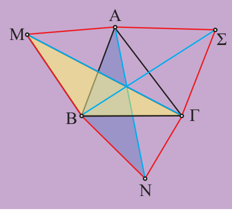
5° μάθημα

Κάθετες και παράλληλες ευθείες

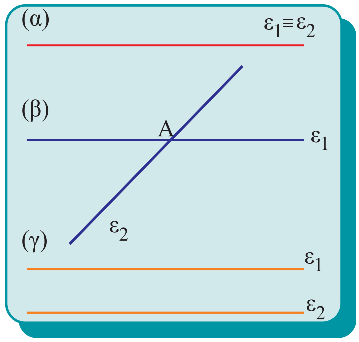


4° Κεφάλαιο

Μάθημα 5

Κάθετες και παράλληλες ευθείες

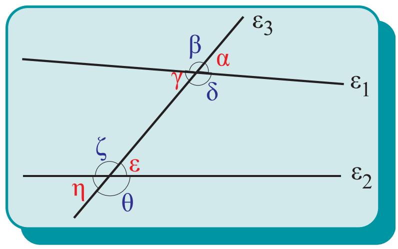
Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ



Σχετικές θέσεις δύο ευθειών.

Οι σχετικές θέσεις δύο ευθειών ε_1 και ε_2 του ίδιου επιπέδου είναι οι παρακάτω:

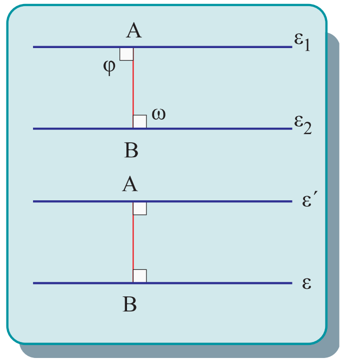
- Ταυτίζονται (άπειρα κοινά σημεία). Συμβολίζουμε $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$.
- Τέμνονται (ένα κοινό σημείο).
- Δεν τέμνονται (κανένα κοινό σημείο). Στην περίπτωση αυτή οι ευθείες ονομάζονται **παράλληλες** και συμβολίζουμε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.



Τέμνουσα δύο ευθειών.

Έστω δύο ευθείες ε_1 και ε_2 του επιπέδου οι οποίες τέμνονται από μια τρίτη ευθεία ε_3. Τότε σχηματίζονται τα εξής ζεύγη γωνιών:

- **Γωνίες εντός εναλλάξ.** Είναι γωνίες που βρίσκονται εντός της ζώνης που δημιουργούν οι ευθείες ε_1 και ε_2 και σε διαφορετικά ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία ε_3. Τέτοιες είναι οι γ,ε και δ,ζ.
- **Γωνίες εντός και επί τα αυτά μέρη.** Είναι γωνίες που βρίσκονται εντός των ευθειών ε_1 και ε_2 και στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία ε_3. Τέτοιες είναι οι δ,ε και γ,ζ.
- **Γωνίες εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη.** Είναι γωνίες που βρίσκονται μια εντός και μία εκτός των ευθειών ε_1 και ε_2 και στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία ε_3. Τέτοιες είναι οι α,ε και β,ζ και δ,θ και η,γ.



Πορίσματα

- Δύο ευθείες κάθετες σε διαφορετικά σημεία στην ίδια ευθεία, είναι μεταξύ τους παράλληλες.
- Δύο ευθείες παράλληλες στην ίδια ευθεία, είναι και μεταξύ τους παράλληλες.
- Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία τέμνει μία από αυτές τότε τέμνει και την άλλη.

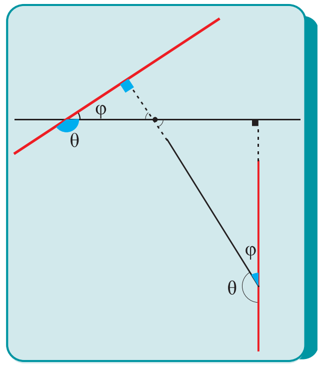
• Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία τέμνει κάθετα μία από αυτές τότε τέμνει κάθετα και την άλλη.

Το Ευκλείδειο Αίτημα της Παραλληλίας.

Από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλη προς την ευθεία.

Πρόταση

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από μία τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.

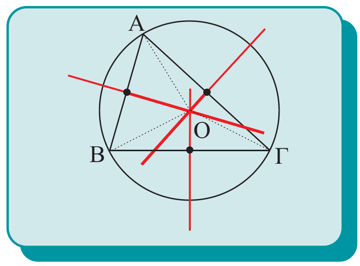


Γωνίες με πλευρές παράλληλες ή κάθετες.

Αν δύο γωνίες έχουν τις πλευρές τους παράλληλες ή κάθετες μία προς μία τότε

- Αν είναι και οι δύο οξείες ή αμβλείες τότε είναι **ίσες**.
- Αν η μία είναι οξεία και ή άλλη αμβλεία τότε είναι **παραπληρωματικές**.

Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου.



- Ο κύκλος που διέρχεται από τις τρείς κορυφές ενός τριγώνου λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** και το κέντρο του είναι το σημείο όπου διέρχονται και οι τρείς μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου και λέγεται **περίκεντρο.**
- Ο κύκλος που εφάπτεται στις τρείς πλευρές ενός τριγώνου λέγεται **εγγεγραμμένος κύκλος** και το κέντρο του είναι το σημείο όπου διέρχονται και οι τρείς διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου και λέγεται **έκκεντρο.**
- Ο κύκλος που εφάπτεται στη μία πλευρά ενός τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων λέγεται **παρεγγεγραμμένος κύκλος** και το κέντρο του είναι το σημείο όπου διέρχονται η διχοτόμος της απέναντι γωνίας και οι διχοτόμοι των άλλων δύο εξωτερικών γωνιών του τριγώνου και λέγεται **παράκεντρο.**

Άθροισμα γωνιών τριγώνου και κυρτού ν - γώνου.

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με δύο ορθές.

Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού ν - γώνου ισούται με (2ν – 4) ορθές.

Πορίσματα

- Η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών.
- Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες μία προς μία ίσες, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.
- Οι οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.
- Κάθε γωνία ενός ισόπλευρου τριγώνου ισούται με 60^o.
- Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός κυρτού ν - γώνου ισούται με 4 ορθές.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Μέθοδος 1

1. Για να δείξουμε ότι δυο ευθείες είναι παράλληλες:

- Δείχνουμε ότι είναι κάθετες σε τρίτη ευθεία.
- Δείχνουμε ότι είναι παράλληλες σε τρίτη ευθεία.
- Δείχνουμε ότι με μία τρίτη τέμνουσα σχηματίζουν:
  ι. δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες
  ιι. δύο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες
  ιιι. δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

Μέθοδος 2

2. Για να δείξουμε ότι δυο ευθείες τέμνονται:

- Δείχνουμε ότι μια τρίτη ευθεία παράλληλη σε μία από τις δύο, τέμνει την άλλη.
- Δείχνουμε ότι δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες έχουν άθροισμα διαφορετικό από 2 ορθές.

Μέθοδος 3

3. Για να δείξουμε ότι δυο ευθείες τέμνονται κάθετα:

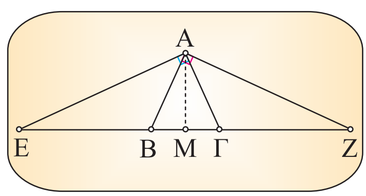
- Δείχνουμε ότι σχηματίζουν ορθή γωνία.
- Δείχνουμε ότι είναι διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών.
- Δείχνουμε ότι η μία είναι παράλληλη και η άλλη είναι κάθετη σε τρίτη ευθεία.
- Δείχνουμε ότι μία είναι βάση ισοσκελούς τριγώνου και η άλλη είναι η αντίστοιχη διάμεσος ή διχοτόμος.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, η κάθετη στο Α στην ΑΒ, τέμνει την ευθεία ΒΓ στο Ζ και η κάθετη στο Α στην ΑΓ, την τέμνει στο Ε. Να αποδειχθεί ότι η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ είναι και μεσοκάθετη του τμήματος ΕΖ.

