ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αγαπητοί συνάδελφοι,
Φίλοι μαθητές και μαθήτριες

Η καινούργια μας σειρά βιβλίων με τον τίτλο "**ΒΙΒΛΙΟμαθήματα**" δημιουργήθηκε από μια ιδέα μας για το περιοδικό "**Εξετάσεις**" της Ελευθεροτυπίας. Παρουσιάσαμε στην εφημερίδα τα μαθήματα, όπως γίνονται στον πίνακα, δημιουργώντας για το σκοπό αυτό την πολυπληθέστερη συγγραφική ομάδα που έχει ποτέ συσταθεί, προσπαθώντας την εμπειρία της τάξης να την αποτυπώσουμε στο χαρτί. Τη συγγραφική ομάδα αποτελούν καθηγητές συγγραφείς καταξιωμένοι στη συνείδηση γονιών και μαθητών για την ποιότητα της δουλειάς τους.

Η συλλογική αυτή προσπάθεια, εμπλουτισμένη, σε σχέση με το υλικό που παρουσιάστηκε στην εφημερίδα, απευθύνεται, αφενός στον καθηγητή που θέλει να παρουσιάσει το μάθημά του στην τάξη με μια μεθοδικότητα, αφετέρου στο φιλόπονο μαθητή που θέλει να διαβάσει, να μελετήσει και να κατανοήσει την ύλη, χωρίς να σπαταλήσει τον πολύτιμο χρόνο του.
Γι' αυτό κάθε μάθημα ολοκληρώνεται σ'έναν τόμο. Στο βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας περιέχονται μια σειρά από νέες, στην Ελληνική βιβλιογραφία, ασκήσεις καθώς και συνδυαστικά θέματα.

Ο σκοπός μας: να δημιουργήσουμε ένα "**εργαλείο δουλειάς**" για όλους μας.

Η ύλη χωρίστηκε σε **12 ΒΙΒΛΙΟμαθήματα** που το καθένα περιέχει:

- Τις απαραίτητες γνώσεις θεωρίας, με παρατηρήσεις για βαθύτερη κατανόηση.
- Λυμένα παραδείγματα, στα οποία καταδεικνύεται η μεθοδολογία επίλυσής τους σε **κίτρινο πλαίσιο**.
- Λυμένες ασκήσεις.
- Τα προτεινόμενα θέματα με υποδείξεις - απαντήσεις σε **μπλέ πλαίσιο**.
- Το "**ξεχωριστό θέμα**".

Όσοι από τους συναδέλφους επιθυμούν να έχουν τις λύσεις των ασκήσεων, για έλεγχο των απαντήσεων, με χαρά θα τις στείλουμε αν επικοινωνήσουν μαζί μας. Επίσης, θα θέλαμε κρίσεις, παρατηρήσεις, καθώς και επισημάνσεις γι' αυτή μας την προσπάθεια, ώστε η γόνιμη αυτή ανταλλαγή απόψεων να βοηθήσει στη βελτίωση των μελλοντικών μας εκδόσεων.

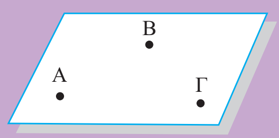
Η συγγραφική ομάδα

Περιεχόμενα

2ο Κεφάλαιο

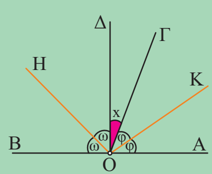
1ο μάθημα

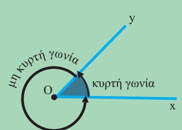
Βασικά γεωμετρικά σχήματα



2ο μάθημα

Η γωνία - Ο κύκλος





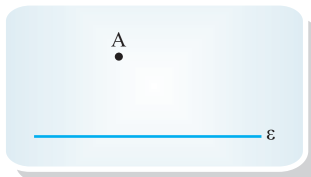
Μάθημα 1

Βασικά γεωμετρικά σχήματα

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Πρωταρχικές γεωμετρικές έννοιες

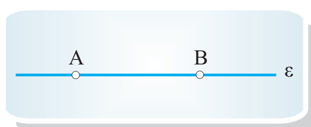
Τις έννοιες: **σημείο, ευθεία** και **επίπεδο** τις δεχόμαστε ως αρχικές.



