Μάθημα 10

Εγγεγραμμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

i) Ένα πολύγωνο $A_1A_2A_3...A_\nu$ λέγεται **εγγεγραμμένο** σε κύκλο όταν οι κορυφές του είναι σημεία ενός κύκλου.

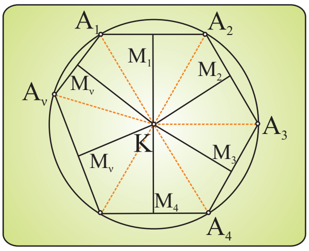
ii) Ένα πολύγωνο $A_1A_2A_3...A_\nu$ λέγεται **εγγράψιμο** σε κύκλο όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να περνά από τις κορυφές του.

Θεώρημα

Αν ένα πολύγωνο $A_1A_2A_3...A_\nu$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο οι μεσοκάθετοι των πλευρών του περνούν από το ίδιο σημείο.

Απόδειξη

Έστω το εγγεγραμμένο πολύγωνο $A_1A_2A_3...A_\nu$ θα δείξουμε ότι οι μεσοκάθετοι στις πλευρές του, περνούν από το ίδιο σημείο. Επειδή οι πλευρές του πολυγώνου είναι χορδές του κύκλου, και επειδή η κάθετος στο μέσον μιας χορδής περνά από το κέντρο του κύκλου έπεται ότι η μεσοκάθετοι στις πλευρές του πολυγώνου περνούν από το κέντρο του κύκλου.



Θεώρημα

Εάν οι $\nu-1$ μεσοκάθετοι των πλευρών ενός πολυγώνου $A_1A_2A_3...A_\nu$ περνούν από το ίδιο σημείο τότε το πολύγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Απόδειξη

Έστω το πολύγωνο $A_1A_2A_3...A_\nu$ του οποίου οι μεσοκάθετοι στις $\nu-1$ πλευρές του, περνούν από το σημείο Κ. Τότε το σημείο Κ επειδή ανήκει σε κάθε μία από τις $\nu-1$ μεσοκαθέτους θα ισαπέχει από τα άκρα των πλευρών δηλαδή:

$KA_1 = KA_2,\ KA_2 = KA_3 ... KA_{\nu-1} = KA_\nu \Rightarrow KA_1 = KA_2 = KA_3 = ... = KA_\nu$.

Άρα αν με κέντρο το Κ και ακτίνα το ΚΑ γράψουμε κύκλο αυτός θα περάσει από όλες τις κορυφές και επομένως το πολύγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο.

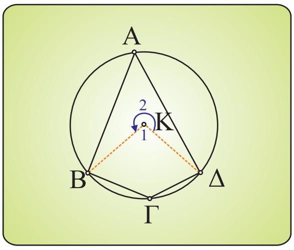
ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

Θεώρημα

Οι απέναντι γωνίες κάθε εγγεγραμμένου τετραπλεύρου είναι παραπληρωματικές και αντίστροφα.

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο . Φέρνουμε τις ΚΒ, ΚΔ και έχουμε: $\hat{A}=\frac{\hat{K}_1}{2}(1)$ και $\hat{\Gamma}=\frac{\hat{K}}{2}(2)$.



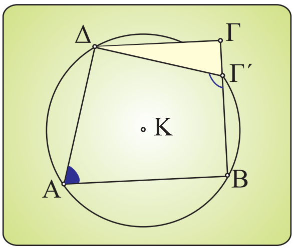
Άρα $\hat{A}+\hat{\Gamma}=\frac{\hat{K}_1+\hat{K}_2}{2}\Leftrightarrow \hat{A}+\hat{\Gamma}=\frac{360^o}{2}\Leftrightarrow \hat{A}+\hat{\Gamma}=180^o$

Αντίστροφα

Αν οι απέναντι γωνίες ενός τετραπλεύρου είναι παραπληρωματικές το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ ένα τετράπλευρο που έχει τις απέναντι γωνίες $A+\Gamma=180^o\ (1)$ θα δείξουμε ότι είναι εγγράψιμο. Γράφουμε τον κύκλο που περνά από τα σημεία Δ, Α, Β και έστω ότι δεν περνά από το Γ, τότε θα τμήσει την ΒΓ σ' ένα σημείο Γ΄ διάφορο του Γ΄και έχουμε: $A+\Gamma'=180^o\ (2)$. Από τις (1), (2) έπεται $\Gamma=\Gamma'$, που είναι άτοπο.



Πόρισμα

Κάθε ορθογώνιο είναι εγγράψιμο σε κύκλο και αντίστροφα.

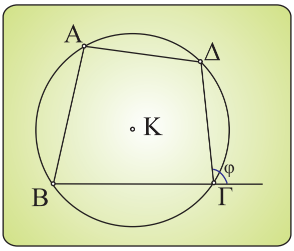
Θεώρημα

Η εξωτερική γωνία κάθε εγγεγραμμένου τετραπλεύρου είναι ίση με την εσωτερική και απέναντι και αντίστροφα.

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ ένα τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο, θα δείξουμε ότι $\hat{\varphi}=\hat{A}$. Είναι $\hat{\varphi}+\hat{\Gamma}=180^o$ (1) (ευθεία γωνία) και $\hat{\Gamma}+\hat{A}=180^o$ (2) (απέναντι γωνίες του εγγ. ΑΒΓΔ).

Από τις (1), (2) έπεται $\hat{\varphi}+\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}+\hat{A}\Rightarrow\hat{\varphi}=\hat{A}$.



Αντίστροφα

Αν η εξωτερική γωνία ενός τετραπλεύρου είναι ίση με την εσωτερική και απέναντι, τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

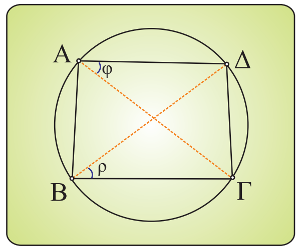
Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ ένα τετράπλευρο που η εξωτερική γωνία $\hat{\varphi} = \hat{A}\,(1)$ θα δείξουμε ότι αυτό είναι εγγράψιμο. Έχουμε $\hat{\varphi} + \hat{\Gamma} = 180^o\ (2)$.

Από τις $(1),(2)$ έπεται $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^o$, επομένως το ΑΒΓΔ εγγράψιμο.

Θεώρημα

Σε κάθε εγγεγραμμένο τετράπλευρο δύο διαδοχικές κορυφές βλέπουν την απέναντι πλευρά υπό ίσες γωνίες και αντίστροφα.



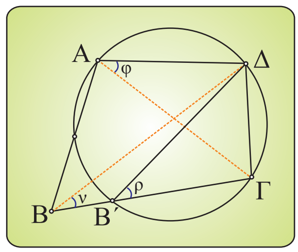
Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ ένα τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο. Τότε $\hat{\varphi} = \hat{\rho}$ γιατί είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΓΔ.

