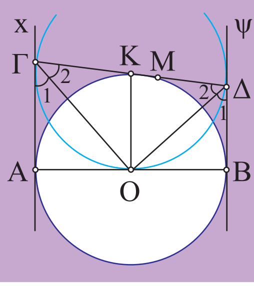
$6^{ο}$ Κεφάλαιο

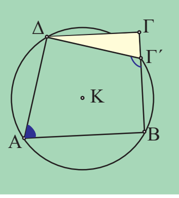
$9^{ο}$ μάθημα

Κύκλος



$10^{ο}$ μάθημα

Εγγεγραμμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα



Μάθημα 9

Κύκλος

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ

Ορισμοί

i) Μια γωνία λέγεται **εγγεγραμμένη** σε κύκλο, όταν η κορυφή της είναι πάνω στον κύκλο και οι πλευρές της χορδές του.

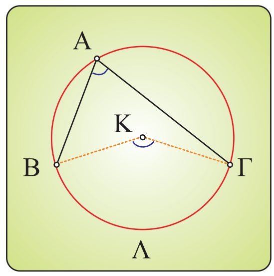
π.χ. η $\hat{A}$.

ii) Το τόξο που περιέχεται μεταξύ των πλευρών της εγγεγραμμένης λέγεται αντίστοιχο τόξο αυτής.

π.χ. το $\overparen{B\Lambda\Gamma}$.

iii) Η επίκεντρη γωνία που βαίνει στο ίδιο τόξο με την εγγεγραμμένη λέγεται αντίστοιχη επίκεντρη της εγγεγραμμένης.

π.χ. η $B\hat{K}\Gamma$ είναι η αντίστοιχη **επίκεντρη** της $\hat{A}$.



Θεώρημα

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία σε κύκλο είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης.

Απόδειξη

Από το ισοσκελές τριγ. ΚΑΒ έχουμε:

$$\hat{K}_1 = x + x \Rightarrow \hat{K} = 2\hat{x} \ (1)$$

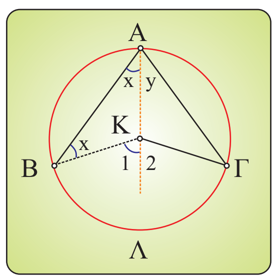
Όμοια από το ισοσκελές $K\hat{A}\Gamma$ έχουμε:

$$\hat{K}_2 = \hat{\psi} + \hat{\psi} \Rightarrow \hat{K}_2 = 2\hat{\psi} \ (2)$$

Προσθέτουμε τις (1), (2) και έχουμε:

$$\hat{K}_1 + \hat{K}_2 = 2\hat{x} + 2\hat{\psi} \Rightarrow B\hat{K}\Gamma = 2(x+\psi) \Rightarrow B\hat{K}\Gamma = 2B\hat{A}\Gamma$$

$$\Rightarrow B\hat{A}\Gamma = \frac{B\hat{K}\Gamma}{2}.$$



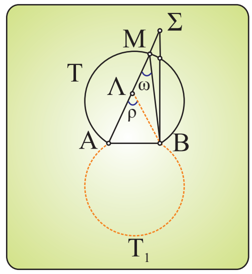
Πόρισμα Ι.

Στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους ίσες εγγεγραμμένες βαίνουν σε ίσα τόξα και αντίστροφα.

Πόρισμα ΙΙ.
Κάθε εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο είναι ορθή.
Πόρισμα ΙΙΙ.
Κάθε εγγεγραμμένη που βαίνει σε τόξο μικρότερο από ημικύκλιο είναι οξεία, ενώ κάθε εγγεγραμμένη που βαίνει σε τόξο μεγαλύτερο από ημικύκλιο είναι αμβλεία.

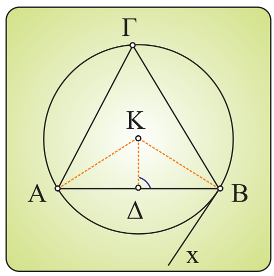
Παρατήρηση

Έστω ένα τόξο $\overset{\frown}{ATB}$ και AB η χορδή του. Παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία του τόξου $\overset{\frown}{ATB}$ (και του συμμετρικού του ως προς AB) έχουν την ιδιότητα να βλέπουν το AB υπό την ίδια γωνία $\hat{\omega}$. Τα σημεία Λ που είναι εσωτερικά του κυκλικού τμήματος βλέπουν το AB υπό γωνία $\hat{\rho}$ μεγαλύτερη της $\hat{\omega}$ ($\hat{\rho} > \hat{\omega}$ ως εξωτερική του τριγ. BΛΜ). Τα σημεία Σ που είναι εξωτερικά του κυκλικού τμήματος, βλέπουν το AB υπό γωνία $\hat{\nu} < \hat{\omega}$ (γιατί $\hat{\omega}$ εξωτερική του τριγ. BΜΣ). Επειδή τα σημεία του τόξου $\overset{\frown}{AT_1B}$) έχουν μια κοινή ιδιότητα που ανήκει σ' αυτά και μόνο αυτά αποτελούν ένα γεωμετρικό τόπο.



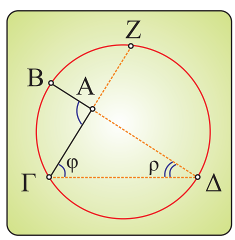
Θεώρημα
Η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή κύκλου και την εφαπτομένη του κύκλου που φέρνουμε στο ένα άκρο της χορδής, είναι ίση με την εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο που περιέχεται μέσα σ' αυτή.
Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι $\hat{\Gamma} = \dfrac{A\hat{K}B}{2} \Rightarrow \hat{\Gamma} = \Delta\hat{K}B \ (1)$. Επειδή $K\Delta \perp AB$ (διχοτόμος του ισοσκ. AKB) και $KB \perp Bx$ (εφαπτομένη και ακτίνα) έπεται $A\hat{B}x = \Delta\hat{K}B \ (2)$. Από τις (1), (2) έπεται $A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}x$.



Θεώρημα
Αν μια γωνία έχει την κορυφή της μέσα στον κύκλο, είναι ίση με το άθροισμα δύο εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στα τόξα, που ορίζονται από τις πλευρές της και τις προεκτάσεις τους.
Απόδειξη

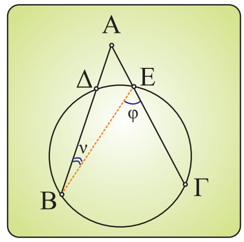
Έστω η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ που έχει την κορυφή της μέσα στον κύκλο. Φέρνουμε την ΓΔ, τότε $B\hat{A}\Gamma = \hat{\varphi} + \hat{\rho}$ ως εξωτερική του τριγ. ΑΓΔ.



Θεώρημα

Αν μια γωνία έχει την κορυφή της έξω από τον κύκλο και οι πλευρές της τον τέμνουν είναι ίση με τη διαφορά δύο εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στα τόξα που περιέχονται μεταξύ των πλευρών της.