- Το **σημείο** δεν έχει διαστάσεις. Παριστάνεται με μια τελεία και συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα (π.χ Σημείο Α (βλ.σχήμα)).
- Η **ευθεία** είναι μια γραμμή που χαράζεται με τη βοήθεια του κανόνα.
  Συμβολίζεται με ένα μικρό γράμμα, π.χ. ε ή με τα γράμματα δυο σημείων της π.χ. ΓΔ (βλ.σχήμα).
- Το **επίπεδο** είναι μια λεία επίπεδη επιφάνεια, όπως για παράδειγμα η επιφάνεια ενός τραπεζιού.

Για να αναζητήσουμε και να ερμηνεύσουμε τις σχέσεις και τις ιδιότητες των στοιχείων αυτών,**δεχόμαστε ορισμένες αλήθειες,που τις ονομάζουμε αξιώματα.**

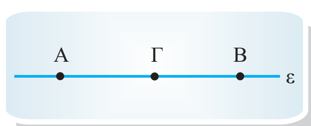
Αξίωμα 1.
Από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.
Με το αξίωμα 1 αποδεικνύουμε τα παρακάτω θεωρήματα:



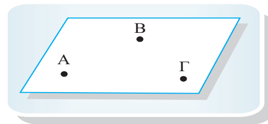
Θεώρημα 1
Δυο ευθείες που έχουν δύο τουλάχιστον κοινά σημεία συμπίπτουν.

Άρα δύο διαφορετικές ευθείες μπορεί να έχουν:
- μοναδικό κοινό σημείο οπότε λέμε ότι **τέμνονται.**
- κανένα κοινό σημείο οπότε λέμε ότι είναι **παράλληλες.**

Θεώρημα 2
Αν τρία σημεία ανήκουν στην ίδια ευθεία,τότε το καθένα ανήκει στην ευθεία που ορίζουν τα άλλα δύο.

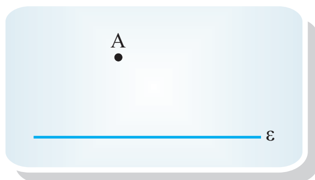


Αξίωμα 2.
Κάθε επίπεδο περιέχει τρία τουλάχιστον σημεία μη συνευθειακά. Απο τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένα μόνο επίπεδο.

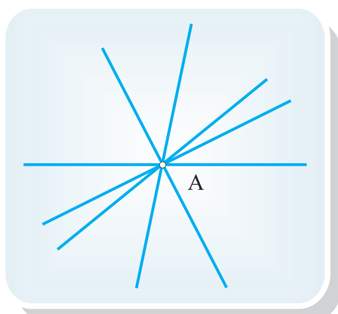


Με το αξίωμα 2 αποδεικνύουμε τα παρακάτω θεωρήματα:

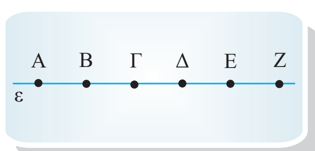
Θεώρημα 3
Υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει σε μια δοσμένη ευθεία.



Θεώρημα 4
Από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες.

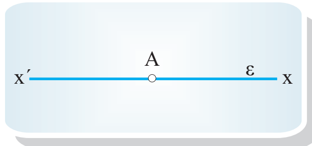


Αξίωμα 3.
Μια ευθεία έχει άπειρα σημεία. (εκτείνεται απεριόριστα προς τις δύο κατευθύνσεις)



Η ημιευθεία

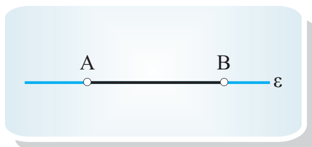
Έστω ευθεία ε και Α ένα τυχαίο σημείο της. Το σημείο Α χωρίζει την ευθεία σε δύο τμήματα που συμβολίζονται με Αx και Αx΄και λέγονται ***ημιευθείες*** με αρχή το σημείο Α.



