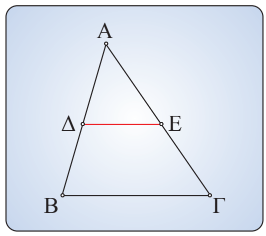
Μάθημα 8

Εφαρμογές παραλληλογράμμων

Α. Απαραίτητες γνώσεις θεωρίας

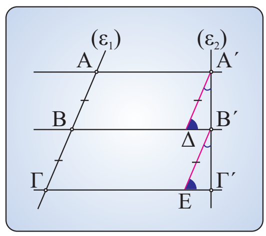
Θεώρημα

Το ευθύγραμμο τμήμα, που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά αυτού, και ίσο με το μισό αυτής.



Θεώρημα

Η παράλληλος που άγεται από το μέσον μιας πλευράς τριγώνου προς μια άλλη πλευρά του, περνάει και από το μέσον της τρίτης πλευράς του τριγώνου.



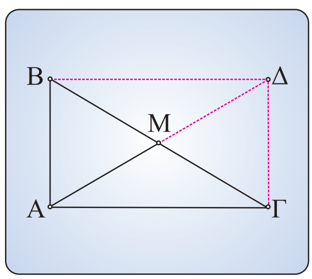
Θεώρημα

Εάν ευθείες παράλληλες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που συναντούν.

Μια ιδιότητα του ορθογωνίου τριγώνου

Η διάμεσος που άγεται προς την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου, είναι ίση με το μισό αυτής.

Αν η διάμεσος τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία ντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

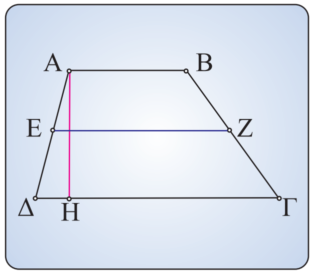


Πόρισμα *Η κάθετος πλευρά ορθ. τριγώνου, που είναι απέναντι από γωνία 30° είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.*

ΤΡΑΠΕΖΙΑ

Ορισμοί

i) Τραπέζιο λέγεται κάθε τετράπλευρο που έχει μόνο τις δύο πλευρές του παράλληλες π.χ. το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.



ii) Διάμεσος τραπεζίου λέγεται το ευθ. τμήμα που έχει άκρα τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών, π.χ. το ΕΖ.

iii) Βάσεις τραπεζίου λέγονται οι παράλληλες πλευρές του π.χ. οι ΑΒ, ΓΔ.

iv) Ύψος τραπεζίου λέγεται η απόσταση των μη παραλλήλων πλευρών του, π.χ. το ΑΗ.

v) Ισοσκελές τραπέζιο, λέγεται το τραπέζιο που έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες.

vi) Ορθογώνιο ή **δισορθογώνιο** τραπέζιο, λέγεται το τραπέζιο που έχει δύο γωνίες ορθές π.χ το ΑΒΓΗ.

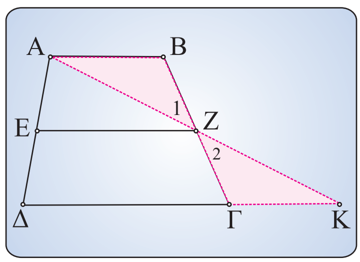
Σε κάθε τραπέζιο ισχύουν τα θεωρήματα:

Θεώρημα

Η διάμεσος κάθε τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμα αυτών.

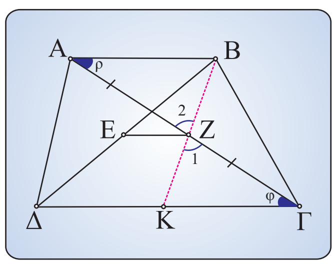
Απόδειξη

Φέρουμε την ΑΖ που τέμνει την ΔΓ στο Κ, τότε τριγ. $\text{ΑΒΖ} = \text{τριγ. ΖΓΚ}$ $(\text{ΖΒ} = \text{ΖΓ}, \text{Ζ}_1 = \text{Ζ}_2, \text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Ζ} = \text{Ζ}\hat{\text{Γ}}\text{Κ})$, από την ισότητα έχουμε $\text{ΑΒ} = \text{ΓΚ}$ και $\text{ΑΖ} = \text{ΖΚ}$. Στο τρίγωνο ΑΔΚ η ΕΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΔ, ΑΚ άρα θα είναι παράλληλη προς την ΔΚ και ίση με το μισό αυτής δηλ. $\text{ΕΖ} = \dfrac{\text{ΔΚ}}{2} = \dfrac{\text{ΔΓ} + \text{ΓΚ}}{2} = \dfrac{\text{ΔΓ} + \text{ΑΒ}}{2}$.



Θεώρημα

Το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα τα μέσα των διαγωνίων ενός τραπεζίου είναι παράλληλο προς τις βάσεις και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεών του.



Απόδειξη

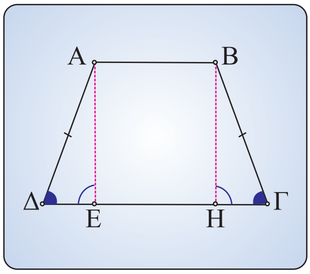
Φέρνουμε την ΒΖ που τέμνει την ΓΔ στο Κ. Τότε τριγ.

$AB Z =$ τριγ. $K Z\Gamma$ $\left(ZA = Z\Gamma, \hat{Z}_1 = \hat{Z}_2, \hat{\varphi} = \hat{\rho}\right)$. Από την ισότητα έχουμε $K\Gamma = AB$ και $ZB = ZK$. Στο τρίγωνο ΒΔΚ η ΕΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΔ, ΒΚ άρα $EZ \parallel \Delta K$ και $EZ = \dfrac{\Delta K}{2} = \dfrac{\Delta\Gamma - K\Gamma}{2} = \dfrac{\Delta\Gamma - AB}{2}$.

Στο ισοσκελές τραπέζιο ισχύουν τα επόμενα θεωρήματα:

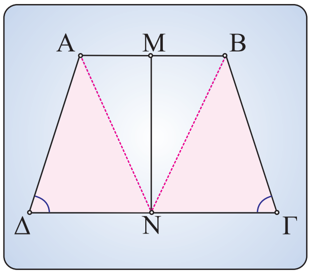
Θεώρημα
Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες είναι ίσες και αντίστροφα.

Θεώρημα
Οι διαγώνιες κάθε ισοσκελούς τραπεζίου είναι ίσες και αντίστροφα.



Θεώρημα
Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα τα μέσα των βάσεών του, είναι κάθετο στις βάσεις.

Πόρισμα *Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο η ευθεία που περνά από τα μέσα των βάσεών του, είναι άξονας συμμετρίας αυτού.*



Κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές

1. **Οι προσκείμενες σε μία βάση γωνίες είναι ίσες.**
2. **Οι διαγώνιές του είναι ίσες.**

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Για να δείξουμε ότι ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο, δείχνουμε ότι :

Η διάμεσος του τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

2. Για να δείξουμε ότι ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές , δείχνουμε ότι :

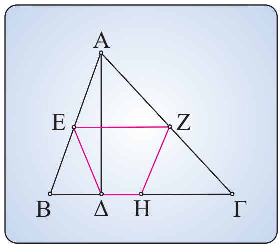
Οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες είναι ίσες.
Οι διαγώνιές του είναι ίσες.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών τριγώνου και το ίχνος ενός ύψους είναι κορυφές ισοσκελούς τραπεζίου.

Λύση

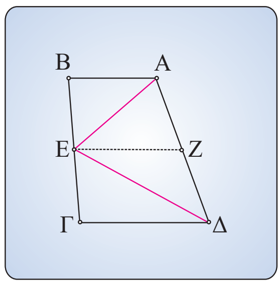


Έστω Ε, Ζ, Η τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓ και Δ το ίχνος του ύψους ΑΔ, θα δείξουμε, ότι το ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Η $\text{ΕΖ} \parallel \text{ΒΓ}$ γιατί ενώνει τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, άρα το ΕΖΗΔ είναι τραπέζιο. $\text{ΗΖ} = \dfrac{\text{ΑΒ}}{2}(1)$ γιατί ενώνει τα μέσα των ΑΓ, ΒΓ. Η $\text{ΔΕ} = \dfrac{\text{ΑΒ}}{2}\,(2)$ γιατί είναι η διάμεσος του ορθογώνιου τριγώνου ΑΔΒ. Από τις (1) και (2) έχουμε $\text{ΗΖ} = \text{ΔΕ}$, άρα το ΕΖΗΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Άσκηση 2

Αν σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ η μία από τις μη παράλληλες πλευρές η ΑΔ, είναι ίση με το άθροισμα των βάσεων, και Ε είναι το μέσο της απέναντι πλευράς της να αποδείξετε ότι η γωνία $\text{ΑΕΔ} = 90^{\circ}$.

