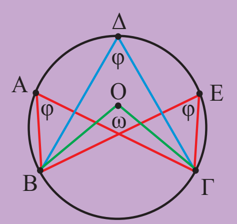
7ο Κεφάλαιο

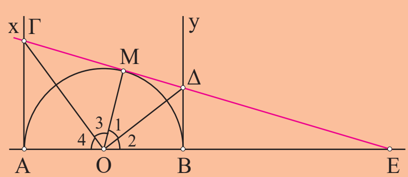
11ο μάθημα

Εγγεγραμμένα σχήματα



12ο μάθημα

Αναλογίες



Μάθημα 11

Αναλογίες

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ και ΓΔ ονομάζεται ο θετικός αριθμός λ για τον οποίο ισχύει: $AB = \lambda \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow \dfrac{AB}{\Gamma\Delta} = \lambda$

Μέτρο ενός ευθυγράμμου τμήματος ονομάζεται ο λόγος του μεγέθους προς το μέ-γεθος ενός άλλου ευθυγράμμου τμήματος που θεωρείται σαν μονάδα μέτρησης.

Πόρισμα: Δυο ίσα ευθύγραμμα τμήματα έχουν ίσα μέτρα και αντιστρόφως.

Θεώρημα: Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων ισούται με το λόγο των μηκών τους ως προς την ίδια μονάδα μέτρησης και είναι ανεξάρτητα από τη μονάδα μέτρησης.

Αναλογία είναι η ισότητα λόγων. Η σχέση $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} = \lambda$ είναι αναλογία με λόγο λ και όρους τα τμήματα α,β,γ,δ. Στην πιο πάνω αναλογία τα τμήματα α και γ λέγονται **ανάλογα** των β και δ. Τα α και δ λέγονται **άκροι** όροι ενώ τα β και γ **μέσοι** της αναλογίας. Ο τέταρτος όρος δ λέγεται τέταρτη ανάλογος των α, β και γ. Στην αναλογία $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\beta}{\gamma}$ οι μέσοι όροι είναι ίσοι.

Αυτή η αναλογία λέγεται **συνεχής** και ο β λέγεται **μέση ανάλογος** ή **γεωμετρικός μέσος** των α και γ.

Ιδιότητες των αναλογιών.

$\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$, $\quad \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\gamma} = \dfrac{\beta}{\delta} \quad \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\delta}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\alpha}$

$\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \dfrac{\gamma \pm \delta}{\delta}$, $\quad \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\alpha \pm \beta} = \dfrac{\gamma}{\gamma \pm \delta}$

$\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} = \ldots = \dfrac{\kappa}{\lambda} = \dfrac{\alpha + \gamma + \ldots + \kappa}{\beta + \delta + \ldots + \lambda}$

Αρμονική διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος

Σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, για κάθε εσωτερικό σημείο Μ του ΑΒ υπάρχει ένα εξωτερικό σημείο Ν του ΑΒ τέτοιο ώστε : $\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NB}$

Τα σημεία Μ και Ν ονομάζονται **αρμονικά συζυγή** των Α και Β και τα τέσσερα σημεία Α, Μ, Β, Ν λέγονται αρμονική τετράδα.

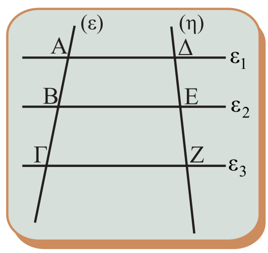
Ιδιότητες

1. Τα σημεία Ν και Μ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του μέσου του ΑΒ.
2. Αρμονικό συζυγές του μέσου δεν ορίζεται.
3. Αν τα Μ και Ν είναι αρμονικά συζυγή των Α και Β, τότε τα Α και Β είναι αρμονικά συζυγή των Μ και Ν.
4. Αν Ο το μέσο του ΑΒ τότε ισχύει $OA^2=OM\cdot ON$ και αντίστροφα.
5. Σε κάθε αρμονική σημειοσειρά ισχύει: $\frac{2}{AB}=\frac{1}{AM}\pm\frac{1}{AN}$

Θεώρημα Θαλή

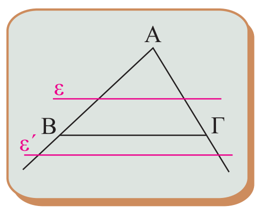
Αν (τρεις τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, ορίζουν σ'αυτές τμήματα ανάλογα.
Δηλαδή με βάση το διπλανό σχήμα ισχύει η αναλογία:

$$\frac{AB}{\Delta E}=\frac{B\Gamma}{EZ}=\frac{A\Gamma}{\Delta Z}$$



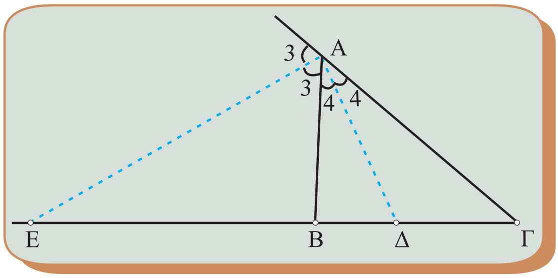
Θεώρημα του Θαλή σε τρίγωνο

Αν μια ευθεία είναι παράλληλη προς μια πλευρά τριγώνου, τότε διαιρεί τις δύο άλλες πλευρές εσωτερικά ή εξωτερικά στον ίδιο λόγο και αντιστρόφως.



Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου

Η εσωτερική διχοτόμος γωνίας τριγώνου χωρίζει την απέναντι πλευρά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών. Δηλαδή, στο διπλανό σχήμα για τη διχοτόμο ΑΔ ισχύει: $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$



Θεώρημα εξωτερικής διχοτόμου

Αν η εξωτερική διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου τέμνει το φορέα της απέναντι πλευράς, τότε χωρίζει εξωτερικά αυτή την πλευρά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών. Για παράδειγμα, στο παραπάνω σχήμα για τη διχοτόμο ΑΕ ισχύει: $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{BE}{\Gamma E}$

Παρατήρηση

Επειδή $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{BE}{\Gamma E} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$ τα σημεία Δ και Ε είναι αρμονικά συζυγή των Β και Γ.

Υπολογισμός των ευθύγραμμων τμημάτων στα οποία οι διχοτόμοι διαιρούν την απέναντι πλευρά.

$\boxed{\Delta B = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}}$ $\boxed{\Delta\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}}$ $\boxed{EB = \frac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma}}$ $\boxed{E\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta-\gamma}, (\beta > \gamma)}$

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

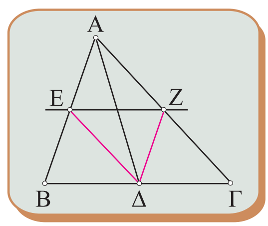
Βλέπε “αναλυτική” μέθοδος στο μάθημα 9.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΔ διάμεσος αυτού και ΔΕ, ΔΖ οι διχοτόμοι των γωνιών ΑΔΒ και ΑΔΓ (Ε, Ζ πάνω στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα). Να αποδείξετε ότι ΕΖ//ΒΓ.

Λύση



Από το θεώρημα διχοτόμων στο τρίγωνο ΑΒΔ (ΔΕ διχοτόμος)

έχουμε: $$\frac{EA}{EB} = \frac{\Delta A}{\Delta B}$$

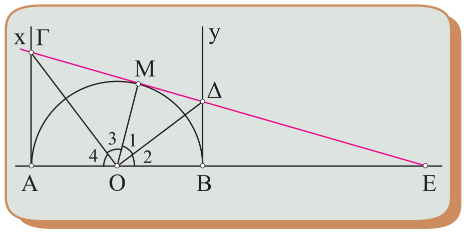
Από το θεώρημα διχοτόμων στο τρίγωνο ΑΔΓ (ΔΖ διχοτόμος)

έχουμε: $$\frac{ZA}{Z\Gamma} = \frac{\Delta A}{\Delta\Gamma}$$

Επειδή $\Delta B = \Delta\Gamma$ θα είναι $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\Delta A}{\Delta\Gamma}$ οπότε $\frac{EA}{EB} = \frac{ZA}{Z\Gamma}$ που σημαίνει ΕΖ//ΒΓ.

