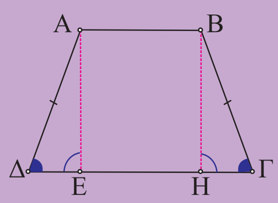
5ο Κεφάλαιο

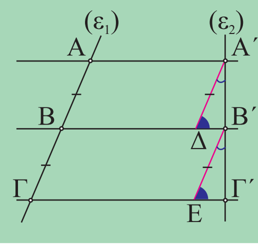
6ο μάθημα

Παραλληλόγραμμα



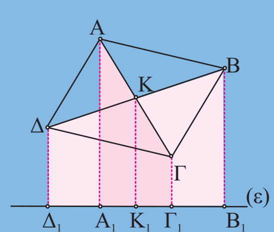
7ο μάθημα

Είδη παραλληλογράμμων



8ο μάθημα

Εφαρμογές παραλληλογράμμων

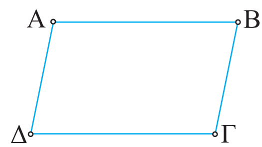


Μάθημα 6

Παραλληλόγραμμα

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Παραλληλόγραμμο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει παράλληλες τις απέναντι πλευρές του ΑΒ//ΓΔ, ΑΔ//ΒΓ (βλ. σχ.) και έχει τις εξής ιδιότητες:



- Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
- Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
- Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου είναι και το κέντρο συμμετρίας του. Τα είδη των παραλληλογράμμων είναι το ορθογώνιο, ο ρόμβος και το τετράγωνο.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Για να δείξουμε ότι ένα κυρτό τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, δείχνουμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις (κριτήρια παραλληλογράμμων):

- Οι απέναντι πλευρές του ανά δύο είναι ίσες.
- Δύο απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες.
- Οι απέναντι γωνίες του ανά δύο είναι ίσες.
- Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

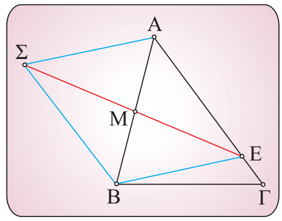
Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Ε της πλευράς ΑΓ. Από το Ε φέρουμε ευθεία ε η οποία διέρχεται από το μέσο Μ της πλευράς ΑΒ και θεωρούμε σημείο Σ πάνω στην ε τέτοιο ώστε ΣΜ = ΜΕ. Να δείξετε ότι ΑΣ//ΒΕ.

Λύση

Είναι ΜΑ = ΜΒ (Μ μέσο) και ΜΕ = ΜΣ (απο υπόθεση), επομένως στο τετράπλευρο ΣΑΕΒ οι διαγώνιοι διχοτομούνται δηλαδή είναι είναι παραλληλόγραμμο. Άρα ΑΣ//ΒΕ.



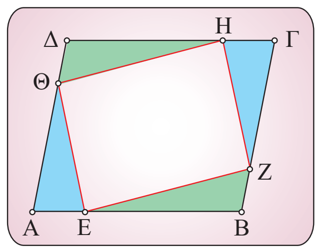
Άσκηση 2

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και πάνω στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ παίρνουμε τμήματα $ΑΕ = \frac{ΑΒ}{4}$, $ΒΖ = \frac{ΒΓ}{4}$, $ΓΗ = \frac{ΓΔ}{4}$, $ΔΘ = \frac{ΔΑ}{4}$. Να δείξετε ότι το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $Θ\overset{\triangle}{Η}Δ$ και $Β\overset{\triangle}{Ε}Ζ$

$$\left.\begin{array}{l} ΔΘ = \frac{ΑΔ}{4} = \frac{ΒΓ}{4} = ΒΖ \\ ΔΗ = \frac{3ΓΔ}{4} = \frac{3ΑΒ}{4} = ΒΕ \\ Θ\hat{Δ}Η = Ε\hat{Β}Ζ \end{array}\right\} \overset{Π-Γ-Π}{\Rightarrow} Θ\overset{\triangle}{Η}Δ = Β\overset{\triangle}{Ε}Ζ \Rightarrow ΘΗ = ΕΖ \quad (1)$$