Λύση



Έστω ΑΒΓΔ ένα τραπέζιο στο οποίο είναι $\text{ΑΔ} = \text{ΑΒ} + \text{ΓΔ}(1)$ και Ε το μέσο της ΒΓ, θα δείξουμε, ότι $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Δ} = 90^{\circ}$. Φέρνουμε την διάμεσο ΕΖ του τραπεζίου, τότε $\text{ΕΖ} = \dfrac{\text{ΑΒ} + \text{ΓΔ}}{2}(2)$. Από τις (1), (2) έπεται $\text{ΕΖ} = \dfrac{\text{ΑΔ}}{2}$ άρα το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ορθογώνιο στο Ε, δηλ. $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Δ} = 90^{\circ}$.

Άσκηση 3

Να αποδείξετε, ότι το άθροισμα των αποστάσεων των κορυφών ενός παραλληλογράμμου από μια ευθεία που δεν τέμνει το παραλληλόγραμμο, είναι ίσο με την τετραπλάσια απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου, από την ευθεία.

Λύση

Από το τραπέζιο $\text{ΑΑ}_1\text{Γ}_1\text{Γ}$ επειδή η ΚΚ_1 είναι διάμεσος αυτού έχουμε: $\text{ΚΚ}_1 = \dfrac{\text{ΑΑ}_1 + \text{ΓΓ}_1}{2}(1)$.

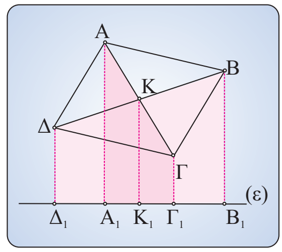
Όμοια από το τραπέζιο $ΒΒ_1Δ_1Δ$ έχουμε: $ΚΚ_1 = \dfrac{ΒΒ_1 + ΔΔ_1}{2} \; (2)$.

Προσθέτουμε τις (1), (2) και έχουμε:

$$2ΚΚ_1 = \frac{ΑΑ_1 + ΒΒ_1 + ΓΓ_1 + ΔΔ_1}{2}$$

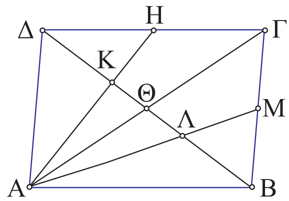
ή

$$4ΚΚ_1 = ΑΑ_1 + ΒΒ_1 + ΓΓ_1 + ΔΔ_1 .$$



Άσκηση 4

Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τα Μ και Η είναι μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ. Να δειχθεί ότι η διαγώνιος ΒΔ διαιρείται σε τρία ίσα μέρη από τις ΑΜ, ΑΗ.



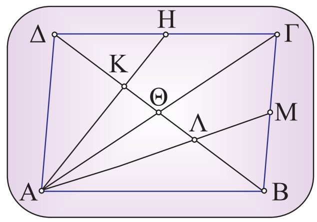
Λύση

Έστω Κ, Λ και Θ τα σημεία τομής της ΒΔ από τις ΑΗ, ΑΜ, ΑΓ, αντίστοιχα. Στο ΑΒΓ οι ΑΜ, ΒΘ είναι διάμεσοι, οπότε :

$$ΒΛ = \frac{2}{3}ΒΘ = \frac{1}{3}ΒΔ \qquad (1)$$

Στο ΑΔΓ οι ΑΗ, ΔΘ είναι διάμεσοι, οπότε :

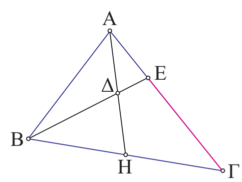
$$ΔΚ = \frac{2}{3}ΔΘ = \frac{1}{3}ΒΔ \qquad (2)$$



Απο τις (1) και (2) έχουμε: $ΚΛ = ΔΚ = ΒΛ = \dfrac{1}{3}ΒΔ$.

Άσκηση 5

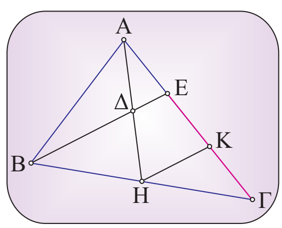
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Έστω Δ το μέσο της διαμέσου ΑΗ. Αν η ΒΔ τέμνει την ΑΓ στο Ε,να αποδείξετε ότι: $ΑΓ = \dfrac{3}{2}ΕΓ$



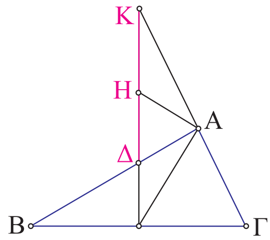
Λύση

Φέρνουμε απο το Η την παράλληλη στην ΒΕ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ. Επειδή το Δ είναι το μέσο της ΑΗ και ΔΕ // ΗΚ το Ε είναι το μέσο της ΑΚ , δηλ. ΑΕ = ΕΚ . Επειδή το Η είναι μέσο της ΒΓ και ΗΚ // ΒΕ το Κ είναι το μέσο της ΕΓ , δηλ. ΕΚ = ΚΓ .

Άρα $ΕΓ = ΕΚ + ΚΓ = 2 \cdot ΚΓ = \dfrac{2}{3}ΑΓ$.

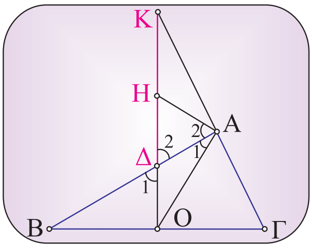


Άσκηση 6



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 30^o$. Από το μέσο Ο της ΒΓ φέρνουμε την κάθετη στη ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Κ. Φέρνουμε ακόμα στο Α την κάθετη στην ΑΟ, που τέμνει την ΟΚ στο Η. Να αποδείξετε ότι το Η είναι το μέσο της ΚΔ.

Λύση



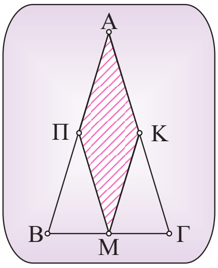
Επειδή $\hat{B} = 30°$ είναι $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$. Επίσης $ΑΟ = \frac{ΒΓ}{2}$ (διάμεσος ορθ. τριγώνου). Επομένως το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισόπλευρο.

Τότε $\widehat{A_1} = 30^0 \Rightarrow \widehat{Δ_1} = 60^0 = \widehat{Δ_2} = \widehat{A_2}$,δηλ. ΑΗ = ΗΔ.
Όμως ΑΗ = ΗΚ οπότε το Η μέσο του ΚΔ.

Άσκηση 7

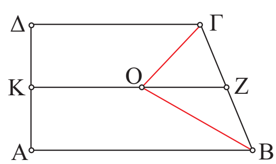
Από το μέσο Μ της βάσης ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε τις παράλληλες ΜΠ και ΜΚ προς τις πλευρές ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το ΑΠΜΚ είναι ρόμβος.

Λύση



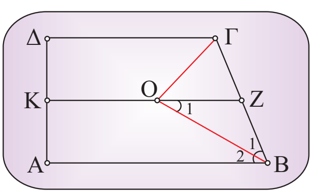
Το ΑΚΜΠ είναι παραλληλόγραμο ,διότι έχει απέναντι πλευρές παράλληλες. Επειδή $ΜΠ = ΑΚ = \frac{ΑΓ}{2}$ και $ΜΚ = ΑΠ = \frac{ΑΒ}{2}$ έχουμε ΜΠ = ΜΚ. Επομένως το ΑΠΜΚ είναι ρόμβος αφού έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

Άσκηση 8



Η διχοτόμος της γωνίας Β τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνει τη διάμεσο ΚΖ στο Ο. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΓΟΒ είναι ορθογώνιο.

Λύση



Είναι $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$,αφού η ΒΟ είναι διχοτόμος της γωνίας Β και

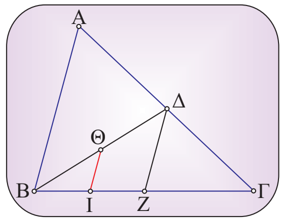
$\hat{B}_2 = \hat{O}_1$,αφού ΚΖ//ΑΒ.

Άρα $\hat{B}_1 = \hat{O}_1$,δηλ. $ΟΖ = ΖΒ = \frac{ΒΓ}{2}$. Άρα η διάμεσος του τριγώνου ΓΟΒ είναι ίση με το μισό της πλευράς που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΓΟΒ είναι ορθογώνιο.

Άσκηση 9

Στην πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε το σημείο Ι ώστε $BI = \frac{1}{4}B\Gamma$. Φέρνουμε τη διάμεσο ΒΔ και έστω Θ το μέσο της. Να δειχθεί ότι $I\Theta // = \frac{AB}{4}$.

Λύση



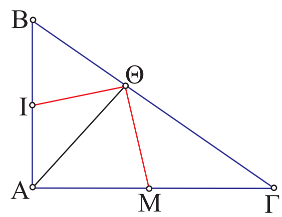
Φέρνουμε απο το Δ παράλληλη πρός την ΑΒ που διέρχεται απο το μέσο Ζ της ΒΓ. Τότε $IZ = \frac{1}{4}B\Gamma = BI$.

