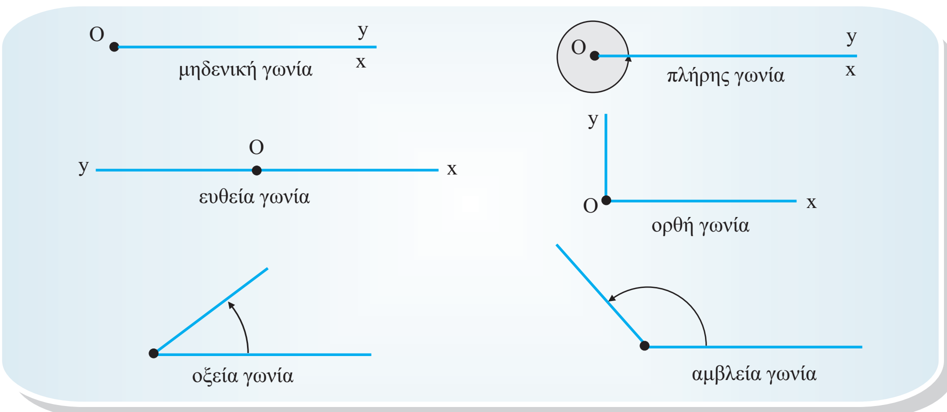
Για να συγκρίνουμε δυο γωνίες τις μετατοπίζουμε κατάλληλα ώστε να συμπέσουν οι κορυφές τους και μια πλευρά τους. Αν και οι άλλες πλευρές συμπίπτουν τότε οι γωνίες είναι ίσες, διαφορετικά η γωνία της οποίας η πλευρά βρίσκεται στο εσωτερικό της άλλης γωνίας είναι η μικρότερη.



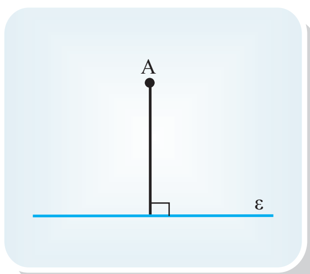
Διχοτόμος γωνίας είναι η ημιευθεία που βρίσκεται στο εσωτερικό μιας γωνίας και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.
Κάθε γωνία έχει μία μόνο διχοτόμο.

Είδη γωνιών

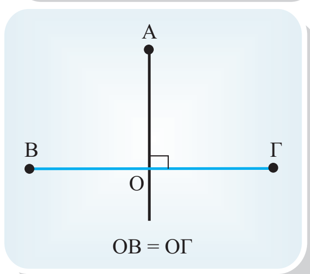
• ***Μηδενική γωνία*** λέγεται η κυρτή γωνία της οποίας οι πλευρές συμπίπτουν.
• ***Πλήρης γωνία*** είναι η μη κυρτή γωνία η αντίστοιχη της μηδενικής.
• ***Ευθεία γωνία*** λέγεται η γωνία της οποίας οι πλευρές είναι αντικείμενες ημιευθείες.
• ***Ορθή γωνία*** είναι μία από τις δύο ίσες γωνίες που σχηματίζει η διχοτόμος της ευθείας



γωνίας. Οι πλευρές μιας ορθής γωνίας λέμε ότι είναι κάθετες μεταξύ τους.
• ***Οξεία γωνία*** λέγεται μια γωνία μικρότερη από μια ορθή.
• ***Αμβλεία γωνία*** λέγεται μια γωνία μεγαλύτερη από μια ορθή.

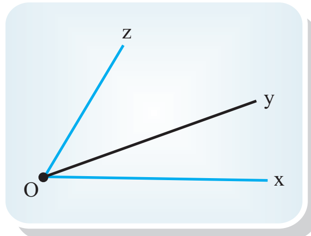


Απόσταση σημείου Α από ευθεία ε ονομάζεται το μήκος του μοναδικού ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει κάθετα το σημείο Α με την ευθεία ε.
Απο κάθε σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο κάθετος σε αυτή.
Απο κάθε σημείο ευθείας άγεται μία μόνο κάθετος σε αυτή.



Μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ είναι η μοναδική ευθεία η οποία διέρχεται κάθετα από το μέσο Ο του

ΒΓ.Τα σημεία Β,Γ λέγονται ***συμμετρικά*** ως προς την ευθεία ΑΟ και η ευθεία ΑΟ λέγεται άξονας ***συμμετρίας.***

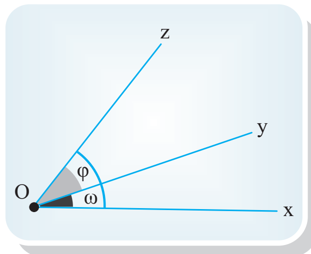


Πράξεις μεταξύ γωνιών

Εφεξής ονομάζονται δύο γωνίες οι οποίες έχουν :
- κοινή κορυφή
- μια πλευρά κοινή
- τις μη κοινές πλευρές εκατέρωθεν της κοινής.

π.χ οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}z$ είναι εφεξής.

Δύο εφεξής γωνίες είναι πάντοτε ***διαδοχικές.***

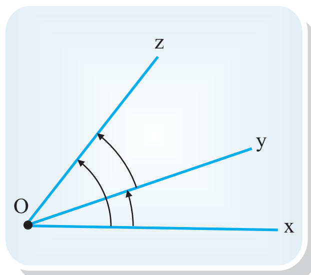


Α. Πρόσθεση γωνιών

Για να προσθέσουμε δύο γωνίες τις μετατοπίζουμε κατάλληλα ώστε να γίνουν εφεξής. Στο διπλανό σχήμα έχουμε:

$x\hat{O}y = \omega$, $y\hat{O}z = \varphi$ και $x\hat{O}z = x\hat{O}y + y\hat{O}z = \omega + \varphi$

- Το άθροισμα μιας κυρτής και της μη κυρτής με την ίδια κορυφή και τις ίδιες πλευρές , είναι το επίπεδο.
- Η πρόσθεση γωνιών επεκτείνεται και για περισσότερες απο δύο γωνίες. Το άθροισμα όμως δύο ή περισσότερων γωνιών,δεν είναι πάντοτε γωνία με τον ορισμό που δώσαμε **, διότι μπορεί το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο απο μια πλήρη γωνία.**



Β. Αφαίρεση γωνιών

Για να αφαιρέσουμε δύο γωνίες τις μετατοπίζουμε κατάλληλα ώστε να συμπίπτουν οι κορυφές τους, και η μια πλευρά τους.

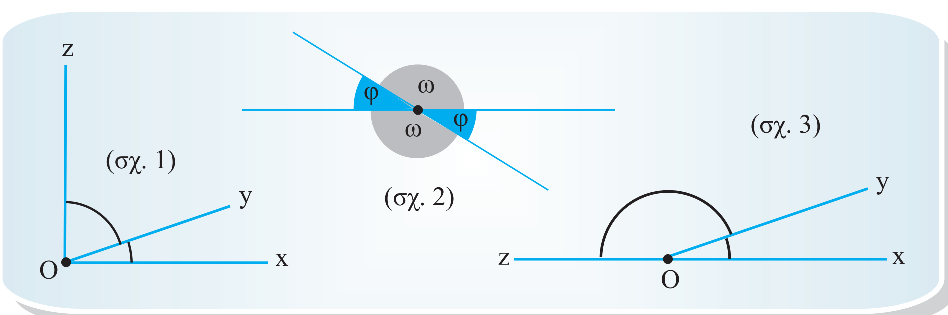
Στο διπλανό σχήμα έχουμε: $x\hat{O}z - x\hat{O}y = y\hat{O}z$

Γ. Γινόμενο φυσικού αριθμού με γωνία

Για να πολλαπλασιάσουμε μία γωνία με φυσικό αριθμό ν, αθροίζουμε ν διαδοχικές γωνίες ίσες με την αρχική γωνία. Για παράδειγμα, γράφουμε: $\nu \cdot x\hat{O}z = \underbrace{x\hat{O}z + x\hat{O}z + \cdots + x\hat{O}z}_{\nu \text{ όροι}}$

Γωνίες με ορισμένη σχέση

Συμπληρωματικές ονομάζονται δύο γωνίες με άθροισμα ίσο με μία ορθή (σχ. 1).
Παραπληρωματικές ονομάζονται δύο γωνίες με άθροισμα ίσο με μία ευθεία γωνία (σχ. 3).