Απόδειξη



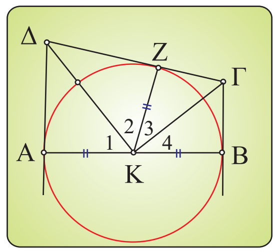
Έστω γωνία $B\hat{A}\Gamma$ που έχει την κορυφή της έξω από τον κύκλο, φέρνουμε την ΒΕ, τότε $\hat{\varphi} = \hat{A} + \hat{\nu}$ (ως εξωτερική του τριγώνου ΒΑΕ), άρα $\hat{A} = \hat{\varphi} - \hat{\nu}$.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Εφαρμογή 1

Οι ευθείες που ενώνουν το κέντρο ενός κύκλου με τις τομές δύο παραλλήλων εφαπτομένων από τρίτη εφαπτομένη είναι κάθετες μεταξύ τους.

Λύση



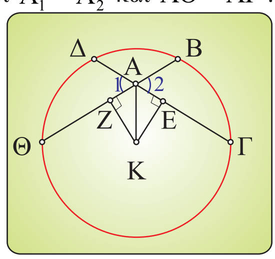
Φέρνουμε την ΚΖ και τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΚΖΔ είναι ίσα, από την ισότητα έχουμε $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$ δηλαδή η ΚΔ διχοτόμος της γωνίας $A\hat{K}Z$. Όμοια τα τρίγ. ΚΖΓ και ΚΒΓ είναι ίσα και άρα $\hat{K}_3 = \hat{K}_4$ επομένως η ΚΓ διχοτόμος της $Z\hat{K}B$, οι διχοτόμοι όμως των εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών τέμνονται κάθετα.

Εφαρμογή 2

Δύο ίσες χορδές τέμνονται μέσα στο κύκλο (Κ,Α) στο σημείο Α. Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν ίσες γωνίες με την ΚΑ και ότι τμήματα αυτών είναι ανά δύο ίσα.

Λύση

Έστω ΘΒ, ΔΓ δύο ίσες χορδές που τέμνονται στο Α, θα δείξουμε ότι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ και $A\Theta = A\Gamma$.

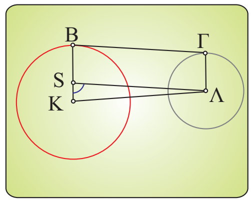


Από το Κ φέρνουμε τις ΚΖ, ΚΕ κάθετες προς τις ΘΒ, ΓΔ τότε $KZ = KE$ (1) γιατί το κέντρο απέχει ίσα από τις ίσες χορδές. Τα τρίγωνα ΚΑΖ και ΚΑΕ είναι ίσα ($KA = KA$, $\hat{Z} = \hat{E} = 1$, ορθ. και $KZ = KE$) από την ισότητα των τριγώνων έπεται $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ και $ZA = AE$ (2) . Επειδή $Z\Theta = E\Gamma$ (3) σαν μισά των ΑΒ, ΓΔ έπεται από τις (2), (3) $\Theta A = A\Gamma$.

Εφαρμογή 3

Να αποδείξετε ότι η κοινή εφαπτομένη δύο άνισων κύκλων είναι μικρότερη από τη διάκεντρο τους.

Λύση

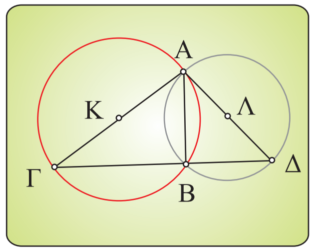


Έστω ΒΓ η κοινή εφαπτομένη δύο άνισων κύκλων και ΚΛ η διάκεντρος, θα δείξουμε ότι: $ΒΓ < ΚΛ$. Φέρνουμε τις ακτίνες ΚΒ, ΛΓ τότε $ΚΒ \parallel ΛΓ$ γιατί είναι κάθετες στη ΒΓ. Από το Λ φέρνουμε παράλληλο προς την ΒΓ.Τότε $ΒΓ = ΛS$, αλλά $ΛS < ΚΛ$ από το ορθογώνιο ΚΛS, άρα $ΒΓ < ΚΛ$.

Εφαρμογή 4

Δύο κύκλοι τέμνονται στα Α, Β.Αν Γ, Δ τα διαμετρικά σημεία του Α, να αποδείξετε ότι ΓΒΔ είναι ευθεία.

Λύση

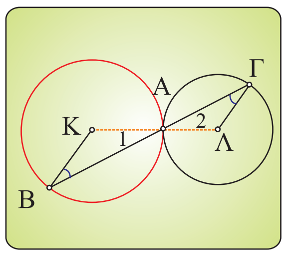


Φέρνουμε την κοινή χορδή ΑΒ οπότε: $Α\hat{Β}Γ = 90^{o}$ γιατί είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Όμοια $Α\hat{Β}Δ = 90^{o}$ άρα ΓΒΔ ευθεία.

Εφαρμογή 5

Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Από το Α φέρνουμε μια τυχαία τέμνουσα. Να αποδείξετε ότι οι ακτίνες που καταλήγουν στα άκρα της τέμνουσας είναι παράλληλες.

Λύση



Για να δείξουμε ότι $ΚΒ \parallel ΛΓ$ αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{Β} = \hat{Γ}$. Φέρνουμε την ΚΛ. Αυτή θα περάσει από το Α. Τα τρίγωνα ΚΒΑ και ΛΑΓ είναι ισοσκελή και επομένως θα είναι:

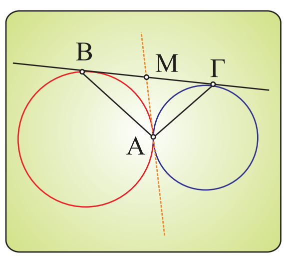
$$\hat{Β} = \hat{Α}_1 \ (1) \ \text{και} \ \hat{Γ} = \hat{Α}_2 \ (2).$$

Επειδή όμως $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2 \ (3)$. Από τις (1), (2) έχουμε $\hat{Β} = \hat{Γ}$ και επομένως $ΚΒ \parallel ΛΓ$.

Εφαρμογή 6

Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Αν ΒΓ η κοινή εξωτερική εφαπτομένη αυτών, να αποδείξετε ότι $Γ\hat{Α}Β = 90^{o}$.

Λύση

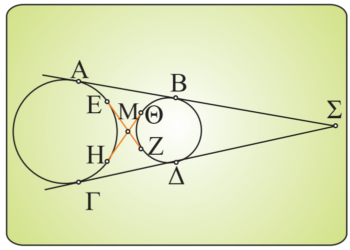


Φέρνουμε την κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο Α και έστω Μ το σημείο της τομής αυτής με την ΒΓ. Τότε $ΜΒ = ΜΑ$ και $ΜΑ = ΜΓ$ (εφαπτόμενα τμήματα από σημείο προς κύκλο). Άρα $ΜΑ = ΜΒ = ΜΓ$ και επομένως ο κύκλος διαμέτρου ΒΓ θα περάσει από το Α οπότε η $\hat{Α}$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο θα είναι ορθή.