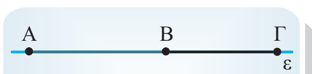
Η ευθεία ε λέγεται ***φορέας*** της ημιευθείας Αx. Δύο ημιευθείες με μοναδικό κοινό σημείο την αρχή και κοινό φορέα ονομάζονται ***αντικείμενες*** ημιευθείες**.**

Το ευθύγραμμο τμήμα

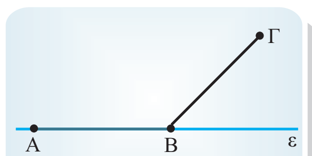
Ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ ονομάζεται το τμήμα μιας ευθείας ε που ορίζεται από δύο σημεία της Α,Β που ονομάζονται άκρα του ευθύγραμμου τμήματος ενώ η ευθεία ε ονομάζεται φορέας του τμήματος.



Δύο ευθύγραμμα τμήματα με μοναδικό κοινό σημείο το ένα άκρο τους λέγονται ***διαδοχικά***.



Τα ΑΒ και ΒΓ είναι διαδοχικά.
Τα Α και Γ είναι εκατέρωθεν του Β.
Τα Β και Γ είναι πρός το ίδιο μέρος του Α.



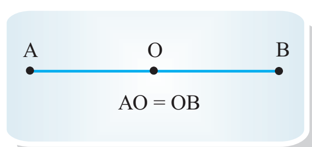
Τα ΑΒ και ΒΓ είναι διαδοχικά.

Μετατοπίσεις στο επίπεδο

Το σχήμα που προκύπτει από τη μετατόπιση ενός σχήματος από την αρχική του θέση σε κάποια άλλη θέση έτσι ώστε το σχήμα να παραμένει αναλοίωτο ως προς τη μορφή και το μέγεθος ,ονομάζεται **ομόλογο** (ή **εικόνα**) του αρχικού.

Σύγκριση ευθυγράμμων τμημάτων

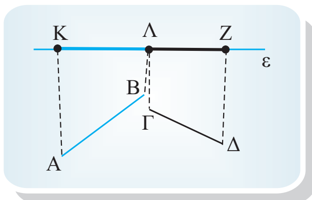
Δύο ευθύγραμμα τμήματα ονομάζονται ***ίσα*** όταν με κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν.
Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ είναι ένα μοναδικό σημείο Ο μεταξύ των Α και Β τέτοιο ώστε ΑΟ = ΟΒ.



Δύο σημεία Α και Β λέγονται συμμετρικά ως προς κέντρο Ο, αν το Ο είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ δηλαδή ΑΟ = ΟΒ.

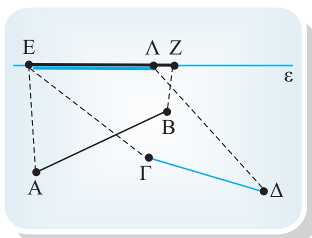
Πράξεις μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων

Α) Πρόσθεση ευθυγράμμων τμημάτων.
Για να προσθέσουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα, με τη βοήθεια του διαβήτη τα μετατοπίζουμε πάνω στην ίδια ευθεία ώστε να είναι διαδοχικά.
Όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα το ΑΒ μετατοπίζεται στο ΚΛ, το ΓΔ μετατοπίζεται στο ΛΖ.



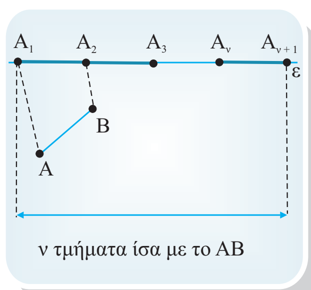
Τότε ΑΒ + ΓΔ = ΚΖ. Το τμήμα ΚΖ λέγεται ***άθροισμα*** των ΑΒ και ΓΔ.

