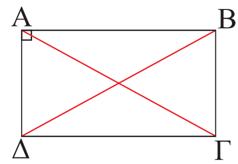
Μάθημα 7

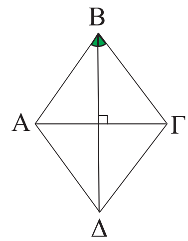
Είδη παραλληλογράμμων

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ



Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

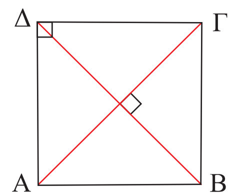
Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μια ορθή γωνία και έχει την ιδιότητα οι διαγώνιές του να είναι ίσες.



Ρόμβος

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες και έχει τις εξής ιδιότητες:

- οι διαγώνιές του τέμνονται κάθετα.
- οι διαγώνιές του διχοτομούν τις γωνίες του.



Τετράγωνο

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος και έχει τις εξής ιδιότητες:

- οι διαγώνιές του τέμνονται κάθετα, διχοτομούν τις γωνίες του και είναι ίσες.
- όλες οι γωνίες είναι ορθές.
- όλες οι πλευρές είναι ορθές.
- οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες

Τα παραπάνω συνοψίζονται στον πίνακα:

ΤΕΤΡΑΠΛ.	Παραλληλόγραμμο	Ορθογώνιο παρ/μο	Ρόμβος	Τετράγωνο
ΠΛΕΥΡΕΣ	Απέναντι πλευρές • είναι ίσες • είναι παράλληλες	Απέναντι πλευρές • είναι ίσες • είναι παράλληλες	Απέναντι πλευρές • είναι ίσες • είναι παράλληλες Διαδοχικές πλευρές • είναι ίσες	Απέναντι πλευρές • είναι ίσες • είναι παράλληλες Διαδοχικές πλευρές • είναι ίσες
ΓΩΝΙΕΣ	Απέναντι γωνίες είναι ίσες	Ολες οι γωνίες είναι ίσες	Απέναντι γωνίες είναι ίσες	Ολες οι γωνίες είναι ίσες
ΔΙΑΓΩΝΙΕΣ	• διχοτομούνται	• διχοτομούνται • είναι ίσες • •	• διχοτομούνται • • είναι κάθετες • διχοτομούν τις γωνίες	• διχοτομούνται • είναι ίσες • είναι κάθετες • διχοτομούν τις γωνίες

.Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Για να δείξουμε ότι ένα κυρτό τετράπλευρο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, δείχνουμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις (κριτήρια ορθογωνίων παραλληλογράμμων):

1. Δείχνουμε ότι είναι παραλληλόγραμμο και ότι ισχύει ένα από τα παρακάτω:
- Έχει μία ορθή γωνία.
- Οι διαγώνιες είναι ίσες.

2. Δείχνουμε ότι έχει τρείς γωνίες ορθές.
3. Δείχνουμε ότι έχει όλες τις γωνίες του ίσες.

Για να δείξουμε ότι ένα κυρτό τετράπλευρο είναι ρόμβος, δείχνουμε ότι ισχύει ένα από τα παρακάτω κριτήρια ρόμβων:
1. Δείχνουμε ότι είναι παραλληλόγραμμο και ότι ισχύει ένα από τα παρακάτω:
- Μια διαγώνιος διχοτομεί μια γωνία.
- Έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
- Οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα.

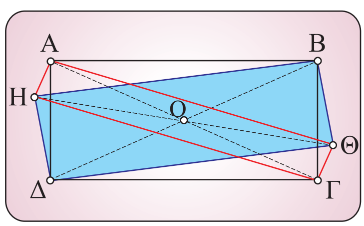
2. Δείχνουμε ότι έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