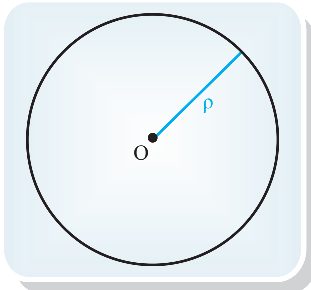


Αποδεικνύεται ότι δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες έχουν τις μη κοινές πλευρές

τους αντικείμενες και αντίστροφα.
Κατακορυφήν ονομάζονται δύο γωνίες με κοινή κορυφή και αντίστοιχες πλευρές αντικείμενες (σχ. 2).
Αποδεικνύεται ότι:
Για τις κατακορυφήν γωνίες ισχύουν:

ι. Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.
ιι. Οι διχοτόμοι δύο κατακορυφήν γωνιών είναι αντικείμενες ημιευθείες.

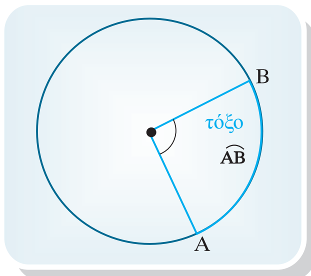
Κύκλος είναι το επίπεδο σχήμα του οποίου όλα τα σημεία ισαπέχουν απόσταση ρ από ένα σταθερό σημείο Ο και συμβολίζεται με (Ο,ρ). Το σημείο Ο λέγεται **κέντρο** του κύκλου και η απόσταση ρ **ακτίνα** του κύκλου.



Ίσοι λέγονται δύο κύκλοι αν με κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν μεταξύ τους. Δύο ίσοι κύκλοι έχουν ίσες ακτίνες και αντίστροφα.

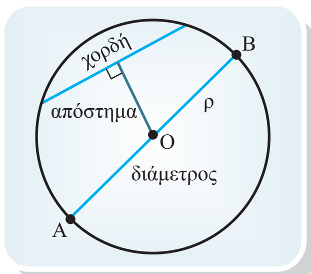
Στοιχεία του κύκλου

Τόξο είναι το τμήμα του κύκλου που ορίζεται από δύο τυχαία σημεία του κύκλου.
Χορδή είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο τυχαία σημεία του κύκλου.
Απόστημα χορδής λέμε το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που άγεται απο το κέντρο του κύκλου πρός τη χορδή.
Διάμετρος κύκλου είναι μία χορδή που διέρχεται από το κέντρο του.



Σύγκριση τόξων

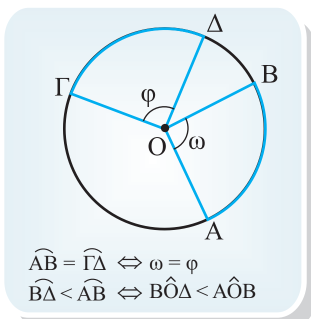
Ισα λέγονται δύο τόξα αν με κατάλληλη μετατόπιση πάνω στον κύκλο συμπίπτουν τα άκρα τους. Διαφορετικά το τόξο του οποίου το άκρο είναι εσωτερικό του άλλου τόξου είναι το μικρότερο. *Η σύγκριση τόξων έχει νόημα όταν τα τόξα βρίσκονται στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους.*



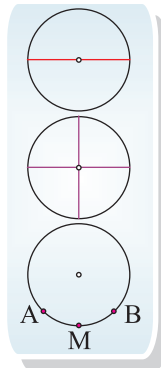
Επίκεντρη λέγεται μία γωνία που έχει την κορυφή της στο κέντρο ενός κύκλου. Οι πλευρές της επίκεντρης γωνίας ορίζουν στον κύκλο το αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης γωνίας και λέμε ότι η γωνία βαίνει στο τόξο ΑΒ.