Αντίστροφα

Αν σε ένα τετράπλευρο δύο διαδοχικές κορυφές, βλέπουν την απέναντι πλευρά υπό ίσες γωνίες τότε είναι εγγράψιμο.

Απόδειξη



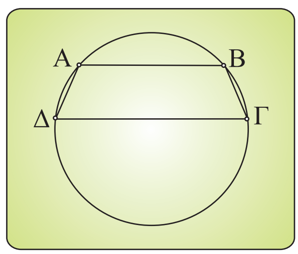
Έστω ΑΒΓΔ ένα τετράπλευρο στο οποίο $\hat{\varphi} = \hat{\nu}\,(1)$. Θα δείξουμε ότι είναι εγγράψιμο. Έστω ότι το ΑΒΓΔ δεν είναι εγγράψιμο, τότε ο κύκλος που περνά από τις κορυφές Α, Δ, Γ θα τμήσει την ΓΒ σ' ένα σημείο Β΄ διάφορο του Β. Φέρνουμε την Β΄Δ τότε $\hat{\varphi} = \hat{\rho}\,(2)$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\Delta\Gamma}$.

Από τις (1), (2) έπεται ότι $\hat{\rho} = \hat{\nu}$, που είναι άτοπο.

Θεώρημα

Κάθε ισοσκελές τραπέζιο είναι εγγράψιμο σε κύκλο και αντίστροφα.

Απόδειξη



Έστω το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ. Είναι $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^o\ (1)$ ως εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΔΓ που τέμνονται από την ΑΔ. Επίσης $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}\,(2)$ ως προσκείμενες στη βάση ΔΓ. Από τις (1), (2) έπεται $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^o$,άρα το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο.

Αντίστροφα

Κάθε εγγεγραμμένο τραπέζιο σε κύκλο, είναι ισοσκελές.

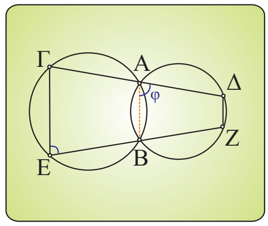
Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ ένα τραπέζιο εγγεγραμμένο σε κύκλο. Επειδή είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ έπεται $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^o\ (1)$. Επειδή είναι εγγεγραμμένο ισχύει : $\hat{A} + \hat{\Delta} = \hat{A} + \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$, αρά το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Παράδειγμα 1. Δύο κύκλοι τέμνονται στα Α, Β. Από τα Α, Β φέρνουμε δύο τέμνουσες ΓΑΔ και ΕΒΖ. Να αποδείξετε ότι οι χορδές ΓΕ και ΔΖ είναι παράλληλες.

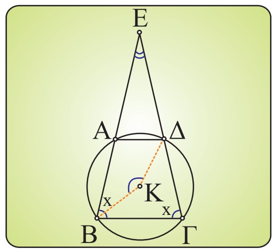
Απόδειξη



Φέρνουμε την ΑΒ τότε $\hat{\varphi} = \hat{E}$ (1) γιατί ή φ είναι εξωτερική στο εγγεγραμμένο ΑΒΕΓ. $\varphi + Z = 2$ ορθές. (2) γιατί είναι απέναντι γωνίες του εγγεγραμμένου ΑΔΖΒ. Από τις (1), (2) έχουμε $E + Z = 2$ ορθές. Επομένως $ΓΕ \parallel ΔΖ$.

Παράδειγμα 2ο. Δίνεται εγγεγραμμένο τραπέζιο ΑΒΓΔ σε κύκλο (Κ,R). Να αποδείξετε ότι ο κύκλος που περνά από τα Β, Κ, Δ, περνά και από το σημείο της τομής των μη παραλλήλων πλευρών του.

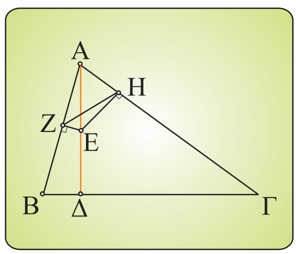
Απόδειξη



Επειδή το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμένο θα είναι ισοσκελές και επομένως $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{x}$. Από το τρίγωνο ΕΒΓ έχουμε $\hat{E} + \hat{x} + \hat{x} = 180^o \Leftrightarrow \hat{E} + 2\hat{x} = 180^o\,(1)$. Επειδή όμως $\hat{K} = 2\hat{x}$ (εγγεγραμμένη και η αντίστοιχη επίκεντρη) η (1) γίνεται: $\hat{E} + \hat{K} = 180^o$, άρα το ΕΒΚΔ είναι εγγράψιμο.

Παράδειγμα 3ο. Από ένα σημείο Ε του ύψους ενός τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε τις κάθετες ΕΖ, ΕΗ στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το ΒΖΗΓ είναι εγγράψιμο.

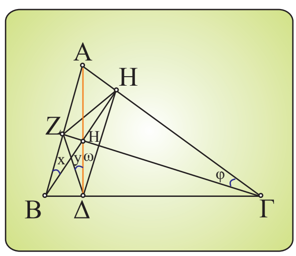
Απόδειξη



Για να δείξουμε ότι το ΒΖΗΓ είναι εγγράψιμο αρκεί να δείξουμε ότι: $\hat{\Gamma} + B\hat{Z}H = 180^o$. Επειδή $B\hat{Z}E = 90^{\circ}$ αρκεί να δείξουμε ότι $E\hat{Z}H + \hat{\Gamma} = 90^o$. Από το ΑΖΕΗ που είναι εγγράψιμο $\left(\hat{Z} = \hat{H} = 90^o\right)$ η $Z\hat{E}H = E\hat{A}H$, είναι όμως $E\hat{A}H + \hat{\Gamma} = 90^o$ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, άρα και $Z\hat{E}H + \hat{\Gamma} = 90^o$.

Παράδειγμα 4ο. Να αποδείξετε ότι τα ύψη κάθε τριγώνου είναι διχοτόμοι των γωνιών του ορθικού του τριγώνου.

Απόδειξη



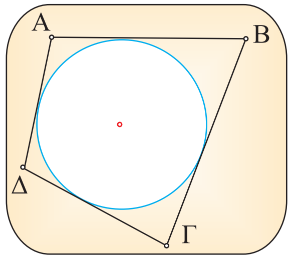
Έστω ΑΒΓ ένα τρίγωνο και ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τα ύψη του, θα δείξουμε ότι $\hat{y} = \hat{\omega}$. Το τετράπλευρο ΒΔΗΑ είναι εγγράψιμο $\left(\widehat{\Delta} = \widehat{H} = 90^o\right)$ άρα $\widehat{\omega} = \widehat{x}\,(1)$. Όμοια $\hat{y} = \hat{\varphi}$ (2) από το ΔΖΗΓ.