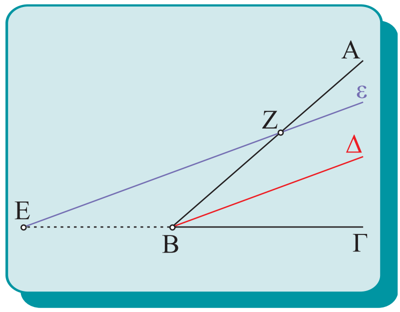
Λύση



Φέρνουμε την μεσοκάθετη ΑΜ της ΒΓ. Το ΑΜ είναι ύψος, διάμεσος, άρα και διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ. Άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. Επομένως $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ (συμπληρώματα των ίσων γωνιών A_1 και A_2). Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΖ είναι ίσα διότι $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$, $AB = A\Gamma$ και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (παραπληρωματικές των $\hat{B} = \hat{\Gamma}$). Άρα $AE = AZ$. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΕΑΖ, είναι ΑΜ διχοτόμος της $E\hat{A}Z$, άρα και μεσοκάθετος της ΕΖ.

Άσκηση 2

Έστω γωνία $A\hat{B}\Gamma$ και ευθεία ε παράλληλη στη διχοτόμο ΒΔ που τέμνει τις πλευρές στα σημεία Ζ και Ε. Να δείξετε ότι $B\hat{Z}E = Z\hat{E}B$.



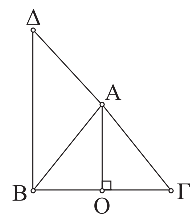
Λύση

Έχουμε $Z\hat{E}B = \Gamma\hat{B}\Delta = \frac{1}{2}A\hat{B}\Gamma$ (1) (ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη των ευθειών ε και ΒΔ). Επίσης

$B\hat{Z}E = A\hat{B}\Delta = \frac{1}{2}A\hat{B}\Gamma$ (2)

(ως εντός εναλλάξ των ευθειών ε και ΒΔ). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $B\hat{Z}E = Z\hat{E}B$.

Άσκηση 3

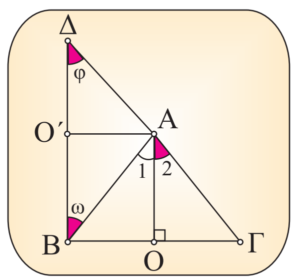


Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΟ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$. Από το Β φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο, που τέμνει την ευθεία ΓΑ στο Δ. Να δειχθεί ότι:

α. Το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισοσκελές

β. Αν είναι και ΑΒ = ΑΓ, τότε $\Delta B \perp B\Gamma$.

Λύση



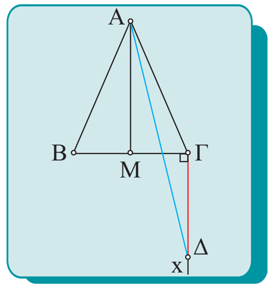
α. Είναι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΑΟ διχοτόμος). Επειδή $B\Delta \parallel AO$ είναι $\hat{\omega} = \hat{A}_1$ και $\hat{\varphi} = \hat{A}_2$. Άρα $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$, συνεπώς το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

β. Φέρνουμε το ύψος ΑΟ΄ του τριγώνου ΑΒΔ. Το ΑΟ΄ είναι διχοτόμος της $\Delta\hat{A}B$. Άρα $AO' \perp AO$ $\left(O\hat{A}O' = 90^o\right)$. Επειδή $AO \perp B\Gamma$ είναι και $\Delta B \perp B\Gamma$ (επειδή $\Delta B \parallel AO$).

Άσκηση 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και η διάμεσος ΑΜ. Φέρνουμε $\Gamma x \perp B\Gamma$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και παίρνουμε σε αυτή τμήμα ΓΔ = ΑΒ. Να δείξετε ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της $M\hat{A}\Gamma$.

Λύση



Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές η διάμεσος ΑΜ είναι και ύψος.

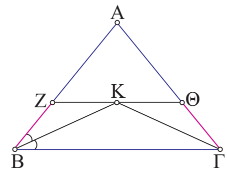
Άρα $\left.\begin{array}{l} AM \perp B\Gamma \\ \Gamma\Delta \perp B\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow AM // \Gamma\Delta \Rightarrow \hat{\Delta} = M\hat{A}\Delta \quad (1)$

Επίσης $A\Gamma = AB = \Gamma\Delta$ (από υπόθεση) άρα $\Delta\hat{A}\Gamma = \hat{\Delta}$ (2)

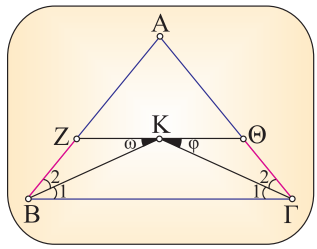
Από (1) και (2) παίρνουμε $M\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma$, άρα η ΑΔ είναι διχοτόμος της $M\hat{A}\Gamma$

Άσκηση 5

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Κ το σημείο, που τέμνονται οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ. Από το Κ φέρνουμε τη ΖΘ παράλληλη στη ΒΓ. Να δειχθεί ότι ΖΘ = ΒΖ + ΓΘ.



Λύση



Είναι $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$. Επειδή $Z\Theta \parallel B\Gamma$ είναι $\hat{B}_1 = \hat{\omega}$.

Άρα $\hat{B}_2 = \hat{\omega}$, οπότε $ZK = BZ \ (1)$.

Όμοια είναι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$. Επειδή $Z\Theta \parallel B\Gamma \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 = \hat{\varphi}$.

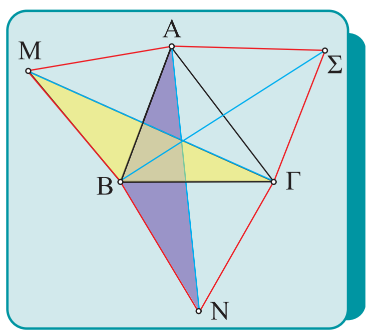
Άρα $\hat{\Gamma}_2 = \hat{\varphi}$, οπότε $K\Theta = \Gamma\Theta \ (2)$.

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $ZK + K\Theta = BZ + \Gamma\Theta \Leftrightarrow Z\Theta = BZ + \Gamma\Theta$.

Άσκηση 6

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και εξωτερικά ισόπλευρα τρίγωνα ΜΑΒ, ΝΒΓ και ΣΑΓ. Να δείξετε ότι ΜΓ=ΝΑ=ΣΒ.