Σχέση επίκεντρης γωνίας και αντίστοιχου τόξου

Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα ,αν και μόνον αν, οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες τους είναι ίσες.



Άμεσα συμπεραίνουμε ότι:



• *Κάθε διάμετρος διαιρεί τον κύκλο σε δύο ίσα τόξα που λέγονται* ***ημικύκλια****.*

• *Δύο κάθετες διάμετροι διαιρούν τον κύκλο σε τέσσερα ίσα τόξα που λέγονται* ***τεταρτοκύκλια.***

• *Δύο τόξα ενός κύκλου είναι άνισα όταν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες τους είναι επίσης άνισες.*
• *Το μέσο κάθε τόξου είναι μοναδικό.*

Μέτρο τόξου και γωνίας

Μέτρο τόξου είναι ο θετικός αριθμός που εκφράζει τη σχέση του τόξου με το τόξο μιας μοίρας. **Τόξο μιας μοίρας** είναι το τόξο που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία μιας μοίρας (1^o).

Μέτρο γωνίας είναι το μέτρο του τόξου στο οποίο βαίνει αν την καταστήσουμε επίκεντρη.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κάνουμε ένα σχήμα και σημειώνουμε τις ίσες γωνίες με τα ίδια γράμματα και έχουμε υπόψη μας τα εξής:
• Οι συμπληρωματικές γωνίες έχουν άθροισμα 90^o, οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν άθροισμα 180^o.
• Η διχοτόμος μιας γωνίας τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.
• Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

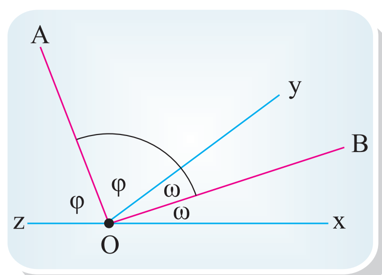
Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι δύο εφεξής παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.

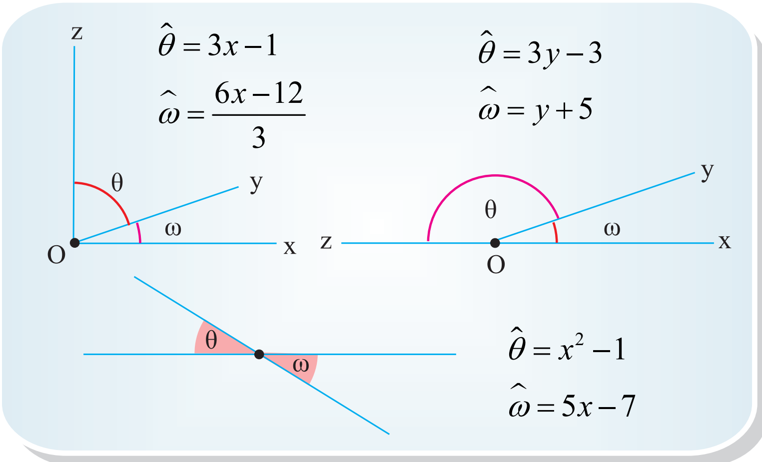
Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η γωνία ΑΟΒ είναι 90^o.
Σημειώνουμε τις ίσες γωνίες του σχήματος και έχουμε:

$2\omega + 2\varphi = 180^0 \Leftrightarrow \omega + \varphi = 90^0 \Leftrightarrow A\hat{O}B = 90^0$.



Άσκηση 2
Να υπολογίσετε τον άγνωστο x στις παρακάτω περιπτώσεις.



