Μάθημα 12

Ομοιότητα

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Όμοια λέγονται δύο πολύγωνα που έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Λόγος ομοιότητας δύο όμοιων πολυγώνων λέγεται ο λόγος δύο πλευρών που είναι απέναντι από αντίστοιχα ίσες γωνίες.

Ισχύουν οι επόμενες προτάσεις:

- Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια προς τρίτο τότε είναι και μεταξύ τους όμοια.
- Δύο ίσα πολύγωνα είναι πάντα όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = 1$.
- Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια τότε όλα τα αντίστοιχα δευτερεύοντα στοιχεία τους έχουν λόγο ίσο με το λόγο ομοιότητας τους.
- Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι πάντα όμοια μεταξύ τους.
- Δύο τετράγωνα είναι πάντα όμοια μεταξύ τους.

Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων

Κριτήριο 1^0: Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Κριτήριο 2^0: Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες των ανάλογων πλευρών γωνίες τους ίσες.

Κριτήριο 3^0: Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Ασκήσεις που ζητείται να υπολογίσουμε κάποιο λόγο τμημάτων.
Ο λόγος αυτός παρουσιάζεται σε αναλογία που προκύπτει από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή ή κάποιου θεωρήματος των διχοτόμων ή ακόμα από την ομοιότητα πολυγώνων (συνήθως τριγώνων) ανάλογα με τα δεδομένα της άσκησης.

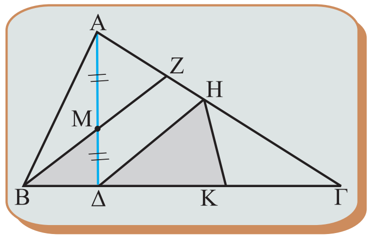
Παράδειγμα 1

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ονομάζουμε Μ το μέσον της διχοτόμου ΑΔ. Φέρνουμε τη ΒΜ που τέμνει την ΑΓ στο Ζ και τη ΔΗ//ΒΖ. Από το Η φέρνουμε ΗΚ//ΑΔ. Αν $B\Delta = \dfrac{B\Gamma}{4}$ να υπολογίσετε τους λόγους: **α.** $\dfrac{Z\Gamma}{AZ}$ **β.** $\dfrac{AB}{A\Gamma}$

Λύση

α. Στο τρίγωνο ΑΔΗ είναι ΜΖ//ΔΗ και αφού Μ μέσον της ΑΔ τότε $AZ = ZH \quad (1)$ και

$MZ // = \dfrac{\Delta H}{2} \quad (2)$. Αφού ΒΖ//ΔΗ από θεώρημα Θαλή στο ΒΖΓ ισχύει:



$$\frac{Z\Gamma}{ZH} = \frac{B\Gamma}{B\Delta} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{Z\Gamma}{AZ} = \frac{B\Gamma}{\frac{B\Gamma}{4}} \Leftrightarrow \frac{Z\Gamma}{AZ} = 4$$

β. Αφού ΑΔ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$ από το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου ισχύει:

$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\frac{B\Gamma}{4}}{\frac{3B\Gamma}{4}} = \frac{1}{3}$$

Κατηγορία - Μέθοδος 2

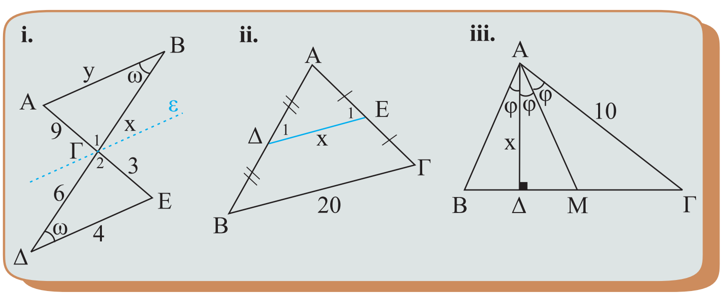
Ασκήσεις που ζητείται να υπολογίσετε ευθύγραμμο τμήμα όταν δίνονται άλλα γνωστά ευθύγραμμα τμήματα.

Το ευθύγραμμο τμήμα υπολογίζεται από αναλογία στην οποία οι υπόλοιποι όροι είναι γνωστοί και η οποία προκύπτει από:

- Εφαρμογή θεωρήματος Θαλή
- Ομοιότητα τριγώνων (γενικότερα πολυγώνων)
- Εφαρμογή των θεωρημάτων των διχοτόμων

Παράδειγμα 2

Στα πιο κάτω σχήματα να υπολογίσετε τα x,y.