Β) Αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων.
Για να αφαιρέσουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα, τα μετατοπίζουμε κατάλληλα, με τη βοήθεια του διαβήτη, ώστε να βρίσκονται στην ίδια ευθεία και να έχουν κοινό άκρο και κοινά εσωτερικά σημεία.
Όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα το ΑΒ μετατοπίζεται στο ΕΖ, το ΓΔ μετατοπίζεται στο ΕΛ.



Τότε ΑΒ - ΓΔ = ΛΖ. Το τμήμα ΛΖ λέγεται ***διαφορά*** των ΑΒ και ΓΔ.

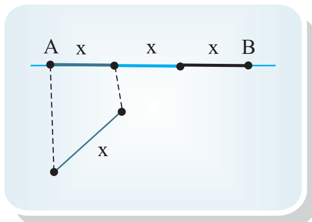
Γ) Γινόμενο φυσικού αριθμού με ευθύγραμμο τμήμα.
Για να πολλαπλασιάσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με φυσικό αριθμό ν, μετατοπίζουμε ν φορές το ευθύγραμμο τμήμα στην ίδια ευθεία.
Όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα το ΑΒ μετατοπίζεται διαδοχικά στα ευθύγραμμα τμήματα $Α_1Α_2$, $Α_2Α_3$, $Α_3Α_4$,…., $Α_νΑ_{ν+1}$.



Τα ν διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζουν το ευθύγραμμο τμήμα $Α_1Α_{ν+1}$,που είναι ίσο με $ν \cdot ΑΒ$.

Μήκος ευθύγραμμου τμήματος

Μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ είναι ένας θετικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές μεγαλύτερο ή μικρότερο είναι το ΑΒ από ένα ευθύγραμμο τμήμα που θεωρούμε ότι έχει μήκος τη μονάδα.
Το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ λέγεται και ***απόσταση*** των σημείων Α και Β.
Για παράδειγμα στο επόμενο σχήμα είναι ΑΒ = 3x δηλαδή ΑΒ = 3.



Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Μέθοδος 1

1. Όταν δίνεται το μέσο Μ ενός ευθύγραμμου τμήματος, έστω ΑΒ, να έχουμε πάντα υπόψη ότι $AM = MB = \frac{AB}{2}$.

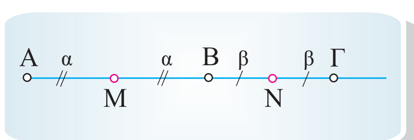
Μέθοδος 2

2. Για να αποδείξουμε μια σχέση ισότητας ευθυγράμμων τμημάτων.
- Ξεκινάμε από το μέλος που μπορούν να γίνουν πράξεις.
- Προσπαθούμε με κατάλληλες προσθαφαιρέσεις να εκφράσουμε τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουμε συναρτήσει των τμημάτων του άλλου μέλους της ισότητας.
- Συνήθως συμβολίζουμε με τα ίδια γράμματα τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Έστω τα διαδοχικά και συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ και Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Δείξτε ότι $MN = \frac{A\Gamma}{2}$.



Λύση

1ος τρόπος

Έχουμε Μ μέσο του ΑΒ ,οπότε $AM = MB = \frac{AB}{2}$.

Ομοίως Ν μέσο του ΒΓ, οπότε $BN = N\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$.

Άρα $MB + BN \overset{(1),(2)}{=} \frac{AB}{2} + \frac{B\Gamma}{2} = \frac{AB + B\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma}{2}$.