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $Θ\overset{\triangle}{Ε}Α$ και $Γ\overset{\triangle}{Η}Ζ$

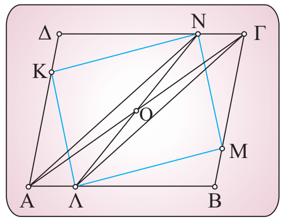
$$\left.\begin{array}{l} ΑΕ = \frac{ΑΒ}{4} = \frac{ΔΓ}{4} = ΓΗ \\ ΘΑ = \frac{3ΑΔ}{4} = \frac{3ΒΓ}{4} = ΓΖ \\ Θ\hat{Α}Ε = Η\hat{Γ}Ζ \end{array}\right\} \overset{Π-Γ-Π}{\Rightarrow} Θ\overset{\triangle}{Ε}Α = Γ\overset{\triangle}{Η}Ζ \Rightarrow ΘΕ = ΗΖ \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι ένα παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ που είναι εγγεγραμμένο σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει κοινό κέντρο με το ΑΒΓΔ.

Λύση

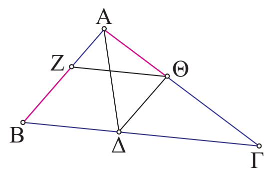


Θεωρούμε Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΛΝ και ΑΓτων ΚΛΜΝ και ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αρκεί να δείξουμε ότι ΑΟ = ΟΓ και ΟΝ = ΟΛ. Γι'αυτό συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{KA}\Lambda}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{N}\Gamma\mathrm{M}}$. Αυτά έχουν

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{K}\Lambda = \mathrm{NM} & (\text{απέναντι πλευρές παρ/μου}) \\ \mathrm{A}\widehat{\mathrm{K}}\Lambda = \mathrm{N}\widehat{\mathrm{M}}\Gamma & (\text{έχουν πλευρές παράλληλες}) \\ \mathrm{A}\widehat{\Lambda}\mathrm{K} = \mathrm{M}\widehat{\mathrm{N}}\Gamma & (\text{έχουν πλευρές παράλληλες}) \end{array}\right\} \overset{\Gamma-\Pi-\Gamma}{\Rightarrow} \overset{\triangle}{\mathrm{KA}\Lambda} = \overset{\triangle}{\mathrm{MN}\Gamma} \Rightarrow \mathrm{A}\Lambda = \mathrm{N}\Gamma$$

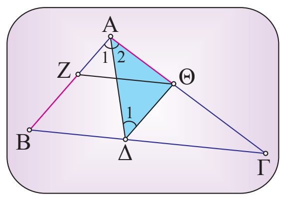
Άρα ΑΛ//= ΝΓ, έτσι το ΑΛΓΝ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες. Άρα οι διαγώνιοί του διχοτομούνται ,δηλαδή ΑΟ = ΟΓ και ΟΝ = ΟΛ.

Άσκηση 4



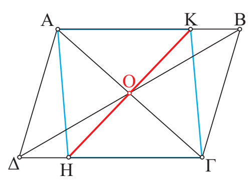
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Από το Δ φέρνουμε την ΔΘ//ΑΒ $(\Theta \in \mathrm{A}\Gamma)$ και την ΘΖ//ΒΓ $(\mathrm{Z} \in \mathrm{AB})$. Αποδείξτε ότι ΑΘ = ΒΖ.

Λύση



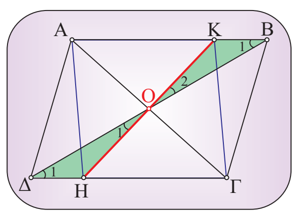
$\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_2$ (αφού η ΑΔ είναι διχοτόμος) και $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\Delta}_1$ (αφού ΔΘ// ΑΒ). Επομένως $\hat{\mathrm{A}}_2 = \hat{\Delta}_1$, δηλ. το τρίγωνο ΑΔΘ είναι ισοσκελές, οπότε ΑΘ = ΘΔ (1).
Επειδή το ΒΔΘΖ είναι παραλληλόγραμμο λόγω της (1) έχουμε: ΑΘ = ΘΔ = ΒΖ.