Λύση

α. Αφού $\hat{B}=\hat{\Delta}$ είναι ΑΒ//ΔΕ οπότε από θεώρημα Θαλή (θεωρώντας τη νοητή ευθεία ε//ΔΕ//ΑΒ) έχουμε $\frac{6}{3}=\frac{x}{9} \Leftrightarrow x=18$. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΓΕ είναι όμοια διότι $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2$ και $\hat{B}=\hat{\Delta}$ άρα και $\hat{A}=\hat{E}$. Επομένως, $\frac{y}{4}=\frac{9}{3} \Leftrightarrow y=12$.

β. Αφού τα Δ,Ε είναι μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ είναι ΔΕ//ΒΓ. Άρα $\hat{\Delta}_1=\hat{B}$ και $\hat{E}_1=\hat{\Gamma}$. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ είναι όμοια και επομένως:

$$\frac{20}{x}=\frac{AB}{A\Delta} \Leftrightarrow \frac{20}{x}=\frac{AB}{\frac{AB}{2}} \Leftrightarrow \frac{20}{x}=2 \Leftrightarrow x=10$$

γ. Στο τρίγωνο ΑΒΜ η ΑΔ είναι διχοτόμος και ύψος άρα είναι και διάμεσος, οπότε

$$B\Delta=\Delta M=\frac{BM}{2}=\frac{B\Gamma}{4}.$$

Από το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου στο ΑΔΓ έχουμε:

$$\frac{A\Gamma}{A\Delta}=\frac{M\Gamma}{M\Delta} \Leftrightarrow \frac{10}{x}=\frac{\frac{B\Gamma}{2}}{\frac{B\Gamma}{4}} \Leftrightarrow x=5$$

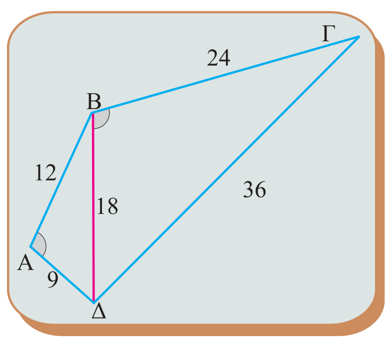
Κατηγορία - Μέθοδος 3

Ασκήσεις όπου είναι γνωστές οι πλευρές τριγώνου και ζητείται ισότητα γωνιών.

Αποδεικνύουμε την ομοιότητα τριγώνων (από αναλογίες πλευρών) και βρίσκουμε τις αντίστοιχες ίσες γωνίες.

Παράδειγμα 3

Στο διπλανό σχήμα να δείξετε ότι $\hat{A}=\Delta\hat{B}\Gamma$.



Λύση

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΔΓ είναι όμοια αφού

$$\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{A\Delta}{B\Delta}=\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{1}{2}.$$

Άρα οι αντίστοιχες γωνίες είναι ίσες άρα $\hat{A}=\Delta\hat{B}\Gamma$.

Κατηγορία - Μέθοδος 4

Ασκήσεις που ζητείται να δείξουμε αναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ (1) ή ισότητα γινομένου $\alpha\delta=\beta\gamma$ (2) ή ακόμα σχέση της μορφής $\alpha^2=\beta\gamma$ (3). (όπου α, β, γ μέτρα ευθυγράμμων τμημάτων)
Και στις τρεις περιπτώσεις έχουμε να δείξουμε ότι ισχύει μια αναλογία. Στις περιπτώσεις (2), (3) αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ και $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$ αντίστοιχα. Η αναλογία προκύπτει από:

- Εφαρμογή του θεωρήματος Θαλή
- Ομοιότητα τριγώνων (γενικότερα πολυγώνων)
- Εφαρμογή των θεωρημάτων των διχοτόμων (εσωτερικής, εξωτερικής)

Πολλές φορές η ισότητα λόγων προκύπτει μεταβατικά (αν οι λόγοι είναι ίσοι με τρίτο λόγο είναι και μεταξύ τους ίσοι)
Σε πολλές ασκήσεις προκειμένου να φτάσουμε στη ζητούμενη προς απόδειξη αναλογία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες των αναλογιών ή ακόμα να προσθέσουμε - αφαιρέσουμε - πολλαπλασιάσουμε - διαιρέσουμε αναλογίες μεταξύ τους.