Για να δείξουμε ότι ένα κυρτό τετράπλευρο είναι τετράγωνο, δείχνουμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις (κριτήρια τετραγώνων):
Δείχνουμε ότι είναι παραλληλόγραμμο και ότι ισχύει ένα από τα παρακάτω:
- Έχει μία ορθή γωνία και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
- Έχει μία ορθή γωνία και μια διαγώνιος διχοτομεί μια γωνία του.
- Έχει μία ορθή γωνία και τις διαγώνιες κάθετες.
- Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του επίσης ίσες.
- Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και μια από αυτές διχοτομεί μια γωνία του.
- Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1
Έστω τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΑΘΓΗ με κοινή διαγώνιο την ΑΓ. Να δείξετε ότι το ΒΘΔΗ είναι επίσης ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Λύση



Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο οι διαγώνιες του είναι ίσες και διχοτομούνται. Άρα ΑΓ = ΒΔ (1).
Επειδή το ΒΘΔΗ είναι ορθογώνιο οι διαγώνιες του είναι ίσες και διχοτομούνται. Άρα ΑΓ = ΗΘ (2).
Από τις (1) και (2) έχουμε ΑΓ = ΒΔ = ΗΘ και τα μέσα τους ταυτίζονται.
Επειδή οι ΒΔ και ΗΘ διχοτομούνται το ΒΘΔΗ είναι παρ/μο και επειδή ΒΔ = ΗΘ έχει και ίσες διαγωνίους άρα το ΒΘΔΗ είναι ορθογώνιο παρ/μο.

Άσκηση 2

Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών παραλληλογράμου σχηματίζουν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Λύση

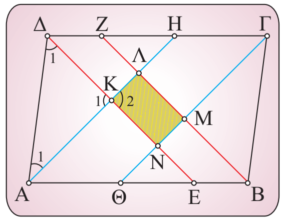
Έστω οι διχοτόμοι ΑΗ,ΒΖ,ΓΘ και ΔΕ που τέμνονται στα Κ,Λ,Μ και Ν.

Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο ισχύει $\hat{A}+\hat{\Delta}=180^o$

Στο τρίγωνο ΑΔΚ ισχύει:

$$\hat{A}_1+\hat{\Delta}_1+\hat{K}_1=180^o \Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{\Delta}}{2}+\hat{K}_1=180^o \Leftrightarrow$$

$$\frac{\hat{A}+\hat{\Delta}}{2}+\hat{K}_1=180^o \Leftrightarrow \hat{K}_1=180^o-\frac{180^o}{2} \Leftrightarrow \hat{K}_1=90^o$$



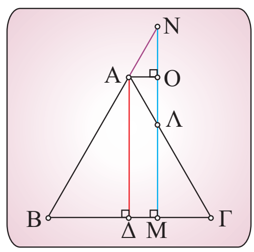
και επειδή $\hat{K}_1=\hat{K}_2$ ως κατακορυφήν, έχουμε $\hat{K}_2=90^o$.

Ομοίως βρίσκουμε ότι $\hat{\Lambda}=\hat{M}=\hat{N}=90^o$, άρα το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο .

Άσκηση 3

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και το ύψος του ΑΔ. Από τυχαίο σημείο Μ της ΒΓ φέρνουμε κάθετη στη ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ν και Λ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι ΜΛ + ΜΝ = 2ΑΔ.

Λύση



Απο το Α φέρουμε $AO \perp MN$. Τότε $\left.\begin{matrix} MN \perp B\Gamma \\ AO \perp MN \end{matrix}\right\} \Rightarrow AO /\!/ B\Gamma$.

Επίσης

$$\left.\begin{matrix} N\hat{A}O=\hat{B} \text{ (εντός, εκτός και επι τα αυτά των } AO, B\Gamma) \\ \Lambda\hat{A}O=\hat{\Gamma} \text{ (εντός εναλλάξ των } AO, B\Gamma) \\ \hat{B}=\hat{\Gamma} \text{ (ΑΒΓ ισοσκελές)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow N\hat{A}O=\Lambda\hat{A}O$$

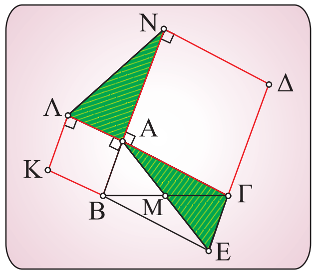
Στο τρίγωνο ΑΝΛ η ΑΟ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα είναι ισοσκελές και συνεπώς η ΑΟ είναι διάμεσος . Δηλαδή ΟΝ = ΟΛ. Επειδή το ΑΔΜΟ είναι ορθογώνιο ισχύει ΑΔ = ΜΟ.