Επειδή $\hat{x} = \hat{\varphi}$ (από το εγράψιμο ΒΖΗΓ) από τις (1), (2) έχουμε $\hat{y} = \hat{\omega}$.

ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΙ ΠΕΡΙΓΡΑΨΙΜΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

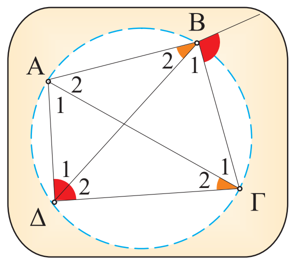
i) Ένα τετράπλευρο λέγεται **περιγεγραμμένο** σε κύκλο όταν οι πλευρές του εφάπτονται στον ίδιο κύκλο.

ii) Ένα τετράπλευρο λέγεται **περιγράψιμο** σε κύκλο όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να εφάπτεται στις πλευρές του.



Β ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο αποδεικνύουμε ένα απο τα επόμενα (κριτήρια)



1. Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
2. Μία εξωτερική γωνία του είναι ίση με την απέναντι εσωτερική.
3. Δύο διαδοχικές κορυφές, βλέπουν την απέναντι πλευρά με ίσες γωνίες.

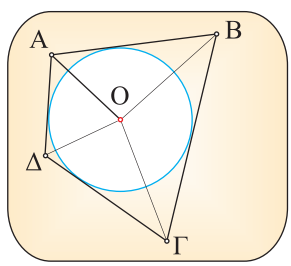
π.χ στο διπλανό σχήμα ισχύουν: $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$, $\widehat{\Gamma_1} = \widehat{\Delta_1}$, $\widehat{A_2} = \widehat{\Delta_2}$, $\widehat{\Gamma_2} = \widehat{B_2}$

$\widehat{B} + \widehat{\Delta} = 180^0$, $\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 180^0$

$\widehat{\Delta} = \widehat{B}_{\varepsilon\xi}$, $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$, $\widehat{B} = \widehat{\Delta}_{\varepsilon\xi}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{A}_{\varepsilon\xi}$

Για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο αποδεικνύουμε ένα απο τα επόμενα (κριτήρια)

1. Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.
2. Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.



ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ
ΟΑ , ΟΒ ,ΟΓ ,ΟΔ : διχοτόμοι

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

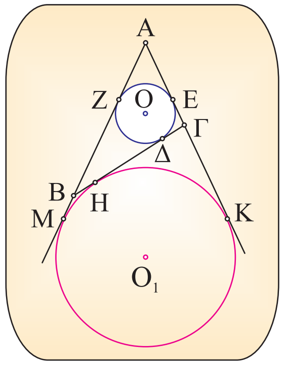
Άσκηση 1

Στο τρίγωνο ΑΒΓ ο εγγεγραμμένος κύκλος εφάπτεται στις πλευρές, στα σημεία Δ, Ε, Ζ και ο παρεγγεγραμμένος κύκλος εφάπτεται στη ΒΓ στο Η και στις ΑΒ, ΑΓ στα Μ και Κ. Να δείξετε ότι ισχύουν:

i. $AZ = AE = \tau - \alpha$

ii. $AM = AK = \tau$, $ZM = \alpha$

iii. $H\Delta = |\beta - \gamma|$



Λύση

i. $AE = AZ = AB - BZ = \gamma - B\Delta = \gamma - (\alpha - \Delta\Gamma) = \gamma - \alpha + \Gamma E =$
$= \gamma - \alpha + \beta - AE$.

Οπότε είναι: $2 \cdot AE = \beta + \gamma - \alpha \Leftrightarrow AE = AZ = \dfrac{\beta + \gamma - \alpha}{2} = \tau - \alpha$

Επίσης: $BZ = B\Delta = \tau - \beta,\ \Gamma E = \Gamma\Delta = \tau - \gamma$.

ii. Έχουμε $AM = \gamma + BM,\ AK = \beta + \Gamma K$ και $AM = AK$.

Τότε είναι

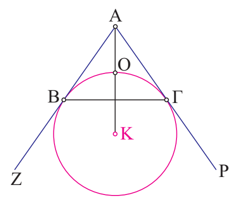
$$2 \cdot AM = \beta + \gamma + BM + \Gamma K \Leftrightarrow 2 \cdot AM = \beta + \gamma + BH + H\Gamma \Leftrightarrow 2 \cdot AM = \alpha + \beta + \gamma \Leftrightarrow$$

$$AM = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \tau \text{ και } ZM = AM - AZ = \tau - (\tau - \alpha) = \alpha$$

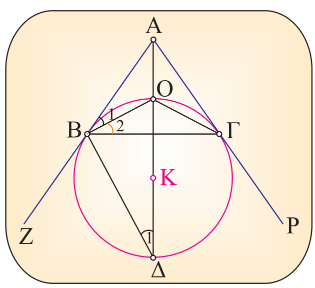
iii. Είναι $H\Delta = B\Delta - BH = \tau - \beta - BM = \tau - \beta - (AM - \gamma) = \tau - \beta - AM + \gamma = |\beta - \gamma|$

Άσκηση 2

Κύκλος με κέντρο Κ εφάπτεται στις πλευρές ΑΖ και ΑΡ γωνίας ΖΑΡ στα σημεία Β και Γ. Αν η ΑΚ τέμνει το κύκλο στο σημείο Ο, να δειχθεί ότι το Ο είναι το έγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση



Η ΑΚ είναι διχοτόμος. Αρκεί να δείξουμε ότι η ΒΟ είναι επίσης διχοτόμος.

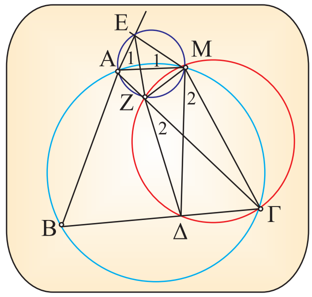
Είναι $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$,ως γωνία εγγεγραμμένη ίση με τη γωνία χορδή - εφαπτομένης και $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_1$,διότι είναι οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές.

Έτσι είναι $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, που σημαίνει ότι η ΒΟ είναι διχοτόμος της γωνίας Β του ΑΒΓ. Άρα το Ο είναι έγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

Άσκηση 3

Από τυχαίο σημείο του περιγγεγραμμένου σε τρίγωνο κύκλου φέρνουμε τις κάθετες στις τρεις πλευρές του. Να δειχθεί ότι τα ίχνη των τριών καθέτων βρίσκονται σε ευθεία γραμμή (ευθεία Simson).