Επίσης $I\Theta // = \frac{\Delta Z}{2}$ (διότι τα Ι, Θ είναι μέσα των ΒΖ, ΒΔ) και

$\Delta Z // = \frac{AB}{2}$ (διότι τα Δ, Ζ είναι τα μέσα των ΑΓ, ΒΓ).

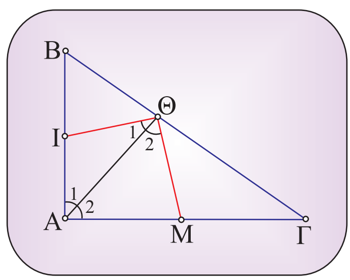
Άρα $I\Theta // = \frac{\Delta Z}{2} // = \frac{\frac{AB}{2}}{2} = \frac{AB}{4}$.

Άσκηση 10



Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) φέρνουμε το ύψος ΑΘ και έστω Ι και Μ τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι τρίγωνο ΙΘΜ είναι ορθογώνιο.

Λύση



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΘ η ΘΙ είναι διάμεσος οπότε $\Theta I = \frac{AB}{2} = IA$. Επομένως $\hat{\Theta}_1 = \hat{A}_1$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΘΓ η ΘΜ είναι διάμεσος οπότε $\Theta M = \frac{A\Gamma}{2} = AM$. Άρα $\hat{\Theta}_2 = \hat{A}_2$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των παραπάνω σχέσεων ,παίρνουμε : $\hat{\Theta}_1 + \hat{\Theta}_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2$ ή $I\hat{\Theta}M = \hat{A} = 90^o$.

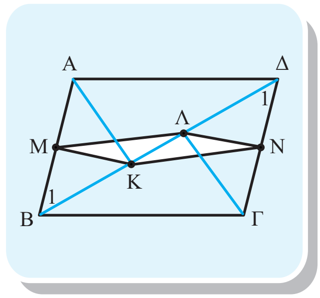
Άσκηση 11

Από τις κορυφές Α και Γ παραλληλογράμου ΑΒΓΔ φέρνουμε κάθετες προς τη διαγώνιο ΒΔ, τις ΑΚ και ΓΛ αντίστοιχα. Αν Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα να δείξετε ότι τα Κ, Λ, Μ, Ν είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\hat{K}B$ η ΚΜ είναι διάμεσος άρα $KM = \frac{AB}{2}$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\hat{\Lambda}\Gamma$ η ΛΝ είναι διάμεσος άρα $\Lambda N = \frac{\Delta\Gamma}{2}$. Αφού $AB = \Delta\Gamma$ θα είναι $KM = \Lambda N$



Έχουμε $\begin{aligned} B\Lambda &= BK + K\Lambda \quad (1) \\ \Delta K &= \Delta\Lambda + K\Lambda \quad (2) \end{aligned}$

Όμως $A\hat{B}K = \Lambda\hat{\Delta}\Gamma \left(\begin{aligned} &\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^\circ \\ &AB = \Delta\Gamma \\ &\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 \end{aligned} \right)$

Άρα είναι ΒΚ=ΔΛ. Τότε από (1), (2) προκύπτει $B\Lambda = \Delta K$

Είναι $B\hat{M}\Lambda = \Delta\hat{K}N$ αφού $MB = \Delta N$ (μισά ίσων τμημάτων)

$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ (εντός εναλλάξ)

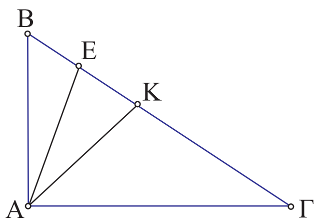
$B\Lambda = \Delta K$

Τότε και $M\Lambda = KN$

Άρα το ΜΛΝΚ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

Άσκηση 12

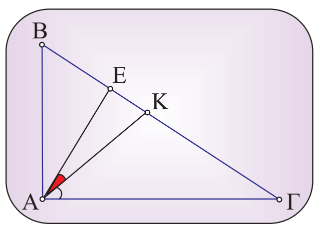
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΚ και το ύψος ΑΕ. Αν $\hat{B} > \hat{\Gamma}$, να δειχθεί ότι $K\hat{A}E = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.



Λύση

Είναι $K\hat{A}E = E\hat{A}\Gamma - K\hat{A}\Gamma = 90^\circ - \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.

Διότι $K\hat{A}\Gamma = \hat{\Gamma}$, αφού η ΑΚ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ και συνεπώς ισχύει $AK = \frac{1}{2}B\Gamma = K\Gamma$.



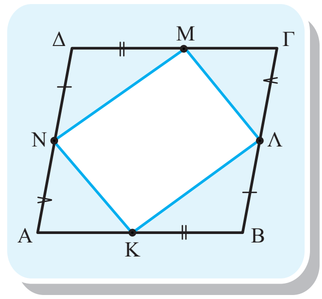
Άσκηση 13

Στις πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε τα ίσα τμήματα $AK = B\Lambda = \Gamma M = \Delta N$. Δείξτε ότι το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο. Τι θα πρέπει να ισχύει ώστε:

i. ΚΛΜΝ ρόμβος

ii. ΚΛΜΝ τετράγωνο

Λύση



Είναι $A\overset{\triangle}{N}K = M\overset{\triangle}{\Gamma}\Lambda$ αφού:

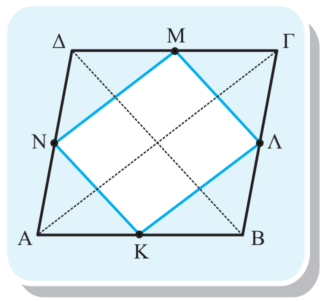
$$AK = \Gamma M$$

$$\left.\begin{aligned} AN &= A\Delta - \Delta N \\ \Gamma\Lambda &= \Gamma B - B\Lambda \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow AN = \Gamma\Lambda$$

$\hat{A} = \hat{\Gamma}$ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου

Συνεπώς ΝΚ = ΜΛ. Ομοίως ΚΛ = ΜΝ.
Άρα ΚΛΜΝ παραλληλόγραμμο αφού έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

i. Το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος όταν το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και τα Κ, Λ, Μ, Ν είναι μέσα των πλευρών.

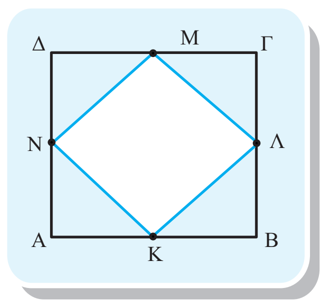


Τότε $NK // = \dfrac{\Delta B}{2}$

$K\Lambda // = \dfrac{A\Gamma}{2}$

Αφού ΔΒ = ΑΓ τότε ΝΚ = ΚΛ.
Επειδή το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο και έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, είναι ρόμβος.

ii. Για να είναι τετράγωνο αρκεί το ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο και Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών.



Τότε ΝΚ//ΔΒ

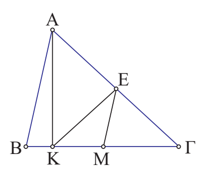
ΚΛ//ΑΓ

Αφού στο τετράγωνο είναι $\Delta B \perp A\Gamma$ θα είναι και $NK \perp K\Lambda$. Άρα $K = 90^\circ$

Άσκηση 14

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, είναι Β > Γ. Φέρνουμε το ύψος ΑΚ και θεωρούμε τα μέσα Μ και Ε των ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα.

Να δειχθεί ότι $K\hat{E}M = \hat{B} - \hat{\Gamma}$

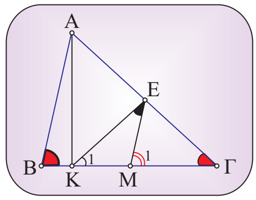


Λύση

Είναι $K\hat{E}M = \hat{M}_1 - \hat{K}_1$ (αφού η $\hat{M}_1$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΚΕΜ και $\hat{K}_1 = \hat{\Gamma}$

(αφού η ΚΕ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΓ).Επίσης είναι $\hat{M}_1 = \hat{B}$ (αφού ΜΕ//ΑΒ).

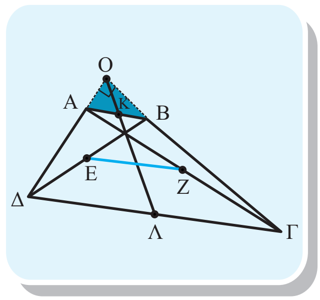
Από τα παραπάνω προκύπτει $\widehat{KEM} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.



Άσκηση 15

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ, ΓΔ > ΑΒ) του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές τέμνονται στο Ο κάθετα. Αν το Ο και τα μέσα Κ, Λ των ΑΒ, ΔΓ είναι συνευθειακά να δείξετε ότι το ΚΛ είναι ίσο με το τμήμα που συνδέει τα μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου.

Λύση



Στο ορθογώνιο $O\overset{\triangle}{A}B$ η ΟΚ είναι διάμεσος.