Άρα έχουμε $\left.\begin{matrix} M\Lambda=MO-\Lambda O=A\Delta-NO \\ MN=MO+ON=A\Delta+ON \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} M\Lambda+MN=2A\Delta$

Άσκηση 4

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και εξωτερικά από αυτό τα τετράγωνα ΑΒΚΛ και ΑΓΔΝ. Αν ΑΜ διάμεσος του τριγώνου να δείξετε ότι ΛΝ = 2ΑΜ.

Λύση



Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΕ = ΑΜ. Τότε το ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο, διότι ΒΜ = ΜΓ (από υπόθεση) και ΑΜ = ΜΕ.
Άρα ΑΒ = ΓΕ.

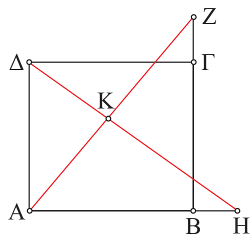
Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\Lambda A N}$ και $\overset{\triangle}{E \Gamma A}$ είναι ίσα διότι:

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma E \overset{(1)}{=} AB = A\Lambda \ \ (AB K\Lambda \text{ τετράγωνο}) \\ &A\Gamma = AN \ \ (AN\Delta\Gamma \text{ τετράγωνο}) \\ &\Lambda\hat{A}N = A\hat{\Gamma}E \ \ (\text{αμβλείες γωνίες με κάθετες πλευρές}) \end{aligned}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow}$$

$\overset{\triangle}{\Lambda A N} = \overset{\triangle}{E \Gamma A} \Rightarrow \Lambda N = AE$

επειδή ΑΜ = ΜΕ έχουμε τελικά ΛΝ = 2ΑΜ

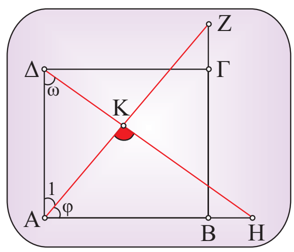
Άσκηση 5



Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ και ΒΓ τετραγώνου ΑΒΓΔ, κατά τμήματα ΒΗ = ΓΖ. Να δειχθεί ότι: α. ΑΖ = ΔΗ, β. $AZ \perp \Delta H$

Λύση

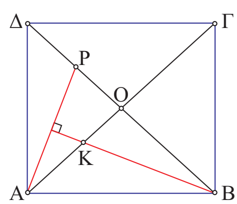
α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΗ και ΑΒΖ είναι ίσα (ΑΔ = ΑΒ, ΑΗ = ΒΖ). Άρα είναι ΔΗ = ΑΖ.



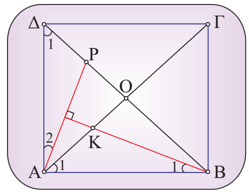
β. Από τα ίδα τρίγωνα ΑΔΗ και ΑΒΖ έχουμε $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$. Επειδή $\hat{A}_1 + \hat{\varphi} = 90^o$ έχουμε $\hat{A}_1 + \hat{\omega} = 90^o$, απ'όπου $AK\Delta = 90^o$, οπότε $AZ \perp \Delta H$.

Άσκηση 6

Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ ονομάζουμε Ο το κέντρο του και παίρνουμε τυχαίο σημείο Ρ του τμήματος ΟΔ. Φέρνουμε την κάθετη από το Β στην ΑΡ, που τέμνει την ΑΟ στο Κ. Να δειχθεί ότι
α. ΒΚ = ΑΡ
β. ΓΚ = ΒΡ.