Λύση



Τα τετράπλευρα ΑΖΜΕ και ΜΖΔΓ είναι εγγράψιμμα αφού τα σημεία Ζ, Ε βλέπουν το ΜΑ με ορθή γωνία και τα σημεία Ζ, Δ βλέπουν το ΜΓ με ορθή γωνία. Οπότε

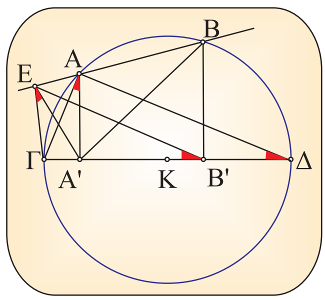
$\hat{M}_1 = \hat{Z}_1$ και $\hat{M}_2 = \hat{Z}_2$. Άρα $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$. Τότε είναι

$\hat{Z}_1 + E\hat{Z}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow \hat{Z}_2 + E\hat{Z}\Gamma = 180^o$, επομένως η ΕΖΔ είναι ευθεία.

Άσκηση 4

Στο κύκλο (Κ,R) παίρνουμε τη διάμετρο ΓΔ. Από δύο σημεία Α και Β του ίδιου ημικύκλιου φέρνουμε τις αποστάσεις ΑΑ΄ και ΒΒ΄ στην ΓΔ. Αν ΓΕ είναι η απόσταση του Γ από την ευθεία ΑΒ, να δειχθεί, ότι: α) ΕΒ΄//ΔΑ , β) $\Gamma\hat{E}A' = E\hat{B}'A'$.

Λύση



α) Από το εγγράψιμο ΕΓΑ΄Α $\left(\Gamma\hat{E}A = AA'\Gamma_1 = 90^o\right)$ έχουμε:

$\Gamma\hat{E}A' = \hat{A}_1$ και $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$ (έχουν κάθετες πλευρές).

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΕΓΒ΄Δ έχουμε: $E\hat{B}\Gamma = \hat{B}_1$

και $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$, $\hat{\Delta}_1 = E\hat{B}\Gamma \Leftrightarrow E\hat{B}' // \Delta A$.

β) Είναι ακόμα: $\Gamma\hat{E}A' = \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1 = \hat{B}'_1 = E\hat{B}'A'$.

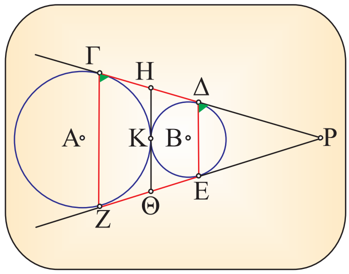
Άσκηση 5

Δύο κύκλοι (Α,R) και (Β,ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο Κ. Αν ΓΔ, ΕΖ τα κοινά εξωτερικά εφαπτόμενα τμήματα, να δειχθεί ότι: το τετράπλευρο ΓΔΕΖ είναι περιγράψιμο σε κύκλο.

Λύση

Έστω Ρ το σημείο, το σημείο τομής των κοινών εφαπτόμενων των κύκλων. Από τα ισοσκελή τρίγωνα ΡΔΕ και ΡΓΖ έχουμε:

$$2\hat{\Gamma} + \hat{P} = 2\hat{\Delta} + \hat{P} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} \Leftrightarrow \Gamma Z // \Delta E .$$

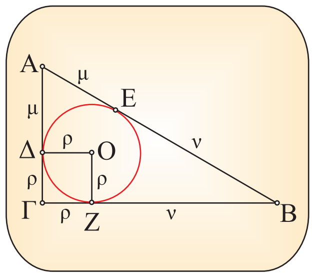


Άρα το $ΖΓΔΕ$ είναι τραπέζιο. Επειδή $ΓΔ = ΕΖ$ το $ΖΓΔΕ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Φέρνουμε την εσωτερική εφαπτομένη $ΗΘ$. Τότε $ΔΗ = ΚΗ = ΓΗ$ (ίσα εφαπτόμενα τμήματα). Άρα τα σημεία Η και Θ είναι τα μέσα των ΓΔ και ΕΖ,που σημαίνει ότι $ΗΘ // = \dfrac{ΓΖ+ΔΕ}{2}$ (1). Επειδή $ΚΗ = \dfrac{ΓΔ}{2}$ και $ΚΘ = \dfrac{ΕΖ}{2}$ έχουμε $ΗΘ = \dfrac{ΓΔ+ΕΖ}{2}$ (2). Άρα $ΓΖ + ΔΕ = ΓΔ + ΕΖ$,που σημαίνει ότι το τετράπλευρο ΖΓΔΕ είναι περιγράψιμο σε κύκλο.

Άσκηση 6

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Γ} = 90^{o}$) ,να δειχτεί ότι: $β + γ = 2ρ + α$.

Λύση



Το ΟΔΓΖ είναι τετράγωνο, αφού ισχύουν :

$$\left(\hat{Γ} = \hat{Δ} = \hat{Z} = 90^{o} \;\; Δ = ΟΖ = ρ\right).$$

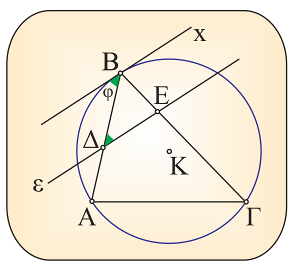
Επομένως ΓΔ = ΓΖ = ρ. Είναι και ΑΔ = ΑΕ και ΒΖ = ΒΕ (ως ίσα εφαπτόμενα τμήματα). Άρα

$$β + γ = ΓΒ + ΓΑ = ρ + ν + ρ + μ = 2ρ + (μ + ν) = 2ρ + α .$$

Άσκηση 7

Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ,ρ). Φέρνουμε την εφαπτομένη στο Β και ευθεία ε παράλληλη στην εφαπτομένη αυτή, που τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ε και την ΑΒ στο σημείο Δ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΕΓ είναι εγγράψιμο.

Λύση



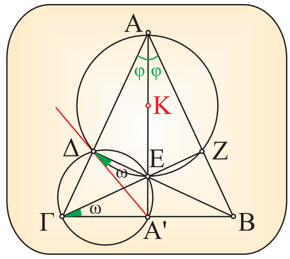
Είναι $\hat{φ} = \hat{Γ}$,ως γωνία χορδής και εφαπτομένης που είναι ίση με την αντίστοιχη εγγεγραμμένη .

Είναι $\hat{φ} = Β\hat{Δ}Ε$,αφού ΔΕ παράλληλη στην εφαπτομένη. Άρα $Β\hat{Δ}Ε = \hat{Γ}$,που σημαίνει ότι το τετράπλευρο ΑΓΕΔ είναι εγγράψιμο , αφού η εξωτερική γωνία ΒΔΕ είναι ίση με την απέναντι εσωτερική Γ.

Άσκηση 8

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$.Φέρνουμε το ύψος ΑΑ΄ και έστω Ε το ορθόκεντρο και Κ το μέσο του ΑΕ. Γράφουμε τον κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα ΚΑ , που τέμνει την ΑΓ στο Δ.
Να δείξετε ότι η Α΄Δ εφάπτεται στον κύκλο (Κ,ΚΑ).

Λύση



Το τετράπλευρο ΕΔΓΑ΄ είναι εγγράψιμο ,αφού οι γωνίες Δ και Α΄είναι παραπληρωματικές.

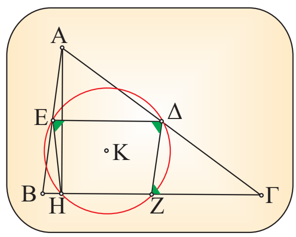
Επομένως $Ε\hat{Δ}Α' = Ε\hat{Γ}Α' = \hat{ω}$,ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο.

Ακόμα είναι $Ε\hat{Γ}Α' = Α'\hat{Α}Β = Α'\hat{Α}Γ = \hat{φ}$ (αφού ΑΑ΄: ύψος και διχοτόμος ισοσκελούς τριγώνου). Άρα $Ε\hat{Δ}Α' = Α'\hat{Α}Γ$,δηλ. η Α΄Δ είναι εφαπτόμενη.

Άσκηση 9

Δείξτε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τα μέσα των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται και από τα ίχνη των ύψων του τριγώνου.

Λύση



Ο κύκλος που διέρχεται από τα μέσα Ε, Δ και Ζ του τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται και από το ίχνος Η του ύψους ΑΗ, αν δείξουμε ότι το τετράπλευρο ΕΔΖΗ είναι εγγράψιμο.

Γι'αυτό αρκεί να δείξουμε ότι $Δ\hat{Ζ}Γ = Δ\hat{Ε}Η$.

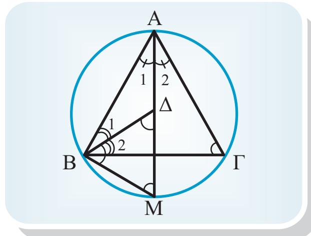
Είναι $Δ\hat{Ζ}Γ = Ε\hat{Δ}Ζ$, διότι ΕΔ//ΒΓ. Το τετράπλευρο ΕΔΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οπότε $Δ\hat{Ε}Η = Ε\hat{Δ}Ζ$. Άρα $Δ\hat{Ζ}Γ = Δ\hat{Ε}Η$. Όμοια αποδεικνύεται και για τα υπόλοιπα ίχνη.

Άσκηση 10

Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$, τριγώνου ΑΒΓ, τέμνει τον περιγεγραμμένο του κύκλου στο Μ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Β}$ τέμνει την ΑΜ στο Δ, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΜΒΔ είναι ισοσκελές.

Λύση

Επειδή η ΑΜ είναι διχοτόμος της $\hat{Α}$, θα ισχύει: $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2 = \frac{\hat{Α}}{2}$. Επίσης και $\hat{Β}_1 = \hat{Β}_2 = \frac{\hat{Β}}{2}$,



αφού η ΒΔ είναι διχοτόμος της $\hat{B}$. Έχουμε:

- $\hat{M} = \hat{\Gamma}$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$.
- $M\hat{B}\Gamma = \hat{A}_2$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{M\Gamma}$.

Οπότε:

$$\Delta\hat{B}M = \hat{B}_2 + M\hat{B}\Gamma = \hat{B}_2 + \hat{A}_2 = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2} = \frac{180^o - \hat{\Gamma}}{2} = 90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$$

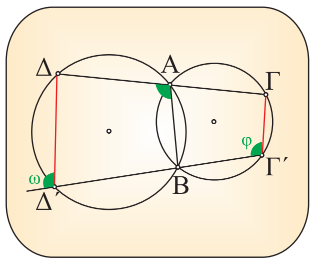
- $B\hat{\Delta}M = 180^o - \Delta\hat{B}M - \hat{M} = 180^o - \left(90^o - \dfrac{\hat{\Gamma}}{2}\right) - \hat{\Gamma} = 180^o - 90^o + \dfrac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{\Gamma} = 90^o - \dfrac{\hat{\Gamma}}{2}$

Άρα $\Delta\hat{B}M = B\hat{\Delta}M = 90^o - \dfrac{\hat{\Gamma}}{2}$, οπότε το $M\overset{\Delta}{B}\Delta$ είναι ισοσκελές με κορυφή το Μ.

Άσκηση 11

Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από το Α φέρνουμε ευθεία που τέμνει τους κύκλους στα Γ, Δ και απο το Β φέρνουμε ευθεία που τέμνει τους κύκλους Γ΄ και Δ΄. Να δείξετε ότι οι χορδές ΓΓ΄ και ΔΔ΄ είναι παράλληλες.

Λύση



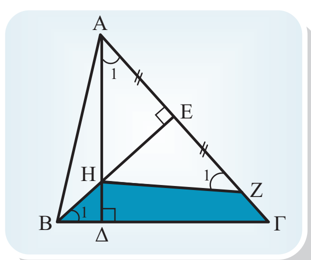
Είναι $B\hat{A}\Delta = \hat{\omega}$ και $B\hat{A}\Delta = \hat{\varphi}$,ως εξωτερικές γωνίες εγγεγραμμένου τετραπλεύρου που είναι ίσες αντίστοιχα με τις απέναντι εσωτερικές.

Άρα $\hat{\omega} = \hat{\varphi} \Leftrightarrow \Delta\Delta' // \Gamma\Gamma'$

Άσκηση 12

Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, θεωρούμε τα ύψη του ΑΔ και ΒΕ και έστω Η το ορθόκεντρό του. Στο ΕΓ παίρνουμε τμήμα ΕΖ = ΑΕ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΗΖΓ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Λύση



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma$ $(\hat{\Delta} = 1^{\llcorner})$ έχουμε:

$$\hat{A}_1 + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \hat{A}_1 = 90^o - \hat{\Gamma} \quad (1)$$

Ομοίως από το ορθογώνιο τρίγωνο $B\overset{\Delta}{E}\Gamma$ $(\hat{E} = 1^{\llcorner})$ έχουμε:

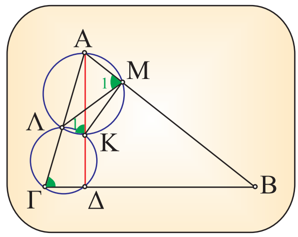
$\hat{B}_1 = 90^o - \hat{\Gamma}$ (2)

Το $\overset{\triangle}{AHZ}$ είναι ισοσκελές, αφού το ΗΕ είναι ύψος και διάμεσος, άρα $\hat{Z}_1 = \hat{A}_1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{Z}_1 = 90^o - \hat{\Gamma} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \hat{Z}_1 = \hat{B}_1$. Άρα το τετράπλευρο ΒΗΖΓ είναι εγγράψιμο αφού μια εξωτερική του γωνία είναι ίση με την απέναντι εσωτερική γωνία.