Λύση
ι. Οι γωνίες ω και θ είναι συμπληρωματικές,οπότε έχουμε:

$$\hat{\omega}+\hat{\theta}=90^0 \Leftrightarrow \frac{6x-12^o}{3}+3x-1^o=90^0 \Leftrightarrow 6x^o-12^o+9x-3^o=270^0 \Leftrightarrow$$

$$15x=285^o \Leftrightarrow x=19^0$$

ιι. Οι γωνίες ω και θ είναι παραπληρωματικές,οπότε έχουμε:

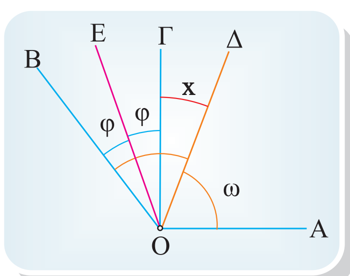
$$\hat{\omega}+\hat{\theta}=180^0 \Leftrightarrow x+5^o+3x-3^o=180^0 \Leftrightarrow 4x=178^0 \Leftrightarrow x=44,5^0$$

ιιι. Οι γωνίες ω και θ είναι κατακορυφήν ,οπότε έχουμε :

$$\hat{\omega}=\hat{\theta} \Leftrightarrow 5x-7^o=x^2-1 \Leftrightarrow x^2-5x+6^o=0^o \Leftrightarrow x=2^o \text{ ή } x=3^o$$

Άσκηση 3
Θεωρούμε αμβλεία γωνία $A\hat{O}B$ και στο εσωτερικό της την ημιευθεία $O\Gamma \perp OA$. Αν ΟΔ, ΟΕ οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{O}E=45^0$.

Λύση



Αν ονομάσουμε τις ίσες γωνίες με ω και φ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα και τη γωνία $\Gamma\hat{O}\Delta = x$, αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\varphi + x = \dfrac{x+\omega}{2}$

Έχουμε $\varphi + x = \dfrac{x+\omega}{2} \Leftrightarrow 2\varphi + 2x = x + \omega \Leftrightarrow 2\varphi + x = \omega$, που ισχύει.

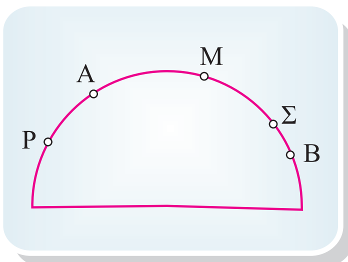
Άσκηση 4

Έστω Α,Β σημεία ημικυκλίου και Μ το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$.

i. Αν Ρ σημείο του ημικυκλίου που δεν ανήκει στο $\overset{\frown}{AB}$ τότε αποδείξτε ότι $\overset{\frown}{PM} = \dfrac{\overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{PB}}{2}$.

ii. Αν Σ σημείο του τόξου $\overset{\frown}{MB}$ τότε αποδείξτε ότι: $\overset{\frown}{\Sigma M} = \dfrac{\overset{\frown}{\Sigma A} - \overset{\frown}{\Sigma B}}{2}$.

Λύση



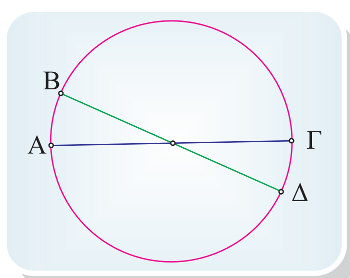
i. Αφού το Μ είναι μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ είναι $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$.
Τότε έχουμε:

$$\frac{\overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{PB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{PA} + 2\overset{\frown}{AM}}{2} = \frac{2\overset{\frown}{PA} + 2\overset{\frown}{AM}}{2} =$$
$$= \frac{2\left(\overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{AM}\right)}{2} = \overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{PM}$$

ii. $$\frac{\overset{\frown}{\Sigma A} - \overset{\frown}{\Sigma B}}{2} = \frac{\overset{\frown}{\Sigma M} + \overset{\frown}{MA} - \left(\overset{\frown}{MB} - \overset{\frown}{\Sigma M}\right)}{2} = \frac{2\overset{\frown}{\Sigma M}}{2} = \overset{\frown}{\Sigma M}$$

Άσκηση 5

Με βάση το διπλανό σχήμα να υπολογιστούν οι x και y αν $\overset{\frown}{AB} = 2x$, $\overset{\frown}{B\Gamma} = 2y + 3$ και $\overset{\frown}{A\Delta} = 200^0$.