Άρα $OK = \dfrac{AB}{2}$.

Στο ορθογώνιο $O\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ η ΟΛ είναι διάμεσος.

Άρα $O\Lambda = \dfrac{\Gamma\Delta}{2}$.

Είναι $K\Lambda = O\Lambda - OK = \dfrac{\Gamma\Delta}{2} - \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\Gamma\Delta - AB}{2}$

Γνωρίζουμε ότι αν Ε, Ζ μέσα των διαγωνίων τότε $EZ = \dfrac{\Gamma\Delta - AB}{2}$.

Άρα $K\Lambda = EZ$

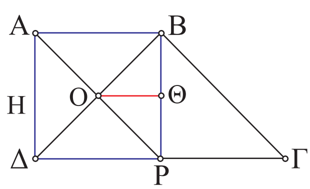
Άσκηση 16

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ(με ΑΒ//ΓΔ) και τέτοιο ώστε $\Delta\Gamma = 2\cdot AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε $BP \perp \Delta\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι:

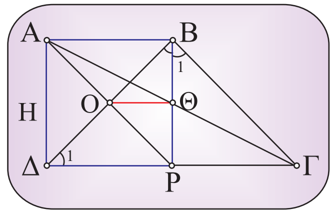
α. Οι ΒΡ και ΑΓ διχοτομούνται.

β. $AP \perp B\Delta$.

γ. Αν Ο είναι το μέσο της ΒΔ και Θ είναι το μέσο της ΑΓ, τότε ισχύει : ΟΘ = ΓΔ/4.



Λύση



α. Είναι $\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o \Rightarrow 3\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=45^o$.

Τότε είναι και $\hat{B}=135^o$. Φέρνουμε τη $BP \perp \Delta\Gamma$.
Από το ορθογώνιο ΑΒΡΔ έχουμε ΔΡ = ΑΒ = ΔΓ/2, οπότε το Ρ είναι μέσο της ΔΓ. Άρα το ΑΒΓΡ είναι παραλληλόγραμμο και συνεπώς οι διαγώνιές του ΒΡ,ΑΓ διχοτομούνται.

β. Στο τρίγωνο ΔΒΓ η διάμεσος ΒΡ είναι και ύψος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Επειδή $\hat{\Delta}_1=\hat{\Gamma}=45^o$ είναι $\Delta\hat{B}\Gamma=90^o$. Τότε ΒΡ = ΔΓ/2 = ΔΡ. Επομένως το ορθογώνιο ΒΡΔΑ είναι τετράγωνο, που σημαίνει ότι οι διαγώνιές του τέμνονται κάθετα, δηλαδή $AP \perp B\Delta$.

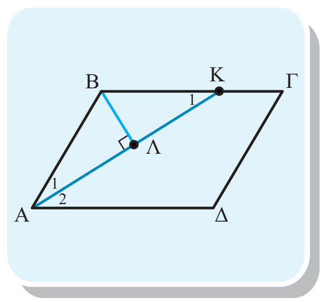
γ. Στο τρίγωνο ΑΡΓ η ΟΘ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΡ και ΑΓ, οπότε ισχύει:

$$\Theta O=\frac{1}{2}P\Gamma=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta\Gamma}{2}=\frac{\Delta\Gamma}{4}.$$

Άσκηση 17

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{A}=60^o$ και ΑΚ διχοτόμος της $\hat{A}$ όπου Κ σημείο της ΒΓ. Αν Λ μέσο της ΑΚ να δείξετε ότι η ΒΛ διχοτομεί τη $\hat{B}$ και να εκφράσετε τη ΒΛ συναρτήσει του ΑΒ.

Λύση



$$\left.\begin{array}{l}\text{Είναι } \hat{A}_1=\hat{A}_2=30^o \\ \text{και } \hat{A}_2=\hat{K}_1 \text{ (εντός εναλλάξ)}\end{array}\right\} \text{Συνεπώς } \hat{A}_1=\hat{K}$$

Δηλαδή το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABK}$ είναι ισοσκελές και η ΒΛ είναι διάμεσος άρα διχοτόμος και ύψος.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Lambda B}$ είναι: $\hat{A}_1=30^\circ \Leftrightarrow B\Lambda=\frac{AB}{2}$.

Άσκηση 18

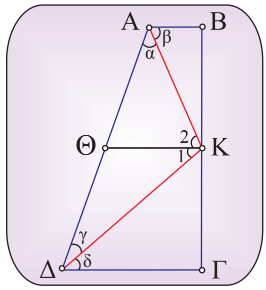
Σε ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ(ΑΒ//ΓΔ) είναι ΑΔ = ΑΒ + ΔΓ. Ενώνουμε το μέσο Κ της ΒΓ με τις κορυφές Α και Δ. Να δείξετε ότι οι ΑΚ και ΚΔ είναι διχοτόμοι των γωνιών Α και Δ.

Λύση

Φέρνουμε την ΚΘ παράλληλη στην ΑΒ.

Είναι $K\Theta // = \frac{AB+\Gamma\Delta}{2}=\frac{A\Delta}{2}$. Δηλαδή ΚΘ = ΘΔ = ΘΑ.

Άρα $\hat{\gamma} = \hat{K}_1$ και $\hat{K}_1 = \hat{\delta}$ (ΘΚ // ΔΓ). Επομένως $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$. Ομοίως $\hat{\alpha} = \hat{K}_2$ και $\hat{K}_2 = \hat{\beta}$ (ΘΚ // ΑΒ), οπότε $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$.

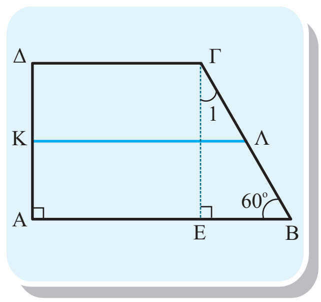


Άσκηση 19

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ $\left(\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o\right)$ με $\hat{B} = 60^o$. Αν είναι ΒΓ = ΔΓ = 8 να βρεθεί το μήκος της διαμέσου του τραπεζίου.

Λύση

Φέρνουμε το ύψος ΓΕ του τραπεζίου. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΒ είναι $\hat{\Gamma}_1 = 90^o - \hat{B} = 90^o - 60^o = 30^o$.



Άρα $EB = \dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

Είναι $AB = AE + EB = \Delta\Gamma + EB = 8 + 4 = 12$

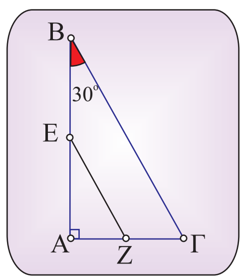
Τότε, αν Κ, Λ μέσα των μη παραλλήλων πλευρών θα είναι:

$$K\Lambda = \frac{AB + \Delta\Gamma}{2} = \frac{12 + 8}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Άσκηση 20

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90°\right)$ με $\hat{B} = 30°$. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ, να αποδείξετε ότι $EZ = A\Gamma$.

Λύση



Στο ΑΒΓ αφού είναι $\hat{B} = 30°$ ισχύει $A\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

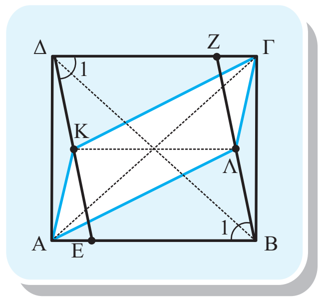
Στο ΑΒΓ αφού Ε, Ζ μέσα ΑΒ, ΑΓ ισχύει $EZ = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

Άρα $EZ = A\Gamma$.

Άσκηση 21

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Πάνω στις ΑΒ,ΔΓ αντίστοιχα, θεωρούμε σημεία Ε, Ζ τέτοια ώστε ΑΕ = ΓΖ. Αν Κ, Λ μέσα των ΔΕ, ΒΖ αντίστοιχα, να δείξετε ότι το ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο και ότι οι ΚΛ, ΑΓ, ΔΒ συντρέχουν.

Λύση



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ η ΑΚ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του. Άρα $ΑΚ = \frac{ΔΕ}{2}$ (1). Όμοια στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΖ η ΓΛ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα άρα $ΓΛ = \frac{ΖΒ}{2}$ (2). Όμως $ΖΒ = ΔΕ$ (3) αφού $Α\overset{\Delta}{Δ}Ε = Γ\overset{\Delta}{Β}Ζ$ (είναι ορθογώνια και έχουν $ΑΔ = ΒΓ$ ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου και $ΑΕ = ΓΖ$ από υπόθεση).
Από (1), (2), (3) συμπεραίνουμε ότι $ΑΚ = ΓΛ$.

Επίσης $Α\hat{Λ}Β = Δ\hat{Κ}Γ$ αφού:

$ΔΓ = ΑΒ$ ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου
ΔΚ=ΛΒ ως μισά των ίσων τμημάτων ΔΕ, ΒΓ
$\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΔΕΒΖ

Συνεπώς $ΚΓ = ΑΛ$. Άρα το ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.
Το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού $ΔΕ = ΒΖ$ και $ΔΖ = ΕΒ$ αφού
$ΔΖ = ΔΓ - ΖΓ$ και $ΕΒ = ΑΒ - ΑΕ$
Οι ΑΓ, ΚΛ είναι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΚΓΛ άρα διχοτομούνται.
Όμως η ΑΓ διαγώνιος και του ΑΒΓΔ. Άρα διχοτομείται με την ΔΒ. Επομένως οι ΑΓ, ΚΛ, ΔΒ συντρέχουν στο Ο το κέντρο του ΑΒΓΔ.

Άσκηση 22

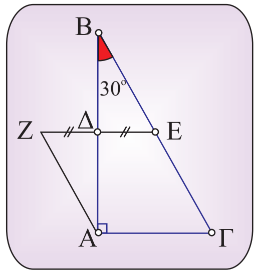
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{Α} = 90°)$ με $\hat{Β} = 30°$ και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΕΔ κατά τμήμα $ΔΖ = ΕΔ$. Να αποδείξετε ότι το ΑΓΕΖ είναι ρόμβος.

Λύση

Έχουμε Δ, Ε μέσα ΑΒ, ΒΓ, άρα $ΔΕ \parallel= \frac{ΑΓ}{2}$ οπότε είναι

$$ZE = 2\Delta E \,//= A\Gamma.$$

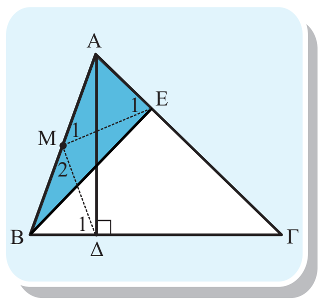
Επομένως το ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο. Αλλά $\hat{B} = 30°$, οπότε $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = E\Gamma$,δηλ. το ΑΓΕΖ είναι ρόμβος.



Άσκηση 23

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\Gamma} = 45^o$. Φέρουμε τα ύψη ΑΔ και ΒΕ. Αν Μ είναι το μέσο της ΑΒ να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.

Λύση



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ, Μ μέσο της υποτείνουσας άρα

$\Delta M = \frac{AB}{2}$ (1)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ, Μ μέσο της υποτείνουσας άρα

$EM = \frac{AB}{2}$ (2)

Από (1),(2) έχουμε ΔΜ = ΕΜ δηλαδή το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ισοσκελές.

Για να είναι η $\hat{M} = 90^\circ$ αρκεί $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 90^\circ$

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΕ (ΑΜ = ΜΕ) είναι:

$\hat{M}_1 + \hat{A} + \hat{E}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{M}_1 = 180^\circ - 2\hat{A}$ αφού $\hat{A} = \hat{E}_1$

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΜΔ (ΜΒ = ΜΔ) είναι:

$\hat{M}_2 + \hat{B} + \hat{\Delta}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{M}_2 = 180^\circ - 2\hat{B}$ αφού $\hat{B} = \hat{\Delta}_1$

Τότε:

$\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180^\circ - 2\hat{A} + 180^\circ - 2\hat{B} = 360^\circ - 2(\hat{A} + \hat{B})$

Όμως $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

Άρα $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 360^\circ - 2 \cdot 135^\circ = 90^\circ$.

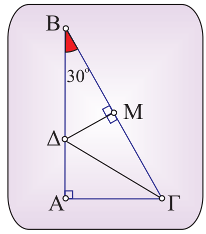
Άσκηση 24

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 30°$ η κάθετος στο μέσο Μ της υποτείνουσας ΒΓ

τέμνει την πλευρα ΑΒ στο Δ. Να αποδείξετε ότι:

i. $M\Delta = A\Delta$ **ii.** $M\Delta = \dfrac{AB}{3}$.

Λύση



i. Έχουμε $M\hat{\Delta}\Gamma = \Gamma\hat{A}\Delta$, διότι

$$\left(M = A = 90°,\ \Delta\Gamma \text{ κοινή},\ A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma \right).$$

Άρα $M\Delta = A\Delta$.

ii. Στο τρίγ. $M\Delta B\left(M = 90°,\ B = 30°\right)$: $M\Delta = \dfrac{\Delta B}{2} \Leftrightarrow \Delta B = 2M\Delta$.

Αλλά $A\Delta = M\Delta$, οπότε είναι : $\Delta B + A\Delta = 3M\Delta \Leftrightarrow M\Delta = \dfrac{AB}{3}$.

Άσκηση 25

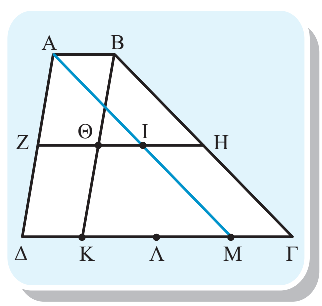
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ όπου ΔΓ//ΑΒ και ΔΓ = 4ΑΒ.

i. Να δείξετε ότι $ZH = \dfrac{5AB}{2}$ **όπου ΖΗ η διάμεσος.**

ii. Αν Κ,Λ,Μ σημεία της ΔΓ τέτοια ώστε ΔΚ = ΚΛ = ΛΜ = ΜΓ, να δείξετε ότι ΑΒΚΔ, ΑΒΓΜ παραλληλόγραμμα.

iii. Αν η διάμεσος του τραπεζίου τέμνει τις ΒΚ, ΑΜ στα Θ, Ι να δείξετε ότι $\Theta I = \dfrac{AB}{2}$**.**

Λύση



i. Είναι $ZH = \dfrac{AB + \Delta\Gamma}{2} = \dfrac{AB + 4AB}{2} = \dfrac{5AB}{2}$.

ii. Είναι $\Delta K = \dfrac{1}{4}\Delta\Gamma = AB$ και αφού ΑΒ//ΔΚ θα είναι το ΑΒΚΔ παραλληλόγραμμο.

Είναι $M\Gamma = \dfrac{1}{4}\Delta\Gamma = AB$ και αφού ΑΒ//ΜΓ θα είναι το ΑΒΓΜ παραλληλόγραμμο.

iii. Αφού ΖΗ διάμεσος τότε και Θ,Ι τα μέσα των ΒΚ, ΑΜ.

Άρα και ΖΘ// = ΑΒ, ΙΗ// = ΑΒ.

Οπότε $\Theta I = ZH - Z\Theta - IH = \dfrac{5AB}{2} - AB - AB = \dfrac{AB}{2}$.

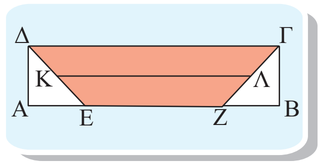
Άσκηση 26

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 4ΒΓ. Θεωρούμε σημεία Ε, Ζ επί της ΑΒ τέτοια ώστε ΑΕ = ΖΒ = ΒΓ.
i. Να δείξετε ότι το ΔΕΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
ii. Να βρεθεί η διάμεσός του ΚΛ συναρτήσει της ΒΓ.

Λύση

i. Είναι ΑΒ//ΔΓ άρα και ΕΖ//ΔΓ. Δηλαδή το ΔΕΖΓ είναι τραπέζιο. Για να είναι ισοσκελές τραπέζιο αρκεί ΔΕ = ΖΓ.

Είναι $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma$ αφού είναι ορθογώνια και έχουν ΑΔ = ΒΓ και ΑΕ = ΖΒ.
Συνεπώς ΔΕ = ΖΓ.



ii. Αν ΚΛ η διάμεσος του τραπεζίου, τότε $\mathrm{K}\Lambda = \dfrac{\mathrm{B}+\beta}{2} = \dfrac{\Delta\Gamma + \mathrm{EZ}}{2}$.

Όμως ΔΓ = ΑΒ = 4ΒΓ
και ΕΖ = ΑΒ – ΑΕ – ΖΒ = 4ΒΓ – ΒΓ – ΒΓ = 2ΒΓ.

Άρα $\mathrm{K}\Lambda = \dfrac{4\mathrm{B}\Gamma + 2\mathrm{B}\Gamma}{2} = \dfrac{6\mathrm{B}\Gamma}{2} = 3\mathrm{B}\Gamma$.

Άσκηση 27

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και Μ μέσο της υποτείνουσας. Αν ΜΕ, ΜΔ οι αποστάσεις του Μ από τις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα να δείξετε ότι το ΜΕΑΔ είναι ορθογώνιο.

Λύση

1ος τρόπος

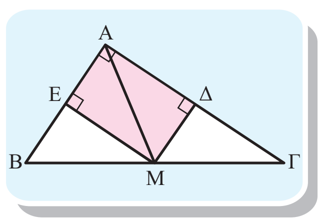
Στο τετράπλευρο $\mathrm{ME}\hat{\mathrm{A}}\Delta$ έχουμε τρεις ορθές γωνίες $\hat{\mathrm{E}} = \hat{\mathrm{A}} = \hat{\Delta} = 90^{\mathrm{o}}$. Άρα το ΜΕΑΔ είναι ορθογώνιο.

2ος τρόπος

$\mathrm{AM} = \dfrac{\mathrm{B}\Gamma}{2} \left\langle \begin{array}{l} \mathrm{AM} = \mathrm{BM} \\ \mathrm{AM} = \mathrm{M}\Gamma \end{array} \right.$ αφού ΑΜ διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΒ το ύψος θα είναι και διάμεσος οπότε $\mathrm{ME} /\!/ = \dfrac{\mathrm{A}\Gamma}{2} \Leftrightarrow \mathrm{ME} /\!/ = \mathrm{A}\Delta$

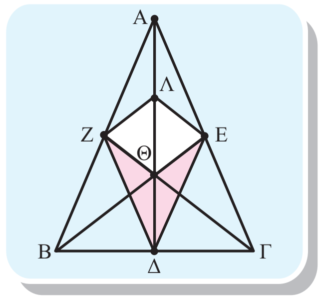
Τότε ΜΕΑΔ παραλληλόγραμμο και αφού έχει γωνία ορθή θα είναι ορθογώνιο.



Άσκηση 28

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), Θ το βαρύκεντρό του και Δ, Ζ, Ε μέσα των ΒΓ, ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
i. Να δείξετε ότι ΑΖΔΕ ρόμβος.
ii. Αν Λ το μέσο της ΑΘ, να δείξετε ότι ΛΖΘΕ ρόμβος.

Λύση



i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ζ μέσο ΑΒ}\\ \text{Δ μέσο ΒΓ}\end{array}\right\}\ \text{άρα } ΖΔ \mathbin{/\!/}= \frac{ΑΓ}{2} \Leftrightarrow ΖΔ \mathbin{/\!/}= ΑΕ$$

Συνεπώς το ΑΖΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.
Όμως ΑΖ = ΑΕ ως μισά ίσων τμημάτων.
Άρα ΑΖ = ΖΔ = ΔΕ = ΕΑ. Δηλαδή ΑΖΔΕ ρόμβος.

ii. Στο τρίγωνο ΑΘΓ $\left.\begin{array}{l}\text{Λ μέσο ΑΘ}\\ \text{Ε μέσο ΑΓ}\end{array}\right\} \Leftrightarrow ΛΕ \mathbin{/\!/}= \frac{ΘΓ}{2}$.

Είναι $ΘΓ = \frac{2}{3}ΓΖ$ (ιδιότητα βαρύκεντρου) Άρα $ΛΕ = \frac{ΘΓ}{2} = \frac{\frac{2}{3}ΓΖ}{2} = \frac{1}{3}ΓΖ$.

Όμως $ΘΖ = \frac{1}{3}ΓΖ$.

Άρα ΛΕ// = ΘΖ δηλαδή το ΛΖΘΕ είναι παραλληλόγραμμο.

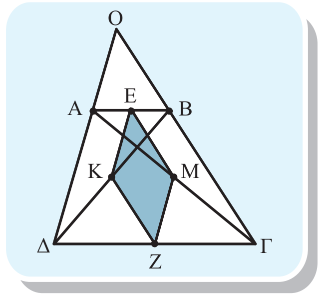
Επιπλέον $ΖΘ = \frac{1}{3}ΓΖ$ και $ΘΕ = \frac{1}{3}ΒΕ$ και αφού ΓΖ = ΒΕ (ως διάμεσοι που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές) θα είναι και ΖΘ = ΘΕ. Άρα ΛΖΘΕ ρόμβος (παραλληλόγραμμο με δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες).

Άσκηση 29

Τραπεζίου ΑΒΓΔ οι μη παράλληλες πλευρές τέμνονται στο Ο. Αν Κ, Μ μέσα των διαγωνίων και Ε, Ζ μέσα των βάσεων, να δείξετε ότι $\hat{ΚΕΜ} = \hat{ΚΖΜ} = \hat{Ο}$.

Λύση

Στο τρίγωνο ΑΒΔ: $\left.\begin{array}{l}\text{Ε μέσο ΑΒ}\\ \text{Κ μέσο ΔΒ}\end{array}\right\}$ άρα $ΚΕ \mathbin{/\!/}= \frac{ΑΔ}{2}$, συνεπώς $ΚΕ \mathbin{/\!/} ΟΔ$.



Στο τρίγωνο ΑΒΓ:

$\left.\begin{array}{r}\text{Ε μέσο ΑΒ}\\ \text{Μ μέσο ΑΓ}\end{array}\right\}$ άρα $EM // = \dfrac{ΒΓ}{2}$ (1), συνεπώς $EM // ΒΓ$.

Οι γωνίες $\hat{O}$, $K\hat{E}M$ έχουν πλευρές παράλληλες άρα

$\hat{O} = K\hat{E}M$ (αφού είναι και οι δύο οξείες).

Στο τρίγωνο ΔΒΓ $\left.\begin{array}{r}\text{Κ μέσο ΔΒ}\\ \text{Ζ μέσο ΔΓ}\end{array}\right\}$ άρα $KZ // = \dfrac{ΒΓ}{2}$ (2).

Από (1),(2) ισχύει ΚΖ// = ΕΜ, άρα ΚΕΜΖ παραλληλόγραμμο.

οπότε $K\hat{Z}M = K\hat{E}M = \hat{O}$.

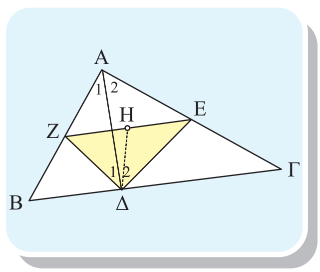
Άσκηση 30

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^o)$, είναι Ζ, Ε μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, ΑΔ ύψος και Η μέσο ΖΕ. Να δείξετε ότι:

i. $ΔΗ = \dfrac{ΒΓ}{4}$

ii. Η περίμετρος του τριγώνου ΕΔΖ είναι ίση με το μισό της περιμέτρου του ΑΒΓ.

Λύση



i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ $\left.\begin{array}{r}\text{Ζ μέσο ΑΒ}\\ \text{Ε μέσο ΑΓ}\end{array}\right\}$ άρα $ZE = \dfrac{ΒΓ}{2}$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ, το Ζ είναι μέσο της υποτείνουσας άρα $ΔZ = \dfrac{AB}{2} = AZ$

Άρα το τρίγωνο ΔΖΑ είναι ισοσκελές με $\hat{Δ}_1 = \hat{A}_1$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, το Ε είναι μέσο της υποτείνουσας άρα $ΔE = \dfrac{ΑΓ}{2} = AE$

Άρα το τρίγωνο ΔΕΑ είναι ισοσκελές με $\hat{Δ}_2 = \hat{A}_2$

Οπότε $Z\hat{Δ}E = \hat{Δ}_1 + \hat{Δ}_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A} = 90^\circ$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $Z\hat{Δ}E$ το Η είναι μέσο της υποτείνουσας ΖΕ

Άρα $ΔH = \dfrac{ZE}{2} = \dfrac{\frac{ΒΓ}{2}}{2} = \dfrac{ΒΓ}{4}$

ii. Η περίμετρος του τριγώνου ΔΖΕ είναι: $\Delta Z + ZE + E\Delta = \dfrac{AB}{2} + \dfrac{B\Gamma}{2} + \dfrac{A\Gamma}{2} = \dfrac{AB + B\Gamma + A\Gamma}{2}$.

Άσκηση 31

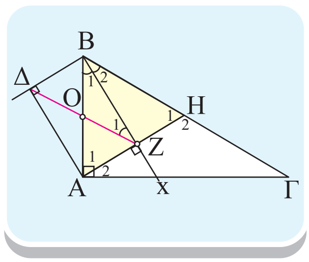
Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η υποτείνουσα ΒΓ είναι η διπλάσια από την ΑΒ. Προβάλουμε το Α στην εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της Β. Αν Ζ, Δ οι προβολές αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

i. ΔΖ//ΒΓ

ii. Ζ μέσο της ΑΗ και Η μέσο της ΒΓ(όπου Η το σημείο στο οποίο η ΑΖ τέμνει τη ΒΓ)

iii. Να βρεθούν οι γωνίες των τριγώνων ΑΒΗ και ΑΗΓ.

Λύση



i. Το ΔΒΖΑ έχει τρείς ορθές γωνίες: $\hat{Z} = \hat{\Delta} = \hat{B} = 90^{o}$

(Είναι $\hat{B} = 90^{\circ}$ αφού οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών σχηματίζουν ορθή γωνία).

Άρα ΔΒΖΑ ορθογώνιο, οπότε $\hat{B}_1 = \hat{Z}_1$ (1) αφού $OB = OZ$. (οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες)

Όμως $\hat{B}_2 = \hat{B}_1$ (2) άφου Βx εσωτερική διχοτόμος της $\hat{B}$.

Από (1), (2) προκύπτει ότι $\hat{B}_2 = \hat{Z}_1$. Τότε ΒΓ//ΔΖ αφού τεμνόμενες από τη Βx σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

ii. Στο τρίγωνο ΑΒΗ η ΒΖ είναι διχοτόμος ($\hat{B}_1 = \hat{B}_2$), αλλά και ύψος (αφού $BZ \perp AH$)

Άρα είναι ισοσκελές και Ζ μέσο της ΑΗ.

Αφού το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές θα είναι $AB = BH \overset{AB=\frac{B\Gamma}{2}}{\Leftrightarrow} \dfrac{B\Gamma}{2} = BH$.

Άρα Η μέσο της ΒΓ.

iii. $AB = \dfrac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^{\circ}$

Άρα στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 90^{\circ} - \hat{\Gamma} = 60^{\circ}$

Οπότε αφού το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές θα ισχύει:

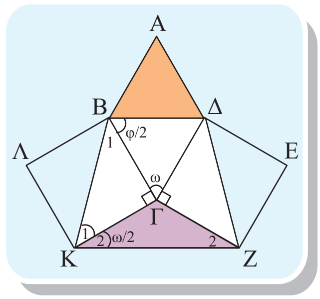
$$\hat{A}_1 = \hat{H}_1 = \frac{180^{\circ} - 60^{\circ}}{2} = 60^{\circ}$$

$$\hat{A}_2 = 90^{\circ} - \hat{A}_1 = 90^{\circ} - 60^{\circ} = 30^{\circ}$$

$$\hat{H}_2 = 180^{\circ} - \hat{H}_1 = 180^{\circ} - 60^{\circ} = 120^{\circ}$$

Άσκηση 32
Εξωτερικά του ρόμβου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε τετράγωνα ΓΔΕΖ και ΒΓΚΛ. Να δείξετε ότι το ΚΖΔΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση



Για να είναι τραπέζιο αρκεί ΒΔ//ΚΖ.

Αν $A\hat{B}\Gamma = \varphi$ και $B\hat{\Gamma}\Delta = \omega$ τότε $\Delta\hat{B}\Gamma = \frac{\varphi}{2}$, αφού ΒΔ διχοτόμος της $A\hat{B}\Gamma$.

Είναι $\hat{B}_1 = \hat{K}_1 = 45^\circ$ αφού ΒΚ διαγώνιος του τετραγώνου ΒΓΚΛ.

Είναι $K\hat{\Gamma}Z = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \omega = 180^\circ - \omega$

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΓΚΖ:

$$\hat{K}_2 = \hat{Z}_2 = \frac{180^\circ - K\hat{\Gamma}Z}{2} = \frac{180^\circ - (180^\circ - \omega)}{2} = \frac{180^\circ - 180^\circ + \omega}{2} = \frac{\omega}{2}$$

Άρα $K\hat{B}\Delta + B\hat{K}Z = 45^\circ + \frac{\varphi}{2} + 45^\circ + \frac{\omega}{2} = 90^\circ + \frac{\varphi}{2} + \frac{\omega}{2} = 90^\circ + \frac{\varphi + \omega}{2}$

Όμως στο ρόμβο ΑΒΓΔ είναι $\varphi + \omega = 180^\circ$

Άρα $K\hat{B}\Delta + B\hat{K}Z = 90^\circ + \frac{180^\circ}{2} = 180^\circ$

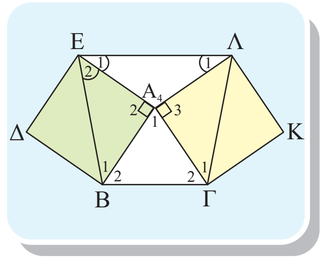
Αφού οι ΒΔ, ΚΖ τεμνόμενες από την ΒΚ σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές, τότε ΒΔ//ΚΖ, δηλαδή ΚΖΔΒ τραπέζιο.
Είναι ισοσκελές αφού ΒΚ = ΔΖ ως διαγώνιες των ίσων τετραγώνων.

Άσκηση 33
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΓΚΛ και ΑΒΔΕ

i. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου $\overset{\Delta}{AE\Lambda}$
ii. Να δείξετε ότι το ΒΓΛΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

i. Είναι $\hat{A}_4 = 360^o - \hat{A}_2 - \hat{A}_3 - \hat{A}_1 = 360^o - 90^o - 60^o - 90^o = 120^o$



Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AE\Lambda}}$ είναι ισοσκελές αφού ΑΕ = ΑΛ ως πλευρές των ίσων τετραγώνων ΑΓΚΛ και ΑΒΔΕ.

Άρα $\hat{\mathrm{E}}_1 + \hat{\Lambda}_1 + \hat{\mathrm{A}}_4 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\mathrm{E}}_1 + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$

$2\hat{\mathrm{E}}_1 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{\mathrm{E}}_1 = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

Άρα $\hat{\mathrm{A}}_4 = 120^\circ$, $\hat{\mathrm{E}}_1 = 30^\circ$, $\hat{\Lambda}_1 = 30^\circ$

ii. Είναι $\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \hat{\mathrm{B}}_1 + \hat{\mathrm{B}}_2 = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$

($\hat{\mathrm{B}}_1 = 45^\circ$ αφού η ΒΕ διχοτόμος της $\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = 90^\circ$

$\hat{\mathrm{B}}_2 = 60^\circ$ ως γωνία του ισόπλευρου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$)

Είναι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Lambda = \hat{\mathrm{E}}_2 + \hat{\mathrm{E}}_1 = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$

$\hat{\mathrm{E}}_2 = 45^\circ$ αφού η ΒΕ διχοτόμος της $\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A} = 90^\circ$

Οι γωνίες $\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$, $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Lambda$ είναι παραπληρωματικές αφού

$\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Gamma + \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Lambda = 105^\circ + 75^\circ = 180^\circ$

Άρα ΕΛ//ΒΓ αφού τέμνονται από την ΕΒ και σχηματίζουν τις εντός και επί τ'αυτά γωνίες παραπληρωματικές.

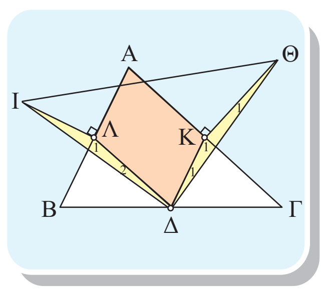
Τότε ΒΕΛΓ τραπέζιο και μάλιστα ισοσκελές αφού ΒΕ = ΓΛ ως διαγώνιες των ίσων τετραγώνων ΑΓΚΛ και ΑΒΔΕ.

Άσκηση 34

Στα μέσα Κ, Λ των πλευρών ΑΓ και ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε $\mathrm{K\Theta} \perp \mathrm{A\Gamma}$ και $\Lambda\mathrm{I} \perp \mathrm{AB}$ ώστε $\mathrm{K\Theta} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{2}$ και $\Lambda\mathrm{I} = \dfrac{\mathrm{AB}}{2}$.

Αν Δ μέσο της ΒΓ να δείξετε ότι ΙΘΔ ορθογώνιο και ισοσκελές.

Λύση



Στο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ $\left.\begin{array}{l}\Lambda \text{ μέσο } \mathrm{AB}\\ \Delta \text{ μέσο } \mathrm{B\Gamma}\end{array}\right\}$ Άρα $\Lambda\Delta // = \dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{2} = \mathrm{K\Theta}$

$\left.\begin{array}{l}\mathrm{K} \text{ μέσο } \mathrm{A\Gamma}\\ \Delta \text{ μέσο } \mathrm{B\Gamma}\end{array}\right\}$ Άρα $\mathrm{K}\Delta // = \dfrac{\mathrm{AB}}{2} = \Lambda\mathrm{I}$

Είναι $\mathrm{I}\hat{\Lambda}\Delta = 90^\circ + \hat{\Lambda}_1$. Όμως $\hat{\Lambda}_1 = \hat{\mathrm{A}}$ ως εντός, εκτός και επί τ'αυτά των παραλλήλων ΛΔ, ΑΓ που τέμνονται από την ΑΒ. Άρα $\mathrm{I}\hat{\Lambda}\Delta = 90^\circ + \hat{\mathrm{A}}$ (1)

Είναι $\Theta\hat{K}\Delta = 90^{o} + \hat{K}_1$. Όμως $\hat{K}_1 = \hat{A}$ ως εντός, εκτός και επί τ' αυτά των παραλλήλων ΚΔ, ΑΒ που τέμνονται από την ΑΓ. Άρα $\Theta\hat{K}\Delta = 90^{o} + \hat{A}$ (2)

Από (1), (2) θα έχουμε $I\hat{\Lambda}\Delta = \Theta\hat{K}\Delta$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $I\overset{\Delta}{\Lambda}\Delta$ και $K\overset{\Delta}{\Delta}\Theta$. Αυτά έχουν $\Lambda I = K\Delta$, $\Lambda\Delta = K\Theta$, $I\hat{\Lambda}\Delta = \Theta\hat{K}\Delta$

Άρα $I\overset{\Delta}{\Lambda}\Delta = K\overset{\Delta}{\Delta}O$ (Π - Γ - Π). Επομένως $I\Delta = \Theta\Delta$, δηλαδή $I\overset{\Delta}{\Delta}\Theta$ ισοσκελές.