Άσκηση 13

Από ένα σημείο Θ του ύψους ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ, φέρνουμε τα τμήματα ΘΜ και ΘΛ κάθετα στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΛΜ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Λύση

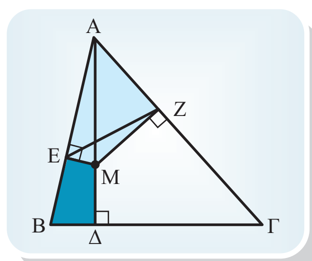


Είναι $\widehat{M}_1 = \hat{\Theta}_1$,αφού το ΑΛΘΜ είναι εγγράψιμο και $\hat{\Theta}_1 = \hat{\Gamma}$,αφού το ΘΛΓΔ είναι εγγράψιμο. Άρα $\widehat{M}_1 = \hat{\Gamma}$, που σημαίνει ότι το τετράπλευρο ΓΒΚΛ είναι εγγράψιμο ,αφού η εξωτερική γωνία είναι ίση με την απέναντι εσωτερική.

Άσκηση 14

Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε το ύψος του ΑΔ. Από τυχαίο σημείο Μ του ΑΔ φέρουμε τις αποστάσεις του ΜΕ και ΜΖ από τις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το ΒΕΖΓ είναι εγγράψιμο.

Λύση



Το τετράπλευρο ΕΜΔΒ είναι εγγράψιμο, αφού

$$B\hat{E}M + B\hat{\Delta}M = 90^o + 90^o = 180^o.$$

Άρα $\hat{B} + E\hat{M}\Delta = 180^o$ (1)

Ομοίως και το τετράπλευρο ΑΕΜΖ είναι εγγράψιμο $\left(A\hat{E}M + A\hat{Z}M = 90^o + 90^o = 180^o\right)$, οπότε η πλευρά του ΕΜ φαίνεται από τις κορυφές Α και Ζ υπό ίσες γωνίες.

Άρα $E\hat{A}M = E\hat{Z}M$ (2).

Στο τρίγωνο ΑΕΜ η $E\hat{M}\Delta$ είναι εξωτερική, οπότε:

$$E\hat{M}\Delta = E\hat{A}M + A\hat{E}M \Leftrightarrow E\hat{M}\Delta = E\hat{A}M + 90^o \quad (3)$$

Στο τετράπλευρο ΒΕΖΓ έχουμε:

$$\hat{B} + E\hat{Z}\Gamma = \hat{B} + \left(E\hat{Z}M + M\hat{Z}\Gamma\right) \overset{(2)}{=} \hat{B} + \left(E\hat{A}M + 90^o\right) \overset{(3)}{=} \hat{B} + E\hat{M}\Delta \overset{(1)}{=} 180^o$$

Άρα το ΒΕΖΓ είναι εγγράψιμο, αφού δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

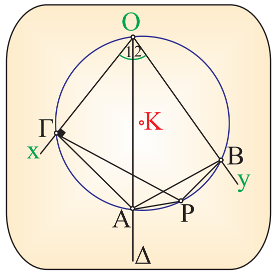
Άσκηση 15

Σε γωνία $x\hat{O}\psi$ παίρνουμε τη διχοτόμο ΟΔ και το εσωτερικό της σημείο Ρ της $\Delta\hat{O}\psi$. Αν Α,Β,Γ είναι οι προβολές του Ρ στις ημιευθείες ΟΔ, Οx, Οψ, να δειχθεί ότι:

α. Τα σημεία Ο, Β, Α, Ρ, Γ είναι ομοκυκλικά

β. ΑΒ = ΑΓ .

Λύση



α. Τα τετράπλευρα ΑΡΒΟ και ΓΡΒΟ, είναι εγγράψιμα στον κύκλο που διέρχεται αποτα σημεία Ρ, Β, Ο, αφού έχουν τις απέναντι γωνίες παραπληρωματικές.
Άρα τα σημεία Ο, Γ, Α, Ρ, Β είναι ομοκυκλικά.

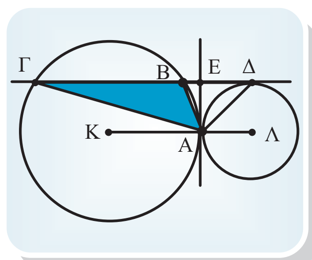
β. Επίσης είναι $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, άρα και $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A\Gamma}$,δηλ.ΑΓ = ΑΒ.

Άσκηση 16

Δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) με R > ρ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Από το σημείο Δ του κύκλου (Λ,ρ) φέρουμε ευθεία που εφάπτεται στον κύκλο (Λ, ρ) και τέμνει τον κύκλο (Κ, ρ) στα σημεία Β, Γ. Να δείξετε ότι η ΑΔ είναι εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι: $B\hat{A}\Delta = \Lambda\hat{A}\Delta$



Στο τρίγωνο ΑΓΔ η $\Lambda\hat{A}\Delta$ είναι εξωτερική του γωνία, οπότε: $\Lambda\hat{A}\Delta = A\hat{\Gamma}B + A\hat{\Delta}E$ (1)
Φέρουμε την κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων, η οποία τέμνει της ΓΔ στο Ε. Τότε ΕΑ = ΕΔ σαν εφαπτόμενα τμήματα από το Ε προς τον κύκλο (Λ, ρ). Άρα $A\hat{\Delta}E = \Delta\hat{A}E$ (2) σαν προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου.

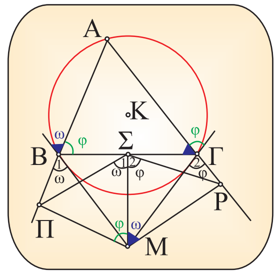
Επίσης $E\hat{A}B = A\hat{\Gamma}B$ (3) διότι η γωνία από χορδή και εφαπτομένη είναι ίση με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο αντίστοιχο τόξο της.

$$H\ (1) \underset{(3)}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} \Lambda\hat{A}\Delta = E\hat{A}B + \Delta\hat{A}E \Leftrightarrow \Lambda\hat{A}\Delta = B\hat{A}\Delta$$

Άσκηση 17

Σε τρίγωνο ΑΒΓ γράφουμε τις εφαπτόμενες του περιγεγραμμένου κύκλου στις κορυφές Β και Γ, που τέμνονται στο σημείο Μ. Αν Π,Σ,Ρ είναι οι προβολές του Μ στις πλευρές του ριγώνου ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα,να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΜΠΣΡ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση



Τα ΒΣΜΠ και ΣΜΡΓ είναι εγγράψιμα ,αφού έχουν τις απέναντι γωνίες παραπληρωματικές. Απο αυτά έχουμε τις ισότητες:

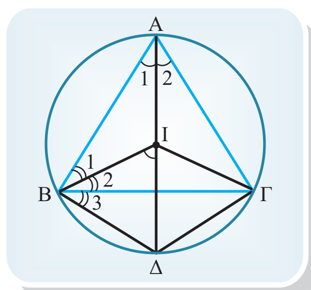
$\hat{\Sigma}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\Gamma} = \Sigma\widehat{M}P = \hat{\omega}$, και $\hat{\Sigma}_2 = \hat{\Gamma}_2 = \hat{B} = \hat{\varphi}$. Άρα ΠΣ//ΜΡ και ΜΠ//ΣΡ ,δηλ. το ΜΠΣΡ είναι παραλληλόγραμμο.