Λύση

Είναι $\overset{\frown}{Α\Delta} = 200^0 \Leftrightarrow \overset{\frown}{ΑΓ} + \overset{\frown}{Γ\Delta} = 200^0 \Leftrightarrow$

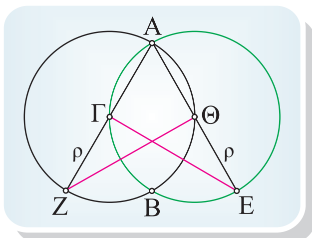
$180^0 + \overset{\frown}{Γ\Delta} = 200^0 \Leftrightarrow \overset{\frown}{Γ\Delta} = 20^0 \Leftrightarrow 2x = 20^0 \Leftrightarrow x = 10^0$

$\overset{\frown}{ΑΒ} + \overset{\frown}{ΒΓ} = 180^0 \Leftrightarrow 20^0 + 2y + 3 = 180^0 \Leftrightarrow y = 78,5^0$

Άσκηση 6

Σε κύκλο (Θ, ρ) παίρνουμε σημείο Γ και γράφουμε τον κύκλο (Γ, ρ). Ονομάζουμε Α ένα κοινό σημείο των κύκλων και φέρνουμε τις διαμέτρους ΑΕ και ΑΖ των κύκλων (Θ, ρ) και (Γ, ρ) αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΓ και ΘΖ είναι ίσα.

Λύση



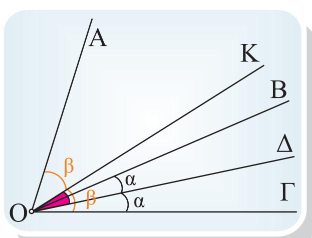
Είναι $\overset{\frown}{ΑΓΕ} = \overset{\frown}{ΑΘΖ}$ (ημικύκλια ίσων κύκλων) και $\overset{\frown}{ΑΘ} = \overset{\frown}{ΑΓ}$ (τόξα των ίσων χορδών ΑΘ και ΑΓ). Άρα $\overset{\frown}{ΕΓ} = \overset{\frown}{ΘΖ}$ (διαφορές ίσων τόξων). Επομένως $ΕΓ = ΘΖ$ (ως χορδές ίσων τόξων).

Άσκηση 7

Δύο γωνίες ΑΟΓ και ΒΟΓ έχουν κοινή κορυφή, κοινή πλευρά και δεν είναι εφεξείς. Να δειχθεί ότι η γωνία των διχοτόμων των γωνιών είναι ίση με την ημιδιαφορά των γωνιών.

Λύση

Φέρνουμε τις ΟΚ, ΟΔ διχοτόμους των $Α\hat{Ο}Γ$ και $Β\hat{Ο}Γ$.

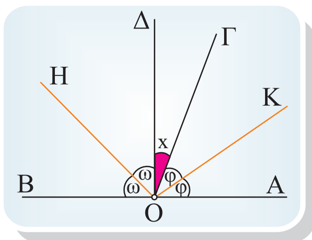


Είναι $\Delta\hat{Ο}Κ = \hat{\beta} - \hat{\alpha} = \frac{Α\hat{Ο}Γ}{2} - \frac{Β\hat{Ο}Γ}{2} = \frac{Α\hat{Ο}Γ - Β\hat{Ο}Γ}{2}$.

Άσκηση 8

Από σημείο Ο μιας ευθείας ΑΒ φέρνουμε προς το ίδιο μέρος της ΑΒ ημιευθείες ΟΓ και ΟΔ τέτοιες ώστε, οι γωνίες ΑΟΓ, ΓΟΔ και ΔΟΒ να είναι διαδοχικές. Αν ΟΚ και ΟΗ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών ΑΟΓ και ΒΟΔ αντίστοιχα και $\hat{KOH} = 100^o$, να υπολογισθεί η γωνία ΓΟΔ.

Λύση



Είναι $\hat{\varphi} + \hat{x} + \hat{\omega} = 100^o \Leftrightarrow 2\hat{\varphi} + 2\hat{x} + 2\hat{\omega} = 200^o$ (1)

Ακόμα είναι : $2\hat{\varphi} + \hat{x} + 2\hat{\omega} = 180^o$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε $\hat{x} = 20^o$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να υπολογίσετε τη γωνία ω σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

ι. η γωνία ω είναι τετραπλάσια από την παραπληρωματική της.