Στο $\Delta\overset{\Delta}{K}\Theta$: $\hat{\Delta}_1 + \Theta\hat{K}\Delta + \hat{\Theta}_1 = 180^{o} \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 + 90^{o} + \hat{K}_1 + \hat{\Theta}_1 = 180^{o} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 + \hat{K}_1 + \hat{\Theta}_1 = 90^{o} \overset{\hat{K}_1 = \hat{A}}{\Leftrightarrow} \hat{\Delta}_1 + \hat{A} + \hat{\Theta}_1 = 90^{o} \qquad (3)$$

Όμως $\hat{A} = \Lambda\hat{\Delta}K$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΛΔΚ $\left(\Delta K // = \dfrac{AB}{2} \Leftrightarrow \Delta K // = A\Lambda\right)$ και $\hat{\Theta}_1 = \hat{\Delta}_2$ από την ισότητα των τριγώνων $I\overset{\Delta}{\Lambda}\Delta$ και $K\overset{\Delta}{\Delta}\Theta$.

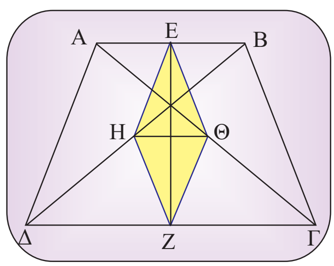
Άρα: (3) $\Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 + \Lambda\hat{\Delta}K + \hat{\Delta}_2 = 90^{o} \Leftrightarrow I\overset{\Delta}{\Delta}\Theta = 90^{o}$

Άσκηση 14

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα ΑΒ, ΓΔ, ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι: $E Z \perp H\Theta$.

Λύση

Για να δείξουμε ότι $EZ \perp H\Theta$ αρκεί να δείξουμε ότι το ΕΘΖΗ είναι ρόμβος, δηλαδή $EH = // \Theta Z$ και $EH = E\Theta$. Στο τρίγωνο ΑΒΔ τα Ε, Η είναι μέσα των ΑΒ και ΒΔ αντίστοιχα, οπότε $EH = // \dfrac{A\Delta}{2}$ (1).



Ομοίως στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε $\Theta Z = // \dfrac{A\Delta}{2}$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε ότι: $EH = // \Theta Z$, δηλαδή το ΕΘΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Ε, Θ είναι μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, οπότε $E\Theta = // \dfrac{B\Gamma}{2}$ (3).

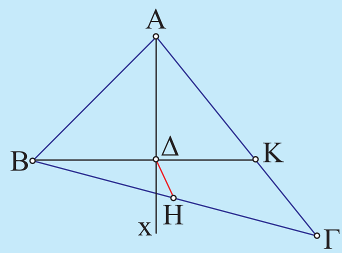
Όμως, το τραπέζιο είναι ισοσκελές, οπότε $A\Delta = B\Gamma$ (4).

Από τις (1), (3) και (4) έχουμε: $EH = E\Theta$.

Άρα το ΕΘΖΗ είναι ρόμβος και $EZ \perp H\Theta$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

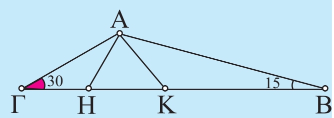
1. Στο τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΓ > ΑΒ$ φέρνουμε τη διχοτόμο Αx της γωνίας $\hat{Α}$ και την ΒΔ κάθετη στην Αx. Αν η ΒΔ τέμνει την ΑΓ στο Κ και Η είναι το μέσο της ΒΓ, να δείξετε ότι ισχύουν :



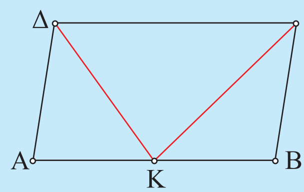
α. $ΔΗ = \dfrac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$ **β.** $Δ\hat{Β}Γ = \dfrac{\hat{Β} - \hat{Γ}}{2}$

γ. $Β\hat{Δ}Η = 90^o + \dfrac{\hat{Α}}{2}$.

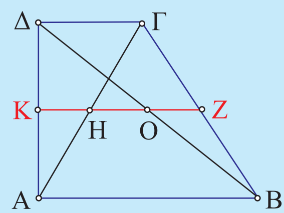
2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο ώστε $\hat{Γ} = 30^o$ και $\hat{Α} = 135^o$,φέρνουμε την κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Α, που τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Η. Να δειχθεί ότι η ΑΓ είναι ίση με το μισό της ΒΗ.



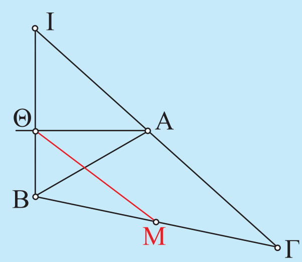
3. Θεωρούμε παρ/μο ΑΒΓΔ με $ΑΒ = 2{\cdot}ΒΓ$. Αν Κ είναι το μέσο της ΑΒ, να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΔΚΓ είναι ορθογώνιο στο Κ.



4. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και τέτοιο ώστε $ΑΒ = 2{\cdot}ΓΔ$. Να δειχθεί ότι οι διαγώνιοι ΒΔ και ΑΓ τριχοτομούν τη διάμεσο ΚΖ του τραπεζίου, δηλ. $ΚΗ = ΗΟ = ΟΖ$.



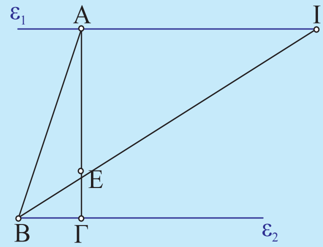
5. Από την κορυφή Β τριγώνου ΑΒΓ, φέρνουμε ευθεία κάθετη στην εξωτερική διχοτόμο της Α, που τέμνει τη διχοτόμο στο Θ και την προέκταση της ΓΑ στο Ι. Αν είναι Μ το μέσο της ΒΓ, να δειχθεί ότι:



α. $ΓΙ = ΑΓ + ΑΒ$ **β.** $ΘΜ = \dfrac{ΑΒ + ΑΓ}{2}$

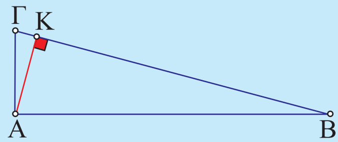
γ. $Β\hat{Θ}Μ = \dfrac{\hat{Α}}{2}$

6. Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2.Από ένα σημείο Α της ε_1 φέρνουμε την ΑΓ κάθετη στην ε_2 και την ΑΒ πλάγια. Αν η ευθεία ΒΕ τέμνει την ε_1 στο Ι έτσι ώστε ΕΙ = 2·ΑΒ, να δειχθεί ότι $A\hat{B}\Gamma = 3\cdot E\hat{B}\Gamma$.

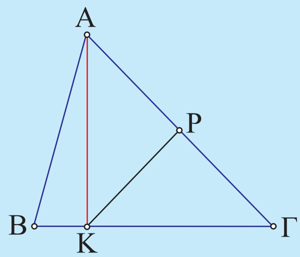


7. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 15^o$. Φέρνουμε το ύψος ΑΚ. Να δειχθεί η ισοδυναμία

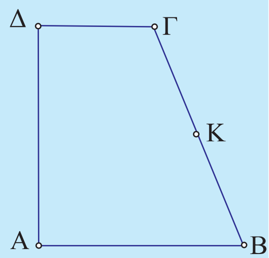
$$\hat{B} = 15^o \Leftrightarrow AK = \frac{B\Gamma}{4}$$



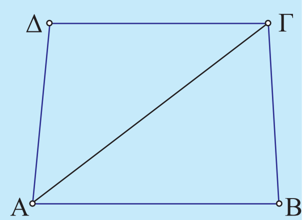
8. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Η παράλληλη στη διχοτόμο της γωνίας Β από το μέσο Ρ της ΑΓ, τέμνει τη ΒΓ ή την προέκτασή της στο σημείο Κ. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΚΓ είναι ορθογώνιο.



9. Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$ και ΒΓ = 2·ΔΓ. Αν Κ το μέσο της ΒΓ να δειχθεί ότι $A\hat{K}\Gamma = 3\cdot K\hat{A}B$.



10. Στο ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ οι μη παράλληλες πλευρές ΑΔ και ΒΓ είναι ίσες με τη μικρή βάση και η διαγώνιος ΑΓ με τη μεγάλη βάση ΑΒ. Να βρεθούν οι γωνίες του τραπεζίου.



Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ φέρνουμε τις κάθετες ΑΕ,ΒΖ απο τις τρείς κορυφές στην πλευρά ΓΔ και την κάθετη ΟΟ΄ απο το κέντρο Ο του τετραπλεύρου που ορίζουν τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ πρός την ΓΔ (το Ο ανήκει στην ΓΔ). Να δείξετε ότι ΑΕ + ΒΖ = 4 ΟΟ΄.