Άσκηση 5



Από το κέντρο Ο παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρνουμε ευθεία, που τέμνει τις δύο απέναντι πλευρές στα σημεία Κ και Η. Να δειχθεί ότι το ΑΚΓΗ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση



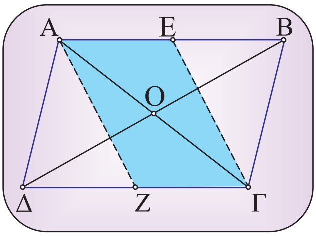
Τα τρίγωνα ΔΟΗ και ΟΚΒ είναι ίσα διότι έχουν:

ΔΟ = ΟΒ, $\hat{\mathrm{O}}_1 = \hat{\mathrm{O}}_2$ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\mathrm{B}}_1$. Άρα ΟΗ = ΟΚ.
Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΚΗ του τετραπλεύρου ΑΚΓΗ διχοτομούνται. Επομένως το ΑΚΓΗ είναι παραλληλόγραμμο.

Άσκηση 6

Έστω Ε και Ζ, τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι:
i. το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.
ii. οι ΑΓ, ΒΔ και ΕΖ συντρέχουν.

Λύση

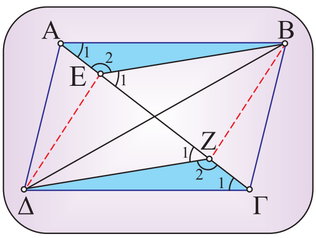


i. Έχουμε $ΑΕ \mathbin{/\!/}= ΓΖ$, άρα το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.
ii. Οι ΑΓ, ΒΔ ως διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ διχοτομούνται από στο Ο. Οι ΕΖ, ΑΓ είναι διαγώνιοι του ΑΕΓΖ, οπότε η ΕΖ διέρχεται από το μέσο Ο της ΑΓ. Άρα οι ΑΓ, ΒΔ, ΕΖ συντρέχουν.

Άσκηση 7

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε σημείο της ΑΓ. Φέρουμε ΔΖ//ΒΕ (Ζ σημείο της ΑΓ). Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΒΖ.

Λύση



Είναι $\overset{\Delta}{ΑΒΕ} = \overset{\Delta}{ΔΖΓ}$ ($ΑΒ = ΔΓ$, $\hat{Α}_1 = \hat{Γ}_1$, $\hat{Ε}_2 = \hat{Ζ}_2$,

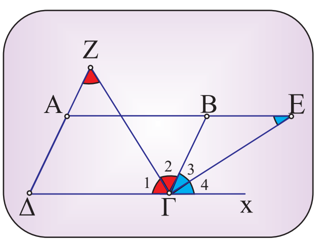
αφού $\hat{Ε}_1 = \hat{Ζ}_1$) άρα $ΒΕ = ΔΖ$.

Αλλά είναι και $ΒΕ \mathbin{/\!/} ΔΖ$, οπότε το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα $ΔΕ \mathbin{/\!/} ΒΖ$.

Άσκηση 8

Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατά τμήμα $ΒΕ = ΒΓ$ και στην ημιευθεία ΔΑ θεωρούμε σημείο Ζ, ώστε $ΔΖ = ΔΓ$. Να αποδείξετε ότι $Ζ\hat{Γ}Ε = 90°$.

Λύση



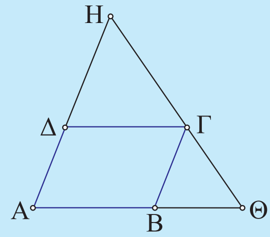
Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{Ζ} = \hat{Γ}_1, \ (ΔΖ = ΔΓ) \\ &\hat{Ζ} = \hat{Γ}_2 \ (\text{εντός εναλλάξ}) \end{aligned}\right\} \text{άρα } \hat{Γ}_1 = \hat{Γ}_2 \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} &\hat{Ε} = \hat{Γ}_3, \ (ΒΕ = ΒΓ) \\ &\hat{Ε} = \hat{Γ}_4 \ (\text{εντός εναλλάξ}) \end{aligned}\right\} \text{άρα } \hat{Γ}_3 = \hat{Γ}_4 \quad (2)$$

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $ΖΓ \perp ΓΕ$ ως διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών, άρα: $Ζ\hat{Γ}Ε = 90°$.