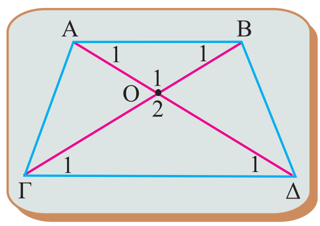
Παράδειγμα 4

Να δείξετε ότι σε κάθε τραπέζιο το σημείο τομής των διαγωνίων του διαιρεί κάθε διαγώνιο σε τμήματα ανάλογα με τις βάσεις.

Λύση

Τα τρίγωνα ΒΟΑ και ΓΟΔ είναι όμοια, διότι:

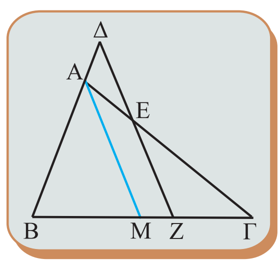
- $\hat{\Gamma}_1=\hat{B}_1$ (ως εντός εναλλάξ)
- $\hat{\Delta}_1=\hat{A}_1$ (ως εντός εναλλάξ) και
- $\hat{O}_1=\hat{O}_2$ (ως κατακορυφήν γωνίες)



Άρα $\frac{O\Gamma}{OB}=\frac{O\Delta}{OA}$.

Παράδειγμα 5

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, η ΑΜ είναι διάμεσος και η ΔΖ παράλληλη στην ΑΜ. Να δείξετε ότι $A\Delta\cdot\beta=\gamma\cdot AE$



Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{A\Delta}{\gamma}=\frac{AE}{\beta}$. Στο τρίγωνο ΒΔΖ, έχουμε:

$$\frac{A\Delta}{AB}=\frac{MZ}{BM} \quad (1)$$

Επίσης στο τρίγωνο ΑΜΓ έχουμε:

$$\frac{AE}{\Gamma E}=\frac{MZ}{Z\Gamma}\Leftrightarrow\frac{AE}{\Gamma E+EA}=\frac{MZ}{\Gamma Z+ZM}\Leftrightarrow\frac{AE}{\beta}=\frac{MZ}{\Gamma M}\qquad(2)$$

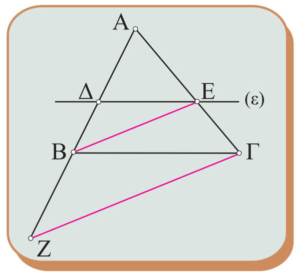
Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $\frac{A\Delta}{\gamma}=\frac{AE}{\beta}$, διότι $MB=M\Gamma$.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Ευθεία ε είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε. Από το Γ φέρνουμε παράλληλη στη ΒΕ που τέμνει την ευθεία ΑΒ στο Ζ, να δείξετε ότι: $\frac{A\Delta}{AB}=\frac{AB}{AZ}$

Λύση



Από τις $\Delta E\,//\,B\Gamma\Leftrightarrow\frac{A\Delta}{AB}=\frac{AE}{A\Gamma}\qquad(1)$

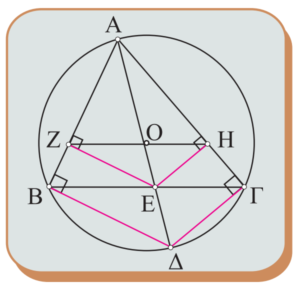
Από τις $BE\,//\,\Gamma Z\Leftrightarrow\frac{AB}{AZ}=\frac{AE}{A\Gamma}\qquad(2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) είναι $\frac{A\Delta}{AB}=\frac{AE}{A\Gamma}$

Άσκηση 2

Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Αν η διάμετρος ΑΔ τέμνει τη ΒΓ στο Ε και φέρουμε τις $EZ\perp AB$ **και** $EH\perp A\Gamma$**, να δείξετε ότι:** $ZH\,//\,B\Gamma$

Λύση



Είναι: $\widehat{AB\Delta}=\widehat{AZE}=1^L$. Άρα $EZ\,//\,\Delta B\Leftrightarrow\frac{AZ}{ZB}=\frac{AE}{E\Delta}\qquad(1)$

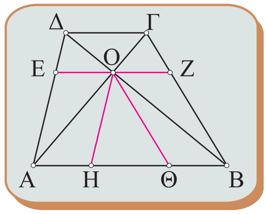
Όμοια: $\widehat{A\Gamma\Delta}=\widehat{AHE}=1^L$. Άρα $EH\,//\,\Delta\Gamma\Leftrightarrow\frac{AH}{H\Gamma}=\frac{AE}{E\Delta}\qquad(2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $\frac{AZ}{ZB}=\frac{AH}{H\Gamma}$, οπότε $ZH\,//\,B\Gamma$.