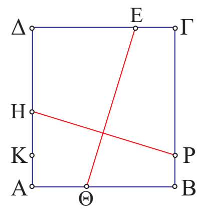
Λύση



α. Είναι $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1 = 45^o$ και $AB = A\Delta$. Επειδή $\hat{B}_1 = \hat{A}_2$ (οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές), τα τρίγωνα ΑΔΡ και ΒΚΑ είναι ίσα. Επομένως $AP = BK$ και $AK = \Delta P$.

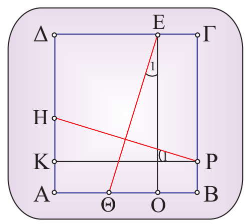
β. Επειδή $AK = \Delta P$ και $A\Gamma = B\Delta$ (διαγώνιες τετραγώνου), θα είναι $A\Gamma - AK = B\Delta - \Delta P$ δηλ. $\Gamma K = BP$.

Άσκηση 7



Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ παίρνουμε τα σημεία Ε,Θ,Η,Ρ πάνω στις πλευρές του ΔΓ,ΑΒ,ΑΔ,ΒΓ αντίστοιχα έτσι ώστε τα τμήματα ΕΘ, ΗΡ, να είναι κάθετα. Να δειχθεί ότι τα ΕΘ και ΗΡ είναι ίσα.

Λύση



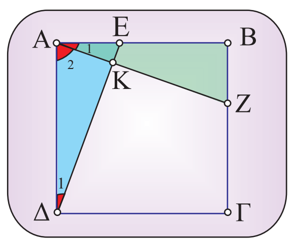
Φέρνουμε $EO \perp AB$ και $PK \perp A\Delta$. Είναι $PK = EO$ (ίσες με τις πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ) και $\hat{P}_1 = \hat{E}_1$ (οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές). Επομένως τα τρίγωνα ΕΘΟ, ΚΡΗ είναι ίσα διότι $PK = EO$, $\hat{E}_1 = \hat{P}_1$ και $\hat{O} = \hat{K} = 90^o$. Οπότε είναι και $E\Theta = PH$.

Άσκηση 8

Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ, τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε $AE = BZ$. Να αποδείξετε ότι

i. $AZ = \Delta E$ **ii.** $AZ \perp \Delta E$

Λύση



i. $\overset{\Delta}{AB}Z = A\overset{\Delta}{\Delta}E$ $\left(AE = BZ, AB = A\Delta, \hat{A} = \hat{B} = 90°\right)$.

Άρα $AZ = \Delta E$ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$.

ii. Είναι $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$, οπότε στο τρίγωνο ΑΔΚ είναι $\hat{K} = 90°$, αφού $\hat{\Delta}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A} = 90°$. Άρα $AZ \perp \Delta E$.

Άσκηση 9

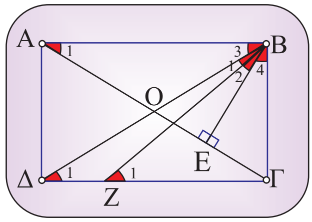
Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ φέρουμε $BE \perp A\Gamma$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{B}E$ τέμνει τη ΓΔ στο Ζ, να αποδείξετε ότι $B\Gamma = \Gamma Z$.

Λύση

Έχουμε $\hat{A}_1 = \hat{B}_3 = \hat{\Delta}_1$ (1) (αφού το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο) και $\hat{A}_1 = \hat{B}_4$ (2) (ως οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές).
Επομένως

$\hat{Z}_1 = \hat{\Delta}_1 + \hat{B}_1$ (ως εξωτερική) $\overset{(1),(2)}{=} \hat{B}_4 + \hat{B}_1 = \hat{B}_4 + \hat{B}_2$, οπότε

$\hat{Z}_1 = \Gamma\hat{B}Z$. Άρα $B\Gamma = \Gamma Z$.



Άσκηση 10

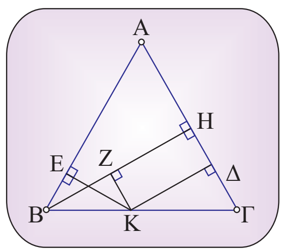
Να αποδείξετε ότι:

i. το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου της βάσης ισοσκελούς τριγώνου από τις ίσες πλευρές του είναι σταθερό, ίσο με ένα από τα ύψη του.