Άσκηση 2

Δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ και οι εφαπτόμενες Αx και Βy προς το ίδιο μέρος της διαμέτρου. Φέρουμε εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο Μ του ημικυκλίου που τέμνει την Αx στο Γ, την Βy στο Δ και την προέκταση της ΑΒ στο Ε. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\Gamma M}{\Delta M}=\frac{E\Gamma}{E\Delta}$



Λύση

Στο τρίγωνο ΟΜΕ είναι $\widehat{O_1}=\widehat{O_2}$ (διότι $O\overset{\Delta}{M}\Delta = O\overset{\Delta}{\Delta}B$) δηλαδή η ΟΔ είναι η εσωτερική διχοτόμος του τριγώνου ΟΜΕ. Άρα: $\frac{\Delta M}{\Delta E}=\frac{OM}{OE}$ (1)

Επειδή $\widehat{O_3}=\widehat{O_4}$ (διότι $O\overset{\Delta}{A}\Gamma = O\overset{\Delta}{M}\Gamma$) η ΟΓ είναι εξωτερική διχοτόμος του τριγώνου ΟΜΕ. Άρα: $\frac{\Gamma M}{\Gamma E}=\frac{OM}{OE}$ (2)

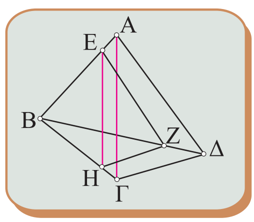
Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $\frac{\Delta M}{\Delta E}=\frac{\Gamma M}{\Gamma E}$ ή $\frac{\Gamma E}{\Delta E}=\frac{\Gamma M}{\Delta M}$

Τα σημεία Γ, Δ, Μ, Ε αποτελούν αρμονική τετράδα.

Άσκηση 3

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και σημεία Ε και Ζ επί των ΑΒ και ΒΔ. Φέρουμε ΕΖ//ΑΔ και ΖΗ//ΓΔ. Να αποδείξετε ότι ΕΗ// ΑΓ.

Λύση



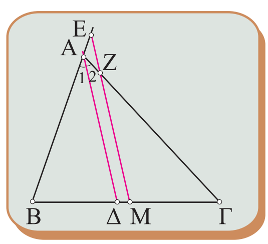
Είναι: $EZ // A\Delta \Leftrightarrow \frac{BE}{EA}=\frac{BZ}{Z\Delta}$ Είναι: $ZH // \Gamma\Delta \Leftrightarrow \frac{BH}{H\Gamma}=\frac{BZ}{Z\Delta}$

Από τις παραπάνω σχέσεις αυτές έχουμε: $\frac{BE}{EA}=\frac{BH}{H\Gamma}$ οπότε $EH // A\Gamma$.

Άσκηση 4

Από το μέσο Μ πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς τη διχοτόμο της γωνίας Α που τέμνει την ΒΑ στο Ε και την ΑΓ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΖ.

Λύση



Επειδή: $A\Delta // ME \Leftrightarrow \frac{BE}{AE}=\frac{BM}{\Delta M}$ (1)

και $\frac{\Gamma Z}{AZ}=\frac{\Gamma M}{\Delta M}$ ή $\frac{\Gamma Z}{AZ}=\frac{BM}{\Delta M}$ (2)

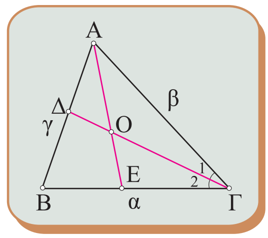
Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $\frac{BE}{AE} = \frac{\Gamma Z}{AZ}$ (3)

Επειδή είναι $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (ΑΔ: διχοτόμος $\widehat{A}$) και $\widehat{A_1} = \widehat{E_1}$, $\widehat{A_2} = \widehat{Z_1}$ (ΑΔ//ΕΖ) έχουμε ότι $\widehat{Z_1} = \widehat{E_1}$ δηλαδή $AZ = AE$. Η σχέση (3) επειδή ΑΖ = ΑΕ γίνεται ΒΕ = ΓΖ.

Άσκηση 5

Αν Ο είναι το σημείο τομής των διχοτόμων τριγώνου ΑΒΓ και ΓΔ η διχοτόμος της γωνίας Γ, να αποδείξετε ότι: $\frac{O\Delta}{O\Gamma} = \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$

Λύση



Στο τρίγωνο ΑΔΓ από το θεώρημα διχοτόμων έχουμε:

$$\frac{O\Delta}{O\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \quad (1)$$

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, από το θεώρημα διχοτόμων, έχουμε:

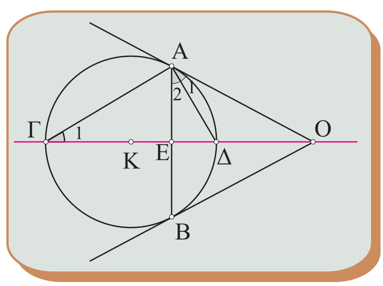
$$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{A\Delta}{\Delta B + A\Delta} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow \frac{A\Delta}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

Οπότε $A\Delta = \frac{\beta\gamma}{\alpha+\beta}$. Με αντικατάσταση στην (1), έχουμε: $\frac{O\Delta}{O\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{\frac{\beta\gamma}{\alpha+\beta}}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$

Άσκηση 6

Από σημείο Ο εκτός κύκλου (Κ,ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΟΑ και ΟΒ και τη διάμετρο ΓΔ. Αν η ΑΒ τέμνει την ΓΔ στο Ε να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ και Δ είναι αρμονικά συζυγή των Ο και Ε.

Λύση

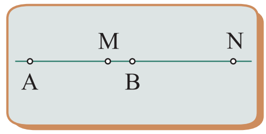


Είναι $\widehat{A_1} = \widehat{\Gamma_1}$ (Η υπό χορδής και εφαπτομένης γωνία, είναι ίση με την εγγεγραμμένη, που αντιστοιχεί στο τόξο της χορδής) και $\widehat{A_2} = \widehat{\Gamma_1}$ (εγγεγραμμένες στα ίσα τόξα $\overset{\frown}{A\Delta}$, $\overset{\frown}{\Delta B}$).

Άρα $\widehat{A_2} = \widehat{A_1} = \widehat{\Gamma_1}$, οπότε η ΑΔ είναι διχοτόμος στο τρίγωνο ΕΑΟ. Επειδή η $A\Gamma \perp A\Delta$ ($\widehat{\Gamma A\Delta} = 1$, αντιστοιχεί σε ημικύκλιο), η ΑΓ είναι εξωτερική διχοτόμος του τριγώνου ΑΕΟ. Άρα τα σημεία Γ και Δ είναι αρμονικά συζυγή των Ε και Ο.

Άσκηση 7

Στην αρμονική σημειοσειρά (Α, Β, Μ, Ν), αν τα σημεία Ο και Ο΄ είναι μέσα των ΑΒ, ΜΝ τότε να δείξετε ότι:



$$4(OO')^2 = (AB)^2 + (MN)^2$$

Λύση

Είναι: $OM = OO' - O'M$ και $ON = OO' + O'N = OO' + O'M$.

Άρα $(OM)(ON) = (OO' - O'M)(OO' + O'M)$ ή $(OM)(ON) = (OO')^2 - (O'M)^2$.