Άσκηση 3

Από το σημείο τομής των διαγωνίων τραπεζίου, φέρνουμε την ΕΖ//ΑΒ (Ε, Ζ σημεία των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα) και ΟΗ//ΑΔ, ΟΘ//ΒΓ (Η, Θ σημεία της ΑΒ).
Να δείξετε ότι: $OE=OZ$

Λύση



Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΟΘ//ΒΓ οπότε: $\frac{ΑΟ}{ΟΓ}=\frac{ΑΘ}{ΘΒ}$ (1)

Στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι ΟΗ//ΑΔ οπότε: $\frac{ΒΟ}{ΟΔ}=\frac{ΒΗ}{ΑΗ}$ (2)

Επειδή ΔΓ//ΕΖ//ΑΒ θα είναι: $\frac{ΑΟ}{ΟΓ}=\frac{ΒΟ}{ΟΔ}$. Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$\frac{ΑΘ}{ΒΘ}=\frac{ΒΗ}{ΑΗ}$ ή $\frac{ΑΘ+ΘΒ}{ΘΒ}=\frac{ΒΗ+ΑΗ}{ΑΗ}$ ή $\frac{ΑΒ}{ΘΒ}=\frac{ΑΒ}{ΑΗ} \Leftrightarrow ΑΗ=ΘΒ \Leftrightarrow ΕΟ=ΟΖ$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΔ και ονομάζουμε Ε το μέσο της. Αν η ΒΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ να δειχθεί ότι: $\frac{ΑΖ}{ΖΓ}=\frac{1}{2}$

2. Στη πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε το μέσο Μ και τα σημεία Δ, Ε έτσι ώστε $ΔΜ=ΜΕ$. Φέρνουμε τις ΔΖ//ΑΓ $(Ζ \in ΑΒ)$ και ΕΗ//ΑΒ $(Η \in ΑΓ)$. Να δείξετε ότι: ΖΗ//ΒΓ.

3. Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ, η παράλληλη προς τη ΒΓ από το Α τέμνει την ΒΔ στο Ε και η παράλληλη προς τη ΔΓ από το Ε τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Να δείξετε ότι: ΒΖ // ΑΔ

4. Στο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τα ύψη ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ και $Α'Ζ \perp ΓΓ'$, $Α'Ε \perp ΑΓ$. Να δείξετε ότι: ΒΖ//ΑΔ

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος ΑΔ αυτού. Αν ΔΕ//ΑΒ $(Ε \in ΑΓ)$, να δείξετε ότι:

$\frac{1}{β}+\frac{1}{γ}=\frac{1}{ΔΕ}$

6. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τις ΒΕ και ΓΖ κάθετες στη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας Α. Να δείξετε ότι τα Ε και Ζ είναι αρμονικά συζυγή των Α, Δ.

7. Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Μία χορδή ΑΕ τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Να δείξετε ότι: $ΑΒ^2=ΑΔ\cdot ΑΕ$

8. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\widehat{A}=1)$ είναι ΑΔ το ύψος και $\Delta E \perp AB$. Να δείξετε ότι: $A\Delta^2 = A\Gamma \cdot \Delta E$

9. Σε ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται κάθετα στο Ο. Να δείξετε ότι: $A\Delta^2 = AB \cdot \Gamma\Delta$

10. Ο κύκλος που γράφεται με διάμετρο τη πλευρά ΒΓ ορθογωνίου τραπεζίου ΑΒΓΔ $(\widehat{A}=\widehat{\Delta}=1)$ τέμνει την ΑΔ στο Ε, να δείξετε ότι: $AE \cdot E\Delta = AB \cdot \Gamma\Delta$

11. Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και η διχοτόμος ΑΔ τέμνει τον κύκλο στο Ε. Να δείξετε ότι: **α.** $AB \cdot A\Gamma = A\Delta \cdot AE$ **β.** $EB^2 = E\Delta$

12. Από σημείο Ο που βρίσκεται εκτός κύκλου (Κ, R) φέρνουμε την εφαπτομένη ΟΑ και τη τέμνουσα ΟΒΓ. Να δείξετε ότι: $\dfrac{(AB)^2}{(A\Gamma)^2} = \dfrac{OB}{O\Gamma}$