Άσκηση 18

Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγγραμμένο κύκλο του τριγώνου σε σημείο Δ, να δείξετε ότι:
α. Το τρίγωνο ΙΒΔ είναι ισοσκελές, όπου Ι είναι το εγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.
β. Το σημείο Δ είναι περίκεντο του τριγώνου ΙΒΓ.

Λύση

α. Φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ του τριγώνου ΑΒΓ, οι οποίες τέμνονται στο έγκεντρο Ι. Τότε: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \dfrac{\hat{A}}{2}$ και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \dfrac{\hat{B}}{2}$. Στο τρίγωνο ΙΒΔ έχουμε:



- η γωνία του $B\hat{I}\Delta$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΙ, οπότε:

$$B\hat{I}\Delta = \hat{B}_1 + \hat{A}_1 = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}$$

- $I\hat{B}\Delta = \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = \hat{B}_2 + \hat{A}_2 = \dfrac{\hat{B}}{2} + \dfrac{\hat{A}}{2} = \dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2}$, αφού

$\hat{B}_3 = \hat{A}_2$ σαν εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. Άρα $B\hat{I}\Delta = I\hat{B}\Delta$ οπότε το τρίγωνο ΙΒΔ είναι ισοσκελές με κορυφή το Δ, οπότε: ΔΒ = ΔΙ (1)

β. Επειδή οι εγγεγραμμένες γωνίες $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$ είναι ίσες, θα είναι ίσες και οι αντίστοιχες χορδές τους, δηλαδή ΔΒ = ΔΓ (2)
Από (1) και (2) έχουμε: ΔΒ = ΔΙ = ΔΓ, δηλαδή το Δ ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου ΙΒΓ, άρα είναι το περίκεντρο του.

Άσκηση 19

Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε την διχοτόμο του ΑΔ και γράφουμε τους περιγεγραμμένους κύκλους στα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ που τέμνουν τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΒΖ=ΓΕ .

Λύση

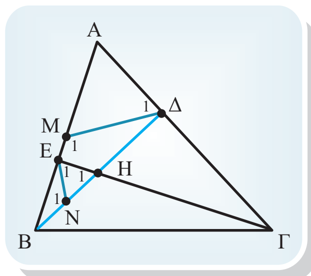
Φέρνουμε τις ΔΖ και ΔΕ και συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΔΖ και ΔΕΓ. Αυτά έχουν:
$\Delta E = \Delta B$ και $\Delta Z = \Delta \Gamma$ σαν χορδές ίσων τόξων, και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ (γιατί η $\hat{\Delta}_1 = \widehat{A}$ ως εξωτερική του $AZ\Delta\Gamma$, όμοια $\hat{\Delta}_2 = \hat{A}$ σαν εξωτερική του ΑΕΔΒ).

Άρα τα τρίγωνα ΒΔΖ και ΔΕΓ είναι ίσα και από την ισότητα αυτών έπεται ότι είναι $BZ = \Gamma E$.

Άσκηση 20

Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Αν Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, Μ το μέσο της πλευράς ΑΒ και Ν το μέσο του ΗΒ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΜΕΝ είναι εγγράψιμο.

Λύση



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\overset{\triangle}{B}\Delta$ η ΜΔ είναι η διάμεσος του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ΑΒ. Άρα $\Delta M = \dfrac{AB}{2} = AM$. Συνεπώς το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές με κορυφή το Μ, οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}$ (1) ως προσκείμενες γωνίες στην βάση του ΑΔ. Τότε για την εξωτερική γωνία $\hat{M}_1$ του τριγώνου ΑΔΜ έχουμε: $\hat{M}_1 = \hat{A} + \hat{\Delta}_1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{M}_1 = 2\hat{A}$ (2).

Το τετράπλευρο ΑΔΗΕ έχει $A\hat{\Delta}H + A\hat{E}H = 90^o + 90^o = 180^o$, δηλαδή δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, οπότε είναι εγγράψιμο. Συνεπώς θα ισχύει ότι $\hat{H}_1 = \hat{A}$ (3), αφού κάθε εξωτερική γωνία εγγράψιμου τετραπλευρού είναι ίση με την απέναντι εσωτερική. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΗ η ΕΝ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΗ. Άρα $EN = \dfrac{BH}{2} = NH$. Δηλαδή το τρίγωνο ΕΝΗ είναι ισοσκελές με κορυφή Ν. Άρα $\hat{H}_1 = \hat{E}_1$ (4) ως προσκείμενες γωνίες στη βάση του. Οπότε για την εξωτερική του γωνία $\hat{N}_1$ έχουμε:

$\hat{N}_1 = \hat{E}_1 + \hat{H}_1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{N}_1 = 2\hat{H}_1 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \hat{N}_1 = \hat{M}_1$. Άρα το τετράπλευρο ΔΜΕΝ είναι εγγράψιμο, αφού μια εξωτερική γωνία του είναι ίση με την απέναντι εσωτερική.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

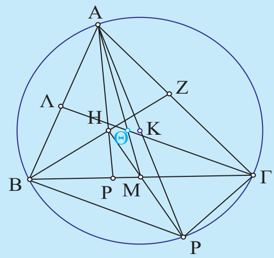
1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ γράφουμε τον περιγγεγραμμένο κύκλο με κέντρο το Κ. Αν Ρ το αντιδιαμετρικό του Α, Μ το μέσο της ΒΓ, Η και Θ το ορθόκεντρο και το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ αντίστοιχα,να δείξετε ότι:

α. Το ΡΒΗΓ είναι παραλληλόγραμμο

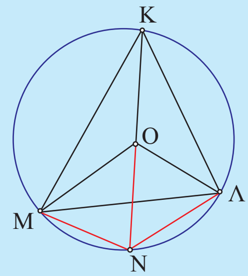
β. $KM = \dfrac{AH}{2}$

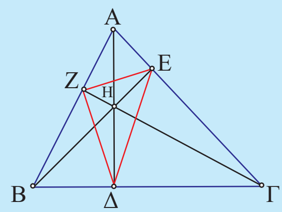
γ. Τα σημεία Η, Θ, Κ είναι συνευθειακά (***ευθεία του Euler***)

δ. $H\Theta = 2 \cdot \Theta K$.