2ος τρόπος

Αν ονομάσουμε $AM = MB = \alpha$ και $BN = N\Gamma = \beta$ τότε: $MN = \alpha + \beta = \frac{2(\alpha+\beta)}{2} = \frac{A\Gamma}{2}$

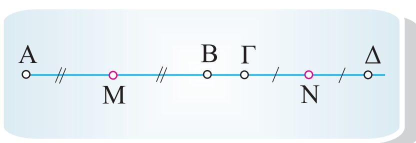
Άσκηση 2

Έστω τα διαδοχικά και συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ, Δ και Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Δείξτε ότι i. $MN = \frac{A\Delta + B\Gamma}{2}$ ii. $A\Gamma + B\Delta = A\Delta + B\Gamma$

Λύση

i.

1ος τρόπος

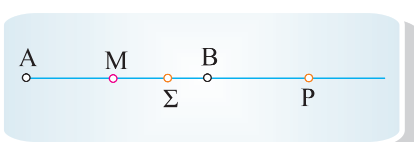


Έχουμε Μ μέσο του ΑΒ,οπότε $AM = MB = \frac{AB}{2}$.

Επειδή Ν μέσο του ΓΔ ,είναι $\Gamma N = N\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Άρα $\frac{A\Delta + B\Gamma}{2} = \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + B\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} + \frac{2B\Gamma}{2} + \frac{\Gamma\Delta}{2} = MB + B\Gamma + \Gamma N = MN$

2ος τρόπος



i. Αν ονομάσουμε ΑΜ = x = ΜΒ και ΓΝ = y = ΝΒ, τότε:

$$\frac{ΑΔ+ΒΓ}{2}=\frac{2x+ΒΓ+2y+ΒΓ}{2}=x+ΒΓ+y=ΜΝ$$

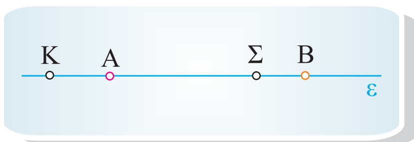
ii. ΑΓ + ΒΔ = 2x + ΒΓ + ΒΓ + 2y = 2x + ΒΓ + 2y + ΒΓ = ΑΔ + ΒΓ.

Άσκηση 3

Σε ευθεία ε θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, το μέσο Μ, ένα τυχαίο σημείο Σ μεταξύ των Μ και Β, και Ρ ένα τυχαίο εξωτερικό σημείο του ΑΒ. Δείξτε ότι:

i. $ΣΜ=\frac{ΣΑ-ΣΒ}{2}$ **και ii.** $ΡΜ=\frac{ΡΑ+ΡΒ}{2}$.

Λύση



Έχουμε Μ μέσο του ΑΒ ,οπότε $ΑΜ=ΜΒ=\frac{ΑΒ}{2}$ (1).

i. $$\frac{ΣΑ-ΣΒ}{2}=\frac{ΣΜ+ΜΑ-(ΜΒ-ΣΜ)}{2}=\frac{ΣΜ+ΜΑ-ΜΒ+ΣΜ}{2}=$$

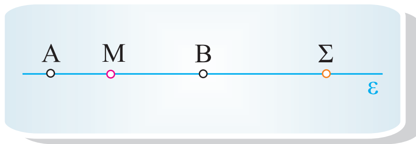
$$=\frac{2ΣΜ+ΜΒ-ΜΒ}{2}=ΣΜ.$$

ii. $$\frac{ΡΑ+ΡΒ}{2}=\frac{ΡΜ+ΜΑ+ΡΜ-ΜΒ}{2}\overset{(1)}{=}\frac{2ΡΜ+ΜΒ-ΜΒ}{2}=ΡΜ.$$

Άσκηση 4

Στην ευθεία ε παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Σ και Κ. Το σημείο Σ είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΑΒ ώστε $ΣΒ=\frac{3}{4}ΣΑ$. Το σημείο Κ είναι εξωτερικό του τμήματος ΑΒ προς το μέρος του Α. Να δειχθεί ότι: $ΚΣ=\frac{3\cdot ΚΑ+4\cdot ΚΒ}{7}$.