13. Από την κορυφή παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρνουμε την ευθεία ε που τεμνει τη ΒΓ στο Ε και τη ΔΓ στο Ζ. Να δείξετε ότι: $(BE)\cdot(\Delta Z) = (AB)\cdot(A\Delta)$

14. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{B}-\widehat{\Gamma}=1^L$. Αν ΑΔ το ύψος του να δείξετε ότι: $A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$

15. Δίνεται κύκλος (Ο, R) και ευθεία xy. Η διάμετρος ΑΒ τέμνει κάθετα τη xy στο Γ. Από το Α φέρνουμε τυχαία χορδή ΑΔ, που τέμνει τη xy στο Ε. Να δείξετε ότι: $(A\Delta)\cdot(AE) = (AB)\cdot(A\Gamma)$

16. Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ και Ο είναι το σημείο που τέμνονται οι μη παράλληλες πλευρές του. Από το Ο φέρνουμε την ευθεία ε παράλληλη στις βάσεις του τραπεζίου, που τέμνει τις προεκτάσεις των διαγωνίων του τραπεζίου στα Ε και Ζ. Να δείξετε ότι: $EO = OZ$

17. Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε τυχαία ευθεία ε, που τέμνει την ΑΓ στο Κ, την ΑΒ στο Ρ και την από το Α παράλληλη προς τη ΒΓ στο Ν. Να δειχθεί ότι: $PN/PM = KN/KM$

18. Από το άκρο Α μιας διαμέτρου ΑΒ κύκλου Ο φέρνουμε δύο χορδές ΑΓ και ΑΔ, που τέμνουν την εφαπτομένη ΒΕ στα Ε και Ζ. Να δείξετε ότι: $(AE)\cdot(A\Gamma) = (AZ)\cdot(A\Delta)$

19. Δίνεται κύκλος (Ο, R), χορδή ΑΒ και οι εφαπτομένες ε_1 και ε_2 στα Α και Β. Αν Μ τυχαίο σημείο του ΑΒ και ΜΗ, ΜΕ, ΜΖ οι αποστάσεις του Μ από την $\overset{\frown}{AB}$ και τις ε_1 και ε_2, να δείξετε ότι: $MH^2 = ME \cdot MZ$

20. Από σημείο Σ εκτός κύκλου (O, R) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΑ και ΣΒ και μία τέμνουσα ΣΓΔ. Να δείξετε ότι: $ΑΓ \cdot ΒΔ = ΑΔ \cdot ΒΓ$

21. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και από το Α μία τέμνουσα τη ΒΓ στο Ζ, τη ΓΔ στο Η και τη ΒΔ στο Ε. Να δείξετε ότι: $(ΕΑ)^2 = (ΕΖ)(ΕΗ)$

22. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τα ύψη ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Να αποδείξετε ότι: $ΔΒ \cdot ΔΓ = ΔΕ \cdot ΔΖ$

23. Αν οι διαγώνιες δύο παραλληλογράμμων είναι ανάλογες και σχηματίζουν ίσες γωνίες, τα παραλληλόγραμμα είναι όμοια.

24. Δύο κύκλοι Κ και Λ τέμνονται στα Α και Β. Οι εφαπτομένες των κύκλων στο Α, τους τέμνουν στα Γ και Δ. Να δειχθεί ότι: $ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ$

25. Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Φέρνουμε τη διάμετρο ΑΔ και το ύψος ΑΕ, να δείξετε ότι: $ΑΒ \cdot ΑΓ = ΑΔ \cdot ΑΕ$

26. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΟ το ύψος του. Αν Μ τυχαίο σημείο του ύψους ΑΟ και $ΜΔ \perp ΑΒ$, $ΜΕ \perp ΑΓ$ να δείξετε ότι: $ΑΒ \cdot ΑΔ = ΑΕ \cdot ΑΓ$

27. Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις ΑΒ και ΑΓ κατά τμήματα ΒΔ = ΓΕ. Η ΔΕ τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Ζ. Να δείξετε ότι: $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΕΖ}{ΔΖ}$

Ε “ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ”

Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ το άθροισμα των βάσεων ΑΒ + ΓΔ είναι ίσα με το άθροισμα ΑΔ + ΒΓ των μη παράλληλων πλευρών του. Από το σημείο τομής των διαγωνίων του φέρνουμε παράλληλη προς τις βάσεις που τέμνει την ΑΔ στο Μ και τη ΒΓ στο Ν. Να δειχθεί ότι:

$$ΔΜ + ΓΝ = ΔΓ$$