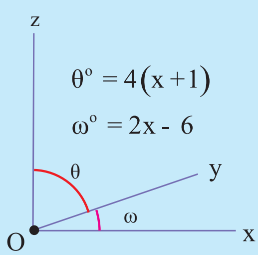
ιι. η γωνία ω είναι κατά 10^o μικρότερη από την συμπληρωματική της.

ιιι. η παραπληρωματική της γωνίας ω και η συμπληρωματική της έχουν άθροισμα ίσο με 220^o.

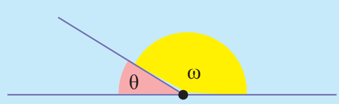
2. Να υπολογίσετε τον άγνωστο x στις παρακάτω περιπτώσεις.

$\theta^o = 4(x+1)$

$\omega^o = 2x - 6$



$8\theta^o - 2\omega^o = 90^0$



3. Να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω στις παρακάτω περιπτώσεις:

ι. οι γωνίες είναι συμπληρωματικές και η διαφορά τους ισούται με το 1/9 της ορθής.

ιι. οι γωνίες είναι παραπληρωματικές και η διαφορά τους ισούται με τα 10/9 της ορθής.

4. Έστω ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{O}\Delta$ τέτοιες ώστε οι ημιευθείες Οx και Oy να είναι αντίστοιχα οι διχοτόμοι τους. Αν οι ημιευθείες ΟΒ και ΟΓ βρίσκονται στο εσωτερικό της $x\hat{O}y$, δείξτε ότι οι $A\hat{O}\Gamma$ και $B\hat{O}\Delta$ είναι παραπληρωματικές.

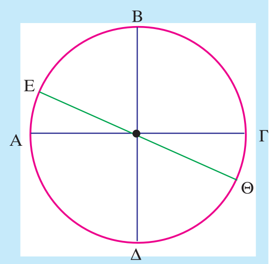
5. Έστω οι ημιευθείες ΟΑ,ΟΒ,ΟΓ και ΟΔ τέτοιες ώστε η γωνία $B\hat{O}\Gamma$ να είναι ορθή. Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{O}\Delta$ αν:

ι. οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{O}\Delta$ είναι συμπληρωματικές.

ιι. οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{O}\Delta$ είναι παραπληρωματικές.

6. Έστω οι γωνίες ω και φ οι οποίες έχουν κοινή κορυφή, μία κοινή πλευρά και δεν είναι εφεξής. Αν η διαφορά τους είναι ίση με 90^o, δείξτε ότι η διαφορά των διχοτόμων τους είναι ίση με 45^o.

7. Να υπολογιστούν τα τόξα $\overset{\frown}{AE}$ και $\overset{\frown}{A\Theta}$ στο διπλανό σχήμα αν ισχύουν $\overset{\frown}{A\Theta}+\overset{\frown}{EB}=3\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Delta\Theta}=\frac{1}{5}\overset{\frown}{B\Theta}$.



8. Έστω γωνία $\widehat{AOB}$ και ημιευθεία ΟΓ στο εσωτερικό της τέτοια ώστε $3\widehat{AO\Gamma}=5\widehat{BO\Gamma}$. Αν η ημιευθεία ΟΔ είναι εσωτερική της $\widehat{BO\Gamma}$ να δείξετε ότι $\widehat{\Gamma O\Delta}=\dfrac{3\widehat{AO\Delta}-5\widehat{BO\Delta}}{8}$

Ε ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Έστω τόξο $\overset{\frown}{AB}$ ενός κύκλου (Ο,ρ) και σημείο Μ τέτοιο ώστε $\overset{\frown}{AM} = \frac{\mu}{\nu}\overset{\frown}{MB}$. Δείξτε ότι για τυχαίο σημείο Σ του κύκλου εξωτερικό του τόξου ΜΑ ισχύει $\overset{\frown}{\Sigma M} = \frac{\nu}{\mu+\nu}\overset{\frown}{\Sigma A} + \frac{\mu}{\mu+\nu}\overset{\frown}{\Sigma B}$.