Λύση



Είναι $K\Sigma = KA + A\Sigma \Leftrightarrow 3 \cdot K\Sigma = 3 \cdot KA + 3 \cdot A\Sigma$ και

$$K\Sigma = KB - \Sigma B \Leftrightarrow 4 \cdot K\Sigma = 4 \cdot KB - 4 \cdot \Sigma B = 4 \cdot KB - 4 \cdot \frac{3}{4}\Sigma A = 4KB - 3\Sigma A$$

Άρα είναι $7K\Sigma = 3 \cdot KA + 4 \cdot KB \Leftrightarrow K\Sigma = \dfrac{3 \cdot KA + 4 \cdot KB}{7}$

Άσκηση 5

Σε ευθεία ε δίνονται στη σειρά τα σημεία Α, Ρ, Β, Σ ώστε $PA = \kappa \cdot PB$ και $\Sigma A = \kappa \cdot \Sigma B$, όπου κ θετικός. Να δειχθεί ότι: $\dfrac{2}{(AB)} = \dfrac{1}{(AP)} + \dfrac{1}{(A\Sigma)}$.

Λύση

Θέλουμε να δείξουμε ότι: $\dfrac{2}{(AB)} = \dfrac{1}{(AP)} + \dfrac{1}{A\Sigma}$.

Αρκεί να δείξουμε: $\dfrac{(AB)}{(AP)} + \dfrac{(AB)}{(A\Sigma)} = 2$.

$$\frac{(AB)}{(AP)} + \frac{(AB)}{(A\Sigma)} = \frac{(AP + PB)}{AP} + \frac{(A\Sigma - \Sigma B)}{(A\Sigma)} = \frac{(\kappa PB + PB)}{(\kappa PB)} + \frac{(\kappa \Sigma B - \Sigma B)}{(\kappa \Sigma B)} =$$

$$\frac{(\kappa + 1)(PB)}{\kappa(PB)} + \frac{(\kappa - 1)(\Sigma B)}{\kappa(\Sigma B)} = \frac{\kappa + 1}{\kappa} + \frac{\kappa - 1}{\kappa} = 2$$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Έστω Α, Β, Γ συνευθειακά σημεία και τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ με μέσο το Μ, ΑΓ με μέσο το Θ και $AB < A\Gamma$. Δείξτε ότι το σημείο Θ βρίσκεται
i. μεταξύ των Μ και Β, αν $A\Gamma < 2AB$ και
ii. μεταξύ των Β και Γ, αν $A\Gamma > 2AB$.

2. Έστω τα διαδοχικά και συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ, Δ και Γ μέσο του ΒΔ. Δείξτε ότι $2ΑΓ > ΑΔ$.

3. Έστω τα διαδοχικά και συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ, Δ και Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Αν ισχύει $ΒΓ = \frac{ΜΝ}{2}$, δείξτε ότι $ΑΔ = ΜΓ + ΒΝ$.

4. Δίνεται τμήμα ΑΒ ευθείας ε και ένα εσωτερικό σημείο Μ, τέτοιο ώστε $ΜΑ = \frac{5}{3}ΜΒ$. Αν Σ είναι σημείο στην προέκταση του ΑΒ προς το Β, τέτοιο ώστε $ΣΑ = \frac{5}{3}ΣΒ$, αποδείξτε ότι: $\frac{1}{(ΑΒ)} = \frac{1}{(ΑΜ)} + \frac{1}{(ΑΣ)}$.

5. Έστω τα διαδοχικά και συνευθειακά σημεία Α,Β,Γ,Δ τέτοια ώστε $ΒΓ = 2ΑΒ$ και $ΓΔ = 3ΑΒ$. Αν Μ,Ν,Θ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα και Ν΄ είναι το συμμετρικό του Ν με κέντρο το Γ να δείξετε ότι $ΑΜ = ΘΝ΄$.

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Αν α, β, γ είναι τρία ευθύγραμμα τμήματα τέτοια ώστε α > β > γ να δειχθεί ότι:

$$\gamma < \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} < \alpha$$