Λύση



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΜΒΓ και ΑΒΝ και έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} MB = AB \ (\text{πλευρές ισόπλευρου}) \\ NB = \Gamma B \ (\text{πλευρές ισόπλευρου}) \\ M\hat{B}\Gamma = 60^o + A\hat{B}\Gamma = A\hat{B}N \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow}$$

$$M\overset{\triangle}{B}\Gamma = A\overset{\triangle}{B}N \Rightarrow M\Gamma = AN \ (1)$$

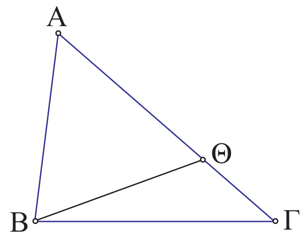
Ομοίως συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΓΝ και ΣΒΓ και έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} A\Gamma = \Sigma\Gamma \ (\text{πλευρές ισόπλευρου}) \\ N\Gamma = \Gamma B \ (\text{πλευρές ισόπλευρου}) \\ B\hat{\Gamma}\Sigma = 60^o + A\hat{\Gamma}B = N\hat{\Gamma}B \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow} A\overset{\triangle}{N}\Gamma = B\overset{\triangle}{\Sigma}\Gamma \Rightarrow \Sigma B = AN \ (2)$$

Από (1) και (2) παίρνουμε $M\Gamma = NA = \Sigma B$

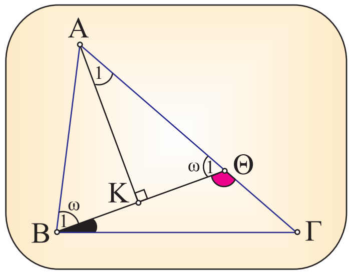
Άσκηση 7

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΓ > ΑΒ. Στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε τμήμα ΑΘ = ΑΒ. Να δειχθεί ότι:



α. $B\hat{\Theta}\Gamma = 90^o + \dfrac{\hat{A}}{2}$ **β.** $\Theta\hat{B}\Gamma = \dfrac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$.

Λύση



Φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΚ. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΘ είναι ισοσκελές έχουμε $\hat{B}_1 = \hat{\Theta}_1 = \hat{\omega}$ και $A\hat{K}\Theta = 90^o$. Είναι $B\hat{\Theta}\Gamma = \hat{A}_1 + A\hat{K}\Theta = 90^o + \dfrac{\hat{A}}{2}$ (εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΑΚΘ). Είναι $\Theta\hat{B}\Gamma + \hat{\omega} = \hat{B}$. Άρα $\Theta\hat{B}\Gamma = \hat{B} - \hat{\omega}$ και $\hat{\Theta}_1 = \hat{\omega} = \Theta\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma}$. Επομένως $\Theta\hat{B}\Gamma = \hat{\omega} - \hat{\Gamma}$. Άρα $2\cdot\Theta\hat{B}\Gamma = \hat{B} - \hat{\Gamma}$. Άρα $\Theta\hat{B}\Gamma = \left(\hat{B} - \hat{\Gamma}\right)/2$.

Άσκηση 8

Η γωνία ω ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με τα 3/4 μιας άλλης γωνίας του. Να υπολογίσετε όλες τις γωνίες του τριγώνου.

Λύση

Η ζητούμενη γωνία είναι μία από τις οξείες γωνίες του τριγώνου διαφορετικά αν ήταν η ορθή τότε θα ήταν μικρότερη από μία οξεία γωνία (άτοπο). Έστω θ η άλλη οξεία γωνία. Τότε:

1η περίπτωση:

Αν $\hat{\omega} = \dfrac{3}{4}$ της ορθής. Τότε $\hat{\omega} = \dfrac{3}{4}\cdot 90^0 = 67,5^0$ και $\hat{\theta} = 90 - \hat{\omega} = 22,5^o$

2η περίπτωση:

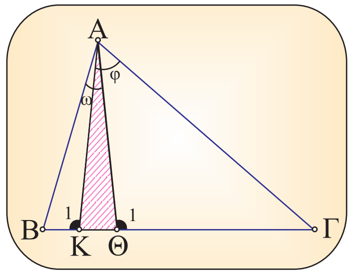
Αν $\hat{\omega} = \dfrac{3}{4}$ της γωνίας θ.

Τότε $$\left.\begin{aligned}\hat{\omega} &= \frac{3}{4}\hat{\theta}\\ \hat{\omega}+\hat{\theta} &= 90^0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{3}{4}\hat{\theta}+\hat{\theta} = 90^0 \Leftrightarrow \frac{7}{4}\hat{\theta} = 90^0 \Leftrightarrow \hat{\theta} \approx 51,4^0 \text{ και } \hat{\omega} \approx 90 - 51,4^0 = 38,6^o .$$

Άσκηση 9

Στο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε από τη κορυφή Α μέχρι τη ΒΓ τα τμήματα ΑΘ, ώστε $B\hat{A}\Theta = \hat{\Gamma}$ και ΑΚ, ώστε $\Gamma\hat{A}K = \hat{B}$ (τα Θ, Κ σημεία της ΒΓ μεταξύ των Β και Γ). Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ΑΘΚ.

Λύση



Είναι η $\hat{\Theta}_1$ εξωτερική στο τρίγωνο ΑΘΒ,

άρα $\hat{\Theta}_1 = \hat{B} + \hat{\omega} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$ και

η $\hat{K}_1$ εξωτερική στο τρίγωνο ΑΚΓ,

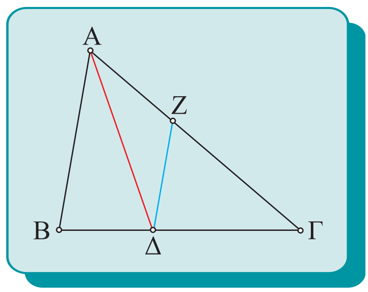
άρα $\hat{K}_1 = \hat{\Gamma} + \hat{\varphi} = \hat{\Gamma} + \hat{B}$.

Συνεπώς $\hat{\Theta}_1 = \hat{K}_1 = \hat{B} + \hat{\Gamma}$. Άρα το τρίγωνο ΘΑΚ είναι ισοσκελές ($\hat{\Theta} = \hat{K}$, παραπληρωματικές ίσων γωνιών).

Άσκηση 10

Στο διπλανό σχήμα είναι $\widehat{A} = 80^o$, ΑΔ διχοτόμος, $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} + 30^o$ και ΔΖ//ΑΒ. Να υπολογιστούν οι γωνίες $A\widehat{\Delta}Z$ και $Z\widehat{\Delta}\Gamma$.

Λύση



Έχουμε $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 80^o + \widehat{\Gamma} + 30 + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\widehat{\Gamma} = 70^0 \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 35^o$

Άρα $\widehat{B} = 35^o + 30^o = 65^o$ και

$$B\widehat{\Delta}A = 180^o - (\widehat{B} + B\widehat{A}\Delta) = 180^o - (65^o + \frac{80^o}{2}) = 75^o$$

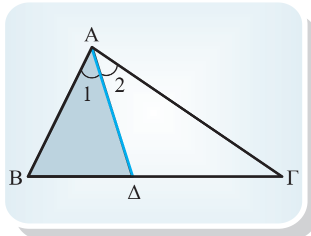
Τότε $A\widehat{\Delta}Z = \Delta\widehat{A}B = \dfrac{80^o}{2} = 40^o$ ως εντός εναλλάξ των ΑΒ//ΔΖ και

$$Z\widehat{\Delta}\Gamma = 180^o - (A\widehat{\Delta}Z + A\widehat{\Delta}B) = 180^o - (40^o + 75^o) = 65^o.$$

Άσκηση 11

Σε τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με $\hat{B}-\hat{\Gamma}=30^o$, φέρουμε την διχοτόμο ΑΔ. Να δείξετε ότι $A\hat{\Delta}B=75^o$.

Λύση



Από το $A\overset{\Delta}{\Delta}B$ έχουμε:

$$A\hat{\Delta}B=180^o-\hat{A}_1-\hat{B}=180^o-\frac{\hat{A}}{2}-\hat{B}=\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}-\frac{\hat{A}}{2}-\hat{B}=$$

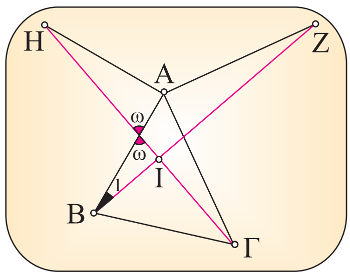
$$=\frac{\hat{A}}{2}+\hat{\Gamma}=\frac{\hat{A}+2\hat{\Gamma}}{2}=\frac{180^o-\hat{B}-\hat{\Gamma}+2\hat{\Gamma}}{2}=\frac{180^o-\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2}=$$

$$=\frac{180^o-(\hat{B}-\hat{\Gamma})}{2}=\frac{180^o-30^o}{2}=75^o$$

Άσκηση 12

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, φέρνουμε εκτός τις $AH\perp AB$, ώστε $AH=AB$ και $AZ\perp A\Gamma$, ώστε $AZ=A\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι τα τμήματα ΓΗ, ΒΖ, είναι ίσα και κάθετα μεταξύ τους.

Λύση



Είναι τρίγ. $AH\Gamma=$ τρίγ. AZB $(AH=AB,\ A\Gamma=AZ$ και $H\hat{A}\Gamma=\Gamma\hat{A}B=90^o+\hat{A})$. Άρα $\Gamma H=BZ$ και $\hat{H}=\hat{B}_1$.

Επειδή $HA\perp AB\Leftrightarrow \hat{H}+\hat{\omega}=90^o\Leftrightarrow \hat{B}_1+\hat{\omega}=90^o$.

Επομένως $\hat{I}=90^o$, οπότε ΓΗ και ΒΖ είναι κάθετες.

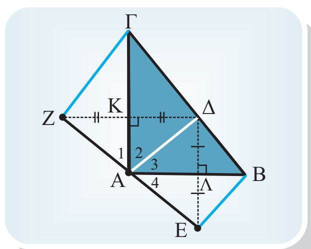
Άσκηση 13

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε το ύψος ΑΔ προς την υποτείνουσα ΒΓ. Έστω Ε, Ζ τα συμμετρικά του Δ ως προς τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

α. τα σημεία Ε, Α, Ζ είναι συνευθειακά.

β. ΒΕ//ΓΖ

Λύση



α. Το τρίγωνο $A\overset{\Delta}{\Delta}Z$ είναι ισοσκελές, αφού η ΑΚ είναι ύψος και διάμεσος. Άρα ΑΔ = ΑΖ. Ομοίως αποδεικνύεται ότι ΑΔ = ΑΕ. Στα ισοσκελή τρίγωνα $\overset{\Delta}{A\Delta Z}$ και $\overset{\Delta}{A\Delta E}$ οι ΑΚ , ΑΛ αντίστοιχα θα είναι και διχοτόμοι, οπότε: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ και $\hat{A}_3 = \hat{A}_4$.

Τότε $Z\hat{A}E = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 = \hat{A}_2 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_3 = 2\cdot\hat{A}_2 + 2\cdot\hat{A}_3 =$

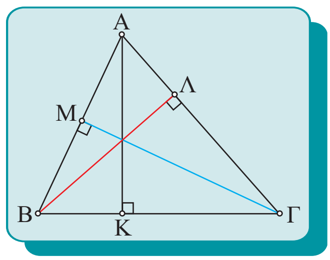
$= 2\left(\hat{A}_2 + \hat{A}_3\right) = 2\cdot\hat{A} = 2\cdot 90^o = 180^o$

Συνεπώς τα Ζ, Α, Ε είναι συνευθειακά σημεία.

β. Είναι $A\hat{E}B = A\hat{\Delta}B = 90^o$ σαν συμμετρικές γωνίες ως προς ΑΒ, οπότε $BE \perp AE$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\Gamma Z \perp AZ$. Όμως τα ΑΕ και ΑΖ έχουν κοινό φορέα. Άρα ΒΕ//ΓΖ σαν κάθετα στην ίδια ευθεία.

Άσκηση 14

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΑΚ,ΒΛ και ΓΜ. Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $AK + B\Lambda + \Gamma M < AB + A\Gamma + B\Gamma$.



Λύση

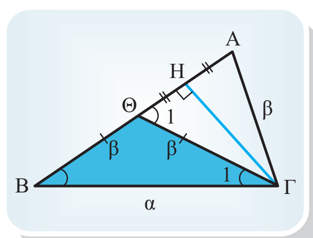
Επειδή $AK \perp B\Gamma$ έχουμε $AK < AB$ (1)
Για τον ίδιο λόγο $B\Lambda < B\Gamma$ (2) και $\Gamma M < A\Gamma$ (3)
Με πρόσθεση κατά μέλη των (1),(2) και (3) παίρνουμε:
$AK + B\Lambda + \Gamma M < AB + A\Gamma + B\Gamma$

Άσκηση 15

Σε τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με $\hat{A} = 2\hat{B}$, να δείξετε ότι $\alpha < 2\beta$

Λύση

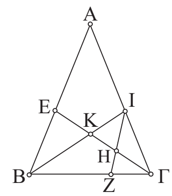
Φέρουμε $\Gamma H \perp AB$ και στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΗ παίρνουμε τμήμα ΗΘ = ΗΑ. Τότε το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\Gamma A\Theta}$ είναι ισοσκελές αφού το ΓΗ είναι ύψος και διάμεσος. Άρα $\hat{\Theta}_1 = \hat{A}$ σαν προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου, και $\Gamma\Theta = A\Gamma = \beta$. Όμως η $\hat{\Theta}_1$ είναι εξωτερική γωνία του $\overset{\Delta}{\Theta B\Gamma}$, οπότε:



$\hat{\Theta}_1 = \hat{B} + \hat{\Gamma}_1 \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}_1 \Leftrightarrow 2\hat{B} = \hat{B} + \hat{\Gamma}_1 \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}_1$, δηλαδή το $\overset{\Delta}{\Theta B \Gamma}$ είναι ισοσκελές με κορυφή Θ, αφού οι προσκείμενες γωνίες στην ΒΓ είναι ίσες. Άρα $\Theta B = \Theta\Gamma = \beta$.

Εφαρμόζουμε την τριγ. ανισότητα στο $\overset{\Delta}{\Theta B \Gamma}$ και έχουμε:

$B\Gamma < \Theta B + \Theta\Gamma \Leftrightarrow \alpha < \beta + \beta \Leftrightarrow \alpha < 2\beta$

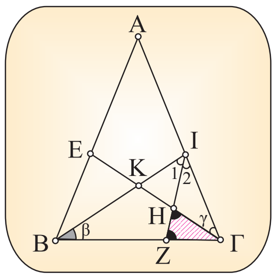


Άσκηση 16

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), φέρουμε τις διχοτόμους ΒΙ και ΓΕ και τη διχοτόμο ΙΖ της γωνίας ΒΙΓ. Να δειχθεί ότι ΓΖ = ΓΗ.

Λύση

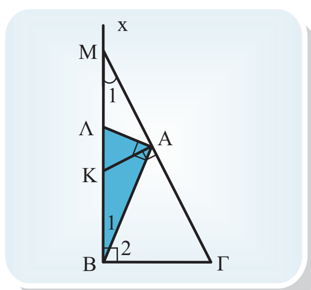
Στο τρίγωνο ΙΗΓ η εξωτερική γωνία Η είναι: $\hat{H} = \hat{I}_2 + \hat{\gamma}$ (1). Στο τρίγωνο ΒΙΖ η εξωτερική γωνία Ζ είναι: $\hat{Z} = \hat{I}_1 + \hat{\beta}$ (2). Επειδή $\hat{\gamma} = \hat{\beta}$ (μισά των ίσων γωνιών Β και Γ) και $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$ είναι $\hat{H} = \hat{Z}$, οπότε $\Gamma Z = \Gamma H$.



Άσκηση 17

Σε ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}(AB = A\Gamma)$ φέρουμε ημιευθεία $Bx \perp B\Gamma$, η οποία βρίσκεται στο ημιεπίπεδο (ΒΓ, Α). Αν η Βx τέμνει την προέκταση της ΓΑ στο Μ και επί της ΒΜ πάρουμε σημεία Κ, Λ τέτοια ώστε: $B\hat{A}\Lambda = \Gamma\hat{A}K = 90^o$, να δείξετε ότι ΒΛ = ΚΜ και ότι το $\overset{\Delta}{AK\Lambda}$ είναι ισοσκελές.

Λύση



Επειδή $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ισοσκελές είναι $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}$ σαν προσκείμενες γωνίες στη βάση του ΒΓ. Όμως από το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{B\Gamma M}\left(\Gamma\hat{B}M = 90^o\right)$ έχουμε:

$\hat{\Gamma} + \hat{M}_1 = 90^o \Leftrightarrow \hat{B}_2 + \hat{M}_1 = \Gamma\hat{B}M \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \hat{B}_2 + \hat{M}_1 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \Leftrightarrow \hat{M}_1 = \hat{B}_1$

Άρα το $\overset{\Delta}{ABM}$ είναι ισοσκελές με βάση ΜΒ, αφού οι προσκείμενες σ'αυτή γωνίες είναι ίσες.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\Delta}{AB\Lambda}\left(B\hat{A}\Lambda = 90^o\right)$ και $\overset{\Delta}{AKM}\left(K\hat{A}M = 90^o\right)$ έχουν:

(1) $AB = AM$ ($A\overset{\Delta}{B}M$ ισοσκελές)

(2) $\hat{B}_1 = \hat{M}_1$ (το αποδείξαμε)

Άρα $A\overset{\Delta}{B}\Lambda = A\overset{\Delta}{K}M$ οπότε:

• $B\Lambda = KM$

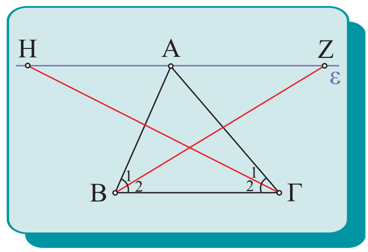
• $A\Lambda = AK$, δηλαδή το $A\overset{\Delta}{K}\Lambda$ είναι ισοσκελές με κορυφή το A.

Άσκηση 18

Από την κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε ευθεία ε//ΒΓ. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνουν την ε στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα δείξτε ότι ΑΒ + ΑΓ = ΖΗ.

Λύση

Έχουμε



$$\left.\begin{array}{r} \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \ \ (\text{BZ διχοτόμος}) \\ \hat{B}_2 = \hat{Z} \ \ (\text{εντός εναλλάξ των } B\Gamma // \varepsilon) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\hat{B}_1 = \hat{Z} \Leftrightarrow B\overset{\Delta}{A}Z$ ισοσκελές $\Leftrightarrow AB = AZ$ (1)

Ομοίως

$$\left.\begin{array}{r} \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 \ \ (\Gamma H \text{ διχοτόμος}) \\ \hat{\Gamma}_2 = \hat{H} \ \ (\text{εντός εναλλάξ των } B\Gamma // \varepsilon) \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\Gamma}_1 = \hat{H} \Leftrightarrow \Gamma\overset{\Delta}{A}H \text{ ισοσκελές } \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow A\Gamma = AH$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε $AB + A\Gamma = AZ + AH = ZH$.

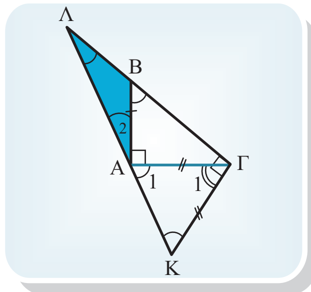
Άσκηση 19

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$ $(\hat{A} = 1^{\llcorner})$ φέρουμε κάθετη ημιευθεία στην ΒΓ προς το μέρος του Α, επί της οποίας παίρνουμε τμήμα ΓΚ = ΑΓ. Στην προέκταση της υποτείνουσας ΓΒ παίρνουμε τμήμα ΒΛ = ΑΒ. Να αποδείξετε ότι $A\hat{\Gamma}K = 2\cdot A\hat{\Lambda}B$.

Λύση

• Είναι ΑΒ = ΒΛ οπότε το τρίγωνο ΑΒΛ είναι ισοσκελές και $\hat{A}_2 = \hat{\Lambda}$. Όμως η $\hat{B}$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΒΛ, οπότε

$$\hat{A}_2 + \hat{\Lambda} = \hat{B} \Leftrightarrow 2\cdot\hat{\Lambda} = \hat{B} \Leftrightarrow \hat{\Lambda} = \frac{\hat{B}}{2}$$



• $A\Gamma = \Gamma K$ άρα $\overset{\Delta}{A\Gamma K}$ ισοσκελές, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{K}$. Όμως

$$\hat{\Gamma}_1 + \hat{A}_1 + \hat{K} = 180^o \Leftrightarrow 90^o - \hat{\Gamma} + 2\cdot\hat{A}_1 = 180^o \Leftrightarrow$$

$$2\cdot\hat{A}_1 = 90^o + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{A}_1 = 45^o + \frac{\hat{\Gamma}}{2}$$

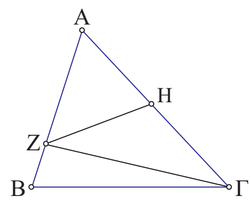
• Το $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο στο Α, οπότε $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o$
Έχουμε:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \left(45^o + \frac{\hat{\Gamma}}{2}\right) + \hat{\Lambda} = 45^o + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = 45^o + \frac{\hat{\Gamma}+\hat{B}}{2} = 45^o + \frac{90^o}{2} = 90^o$$

Οπότε από το $\overset{\Delta}{A\Gamma K}$ έχουμε: $\hat{\Gamma}_1 = 180^o - 2\cdot\hat{A}_1 \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 = 180^o - 2\cdot\left(90^o - \hat{A}_2\right) \Leftrightarrow$

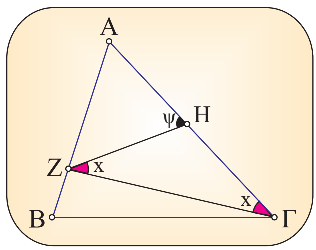
$$\hat{\Gamma}_1 = 180^o - 180^o + 2\cdot\hat{A}_2 \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 = 2\cdot\hat{A}_2 \Leftrightarrow A\hat{\Gamma}K = 2\cdot\hat{\Lambda} \Leftrightarrow A\hat{\Gamma}K = 2\cdot A\hat{\Lambda}B$$

Άσκηση 20



Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} < 2\hat{\Gamma}$. Στην ΑΒ παίρνουμε σημείο Ζ, ώστε $A\hat{\Gamma}Z = \hat{A}/2$ και στην ΑΓ σημείο Η ώστε $H\hat{Z}\Gamma = \hat{A}/2$. Να δειχθεί ότι ΖΑ = ΖΗ = ΗΓ.

Λύση



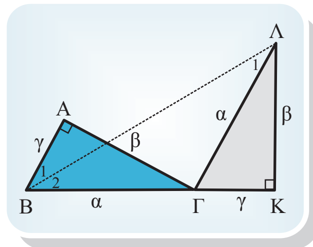
Είναι $H\hat{\Gamma}Z = H\hat{Z}\Gamma = x$
Στο τρίγωνο ΗΖΓ η γωνία ψ είναι εξωτερική. Επομένως $\hat{\psi} = 2\hat{x} \Leftrightarrow \hat{\psi} = 2\cdot\frac{\hat{A}}{2} = \hat{A}$, απ' όπου $AZ = ZH$. Επειδή είναι $ZH = H\Gamma$ έχουμε: $AZ = ZH = H\Gamma$.

Άσκηση 21

Στην προέκταση της υποτείνουσας ΒΓ ορθογωνίου τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}\left(\hat{A} = 90^o\right)$ παίρνουμε τμήμα ΓΚ = γ. Φέρουμε ημιευθεία $Kx \perp BK$ προς το μέρος του Α. Επί της Κx παίρνουμε τμήμα ΚΛ = β. Να δείξετε ότι η ΒΛ διχοτομεί την $\hat{B}$.

Λύση

Φέρουμε την ΓΛ και συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και $\overset{\Delta}{\Gamma K\Lambda}$. Αυτά έχουν:



- $\hat{A} = \hat{K} = 90^o$
- $AB = K\Gamma = \gamma$ (υπόθεση)
- $A\Gamma = K\Lambda = \beta$ (υπόθεση)

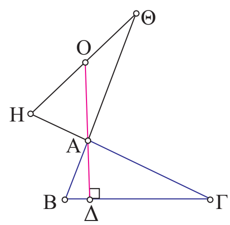
Άρα $A\overset{\Delta}{B}\Gamma = \Gamma\overset{\Delta}{K}\Lambda$, οπότε ΒΓ = ΓΛ, δηλαδή το τρίγωνο $B\overset{\Delta}{\Gamma}\Lambda$ είναι ισοσκελές με κορυφή το Γ. Συνεπώς $\hat{B}_2 = \hat{\Lambda}_1$ σαν προσκείμενες γωνίες στη βάση του.

Επίσης από την ισότητα των τριγώνων έχουμε $A\hat{B}\Gamma = K\hat{\Gamma}\Lambda$.
Άρα ΑΒ//ΓΛ, αφού τεμνόμενες από τη ΒΚ, σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους ίσες.

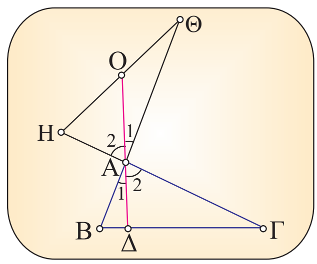
Οπότε $\hat{B}_1 = \hat{\Lambda}_1$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ και ΓΛ που τέμνονται από την ΒΛ. Συνεπώς $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, δηλαδή η ΒΛ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$.

Άσκηση 22

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α. Στις προεκτάσεις των ΒΑ και ΓΑ προς το μέρος της κορυφής Α παίρνουμε τμήμα του ΑΘ = ΑΓ και ΑΗ = ΑΒ. Να δειχθεί ότι η προέκταση του ύψους ΑΔ περνάει από το μέσο Ο της ΘΗ.



Λύση



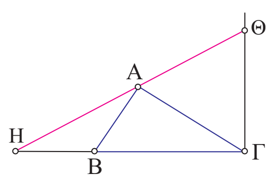
Είναι $AB = AH$, $A\Gamma = A\Theta$ και $B\hat{A}\Gamma = \Theta\hat{A}H$. Άρα τρίγ. ΑΒΓ = τρίγ. ΑΘΗ, οπότε $\hat{H} = \hat{B}$ και $\hat{\Theta} = \hat{\Gamma}$. Είναι $\hat{A}_2 + \hat{\Gamma} = 90^o$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o$. Άρα $\hat{A}_2 = \hat{B} \Leftrightarrow \hat{H} = \hat{A}_2$, οπότε $OA = OH$.

Ίδια αποδεικνύεται ότι $\hat{A}_1 = \hat{\Theta}$, οπότε $OA = O\Theta$.

Επομένως $O\Theta = OH$.

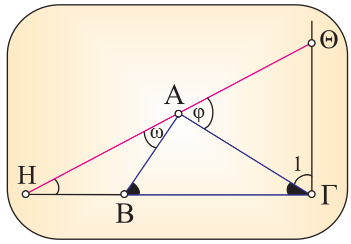
Άσκηση 23

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A = 90^o\right)$ προεκτείνουμε τη ΓΒ κατά τμήμα ΒΗ = ΑΒ. Φέρνουμε τη $\Gamma x \perp B\Gamma$ και παίρνουμε τμήμα ΓΘ = ΑΓ. Να δείξετε ότι τα σημεία Η, Α και Θ είναι συνευθειακά.



Λύση

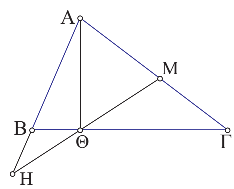
Το τρίγωνο ΒΗΑ είναι ισοσκελές, άρα $\hat{H} = \hat{\omega}$. Το τρίγωνο ΑΘΓ είναι ισοσκελές, άρα $\hat{\Theta} = \hat{\varphi}$.



Επειδή $\Gamma x \perp B\Gamma$ είναι $\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma} = 90^o$ ή $\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$ ή $\hat{\Gamma}_1 = \hat{B}$. Αλλά $\hat{B} = 2\hat{\omega}$ (εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΗ). Άρα $\hat{\Gamma}_1 = 2\hat{\omega}$. Στο τρίγωνο ΑΘΓ έχουμε $2\hat{\varphi} + \hat{\Gamma}_1 = 180^o$ ή $2\hat{\varphi} + 2\hat{\omega} = 180^o$ ή $\hat{\varphi} + \hat{\omega} = 90^o$.

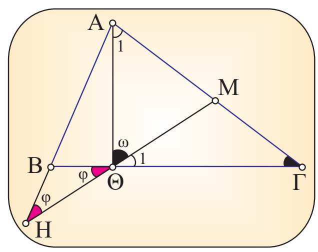
Άρα $\hat{\varphi} + \hat{\omega} + \hat{A} = 90^o + 90^o = 180^o$, οπότε η ΗΑΘ είναι ευθεία.

Άσκηση 24



Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε το ύψος ΑΘ και στην προέκταση της ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΗ = ΒΘ Να δειχθεί ότι η ΘΗ περνάει από το μέσο της ΑΓ.

Λύση



Επειδή $B\Theta = BH$, το τρίγωνο ΒΘΗ είναι ισοσκελές. Άρα $\hat{H} = \hat{\Theta} = \hat{\varphi}$, $\hat{B} = \hat{\varphi} + \hat{\varphi} = 2\hat{\varphi}$ (εξωτερική του τριγώνου ΒΗΘ). Επειδή $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ (υπόθεση), είναι $\hat{\varphi} = \hat{\Gamma}$. Είναι όμως $\hat{\Theta}_1 = \hat{\varphi}$ (κατάκορυφήν). Άρα $\hat{\Theta}_1 = \hat{\Gamma}$, δηλαδή το τρίγωνο ΘΜΓ είναι ισοσκελές, άρα $\Theta M = M\Gamma$ (1). Επειδή $\hat{\omega} = \hat{A}_1$ (συμπληρωματικές των $\hat{\Theta}_1 = \hat{\Gamma}$) το τρίγωνο ΑΜΘ είναι ισοσκελές. Άρα $AM = M\Theta$ (2). Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $AM = M\Gamma$, δηλαδή το Μ είναι το μέσον της ΑΓ.

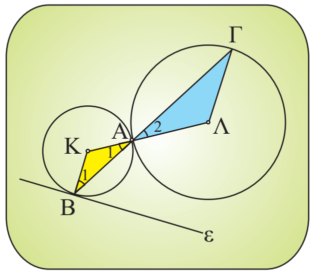
Άσκηση 25

Δίνονται οι κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) που εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Από το Α φέρνουμε ευθεία που τέμνει τους κύκλους (Κ,R), (Λ,ρ) στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Αν (ε) είναι η εφαπτομένη του κύκλου (Κ,R) στο σημείο Β, να δείξετε ότι:

α. $\Lambda\hat{\Gamma}A = K\hat{B}A$ **β.** $\Gamma\Lambda \perp (\varepsilon)$

Λύση

α. Φέρνουμε τις ΚΛ και ΛΓ. Το τρίγωνο ΒΚΑ είναι ισοσκελές γιατί $K\hat{B}A = \hat{A}_1$ (1). Ομοίως το τρίγωνο ΑΛΓ είναι ισοσκελές οπότε $\hat{A}_2 = \Lambda\hat{\Gamma}A$ (2). Όμως $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (3) γιατί είναι κατακορυφήν. Από τις (1) και (2), λόγω της (3), έχουμε: $K\hat{B}A = \Lambda\hat{\Gamma}A$



β. Στο τρίγωνο ΚΒΑ έχουμε: $\hat{K} = 180° - K\hat{B}A - \hat{A}_1$

Στο τρίγωνο ΑΛΓ έχουμε: $\hat{\Lambda} = 180° - \Lambda\hat{\Gamma}A - \hat{A}_2$

Όμως $K\hat{B}A = \Lambda\hat{\Gamma}A$ (από **α.**), άρα ΚΒ//ΛΓ γιατί σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες.

Είναι: $KB \perp (\varepsilon)$ (Η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ακτίνα στο σημείο επαφής)

Άρα $\Lambda\Gamma \perp (\varepsilon)$.

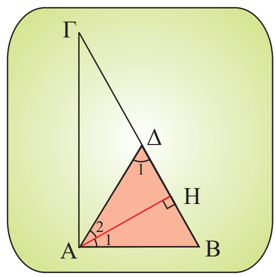
Άσκηση 26

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$ και ΑΒ<ΑΓ φέρνουμε το ύψος ΑΗ. Αν Δ είναι συμμετρικό του Β ως προς το Η, να αποδείξετε ότι η γωνία $A\hat{\Delta}\Gamma$ είναι αμβλεία και $A\hat{\Delta}\Gamma - 90° = \hat{\Gamma}$

Λύση

Στο τρίγωνο ΑΔΒ το ύψος ΑΗ είναι και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές με ΑΔ=ΑΒ, $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$ (1) και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (2).

Επίσης $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ (3) (οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες)



Στο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε:

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{B} + \Delta\hat{A}B = 180°$$

$$2\hat{\Delta}_1 + \Delta\hat{A}B = 180° \text{ (λόγω της (1))}$$

$$2\hat{\Delta}_1 = 180° - \Delta\hat{A}B$$

$$\hat{\Delta}_1 = 90° - \frac{\Delta\hat{A}B}{2} \quad (4)$$

Οι γωνίες $A\hat{\Delta}\Gamma$ και $\hat{\Delta}_1$ είναι παραπληρωματικές οπότε:

$$A\hat{\Delta}\Gamma + \hat{\Delta}_1 = 180°$$

$$A\hat{\Delta}\Gamma = 180° - \hat{\Delta}_1 \overset{(4)}{=} 180° - \left(90° - \frac{\Delta\hat{A}B}{2}\right) =$$

$$= 180° - 90° + \frac{\Delta\hat{A}B}{2} = 90° + \frac{\hat{A}_1 + \hat{A}_2}{2} =$$

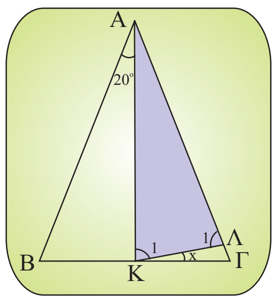
$$= 90° + \frac{2\hat{A}_1}{2} = 90 + \hat{A}_1 \overset{(3)}{=} 90° + \hat{\Gamma}$$

Άρα η $A\hat{\Delta}\Gamma$ είναι αμβλεία και $A\hat{\Delta}\Gamma - 90° = \hat{\Gamma}$.

Άσκηση 27

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} > 20°\right)$ με $AB = A\Gamma$ και τα σημεία Κ, Λ των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε $AK = A\Lambda$ και $K\hat{A}B = 20°$. Να υπολογιστεί η γωνία $\Gamma\hat{K}\Lambda$.

Λύση



Έστω $\Gamma\hat{K}\Lambda = x$. Επειδή το τρίγωνο ΚΑΛ είναι ισοσκελές $(AK = A\Lambda)$, έχουμε $\hat{K}_1 = \hat{\Lambda}_1$. Η γωνία $\Gamma\hat{K}A$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΚΒ, οπότε:

$$\Gamma\hat{K}A = 20° + \hat{B}$$

$$x + \hat{K}_1 = 20° + \hat{B}$$

$$x = 20° + \hat{B} - \hat{K}_1 \quad (1)$$

Όμως $\hat{K}_1 = \hat{\Lambda}_1$ και $\hat{\Lambda}_1$ εξωτερική του τριγώνου ΚΛΓ, οπότε $\hat{K}_1 = \hat{\Lambda}_1 = x + \hat{\Gamma}$ (2).

Η (1) λόγω της (2) γίνεται: $x = 20° + \hat{B} - \left(x + \hat{\Gamma}\right) \Leftrightarrow x = 20° + \hat{B} - x - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow$

$$2x = 20° + \hat{B} - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow 2x = 20° \Leftrightarrow x = 10°$$

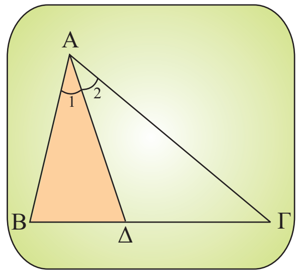
Άρα $x = \Gamma\hat{K}\Lambda = 10°$

Άσκηση 28

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 30°$. Αν ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, να δείξετε ότι: $A\hat{\Delta}\Gamma = 105°$.

Λύση

Η $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΔΒ, οπότε:



$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\mathrm{A}}_1 + \hat{\mathrm{B}} = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} + \hat{\mathrm{B}} =$$

$$= 90° - \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \hat{\mathrm{B}} =$$

$$= 90° - \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \frac{2\hat{\mathrm{B}}}{2} =$$

$$= 90° + \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} =$$

$$= 90° + \frac{\hat{\mathrm{B}} - \hat{\Gamma}}{2} =$$

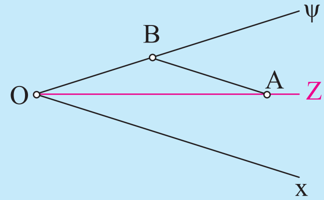
$$= 90° + \frac{30°}{2} = 90° + 15° = 105°$$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

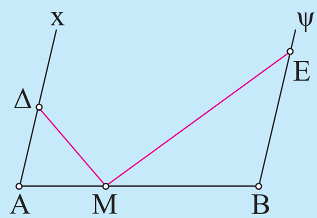
1. Στη γωνια xOψ η ΟΖ είναι εσωτερική ευθεία. Από τυχαίο σημείο Α της ΟΖ φέρνουμε της ΑΒ//Οx. Να δειχθεί ότι:

α. Αν ΟΖ είναι διχοτόμος της $x\hat{O}\psi$, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές,

β. Αν το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές, η ΟΖ είναι διχοτόμος της $x\hat{O}\psi$.



2. Στα άκρα ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ φέρουμε προς το ίδιο μέρος, τις παράλληλες Αx και Βψ. Στην ΑΒ παίρνουμε τυχαίο σημείο Μ, στην Αx τμήμα ΑΔ = ΑΜ και στην Βψ τμήμα ΒΕ = ΜΒ. Να δειχθεί ότι $\Delta\hat{M}E = 90^o$.

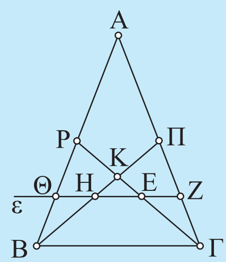


3. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), το ύψος ΑΗ και μια ευθεία παράλληλη στην ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

ι. το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

ιι. $E\hat{\Delta}H = \Delta\hat{E}H$ και $A\hat{H}\Delta = A\hat{H}E$

4. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, φέρνουμε τις διαμέσους ΒΠ, ΓΡ και μια ευθεία ε παράλληλη στη βάση ΒΓ. Να δειχθεί ότι τα τμήματα της ευθείας, που βρίσκονται μεταξύ των ίσων πλευρών και των αντίστοιχων διαμέσων είναι ίσα.

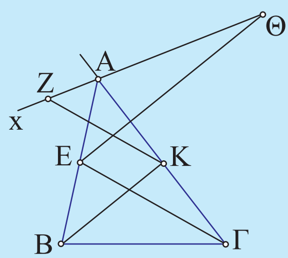


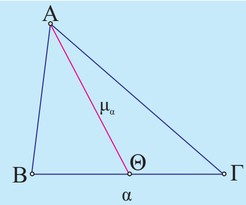
5. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^o$) και ΓΔ διχοτόμος. Μια ευθεία ε που διέρχεται από το Β τέμνει την προέκταση της ΓΔ στο σημείο Ε έτσι ώστε ΑΒ = ΒΕ. Να δείξετε ότι $A\hat{B}E = 90^o$.

6. Απο εξωτερικό σημείο Α ενός κύκλου (Κ,ρ) φέρνουμε εφαπτόμενη ΑΒ. Πάνω στην ΑΚ παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ = ΑΒ και έστω Δ το σημείο τομής της ΒΓ με τον κύκλο. Αποδείξτε ότι το τρίγωνο ΑΚΔ είναι ορθογώνιο.

7. Στο τρίγωνο ΑΒΓ, φέρνουμε τις διχοτόμους ΒΚ και ΓΕ και την εξωτερική διχοτόμο Αx, της γωνίας Α. Από τα σημεία Κ και Ε, φέρνουμε τις παράλληλες στις διχοτόμους ΓΕ και ΒΚ, που τέμνουν την Αx στα Ζ και Θ. Να δειχθεί ότι:

$$K\hat{Z}\Theta = \frac{\hat{B}}{2} \text{ και } E\hat{\Theta}A = \frac{\hat{\Gamma}}{2}.$$

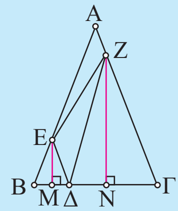




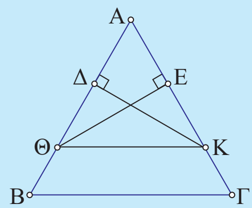
8. Να δείξετε ότι στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι σχέσεις:

α. $\mu_\alpha > \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \hat{A} < 90^o$ **β.** $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \hat{A} = 90^o$,

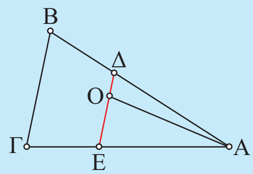
γ. $\mu_\alpha < \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \hat{A} > 90^o$



9. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), Δ ένα τυχαίο σημείο της ΒΓ και Μ, Ν τα μέσα των ΒΔ και ΔΓ αντίστοιχα. Αν οι κάθετες προς τη ΒΓ από τα Μ και Ν τέμνουν τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα να δείξετε ότι $A\hat{E}Z = E\hat{\Delta}Z$.

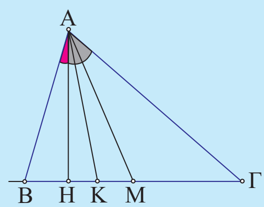


10. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και στις ίσες πλευρές του παίρνουμε τα τμήματα ΑΔ = ΑΕ. Φέρνουμε $\Delta K \perp AB\left(K \in A\Gamma\right)$ και $E\Theta \perp A\Gamma\left(\Theta \in AB\right)$. Να δειχθεί ότι ΘΚ//ΒΓ.



11. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ > ΑΓ > ΒΓ και Ο εσωτερικό σημείο του. Η παράλληλη προς τη ΒΓ που διέρχεται από το Ο τεμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

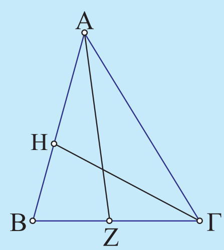
ι. ΟΑ<ΑΔ **ιι.** ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ<ΑΒ+ΑΓ



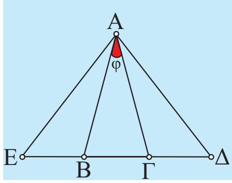
12. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΓ > ΑΒ. Φέρνουμε το ύψος ΑΗ, τη διχοτόμο ΑΚ και τη διάμεσο ΑΜ. Να δειχθούν οι σχέσεις:

α. $AH < \frac{AB + A\Gamma}{2}$ **β.** $B\hat{A}H < \Gamma\hat{A}H$

γ. ΚΒ < ΚΓ **δ.** ΚΒ < ΑΒ.



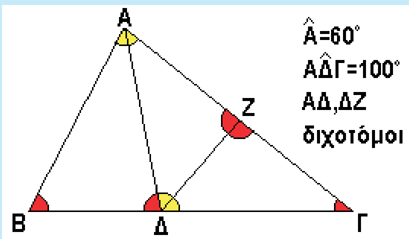
13. Στο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τις διχοτόμους ΑΖ και ΓΗ. Αν είναι ΑΖ = ΑΒ και ΓΗ = ΒΓ, να δειχθεί ότι:
α. ΑΒ = ΒΓ και **β.** να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

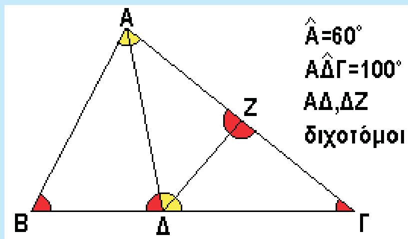


14. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και φ η γωνία κορυφής. Στη βάση ΒΓ παίρνουμε τμήματα ΒΔ = ΑΒ και ΓΕ = ΓΑ. Να υπολογίσετε συναρτήσει της φ τις γωνίες των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ.

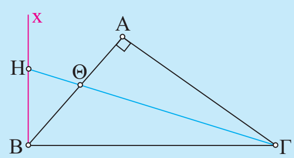
15. Μια γωνία ενός τριγώνου είναι τριπλάσια μιας άλλης. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο χωρίζεται σε δύο ισοσκελή τρίγωνα.

16. Να υπολογίσετε τις άγνωστες γωνίες στα παρακάτω σχήματα:

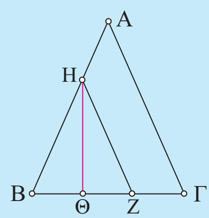




17. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και η Βx κάθετη στην ΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την ΑΒ στο Θ και την Βx στο Η. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΘΒΗ είναι ισοσκελές.



18. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ παίρνουμε τα τμήματα $ΑΗ = \frac{1}{3}ΑΒ$ και $ΒΘ = \frac{1}{3}ΒΓ$. Να δειχθεί ότι $ΗΘ \perp ΒΓ$.



19. Αν ένα δεκάγωνο έχει μία γωνία του ίση με 135^0 να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του αν γνωρίζετε ότι είναι μεταξύ τους ίσες.

20. Με πόσες ορθές γωνίες είναι ίσο το άθροισμα των γωνιών ενός οκταγώνου; Υπάρχει πολύγωνο με άθροισμα γωνιών ίσο με 13 ορθές;

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Δ τέμνονται στο σημείο Ε και σχηματίζουν οξεία γωνία φ και οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών Γ και Δ τέμνονται στο σημείο Η και σχηματίζουν οξεία γωνία ω. Να αποδείξετε ότι :

Αν $\hat{φ} = \hat{ω}$ τότε $\hat{Α} - \hat{Δ} = 2\hat{Γ}$.