Εφαρμογή 7

Να αποδείξετε ότι οι κοινές εφαπτομένες δύο κύκλων είναι ανά δύο ίσες.

Λύση



Θα αποδείξουμε ότι $AB = \Gamma\Delta$ και $EZ = H\Theta$.

Έχουμε $\Sigma A = \Sigma\Gamma\ (1)$ και $\Sigma B = \Sigma\Delta\ (2)$ (εφαπτομένα τμήματα από σημείο σε κύκλο).

Από τις (1), (2) με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε $AB = \Gamma\Delta$.

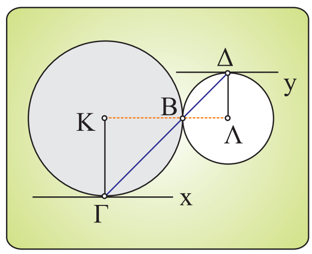
Όμοια $M\Theta = MZ\ (3)$ και $MH = ME\ (4)$

προσθέτουμε τις (3), (4) και έχουμε: $H\Theta = EZ$.

Εφαρμογή 8

Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο Β. Αν από το Β φέρουμε τυχαία τέμνουσα, να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες στα άκρα της τέμνουσας είναι παράλληλες.

Λύση



Έστω ΓΔ μια τέμνουσα και Δψ, Γx οι εφαπτομένες στα άκρα της, θα δείξουμε ότι $\Gamma x \parallel \Delta\psi$.

Φέρνουμε τις ακτίνες ΚΓ, ΓΔ τότε $\Gamma x \perp K\Gamma$ και $\Delta\psi \perp \Lambda\Delta$, επειδή $K\Gamma \parallel \Lambda\Delta$, έπεται ότι $\Gamma x \parallel \Delta\psi$.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

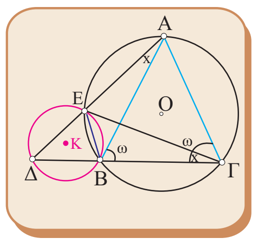
Η Αναλυτική Μέθοδος (Πλάτωνας 430 - 347 π. Χ.)

Οι αποδεικτικές μέθοδοι - συνθετική μέθοδος, η μέθοδος της απαγωγής σε άτοπο και η μέθοδος της αντιθετοαντιστροφής και της τέλειας επαγωγής - είναι γνωστές από την Άλγεβρα και χρησιμοποιούνται και στη λύση γεωμετρικών προβλημάτων.
Οι παραπάνω μέθοδοι δεν μας δίνουν ικανοποιητικά στοιχεία για το πως βρέθηκε η απόδειξη μιας πρότασης. Γι' αυτό ακολουθούμε την επόμενη σειρά συλλογισμών που λέγεται **ανάλυση**.
Δεχόμαστε ότι το πρόβλημα ή η ζητούμενη πρόταση αληθεύει και τη μετασχηματίζουμε διαδοχικά με τη βοήθεια γνωστών προτάσεων και θεωρημάτων μέχρι να καταλήξουμε σε μία αληθινή πρόταση ή σε μία πρόταση που δίνεται στην υπόθεση του προβλήματος.
Δηλαδή:
Έστω ότι η ζητούμενη πρόταση είναι η **Π**.
Δεχόμαστε ότι η **Π** είναι αληθινή και τη μετασχηματίζουμε διαδοχικά στις προτάσεις $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_\nu$, όπου η τελευταία πρόταση Π_ν είναι αληθινή ή δοσμένη στην υπόθεση του προβλήματος.
Οι παραπάνω προτάσεις είναι οι προτάσεις της ανάλυσης και διατυπωμένες με αντίστροφη σειρά αποτελούν τη σύνθεση.
Η λύση ενός προβλήματος παρουσιάζεται (διατυπώνεται) σχεδόν πάντοτε με τη σύνθεση.

Παράδειγμα 1

Στον κύκλο (Ο, ρ) παίρνουμε τις χορδές ΑΒ = ΑΓ και φέρνουμε από το Α ευθεία, που τέμνει τον κύκλο στο Ε και τη ΒΓ στο Δ. Να δειχθεί ότι η ΑΒ είναι εφαπτομένη του κύκλου, που διέρχεται από τα σημεία Β, Δ, Ε.

Λύση



Διατυπώνουμε τις προτάσεις της ανάλυσης:

Π : Δεχόμαστε ότι η ΑΒ είναι εφαπτομένη του κύκλου.

Π_1 : $\widehat{A\Delta B} = \widehat{EBA}$ (γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης)

Π_2 : $\widehat{EBA} = \widehat{E\Gamma A}$ (βαίνουν στο ίδιο τόξο ΑΕ)

Π_3 : $\widehat{E\Gamma A} = \omega - x$ (βλ. σχήμα)

Π_4 : $\widehat{A\Delta B} = \omega - x$ (διότι η γωνία ω είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΑΔΒ)

Οι παραπάνω προτάσεις μας οδηγούν στη διατύπωση της λύσης η οποία είναι:

$\widehat{A\Delta B} = \omega - x$, διότι η γωνία ω είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΑΔΒ και $\widehat{E\Gamma A} = \omega - x$

οπότε $\widehat{A\Delta B} = \widehat{E\Gamma A}$ και $\widehat{A\Delta B} = \widehat{EBA}$, που σημαίνει ότι η ΑΒ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β.

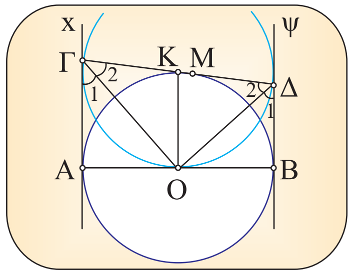
Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Στα άκρα Α, Β διαμέτρου ΑΒ κύκλου (Ο,ρ) φέρνουμε τις ημιεφαπτομένες Αx και Βψ προς το ίδιο ημιεπίπεδο της ΑΒ. Σε σημείο Μ του κύκλου φέρνουμε τρίτη εφαπτομένη, που τέμνει τις Αx, Βψ στα Γ και Δ. Να δειχθεί ότι:

α. $ΓΔ = ΑΓ + ΒΔ$, β. $Γ\hat{O}Δ = 90^{o}$, γ. Ο κύκλος διαμέτρου ΓΔ εφάπτεται της ΑΒ στο κέντρο Ο.

Λύση



α. Είναι $ΓΜ = ΓΑ$ και $ΔΜ = ΔΒ$.
Άρα $ΓΜ + ΔΜ = ΓΔ = ΑΓ + ΒΔ$.

β. Είναι $\hat{Γ}_1 = \hat{Γ}_2$ και $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2$. Επειδή Αx//Βψ έχουμε:

$$\hat{Γ} + \hat{Δ} = 180^{o} \Leftrightarrow \hat{Γ}_2 + \hat{Δ}_2 = \frac{\hat{Γ}}{2} + \frac{\hat{Δ}}{2} = 90^{o}$$

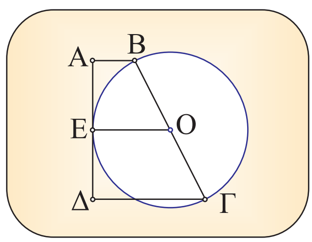
Επομένως $Γ\hat{O}Δ = 90^{o}$.

γ. Φέρνουμε την ΟΚ//ΑΓ//ΒΔ, οπότε $ΟΚ \perp ΑΒ$. Επειδή το Ο είναι μέσο της ΑΒ θα είναι το Κ μέσο της ΓΔ. Η διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΔΓ δηλ. η ΚΟ είναι ίση με $\frac{ΑΓ + ΒΔ}{2} = \frac{ΓΔ}{2}$, άρα ο κύκλος $\left(Κ, \frac{ΓΔ}{2}\right)$ περνά από το Ο. Επειδή $ΑΒ \perp ΚΟ$, η ΑΒ είναι εφαπτομένη του $\left(Κ, \frac{ΓΔ}{2}\right)$.

Άσκηση 2

Στο ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ $\left(\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^{o}\right)$ είναι $ΒΓ = ΑΒ + ΓΔ$. Να δειχθεί ότι ο κύκλος με διάμετρο τη ΒΓ εφάπτεται της ΑΔ.

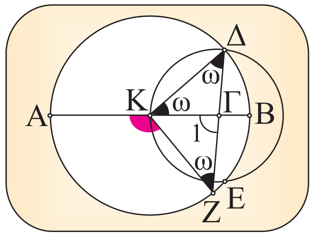
Λύση



Η διάμεσος ΟΕ του τραπεζίου είναι κάθετη στην ΑΔ- (ΟΕ//ΑΒ//ΓΔ). Επειδή $ΟΕ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2} = \frac{ΒΓ}{2}$, ο κύκλος $\left(Ο, \frac{ΒΓ}{2}\right)$ εφάπτεται στην ΑΔ ,αφού η ΑΔ είναι κάθετη στην ΟΕ.

Άσκηση 3
Σε κύκλο με κέντρο Κ φέρνουμε τη διάμετρο ΑΒ. Με κέντρο σημείο Γ της ΚΒ, τέτοιο ώστε ΚΓ > ΓΒ και ακτίνα ΓΚ γράφουμε κύκλο, που τέμνει τον (Κ, ΚΑ) στα Δ και Ε. Αν η ευθεία ΔΓτέμνει τον κύκλο (Κ,ΚΒ) στο σημείο Ζ, να δείξετε ότι η γωνία $A\hat{K}Z$ είναι τριπλάσια της γωνίας $B\hat{K}\Delta$.

Λύση



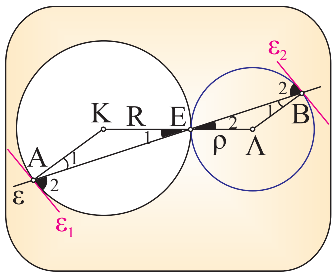
Επειδή ΚΔ = ΚΖ είναι : $\hat{\Delta} = \hat{Z} = \hat{\omega}$.

Επειδή ΓΚ = ΓΔ είναι : $\hat{\Delta} = \Delta\hat{K}\Gamma = \hat{\omega}$. Η γωνία ΑΚΖ ως εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΚΓΖ ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι γωνιών , δηλ. είναι:

$$A\hat{K}Z = \hat{\Gamma}_1 + \hat{Z} = \hat{\Delta} + \Delta\hat{K}\Gamma + \hat{Z} = \hat{\omega} + \hat{\omega} + \hat{\omega} = 3\hat{\omega}.$$

Άσκηση 4
Δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ε. Μία ευθεία ε περνάει από το Ε και τέμνει τους κύκλους στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι οι εφαπτόμενες ε_1 και ε_2 των κύκλων στα σημεία Α και Β είναι παράλληλες.

Λύση



Από τα ισοσκελή τρίγωνα ΚΑΕ και ΛΕΒ παίρνουμε:

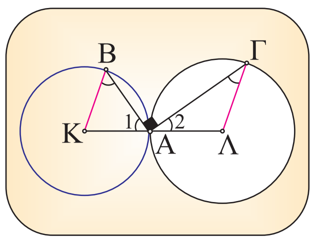
$$\hat{A}_1 = \hat{E}_1 = \hat{E}_2 = \hat{B}_1$$

Επομένως $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$, ως συμπληρώματα ίσων γωνιών.

Άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

Άσκηση 5
Δύο κύκλοι με κέντρα Κ και Λ εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Φέρνουμε δύο χορδές ΑΒ και ΑΓ των κύκλων κάθετες μεταξύ τους στο Α. Να δειχθεί ότι: ΚΒ//ΛΓ.

Λύση



Επειδή $B\hat{A}\Gamma = 90^o$ είναι $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^o$.

Άρα $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o \left(\hat{A}_1 = \hat{B},\ \hat{A}_2 = \hat{\Gamma}\right)$.

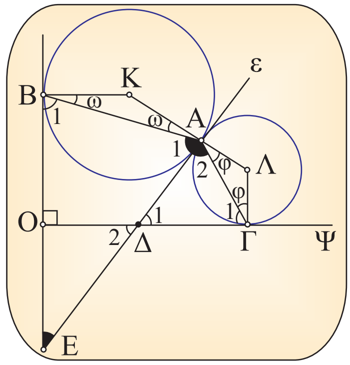
Επειδή $\hat{K} + \hat{B} + \hat{A}_1 + \hat{\Lambda} + \hat{\Gamma} + \hat{A}_2 = 360^o$ έχουμε:

$\hat{K} + \hat{\Lambda} + 90^o + 90^o = 360^o \Leftrightarrow \hat{K} + \hat{\Lambda} = 180^o \Rightarrow KB // \Gamma\Lambda$

(αφού είναι παραπληρωματικές οι εντός και επί τα αυτά γωνίες των ΚΒ και ΛΓ).

Άσκηση 6
Δύο κύκλοι με κέντρα Κ και Λ εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α και στις πλευρές της ορθής γωνίας xΟψ, στα σημεία Β και Γ. Να δειχθεί ότι $B\hat{A}\Gamma = 135^o$.

Λύση



Φέρνουμε την κοινή εσωτερική εφαπτόμενη ε, που τέμνει την Οψ στο Δ και την Οx στο Ε. Είναι $\hat{B}_1 = \hat{A}_1$, $\hat{\Gamma}_1 = \hat{A}_2$ (διότι ΕΒ = ΕΑ και ΔΑ = ΔΓ ως ίσα εφαπτόμενα τμήματα).

Είναι $\hat{E} = 180^o - 2\hat{A}_1$, $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Delta}_1 = 180^o - 2\hat{A}_2$.

Άρα $\hat{E} + \hat{\Delta}_2 = 360^o - 2\left(\hat{A}_1 + \hat{A}_2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(\hat{A}_1 + \hat{A}_2\right) = 360^o - \left(\hat{E} + \hat{\Delta}_2\right) = 360^o - 90^o = 270^o$.

Επομένως $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 135^o$ ή $B\hat{A}\Gamma = 135^o$.