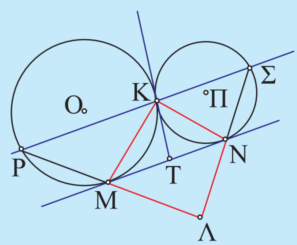
2. Σε τρίγωνο ΚΛΜ, έστω Ο το έγκεντρο και Ν το σημείο, που η διχοτόμος της γωνίας Κ τέμνει τον περιγεγραμμένο του κύκλο. Να αποδείξετε ότι $NM = NO = N\Lambda$.



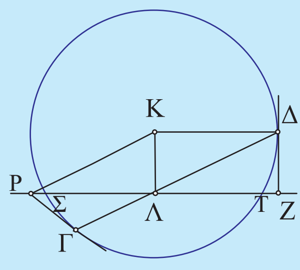


3. Να αποδείξετε ότι τα ύψη οξυγωνίου τριγώνου είναι εσωτερικές διχοτόμοι του ορθικού του τριγώνου.

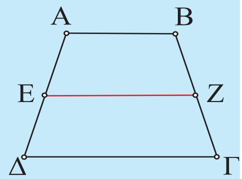
4. Έστω δύο κύκλοι με κέντρα Ο και Π που εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Κ. Από το Κ φέρνουμε ευθεία, που τέμνει τους κύκλους στα σημεία Ρ και Σ αντίστοιχα. Φέρνουμε την κοινή εξωτερική εφαπτόμενη ΜΝ. Αν οι ΡΜ, ΣΝ τέμνονται στο σημείο Λ,να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΜΛΝ είναι εγγράψιμο.



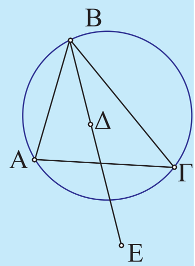
5. Σε κύκλο με κέντρο το Κ φέρνουμε μία χορδή ΓΔ που διέρχεται από το μέσο Λ χορδής ΣΤ. Φέρνουμε τις εφαπτόμενες στα σημεία Γ και Δ, που τέμνουν την ευθεία ΣΤ στα Ρ και Ζ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι οι ΡΣ και ΤΖ είναι ίσες.



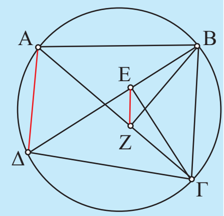
6. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο τέτοιο ώστε η διάμεσος του να είναι ίση με μία από τις μη παράλληλες πλευρές του. Να δείξετε ότι το τραπέζιο είναι περιγράψιμο σε κύκλο.



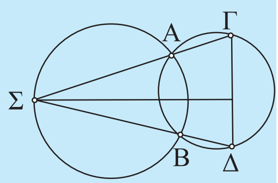
7. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ονομάζουμε Δ το έγκεντρο και Ε το παράκεντρο της πλευράς ΑΓ. Να δείξετε ότι το τμήμα ΔΕ διχοτομείται από τον περιγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου.



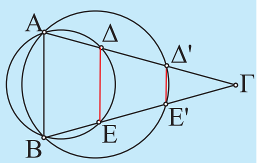
8. ΤετράπλευροΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ,ρ). Φέρνουμε τις ΓΕ και ΒΖ κάθετες αντίστοιχα στις ΒΔ,ΑΓ . Να δείξετε ότι οι ΕΖ και ΑΔ είναι παράλληλες.



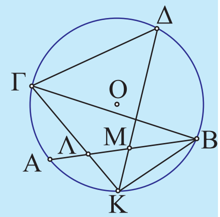
9. Δύο κύκλοι τέμνονται στα Α,Β. Αν Σ είναι ένα σημείο του πρώτου κύκλου και οι ΣΑ, ΣΒ τέμνουν τον άλλο κύκλο στα Γ και Δ, να δείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από το Σ και από το κέντρο Κ του πρώτου κύκλου είναι κάθετη στη ΓΔ.



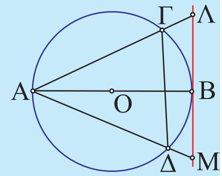
10. Στο τρίγωνο ΑΒΓ κατασκευάζουμε δύο κύκλους, που διέρχονται από τις κορυφές του Α και Β και τέμνουν τις πλευρές ΑΓ και ΒΓ ο ένας στα σημεία Δ, Ε και ο άλλος στα σημεία Δ΄ και Ε΄. Να δείξετε ότι ΔΕ και Δ΄Ε΄ είναι παράλληλες.



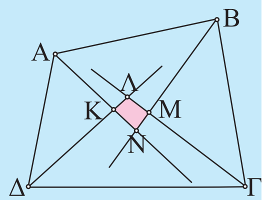
11. Γράφουμε κύκλο (Ο,ρ). Έστω Κ το μέσο ενός κυρτογώνιου τόξου ΑΒ και Γ, Δ δύο σημεία του μη κυρτογώνιου τόξου ΑΒ . Αν οι χορδές ΚΓ και ΚΔ τέμνουν την ΑΒ στα σημεία Λ και Μ, να δειχθεί ότι το τετράπλευρο ΓΛΜΔ είναι εγγράψιμο.



12. Γράφουμε τη διάμετρο ΑΒ κύκλου (Ο,ρ) και δύο χορδές ΑΓ και ΑΔ του κύκλου εκατέρωθεν της διαμέτρου. Αν η εφαπτόμενη στο Β, τέμνει τις προεκτάσεις των ΑΓ και ΑΔ στα σημεία Λ και Μ, να δείξετε ότι το ΓΛΜΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.



13. Στο μη περιγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ ονομάζουμε Κ,Λ,Μ,Ν, τα σημεία όπου τέμνονται οι διχοτόμοι των γωνιών του. Να δειχθεί ότι το ΚΛΜΝ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.



14. Αν οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ εγγεγραμμένου τετράπλευρου ΑΒΓΔ τέμνονται στο Ε και οι πλευρές ΑΔ και ΒΓ στο Ζ και η διχοτόμος της γωνίας Ε τέμνει τις ΒΓ, ΑΔ στα σημεία Κ, Μ και η διχοτόμος της $\hat{Z}$ τέμνει τις πλευρές ΓΔ και ΑΒ, στα Λ, Ρ, να δείξετε ότι:

α. Οι διχοτόμοι των Ε και Ζ τέμνονται κάθετα.

β. Το τετράπλευρο ΚΛΜΡ, είναι ρόμβος.

Δ. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) έστω Ο το κέντρο του εγγεγραμμένου του κύκλου και Λ, Μ και Κ τα σημεία επαφής αυτού με τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα. Αν Ρ είναι η προβολή του Μ στην ΚΛ, να δείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΡΓ είναι ορθογώνιο και

β) τα σημεία Α, Μ, Ο, Ρ και Κ, είναι ομοκυκλικά.