Κατά την ιδιότητα (4) έχουμε: $(OA)^2 = (OM)(ON)$

Άρα: $(OA)^2 = (OO')^2 - (O'M)^2$ ή

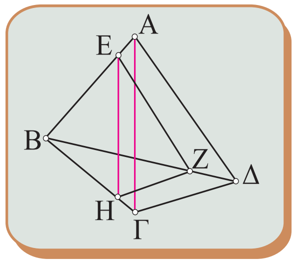
$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = (OO')^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4(OO')^2 = (AB)^2 + (MN)^2$$

Άσκηση 8

Σε τρίγωνο ΑΒΓ οι ΒΔ και ΓΕ είναι διχοτόμοι και ισχύει:

$$B E = \Gamma\Delta .$$

Να δείξετε ότι: **α.** $EK \cdot KB = \Delta K \cdot K\Gamma$ **β.** $AB = A\Gamma$
όπου Κ το έγκεντρο του τριγώνου.



Λύση

α. Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{\Delta K}{KB} = \frac{KE}{K\Gamma}$. Στο τρίγωνο ΒΓΔ η ΓΚ είναι διχοτόμος, άρα $\frac{K\Delta}{KB} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma B}$ (1). Στο τρίγωνο ΒΕΓ η ΒΚ είναι διχοτόμος, είναι $\frac{KE}{K\Gamma} = \frac{BE}{B\Gamma}$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) και επειδή $BE = \Gamma\Delta$. Έχουμε $\frac{K\Delta}{KB} = \frac{KE}{K\Gamma}$ (3)

β. Από τη σχέση (3) έχουμε ότι ΕΔ//ΒΓ. Άρα $\frac{AB}{EB} = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow AB = A\Gamma$ (διότι $EB = \Gamma\Delta$)

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΔ και Ε το μέσο αυτής. Η ΒΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Να δείξετε ότι: $\frac{AZ}{Z\Gamma} = \frac{1}{2}$

2. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ. Αν οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τέμνονται στο Ο και είναι ΑΒ//ΔΕ και ΑΓ//ΔΖ, να δείξετε ότι ΒΓ//ΕΖ.

3. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ, (ΑΒ//ΓΔ), με $ΑΔ = 6λ$ και $ΒΓ = 4λ$. Πάνω στις ΑΔ και ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε $ΑΕ = \frac{3λ}{2}$ και $ΒΖ = λ$. Να δείξετε ότι $ΕΖ // ΑΒ // ΓΔ$

4. Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ, η παράλληλη προς τη ΒΓ από το Α τέμνει τη ΒΔ στο Ε και η παράλληλη προς τη ΔΓ από το Ε τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Να δείξετε ότι ΒΖ//ΑΔ.

5. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών Α και Δ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέμνουν τις διαγώνιες ΒΔ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ, να δείξετε ότι ΕΖ//ΒΓ.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος ΑΔ αυτού. Αν ΔΕ//ΑΒ (Ε σημείο της ΑΓ), να δείξετε ότι:
$$\frac{1}{β} + \frac{1}{γ} = \frac{1}{ΔΕ}$$

7. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 1$) και η διάμεσος ΑΟ αυτού. Αν ΑΔ και ΑΕ οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{ΒΑΜ}$ και $\widehat{ΜΑΓ}$, να δείξετε ότι: $\left(\frac{ΒΔ}{ΔΜ}\right)^2 + \left(\frac{ΓΕ}{ΕΜ}\right)^2 = 4$

Ε "ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ"

Τα τρίγωνα ΑΒΡ και ΑΒΣ βρίσκονται σε αντίθετα μέρη της ΑΒ. Τα σημεία Κ, Λ, Μ βρίσκονται πάνω στις ΑΒ, ΑΡ και ΑΣ έτσι ώστε ΚΛ//ΒΡ, ΚΜ//ΒΣ.

Δείξτε ότι: **i.** $\frac{ΑΛ}{ΛΡ} = \frac{ΑΜ}{ΜΣ}$ **ii.** $ΛΜ // ΡΣ$