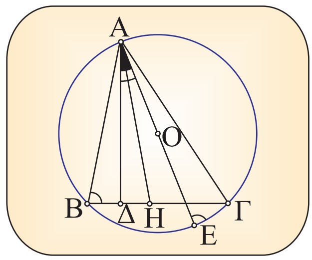
Άσκηση 7

Οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Β > Γ) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Φέρνουμε το ύψος ΑΔ, τη διάμετρο ΑΕ και τη διχοτόμο ΑΗ. Να δειχθεί ότι:

α. $B\hat{A}\Delta = E\hat{A}\Gamma$ **β.** $\Delta\hat{A}H = H\hat{A}E$ **γ.** $\Delta\hat{A}E = \hat{B} - \hat{\Gamma}\ \left(\hat{B} > \hat{\Gamma}\right)$.

Λύση

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΓΕ έχουν $\hat{B} = \hat{E}$ (ως εγγεγραμμένες στο τόξο ΑΓ). Επομένως $B\hat{A}\Delta = E\hat{A}\Gamma$.



β. Είναι $\Delta\hat{A}H = H\hat{A}E$, διότι

$$\Delta\hat{A}H = \frac{\hat{A}}{2} - B\hat{A}\Delta = \frac{\hat{A}}{2} - E\hat{A}\Gamma = H\hat{A}E$$

γ. $\Delta\hat{A}E = 2\cdot\Delta\hat{A}H = 2\left(90^o - A\hat{H}\Delta\right) = 180^o - 2\left(\frac{\hat{A}}{2} + \hat{\Gamma}\right) =$

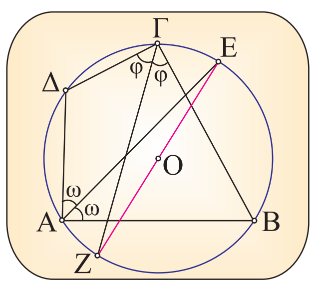
$= \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} - \hat{A} - 2\hat{\Gamma} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$

Άσκηση 8

Σε κύκλο (Ο,R) παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία Α,Β,Γ,Δ. Οι διχοτόμοι των εγγεγραμμένων γωνιών Α,Γ τέμνουν το κύκλο στα Ε, Ζ. Να δειχθεί ότι η ΕΖ είναι διάμετρος του κύκλου.

Λύση

Οι εγγεγραμμένες γωνίες ΒΑΔ και ΒΓΔ αντιστοιχούν στα τόξα ΒΕΔ και ΔΖΒ. Είναι $\overset{\frown}{BE} = \frac{\overset{\frown}{BE\Delta}}{2}$ και $\overset{\frown}{BZ} = \frac{\overset{\frown}{\Delta ZB}}{2}$.



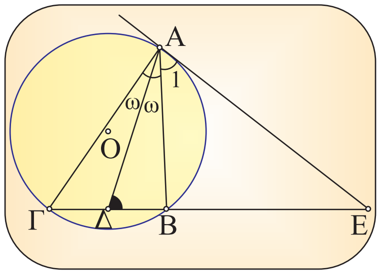
Άρα $\overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{BZ} = \frac{\overset{\frown}{BE\Delta} + \overset{\frown}{\Delta ZB}}{2} = \frac{360^o}{2} = 180^o$.

Επομένως η ΕΖ είναι διάμετρος του κύκλου.

Άσκηση 9

Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Φέρνουμε την εφαπτομένη στο Α που τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο σημείο Ε. Φέρνουμε την διχοτόμο ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

Λύση



$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$,ως γωνία χορδής και εφαπτομένης, οπότε

είναι $E\hat{A}\Delta = \hat{A}_1 + \hat{\omega} = \hat{\Gamma} + \hat{\omega}$.

Όμως $A\hat{\Delta}E = \hat{\omega} + \hat{\Gamma}$,ως εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ

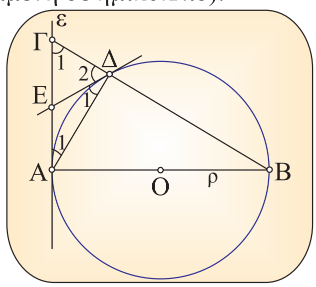
Άρα $E\hat{A}\Delta = A\hat{\Delta}E$ και το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

Άσκηση 10

Έστω κύκλος (Ο,ρ) και ΑΒ διάμετρος. Στο Α φέρνουμε την εφαπτομένη ε και ενώνουμε τυχαίο σημείο Γ της εφαπτομένης με το Β. Η ΒΓ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ. Να αποδειχθεί ότι η εφαπτομένη στο Δ περνάει από το μέσο Ε του ΑΓ.

Λύση

Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο γιατί $A\hat{\Delta}B = 90^o$ (εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο).



$\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$, ως ίσες με την αντίστοιχη εγγεγραμμένη γωνία Β.

Άρα $AE = \Delta E$.

Επειδή $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}_1$, ως συμπληρωματικές των $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$ θα είναι

$\Delta E = \Gamma E$. Επομένως $AE = E\Gamma = \dfrac{A\Gamma}{2}$.

Άσκηση 11

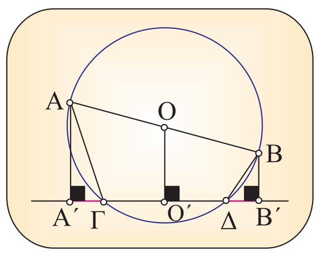
Σε κύκλο (Ο,ρ) θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και ΓΔ μία χορδή του. Να αποδειχθεί ότι οι χορδές ΑΓ και ΔΒ έχουν ίσες προβολές στην ευθεία ΓΔ.

Λύση

Φέρνουμε $AA' \perp \Gamma\Delta$, $BB' \perp \Gamma\Delta$ και $OO' \perp \Gamma\Delta$. Το Ο είναι το μέσο του Α΄Β΄ ,άρα η ΟΟ΄ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΑΑ΄Β΄Β .Είναι

$$A'\Gamma = A'O' - O'\Gamma \text{ και } B'\Delta = B'O' - O'\Delta.$$

Επομένως $A'\Gamma = B'\Delta$.



Άσκηση 12

Δύο κύκλοι (Κ, ρ) και (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο Α.

Φέρνουμε μια χορδή ΑΒ του κύκλου (Κ, ρ) και την χορδή $A\Gamma \perp AB$ του κύκλου (Λ, ρ). Να δειχθεί ότι ΒΓ//=ΚΛ.

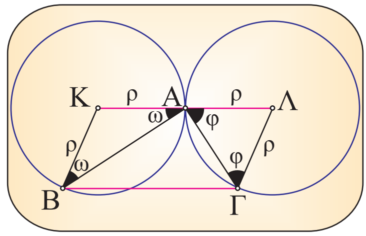
Λύση

Τα τρίγωνα ΚΒΑ και ΑΛΓ είναι ισοσκελή.

Επειδή $B\hat{A}\Gamma = 90^o \Leftrightarrow \hat{\omega} + \hat{\varphi} = 90^o \Leftrightarrow$

$2\hat{\omega} + 2\hat{\varphi} = 180^o \Leftrightarrow \hat{K} + \hat{\Lambda} = 180^o \Leftrightarrow KB // \Gamma\Lambda$.

Επίσης είναι ΚΒ = ΛΓ = ρ. Επομένως το ΚΒΓΛ είναι παραλληλόγραμμο. Ετσι προκύπτει ΒΓ//=ΚΛ.



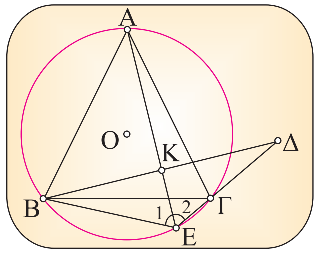
Άσκηση 13

Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Ο,ρ). Στο τόξο ΒΓ, που δεν ανήκει το Α, θεωρούμε σημείο Ε και φέρνουμε την $BK \perp AE$, που τέμνει την προέκταση της ΕΓ στο Δ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΔ είναι ισοσκελές.

Λύση

Επειδή $AB = A\Gamma \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A\Gamma}$, θα είναι $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ (1), ως εγγεγραμμένες σε ίσα τόξα.

Άρα η ΕΚ είναι ύψος και διχοτόμος στο τρίγωνο ΒΕΔ. Αυτό σημαίνει ότι το τρίγωνο ΒΕΔ είναι ισοσκελές.



Άσκηση 14

Θεωούμε δύο κάθετες χορδές ΑΒ και ΓΔ κύκλου (Ο,ρ), που τέμνονται στο Ι. Έστω Μ και Ρ τα μέσα των χορδών ΑΔ και ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α. $IM \perp B\Gamma$ και $IP \perp A\Delta$

β. ΟΜ = ΓΒ/2 και ΟΡ = ΑΔ/2.

Λύση

α. Η ΙΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΙΔ, οπότε ΙΜ = ΜΑ και $\hat{A} = A\hat{I}M = E\hat{I}B$.

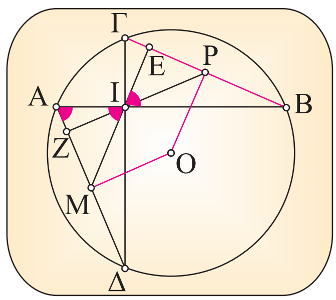
Επειδή $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ (ως εγγεγραμμένες στο $\overset{\frown}{B\Delta}$) και $\hat{\Gamma} + \hat{B} = 90^o$, παίρνουμε $E\hat{I}B + \hat{B} = 90^o$.

Άρα $IM \perp B\Gamma$. Όμοια προκύπτει ότι $IP \perp A\Delta$.

β. Επειδή $OM \perp A\Delta$, είναι ΟΜ//ΙΡ.

Επειδή $OP \perp B\Gamma$, είναι ΟΡ//ΙΕ. Άρα το ΜΟΡΙ είναι παραλληλόγραμμο και συνεπώς έχουμε:

$$OM = IP = \frac{B\Gamma}{2} \text{ και } OP = IM = \frac{A\Delta}{2}.$$

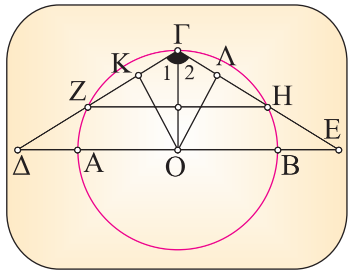


Άσκηση 15

Σε κύκλο με κέντρο Ο, θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και ακτίνα $O\Gamma \perp AB$. Στις προεκτάσεις της διαμέτρου ΑΒ παίρνουμε τα τμήματα ΑΔ = ΒΕ. Οι ΓΔ και ΓΕ, τέμνουν το κύκλο στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι:

α. ΖΔ = ΗΕ **β. ΖΗ//ΔΕ.**

Λύση



Επειδή ΟΔ = ΟΕ και $ΟΓ \perp ΔΕ$,το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές. Οπότε $\hat{Γ}_1 = \hat{Γ}_2$ και ΓΔ = ΓΕ. Φέρνουμε τις $ΟΚ \perp ΓΔ$ και $ΟΛ \perp ΓΕ$, τότε ορθογώνια τρίγωνα ΟΚΓ και ΟΛΓ είναι ίσα, (διότι έχουν ΟΓ κοινή υποτείνουσα και $\hat{Γ}_1 = \hat{Γ}_2$). Επομένως ΟΚ = ΟΛ, οπότε είναι ΓΖ = ΓΗ, ως χορδές των αποστημάτων ΟΚ,ΟΛ. Άρα

α. ΖΔ = ΗΕ (ως διαφορές ίσων τμημάτων).

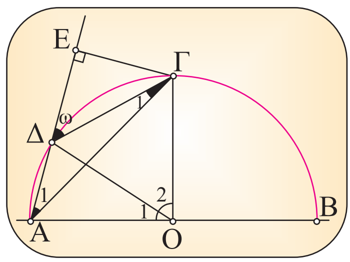
β. Από τα παραπάνω το τρίγωνο ΓΖΗ είναι ισοσκελές, οπότε η διχοτόμος ΓΟ της γωνίας Γ, είναι κάθετη στη ΖΗ. Επειδή $ΓΟ \perp ΖΗ$ και $ΓΟ \perp ΔΕ$ προκύπτει ότι ΖΗ//ΔΕ.

Άσκηση 16

Έστω Γ το μέσο ημικυκλίου διαμέτρου ΑΒ. Αν Δ σημείο του τόξου ΑΓ και Ε η προβολή του Γ στην ευθεία ΑΔ, να δειχθεί ότι: ΓΕ = ΕΔ.

Λύση

Είναι $Α\hat{Ο}Γ = 90^o$. Από το τρίγωνο ΔΑΓ έχουμε: $\hat{ω} = \hat{Α}_1 + \hat{Γ}_1$,(ως εξωτερική γωνία).



Επειδή $\hat{Α}_1 = \frac{1}{2}\hat{Ο}_2$ και $\hat{Γ}_1 = \frac{1}{2}\hat{Ο}_1$ (Η εγγεγραμμένη είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης), έχουμε:

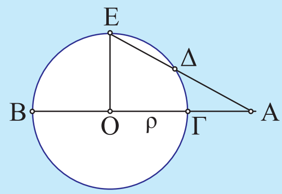
$$\hat{ω} = \frac{1}{2}\hat{Ο}_2 + \frac{1}{2}\hat{Ο}_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\hat{Ο}_1 + \hat{Ο}_2\right) = \frac{1}{2}Α\hat{Ο}Γ = \frac{1}{2}\cdot 90^o = 45^0$$

Άρα το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΔ είναι και ισοσκελές δηλ. ΓΕ = ΕΔ.

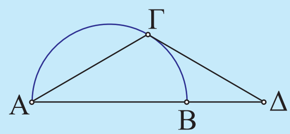
Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωρούμε σημείο Α στην προέκταση της διαμέτρου ΒΓ κύκλου (Ο,ρ). Από το Α φέρνουμε την ΑΔΕ, που τέμνει τον κύκλο, έτσι ώστε το ΔΑ να είναι ίσο με την ακτίνα.

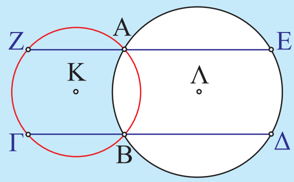
Να αποδείξετε ότι $E\hat{O}B = 3\Gamma\hat{O}\Delta$.



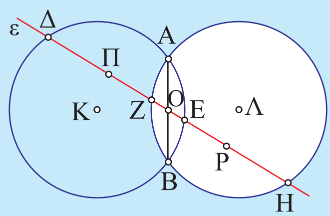
2. Δ ίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ.Φέρνουμε χορδή ΑΓ έτσι ώστε $\Gamma\hat{A}B = 30^o$. Στο σημείο Γ φέρνουμε την εφαπτόμενη, που τέμνει την ευθεία ΑΒ στο Δ. Να δειχθεί ότι $A\Gamma = \Gamma\Delta$.



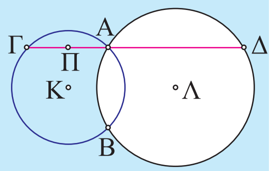
3. Γράφουμε δύο κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) που τέμνονται στα Α και Β. Αν Γ, Δ τα αντιδιαμετρικά σημεία του Α προς τους δύο κύκλους και Ζ, Ε τα αντιδιαμετρικά σημεία του Β, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΓΔΕΖ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



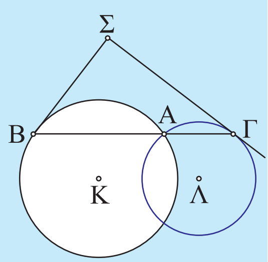
4. Θεωρούμε δύο ίσους κύκλους με κέντρα Κ και Λ που τέμνονται στα Α και Β. Γράφουμε τυχαία ευθεία ε που διέρχεται από το μέσον Ο της ΑΒ και τέμνει τον κύκλο Κ στα σημεία Δ, Ε και τον κύκλο Λ στα Ζ και Η (το Ζ ανήκει στην ΔΕ και το Ε στην ΖΗ).
Δείξτε ότι $OE = OZ$.



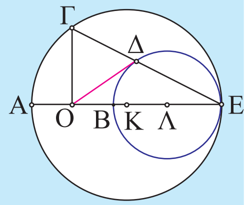
5. Γράφουμε δύο κύκλους με κέντρα Κ και Λ που τέμνονται στα Α και Β. Από το Α φέρνουμε παράλληλη στη διάκεντρο ΚΛ, που τέμνει τους κύκλους στα σημεία Γ, Δ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι η ΓΔ έχει διπλάσιο μήκος απο την ΚΛ.



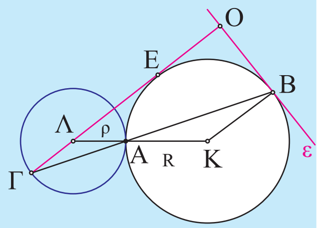
6. Από το ένα κοινό σημείο Α δύο τεμνόμενων κύκλων Κ και Λ φέρνουμε τυχαία ευθεία, που τους τέμνει στα σημεία Β και Γ. Να δειχθεί ότι οι εφαπτόμενες στα Β, Γ ορίζουν γωνία ίση με $180^o - K\hat{A}\Lambda$.



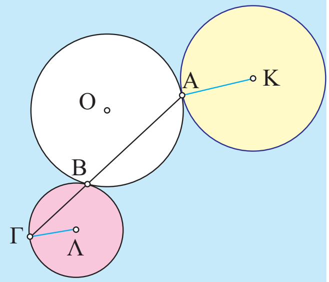
7. Γράφουμε δύο κύκλους (Κ, R) και (Λ, ρ) με R > ρ ,που εφάπτονται εσωτερικά στο Ε. Η ευθεία ΚΛ τέμνει τον (Κ, R) στο Α και τον (Λ, ρ) στο Β. Από το μέσον Ο του τμήματος ΑΒ φέρνουμε την ΟΓ κάθετη στην ΑΒ. Αν η ευθεία ΕΓ τέμνει τον κύκλο (Λ, ρ) στο Δ, να δείξετε ότι η ευθεία ΟΔ είναι εφάπτεται στον κύκλο (Λ, ρ).



8. Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Από το Α φέρνουμε ευθεία, που τέμνει τον (Λ, ρ) στο σημείο Γ και τον (Κ, R) στο σημείο Β. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη ε του κύκλου (Κ, R), στο Β είναι κάθετη στην ευθεία ΓΛ.



9. Δύο κύκλοι με κέντρα Κ και Λ εφάπτονται σε κύκλο με κέντρο Ο στα σημεία Α και Β. Αν η ευθεία ΑΒ τέμνει τον κύκλο με κέντρο Λ στο Γ, να δείξετε ότι οι ΚΑ και ΛΓ είναι παράλληλες.

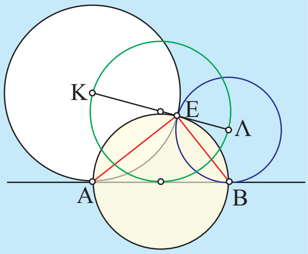


10. Γράφουμε δύο κύκλους (Κ, R) και (Λ,ρ) που εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ε. Φέρνουμε και την κοινή εξωτερική εφαπτόμενη τους που εφάπτεται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

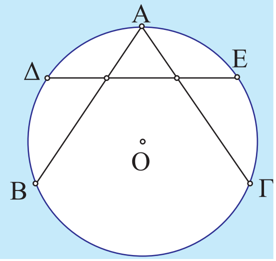
α. Το τίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο

β. Ο κύκλος με διάμετρο την ΑΒ εφάπτεται στην διάκεντρο των κύκλων στο σημείο Ε.

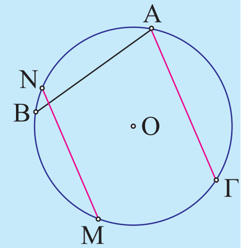
γ. Η ευθεία ΑΒ εφάπτεται στον κύκλο με διάμετρο την ευθεία ΚΛ.



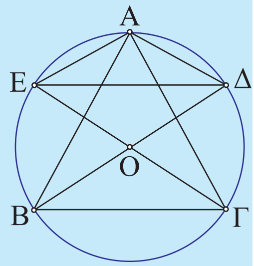
11. Γράφουμε κύκλο (Ο,R) και παίρνουμε δύο ίσα τόξα με κοινή αρχή και μέτρο 120^o το καθένα. Έστω Δ και Ε τα μέσα των ίσων τόξων. Να δείξετε ότι η ΔΕ χωρίζεται σε τρία ίσα μέρη από τις αντίστοιχες χορδές των ίσων τόξων που θεωρήσαμε.



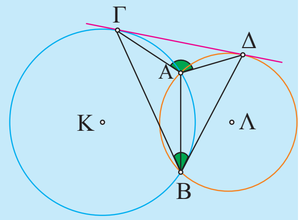
12. Θεωρούμε σημεία Α, Β, Γ κύκλου (Ο, R). Από το μέσο Μ του τόξου ΒΓ φέρνουμε τη χορδή ΜΝ παράλληλη στην ευθεία ΑΓ. Να δείξετε ότι τα τόξα ΑΒ και ΜΝ είναι ίσα.



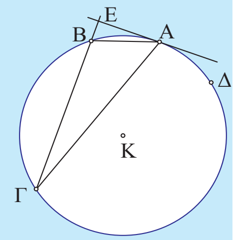
13. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο-.Αν οι διχοτόμοι των ίσων γωνιών Β και Γ του ισοσκελούς τριγώνου τέμνουν το κύκλο στα σημεία Δ, Ε και Ο είναι το σημείο τομής των διχοτόμων, να δειχθεί ότι το τετράπλευρο ΑΔΟΕ είναι ρόμβος.



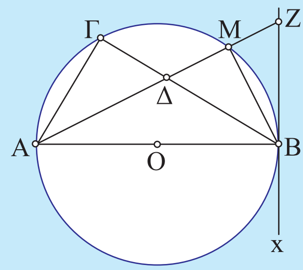
14. Γράφουμε δύο κύκλους που τέμνονται στα σημεία Α και Β. Φέρνουμε την κοινή εφαπτομένη τους ΓΔ.Να δειχθεί ότι οι γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $\Gamma\hat{B}\Delta$ είναι παραπληρωματικές.



15. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο και τέτοιο ώστε να είναι $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 90^{o}$. Να δειχθεί ότι η ευθεία ΒΓ είναι κάθετη στην εφαπτομένη στο Α.

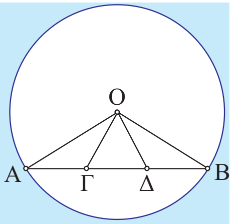


16. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο.Γράφουμε τη διάμετρο ΑΒ και σημειώνουμε τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Φέρνουμε την εφαπτομένη Βx και τη διχοτόμο της γωνίας ΒΑΓ, που τέμνει τη ΒΓ στο Δ, τον κύκλο στο Μ και τη Βx στο Ζ. Να δειχθεί ότι ΔΒ = ΒΖ.

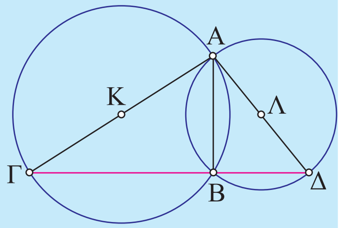


17. Χωρίζουμε τη χορδή ΑΒ κύκλου (Ο,ρ) σε τρία ίσα ευθ.τμήματα ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ. Να δειχθεί ότι:

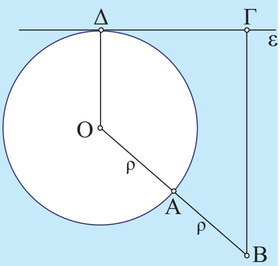
α. $Α\hat{Ο}Γ = Δ\hat{Ο}Β$ **β.** $Α\hat{Ο}Γ < Γ\hat{Ο}Δ$



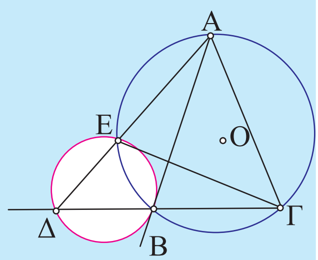
18. Γράφουμε δύο κύκλους που τέμνονται στα σημεία Α και Β. Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του Α ως πρός τους δύο κύκλους, να δείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ, Β είναι συνευθειακά.



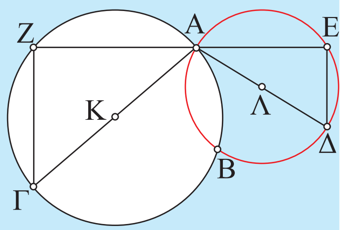
19. Γράφουμε κύκλο (Ο,ρ) και στην προέκταση της ακτίνας ΟΑ, παίρνουμε ευθ.τμήμα ΑΒ ίσο με την ακτίνα.Φέρνουμε τη ΒΓ κάθετη σε τυχαία εφαπτόμενη ε του κύκλου. Να δείξετε ότι η γωνία $Ο\hat{Α}Γ$ είναι τριπλάσια της $Α\hat{Γ}Β$.



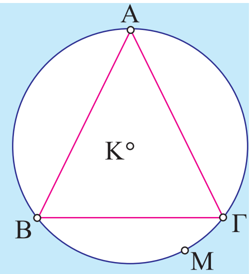
20. Θεωρούμε κύκλο (Ο,ρ) και γράφουμε τις ίσες χορδές ΑΒ , ΑΓ. Φέρνουμε από το Α ευθεία, που τέμνει τον κύκλο στο Ε και τη ΒΓ στο Δ. Να δείξετε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Β, Δ, Ε εφάπτεται στην ΑΒ.



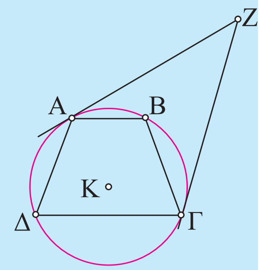
21. Γράφουμε δύο κύκλους που τέμνονται στα σημεία Α και Β. Φέρνουμε τις διαμέτρους ΑΚΓ και ΑΛΔ και τις παράλληλες χορδές ΓΖ και ΔΕ. Να δειχθεί ότι τα σημεία Ζ, Α, Ε βρίσκονται στην ίδια ευθεία.



22. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο στον κύκλο (Κ,R) τυχαίο σημείο Μ του τόξου ΒΓ. Να δείξετε ότι: ΜΑ = ΜΒ + ΜΓ.



23. Τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ) είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Κ,ρ). Να δείξετε ότι, η γωνία των εφαπτόμενων του κύκλου αυτού, στα σημεία Α και Γ, είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζουν οι προεκτάσεις των πλευρών ΑΔ και ΒΓ.



Δ. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Α. Σε κύκλο παίρνουμε σημείο Γ της διαμέτρου ΑΒ. Γράφουμε τους κύκλους με διαμέτρους τα ευθ,τμήματα ΑΓ και ΓΒ. Φέρνουμε ευθεία που διέρχεται από το Γ και τέμνει τους τρεις κύκλους κατά σειρά στα σημεία Δ, Ε, Ζ και Η.
Να δείξετε ότι: ΔΕ = ΖΗ.

Β. Γράφουμε κύκλο (Ο,R) και παίρνουμε δύο τόξα μικρότερα των 180^0 με κοινή αρχή Α. Έστω Δ και Ε τα μέσα των τόξων. Αν η ΔΕ τέμνει τις χορδές που θεωρήσαμε στα Ζ,Η να δείξετε ότι ΑΖ = ΑΗ.