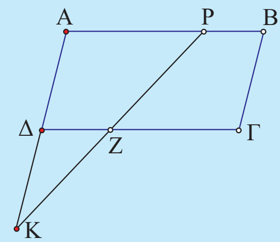
Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ



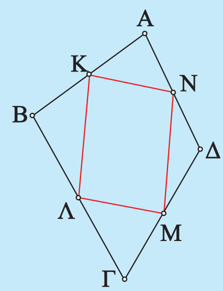
1. Στο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήματα ΒΘ = ΒΓ και την ΑΔ κατά τμήμα ΔΗ = ΓΔ. Να δειχθεί ότι:

α. $\Delta\hat{\Gamma}H = B\hat{\Gamma}\Theta$

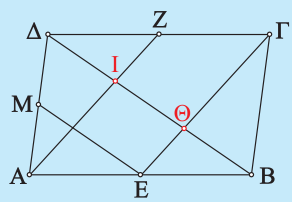
β. τα σημεία Η, Γ, Θ είναι συνευθειακά.



2. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ παίρνουμε τα σημεία Ρ και Ζ στις πλευρές ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, ώστε $PB = \frac{1}{3}AB$ και $\Delta Z = \frac{1}{3}\Delta\Gamma$. Η ΡΖ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Κ. Να δειχθεί ότι ΔΚ = ΑΔ.



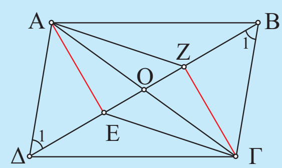
3. Το τετράπλευρο, που έχει κορυφές τα μέσα των πλευρών άλλου τετραπλεύρου είναι παραλληλόγραμμο.



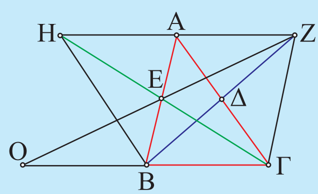
4. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, Ε και Ζ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ.

α. Να δειχθεί ότι η διαγώνιος ΒΔ χωρίζεται σε τρία ίσα μέρη (τριχοτομείται) από τις ΑΖ και ΓΕ.

β. Αν Ι, Θ τα σημεία που τριχοτομούν τη ΒΔ και Μ το μέσο της ΑΔ, να δείξετε ότι η ΕΜ διχοτομεί την ΑΙ.



5. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ από τις κορυφές Α και Γ φέρουμε τις ΑΕ και ΓΖ κάθετες στη ΔΒ. Να δειχθεί ότι το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο και έχει το ίδιο κέντρο με το ΑΒΓΔ.

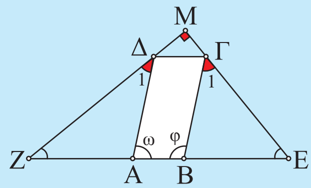


6. Στο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ και τις προεκτείνουμε κατά ΔΖ = ΒΔ και ΕΗ = ΓΕ. Να δειχθεί:

α. ΑΗ = ΑΖ **β.** τα σημεία Η, Α, Ζ είναι συνευθειακά

γ. αν Ο το σημείο που η ΖΕ τέμνει τη ΒΓ, είναι ΟΒ = ΒΓ.

7. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την ΑΒ και προς τα δύο μέρη και παίρνουμε τμήματα ΒΕ και ΑΖ ίσα με την ΒΓ. Αν Μ το σημείο τομής των ΖΔ και ΕΓ,να δείξετε ότι το τρίγωνο ΖΜΕ είναι ορθογώνιο.



Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα σημεία Δ, Ε έτσι ώστε ΑΔ = ΓΕ. Φέρνουμε τη ΓΖ παράλληλη και ίση με την ΕΔ. Να δειχθεί ότι η ΑΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου.