Μάθημα 4

Βασικοί γεωμετρικοί τόποι Ανισοτικές σχέσεις

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

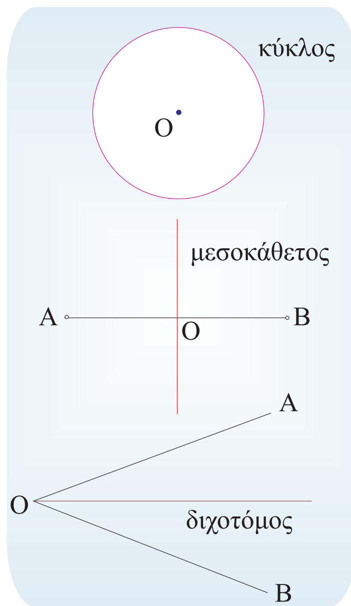
Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

Γεωμετρικός τόπος είναι ένα σύνολο σημείων του επιπέδου τα οποία έχουν μια κοινή ιδιότητα. Τρείς από τους βασικότερους γεωμετρικούς τόπους είναι :

• **Ο κύκλος**
Είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από σταθερό σημείο.

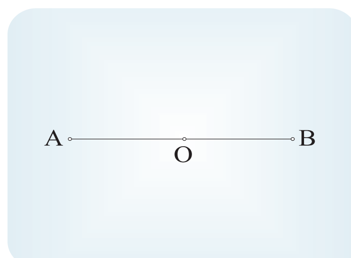
• **Η μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος**
Είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος.

• **Η διχοτόμος γωνίας**
Είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

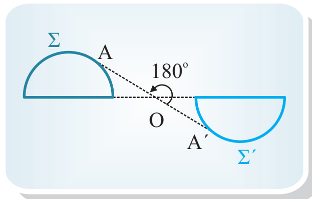


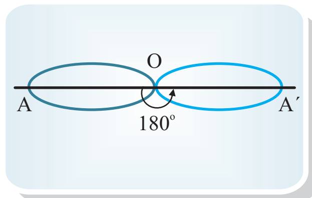
Συμμετρικά σχήματα

Έστω Ο σημείο του επιπέδου. Για κάθε σημείο Α του επιπέδου, διαφορετικό του Ο, υπάρχει ένα μοναδικό σημείο Β τέτοιο ώστε το Ο να είναι μέσο του ΑΒ.
Τα Α και Β λέγονται **συμμετρικά** σημεία ως πρός κέντρο συμμετρίας το Ο και ειδικότερα το Β λέγεται **συμμετρικό** του Α.
Προφανώς και το Α είναι **συμμετρικό** του Β.



Κεντρική συμμετρία.

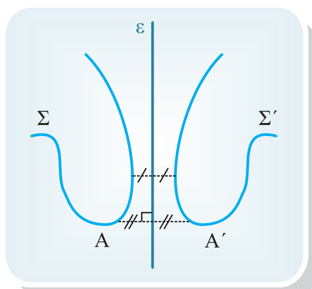




Δύο σχήματα Σ, Σ΄ λέγονται συμμετρικά ως προς ένα σημείο Ο, αν και μόνο αν κάθε σημείο του Σ΄ είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς το Ο. Το σημείο Ο λέγεται κέντρο συμμετρίας του σχήματος, που αποτελείται απο τα συμμετρικά ως προς το Ο σχήματα Σ και Σ΄. Δηλαδή ένα σημείο Ο λέγεται κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος, όταν για κάθε σημείο Α του σχήματος το συμμετρικό του Α΄, ως προς το Ο, είναι επίσης σημείο του σχήματος. Ένα σχήμα με κέντρο συμμετρίας λέμε οτι παρουσιάζει κεντρική συμμετρία.

Αν στρέψουμε ένα σχήμα Σ, με κέντρο συμμετρίας το Ο, κατά 180° γύρω από το Ο, θα πάρουμε ένα σχήμα που θα συμπίπτει με το αρχικό.

Αξονική συμμετρία.



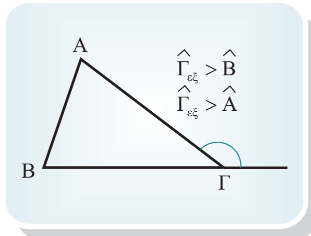
Δύο σχήματα Σ, Σ΄ λέγονται συμμετρικά ως προς την ευθεία ε, αν και μόνο αν κάθε σημείο του Σ΄ είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς την ε. Η ευθεία ε λέγεται άξονας συμμετρίας του σχήματος που αποτελείται από τα σχήματα Σ και Σ΄. Δηλαδή μια ευθεία ε λέγεται άξονας συμμετρίας ενός σχήματος, όταν για κάθε σημείο Α του σχήματος το συμμετρικό του Α΄, ως προς την ε, είναι επίσης σημείο του σχήματος. Ένα σχήμα με άξονα συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει αξονική συμμετρία. Αν ένα σχήμα έχει ως άξονα συμμετρίας μια ευθεία ε, τότε η ε χωρίζει νοητά το σχήμα σε δύο μέρη με τέτοιο τρόπο, ώστε, αν “διπλώσουμε το επίπεδο του σχήματος κατά μήκος της ε, τα μέρη αυτα θα ταυτιστούν.

Ανισοτικές σχέσεις

Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας.

Θεώρημα

Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε μια από τις απέναντι εσωτερικές.



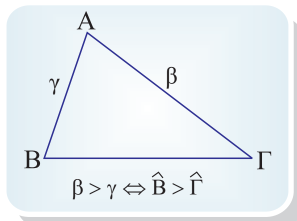
Πορίσματα

• Δύο γωνίες ενός τριγώνου έχουν άθροισμα μικρότερο από 180^o.

• Ένα τρίγωνο δεν μπορεί να έχει πάνω από μία ορθή ή αμβλεία γωνία.

Θεώρημα

Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες γωνίες βρίσκονται ομοίως άνισες πλευρές και αντίστροφα.



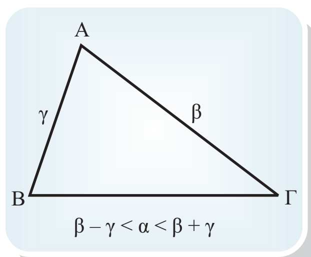
Πορίσματα

• Απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία ενός τριγώνου βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά.

• Ένα τρίγωνο με δύο ίσες γωνίες είναι ισοσκελές και με τρείς ίσες γωνίες είναι ισόπλευρο.

Τριγωνική ανισότητα

Κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από την διαφορά των δύο άλλων και μικρότερη από το άθροισμά τους.



Πόρισμα

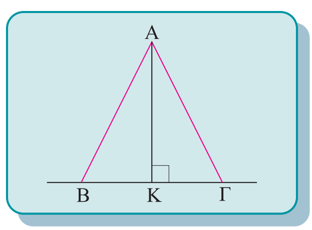
Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση από τη διάμετρο του κύκλου.

Παρατήρηση

• Η τριγωνική ανισότητα για τυχαία σημεία Α,Β,Γ του επιπέδου εκφράζεται από τη σχέση $|A\Gamma - B\Gamma| \leq AB \leq A\Gamma + B\Gamma$.

• Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες, τότε και οι τρίτες πλευρές είναι όμοια άνισες και αντίστροφα.

Κάθετες και πλάγιες ευθείες

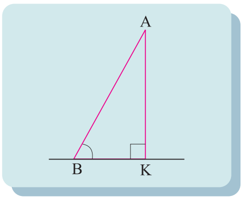


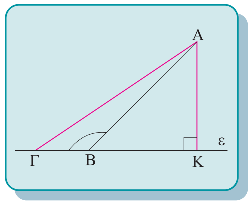
Θεώρημα

Από ένα σημείο εκτός ευθείας φέρουμε το κάθετο και δύο πλάγια τμήματα:

• Αν τα δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα μεταξύ τους τότε

τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου και αντίστροφα.



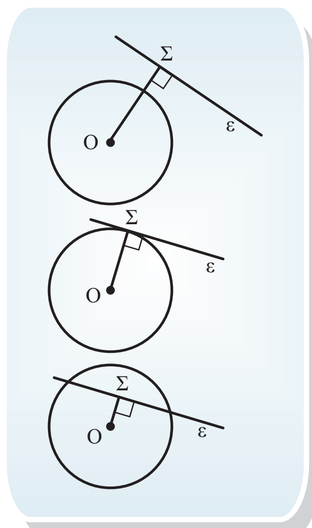


- **Αν τα δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα μεταξύ τους τότε οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της καθέτου είναι ομοιοτρόπως άνισες και αντίστροφα.**

- **Το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από οποιοδήποτε πλάγιο τμήμα.**

Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

Έστω κύκλος (Ο,ρ) και ΟΣ η απόσταση του σημείου Ο απο την ευθεία ε.



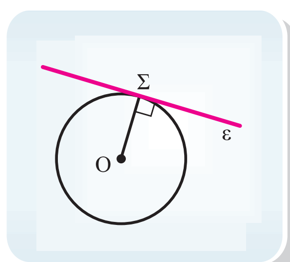
- Αν ισχύει ΟΣ > ρ τότε η ευθεία δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται εξωτερική του κύκλου.

- Αν ισχύει ΟΣ = ρ τότε η ευθεία έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται εφαπτόμενη του κύκλου και είναι μοναδική για το συγκεκριμένο σημείο επαφής. Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτόμενη.

- Αν ισχύει ΟΣ < ρ τότε η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο και λέγεται τέμνουσα του κύκλου.

Εφαπτομένη κύκλου

Μια ευθεία που έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τον κύκλο λέγεται εφαπτομένη του κύκλου
Η εφαπτομένη:
- Είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής.
- Σε κάθε σημείο του κύκλου είναι μοναδική.



Θεώρημα

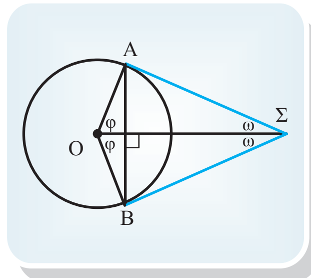
Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Πόρισμα

Τρια σημεία ενός κύκλου δεν μπορεί να είναι συνευθειακά.

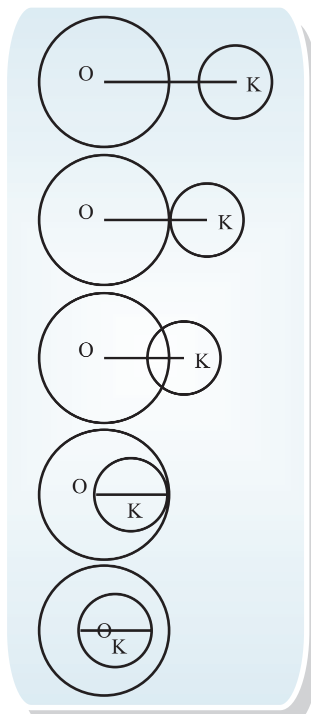
Διακεντρική ευθεία

Διακεντρική ευθεία σημείου Σ λέγεται η ευθεία ΣΟ η οποία διέρχεται από το σημείο Σ και το κέντρο Ο του κύκλου.
Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα R, Σ σημείο εκτός του κύκλου και ΣΑ, ΣΒ τα εφαπτόμενα τμήματα από το Σ προς τον κύκλο. Τα τρίγωνα $\Sigma\overset{\Delta}{O}A$ και $\Sigma\overset{\Delta}{O}B$ είναι ίσα, επομενως **τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΑ, ΣΒ είναι ίσα.**
Τότε η διακεντρική ευθεία:



- είναι μεσοκάθετος της χορδής ΑΒ
- διχοτομεί τη γωνία $A\hat{O}B$
- διχοτομεί τη γωνία $A\hat{\Sigma}B$

Σχετικές θέσεις δύο κύκλων



Έστω κύκλοι (Ο, R) και (Κ, ρ) με R > ρ. Το ευθύγραμμο τμήμα ΚΟ που ενώνει τα κέντρα των δύο κύκλων λέγεται διάκεντρος. Έστω ΚΟ = δ.

- Αν ισχύει δ > R + ρ τότε οι κύκλοι βρίσκονται ο ένας εκτός του άλλου.
- Αν ισχύει δ = R + ρ τότε οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο τομής τους με τη διάκεντρο.
- Αν ισχύει R – ρ < δ < R + ρ τότε οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία .
- Αν ισχύει δ = R - ρ τότε οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο τομής τους με τη διάκεντρο.α .
- Αν ισχύει R – ρ > δ τότε οι κύκλοι βρίσκονται ο ένας εντός του άλλου.

Γεωμετρικές κατασκευές

Η κατασκευή ενός σχήματος με τη βοήθεια αποκλειστικά του κανόνα και του διαβήτη ονομάζεται **γεωμετρική κατασκευή**. Η διαδικασία που ακολουθείται παρουσιάζεται σε τέσσερα βήματα.

Βήμα 1ο **Η ανάλυση**

Προσδιορίζουμε όλες τις ιδιότητες και τις συνθήκες που ισχύουν στο πρόβλημα που μελετάμε. Όταν η κατασκευή του σχήματος είναι φανερή τότε παραλείπουμε αυτό το βήμα.

Βήμα 2ο **Η κατασκευή**

Περιγράφουμε όλες τις απαραίτητες ενέργειες για την κατασκευή του σχήματος.

Βήμα 3ο **Η απόδειξη**

Επιβεβαιώνουμε ότι το κατασκευασμένο σχήμα πληροί τις συνθήκες και τις ιδιότητες του προβλήματος όπως περιγράφτηκαν στο Βήμα 1ο.

Βήμα 4ο **Η διερεύνηση**

Καταγράφουμε όλες τις αναγκαίες συνθήκες για τις οποίες το πρόβλημα έχει λύση καθώς και το πλήθος των λύσεων του προβλήματος.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Μέθοδος 1

Για τη λύση ενός προβλήματος γεωμετρικού τόπου ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Θεωρούμε τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου και προσδιορίζουμε την γραμμή στην οποία βρίσκεται με βάση την χαρακτηριστική του ιδιότητα.
- Κατασκευάζουμε την γραμμή του γεωμετρικού τόπου με κανόνα και διαβήτη.
- Θεωρούμε ένα δεύτερο τυχαίο σημείο της γραμμής που κατασκευάσαμε και αποδεικνύουμε ότι έχει την ίδια χαρακτηριστική ιδιότητα.

Μέθοδος 2

Για να αποδείξουμε μια σχέση ανισότητας μεταξύ δύο γωνιών ή δύο ευθυγράμμων τμημάτων:

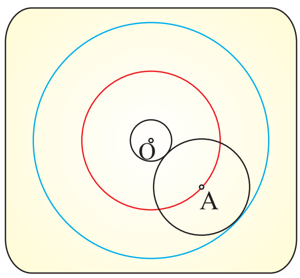
- Αν είναι στοιχεία του ίδιου τριγώνου χρησιμοποιούμε τις ανισοτικές σχέσεις τριγώνων.
- Αν δεν είναι στοιχεία του ίδιου τριγώνου τότε τα εξισώνουμε με κατάλληλα μεγέθη (πλευρές ή γωνίες) ώστε να τα μεταφέρουμε στο ίδιο τρίγωνο και χρησιμοποιούμε τις ανισοτικές σχέσεις τριγώνων.
- Αν δεν μπορεί να γίνει το δεύτερο βήμα τα συγκρίνουμε με ένα τρίτο μέγεθος και με τη μεταβατική ιδιότητα καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων (Κ, 2ρ) που εφάπτονται εξωτερικά με κύκλο (Ο, ρ). Επίσης να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων των κύκλων (Κ, 2ρ) που έχουν μέγιστη απόσταση από το Ο.

Λύση



Έστω Α ένα τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου. Τότε επειδή οι κύκλοι (Α,2ρ) και (Ο,ρ) εφάπτονται εξωτερικά ισχύει ΑΟ = 2ρ + ρ = 3ρ. Άρα τα σημεία του γεωμετρικού τόπου ισαπέχουν από το σημείο Ο απόσταση ίση με 3ρ άρα ανήκουν στον κύκλο (Ο,3ρ).

Αντίστροφα έστω τυχαίο σημείο Σ του κύκλου (Ο,3ρ). Με κέντρο το σημείο Σ κατασκευάζουμε κύκλο ακτίνας ίσης με 2ρ και με κέντρο το σημείο Ο κατασκευάζουμε κύκλο ακτίνας ίσης με ρ. Τότε ισχύει ΣΟ = 2ρ + ρ άρα οι κύκλοι (Σ,2ρ) και

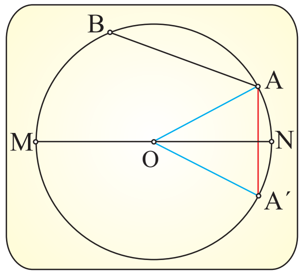
(Ο,ρ) εφάπτονται εξωτερικά.Ομοίως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων των κύκλων (Κ,2ρ) που έχουν μέγιστη απόσταση από το Ο είναι ο κύκλος (Ο,5ρ).

Άσκηση 2

Έστω κύκλος (Ο,ρ) και χορδή ΑΒ. Αν ΜΝ είναι μία διάμετρος που δεν τέμνει την ΑΒ δείξτε ότι το συμμετρικό του ΑΒ ως προς τη διάμετρο είναι επίσης χορδή του κύκλου.

Λύση

Έστω Α΄, Β΄ τα συμμετρικά των Α,Β ως πρός τη διάμετρο ΜΝ. Αρκεί να δείξουμε ότι τα Α΄και Β΄ ανήκουν και αυτά στον κύκλο (Ο,ρ). Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΝΑ και ΟΝΑ΄.



Έχουμε: $\left.\begin{array}{ll} NA = NA' & (\text{απο συμμετρία}) \\ ON & \text{κοινή πλευρά} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\text{τρ.}ONA = \text{τρ.}ONA' \Rightarrow OA = OA' = \rho$$

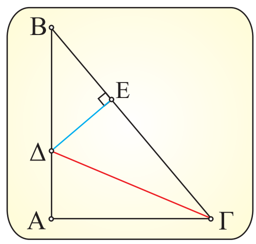
Άρα το Α΄ ανήνει στον κύκλο (Ο,ρ). Ομοίως αποδεικνύεται ότι και το Β΄ ανήκει επίσης στον κύκλο (Ο,ρ)

Άσκηση 3

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\widehat{A} = 90^o\right)$ η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Δείξτε ότι ΑΔ < ΔΒ.

Λύση

Από το σημείο Δ φέρνουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΕΓ και ΔΑΓ. Έχουμε:

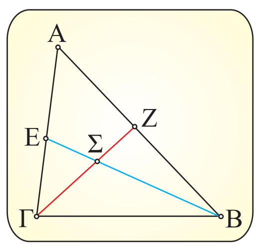


$\left.\begin{array}{ll} \Delta\widehat{\Gamma}E = \Delta\widehat{\Gamma}A & (\Delta\Gamma \text{ διχοτόμος}) \\ \Delta\Gamma & \text{κοινή πλευρά} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{\Delta E\Gamma} = \overset{\triangle}{\Delta A\Gamma} \Rightarrow \Delta E = \Delta A \quad (1)$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΕ η πλευρα ΒΔ είναι υποτείνουσα άρα ισχύει $B\Delta > \Delta E \overset{(1)}{\Leftrightarrow} B\Delta > \Delta A$

Άσκηση 4

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ > ΑΓ και οι διχοτόμοι ΒΕ και ΓΖ τέμνονται στο Σ. Να δείξετε ότι ΣΒ > ΣΓ.



Λύση

Έχουμε $AB > A\Gamma \Leftrightarrow \widehat{A\Gamma B} > \widehat{AB\Gamma} \Leftrightarrow \dfrac{\widehat{A\Gamma B}}{2} > \dfrac{\widehat{AB\Gamma}}{2} \Leftrightarrow$

$$\widehat{\Sigma\Gamma B} > \widehat{\Sigma B\Gamma} \Leftrightarrow \Sigma B > \Sigma\Gamma$$

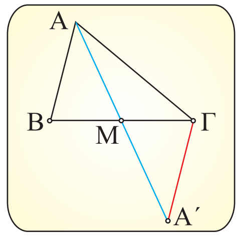
Άσκηση 5

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και ΑΜ διάμεσος αυτού. Να δείξετε ότι:

i. $\widehat{\text{MAB}} > \widehat{\text{MA}\Gamma}$ **ii.** $\dfrac{\beta-\gamma}{2} < \mu_\alpha < \dfrac{\beta+\gamma}{2}$

Λύση

ι. Στην προέκταση της ΑΜ θεωρούμε ΜΑ΄=ΑΜ και συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΑ΄Γ. Έχουμε:



$$\left.\begin{aligned} &\text{M}\Gamma = \text{MB} \\ &\text{MA} = \text{MA}' \\ &\widehat{\text{AMB}} = \widehat{\text{A}'\text{M}\Gamma} \end{aligned}\right\} \text{Οπότε } \overset{\triangle}{\text{MAB}} = \overset{\triangle}{\text{MA}'\Gamma}$$

$$\text{και συνεπώς } \begin{cases} \text{M}\hat{\text{A}}\text{B} = \text{M}\hat{\text{A}'}\Gamma \\ \text{AB} = \text{A}'\Gamma \end{cases}$$

Από υπόθεση $\text{AB} < \text{A}\Gamma \Leftrightarrow \text{A}'\Gamma < \text{A}\Gamma \Leftrightarrow \text{M}\hat{\text{A}}\Gamma < \text{M}\hat{\text{A}'}\Gamma \Leftrightarrow \text{M}\hat{\text{A}}\Gamma < \text{M}\hat{\text{A}}\text{B}$

ιι. Στο τρίγωνο ΑΆΓ έχουμε $\text{A}\Gamma > \text{A}'\Gamma$ και από τριγωνική ανισότητα

$$\text{A}\Gamma - \text{A}'\Gamma < \text{AA}' < \text{A}\Gamma + \text{A}'\Gamma \Leftrightarrow \text{A}\Gamma - \text{AB} < 2\text{AM} < \text{A}\Gamma + \text{AB} \Leftrightarrow$$

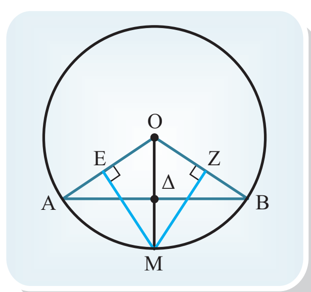
$$\frac{\text{A}\Gamma - \text{AB}}{2} < \text{AM} < \frac{\text{A}\Gamma + \text{AB}}{2} \Leftrightarrow \frac{\beta-\gamma}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$$

Άσκηση 6

Να αποδείξετε ότι το μέσο Μ τόξου $\overset{\frown}{\text{AB}}$ ισαπέχει από τις ακτίνες που αντιστοιχούν στα άκρα του τόξου και μάλιστα απόσταση ίση με το μισό της αντίστοιχης χορδής.

Λύση

Φέρουμε $\text{ME} \perp \text{OA}$, $\text{MZ} \perp \text{OB}$. Θα δείξουμε ότι: $\text{ME} = \text{MZ} = \dfrac{\text{AB}}{2}$. Η ακτίνα ΟΜ είναι διχοτόμος της $\text{A}\hat{\text{O}}\text{B}$, αφού $\text{A}\hat{\text{O}}\text{M} = \text{B}\hat{\text{O}}\text{M}$, διότι $\overset{\frown}{\text{AM}} = \overset{\frown}{\text{MB}}$ και σε ίσα τόξα του ίδιου κύκλου αντιστοιχούν ίσες επίκεντρες γωνίες. Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\triangle}{\text{EOM}}$ και $\overset{\triangle}{\text{ZOM}}$ είναι ίσα, διότι έχουν:



ΟΜ = ΟΜ (κοινή)

$\text{E}\hat{\text{O}}\text{M} = \text{Z}\hat{\text{O}}\text{M}$ (το αποδείξαμε παραπάνω).

Συνεπώς ΜΕ = ΜΖ (1)

Επειδή το Μ είναι μέσο του $\overset{\frown}{\text{AB}}$, ως γνωστόν ισχύει $\text{OM} \perp \text{AB}$ και αν Δ είναι το σημείο τομής των ΟΜ και ΑΒ, το Δ είναι μέσο του ΑΒ.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $O\overset{\Delta}{A}\Delta$, $O\overset{\Delta}{M}E$ έχουν:

$OA = OM$ (ως ακτίνες του κύκλου)

$A\hat{O}\Delta = E\hat{O}M$ (κοινή)

Άρα τα τρίγωνα $O\overset{\Delta}{A}\Delta$ και $O\overset{\Delta}{M}E$ είναι ίσα, οπότε είναι:

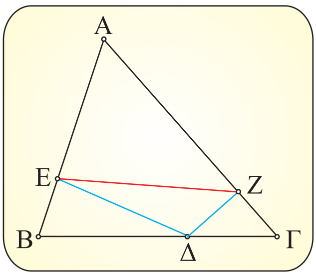
$$ME = A\Delta \Leftrightarrow ME = \frac{AB}{2} \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε: $ME = MZ = \dfrac{AB}{2}$.

Άσκηση 7

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Δ τυχαίο σημείο της ΒΓ. Αν Ε,Ζ είναι τα ίχνη των καθέτων από το Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα να δείξετε ότι η ΕΖ είναι μικρότερη από την πλευρά ΒΓ.

Λύση



Στο ορθογώνιο ΔΕΒ η ΒΔ είναι υποτείνουσα άρα $B\Delta > \Delta E$ (1).

Ομοίως στο ορθογώνιο ΔΖΓ η ΓΔ είναι υποτείνουσα άρα $\Gamma\Delta > \Delta Z$ (2).

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε :

$B\Delta + \Gamma\Delta > \Delta E + \Delta Z \Leftrightarrow B\Gamma > \Delta E + \Delta Z$ (3)

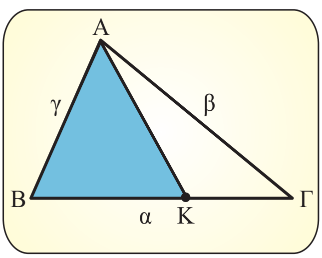
Από τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΔΕΖ ισχύει: $\Delta E + \Delta Z > EZ$ (4)

Αρα $(3) \overset{(4)}{\Rightarrow} B\Gamma > EZ$

Άσκηση 8

Σε τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ θεωρούμε τυχαίο σημείο Κ της πλευράς ΒΓ. Να δείξετε ότι: $\tau - \alpha < AK < \tau$.

Λύση



Από τα τρίγωνα $A\overset{\Delta}{B}K$, $A\overset{\Delta}{\Gamma}K$, έχουμε:

- $AB < BK + AK$ (1)
- $A\Gamma < \Gamma K + AK$ (2)

Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε:

$AB + A\Gamma < (BK + \Gamma K) + 2AK \Leftrightarrow \gamma + \beta < \alpha + 2AK \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\gamma+\beta)-\alpha < 2AK \Leftrightarrow 2\tau-\alpha-\alpha < 2AK \Leftrightarrow 2\tau-2\alpha < 2AK \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(\tau-\alpha) < 2AK \Leftrightarrow \tau-\alpha < AK \quad (3)$

Επίσης από τα ίδια τρίγωνα έχουμε:

• $AK < AB + BK \quad (4)$

• $AK < A\Gamma + K\Gamma \quad (5)$

Προσθέτουμε τις (4), (5) κατά μέλη και έχουμε:

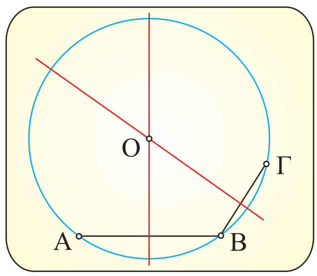
$2AK < AB + A\Gamma + (BK + K\Gamma) \Leftrightarrow 2AK < \gamma+\beta+\alpha \Leftrightarrow 2AK < 2\cdot\tau \Leftrightarrow AK < \tau \quad (6)$

Από (3) και (6) έχουμε: $\tau - \alpha < AK < \tau$

Άσκηση 9

Πάνω σε χαρτί χαράζουμε ένα κύκλο με τη βοήθεια ενός νομίσματος. Να βρείτε το κέντρο του κύκλου.

Λύση



Αναζητούμε το κέντρο ενός κύκλου. Επειδή από τρία μη συνευθειακά σημεία σημεία του επιπέδου διέρχεται μοναδικός κύκλος αρκεί να βρούμε ένα σημείο που να ισαπέχει από τρία σημεία του κύκλου.

Φέρνουμε τις διαδοχικές χορδές ΑΒ και ΒΓ. Κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο της χορδήςΑΒ και τη μεσοκάθετο της χορδής ΒΓ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ο που είναι και το ζητούμενο σημείο.

Πράγματι το σημείο Ο ανήκει στην μεσοκάθετο της χορδής ΑΒ οπότε ΟΑ = ΟΒ και στην μεσοκάθετο της χορδής ΒΓ οπότε ΟΒ = ΟΓ.

Δηλαδή ισχύει ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ.

Το σημείο Ο υπάρχει διότι διαφορετικά οι μεσοκάθετοι θα ήταν παράλληλοι άρα τα Α, Β, Γ θα ήταν συνευθειακά (που είναι άτοπο). Επίσης το σημείο Ο είναι μοναδικό σαν σημείο τομής δύο ευθειών.

Σημείωση: Η γεωμετρική κατασκευή της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος θεωρήθηκε δεδομένη.

Άσκηση 10

Έστω δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) με R > ρ, που δεν τέμνονται. Φέρουμε τις κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες τους. Να δείξετε ότι:

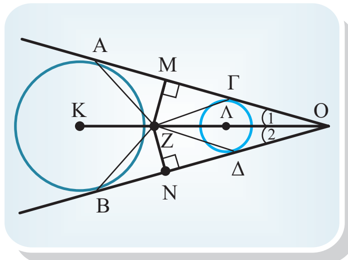
α. τέμνονται σε σημείο της διακέντρου.

β. οι μεσοκάθετοι των κοινών εξωτερικών εφαπτόμενων τμημάτων τέμνονται σε σημείο της διακέντρου.

Λύση

α. Στον (Κ, R) η διάκεντρος ΟΚ διχοτομεί τη γωνία $A\hat{O}B$ των εφαπτομένων τμημάτων.

Ομοίως στον (Λ, ρ) η ΟΛ διχοτομεί την $\Gamma\hat{O}\Delta$. Επειδή όμως η διχοτόμος γωνίας είναι μοναδική, συμπεραίνουμε ότι οι ευθείες ΟΚ και ΟΛ ταυτίζονται. Άρα το Ο ανήκει στην διάκεντρο ΚΛ.



β. Έστω Ζ το σημείο τομής της διακέντρου ΚΛ και της μεσοκαθέτου του ΑΓ. Τότε ΑΖ = ΖΓ (1).
Αρκεί να δείξουμε ότι το Ζ ανήκει στην μεσοκάθετο του ΒΔ, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι: ΖΒ = ΖΔ.

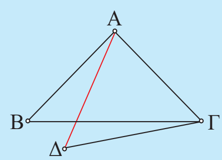
Τα τρίγωνα $Z\overset{\Delta}{O}\Gamma$ και $Z\overset{\Delta}{O}\Delta$ έχουν:
- ΟΖ = ΟΖ (κοινή)
- ΟΓ = ΟΔ (εφαπτόμενα τμήματα)
- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (ΟΛ διχοτόμος της $\Gamma\hat{O}\Delta$)

Άρα $Z\overset{\Delta}{O}\Gamma = Z\overset{\Delta}{O}\Delta$ (ΠΓΠ), οπότε: ΖΓ = ΖΔ (2)

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $Z\overset{\Delta}{O}A = Z\overset{\Delta}{O}B$, οπότε ΖΑ = ΖΒ (3)
Η (1) δια μέσου των (2) (3) γίνεται ΖΒ = ΖΔ.

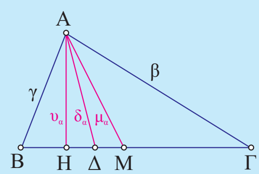
Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. α. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με ΑΓ = ΑΔ. Να δείξετε ότι τα σημεία Β,Γ και Δ δεν είναι συνευθειακά.

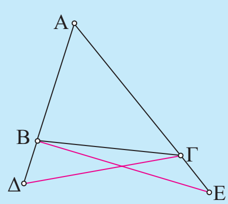


β. Να βρεθεί το κέντρο του κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές τριγώνου ΑΒΓ.

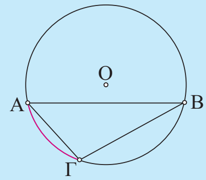
2. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να δειχθεί ότι: $\upsilon_\alpha \le \delta_\alpha \le \mu_\alpha$



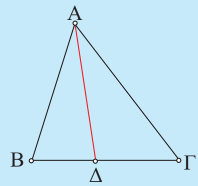
3. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα ΒΔ = ΓΕ. Να αποδειχθεί ότι ΒΕ > ΓΔ.



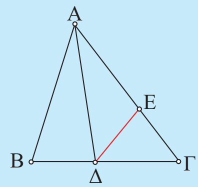
4. Σε κύκλο (Ο,ρ) η χορδή ΑΒ είναι διπλάσια μιας χορδής ΑΓ. Δείξτε ότι το κυρτογώνιο τόξο ΑΒ είναι μεγαλύτερο του διπλάσιου του κυρτογώνιου τόξου ΑΓ.



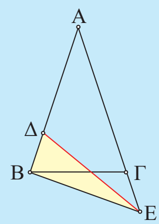
5. Στο τρίγωνο ΑΒΓ, είναι $ΑΒ < ΑΓ$. Αν η ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας Α, να δειχθεί ότι $ΒΔ < ΓΔ$.



6. Σε τρίγωνο ΑΒΓ, είναι $\hat{Β} < 90^{o}$ και $ΑΓ = 2ΑΒ$. Να αποδειχθεί ότι $\hat{Γ} < \hat{Α}/2$.



7. Στην πλευρά ΑΒ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, παίρνουμε τυχαίο σημείο Δ και στην προέκταση της ΑΓ το τμήμα $ΓΕ = ΒΔ$. Να δειχθεί ότι $ΔΕ > ΒΓ$.

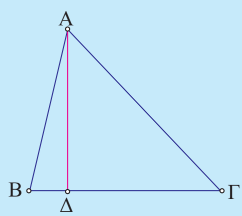


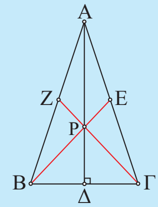
8. Στην πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημείο Δ. Να δειχθεί ότι:

α. $ΑΔ < \dfrac{ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ}{2}$

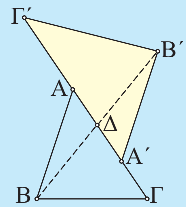
β. $ΑΔ > \dfrac{ΑΒ + ΑΓ - ΒΓ}{2}$ **γ.** $ΑΔ < ΑΒ + ΑΓ$

9. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κορυφών Α των τριγώνων ΑΒΓ με σταθερή πλευρά ΒΓ και με ύψος $υ_α$ γνωστού μήκους.





10. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και πάνω στο ύψος ΑΔ τυχαίο σημείο Ρ. Αν οι ΒΡ και ΓΡ τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα Ε και Ζ αντίστοιχα να δείξετε ότι ΒΕ = ΓΖ.



11. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΓ. Αποδείξτε ότι το συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΓ ως προς Δ είναι τρίγωνο ίσο με το ΑΒΓ.

12. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = α και ΒΓ > α. Για τυχαίο εσωτερικό σημείο Σ του τριγώνου δείξτε ότι $\mathrm{B\hat{\Sigma}\Gamma} > \mathrm{\Sigma\hat{B}\Gamma}$ και $\mathrm{B\hat{\Sigma}\Gamma} > \mathrm{\Sigma\hat{\Gamma}B}$.

13. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και μ_α η διάμεσος της κορυφής Α. Να δείξετε ότι:

ι) $\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2} < \mu_\alpha < \dfrac{\beta+\gamma}{2}$ **ιι)** $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} < \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < \alpha+\beta+\gamma$

14. Έστω κύκλοι (Κ,ρ) και (Ο,R) οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α.
- **ι.** Υπάρχει κύκλος που εφάπτεται εξωτερικά στους δύο προηγούμενους και έχει το κέντρο του πάνω στην κοινή τους εφαπτόμενη;
- **ιι.** Η διάκεντρος και οι κοινές τους εφαπτόμενες διέρχονται από το ίδιο σημείο; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

15. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ > ΑΒ και ΑΜ διάμεσος. Να δείξετε ότι:
- **ι.** Αν Σ τυχαίο σημείο της ΑΜ τότε ΣΓ > ΣΒ.
- **ιι.** Ισχύει $\mathrm{B\hat{A}M} > \mathrm{M\hat{A}\Gamma}$
- **ιιι.** Η γωνία $\mathrm{A\widehat{M}\Gamma}$ είναι αμβλεία.

16. Ένας γεωργός θέλει να περιφράξει με συρματόπλεγμα ένα χωράφι τριγωνικού σχήματος. Καθώς βρισκόταν μέσα στο χωράφι είπε στο γιο του: “Από τη μία κορυφή απέχουμε 40m και από τις άλλες δύο 60m. Μην αγοράσεις πάνω από 320m συρματόπλεγμα.” Πως ήξερε ότι θα ήταν αρκετό;

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη υ_α , υ_β και υ_γ . Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} < \upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < \alpha+\beta+\gamma$$