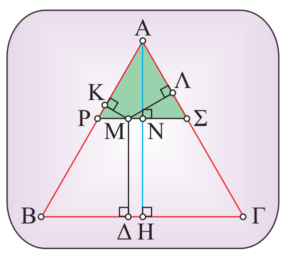
ii. το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου, που βρίσκεται στο εσωτερικό ισοπλεύρου τριγώνου, από τις πλευρές του είναι σταθερό, ίσο με το ύψος του.

Λύση

i. Έστω Κ τυχαίο σημείο της βάσης ΒΓ και ΒΗ το ύψος του τριγώνου. Φέρνουμε τις $K\Delta \perp A\Gamma$, $KE \perp AB$ και $KZ \perp BH$.
Τότε είναι τα τρίγωνα ΒΕΚ ,ΒΖΚ είναι ίσα,διότι έχουν:
$\hat{Z} = \hat{E} = 90°$, ΚΒ κοινή, $\hat{B} = \hat{\Gamma} = B\hat{K}Z$,οπότε $KE = BZ$.
Απο το ορθογώνιο ΚΖΗΔ είναι $K\Delta = ZH$.
Απο τα παραπάνω με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:
$K\Delta + KE = ZH + BZ = BH =$ σταθερό (ύψος του τριγώνου).



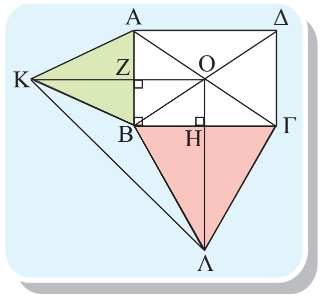
ii. Έστω Μ τυχαίο σημείο. Φέρουμε από το Μ τις κάθετες στις ΑΒ, ΑΓ στα Κ, Λ αντίστοιχα.
Τότε από το i. έχουμε: $MK + M\Lambda = AN$ (1) (αφού το τρίγωνο ΑΡΣ είναι ισόπλευρο). Επίσης $M\Delta = NH$ (2).
Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $MK + M\Lambda + M\Delta = AH$
= σταθερό.



Άσκηση 11

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Εξωτερικά του ορθογωνίου κατασκευάζουμε τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΚΒ και ΒΛΓ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΚΟΛ είναι ορθογώνιο.

Λύση



Είναι ΚΑ = ΚΒ (αφού το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές)
ΟΑ = ΟΒ (αφού οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες)
Άρα η ΚΟ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ
Είναι ΛΒ = ΛΓ (αφού το τρίγωνο ΛΒΓ είναι ισοσκελές)
ΟΒ = ΟΓ (αφού οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες)
Άρα ΛΟ μεσοκάθετος του ΒΓ.
Τότε το ΒΖΟΗ είναι ορθογώνιο αφού έχει τρεις ορθές γωνίες $\left(\hat{B} = \hat{Z} = \hat{H} = 90^\circ\right)$

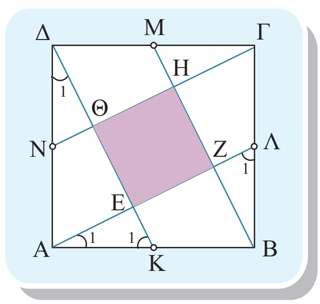
Άρα και $\hat{O} = 90^\circ$.

Άσκηση 12

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ τα Κ, Λ, Μ, Ν είναι μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα τμήματα ΑΛ, ΒΜ, ΓΝ, ΔΚ τεμνόμενα σχηματίζουν τετράγωνο.

Λύση

Είναι ΝΑ// = ΓΛ άρα ΝΑΛΓ παραλληλόγραμμο οπότε ΝΓ// = ΑΛ άρα και ΘΗ//ΕΖ (1)
Είναι ΜΔ// = ΚΒ άρα ΔΜΒΚ παραλληλόγραμμο οπότε
ΜΒ// = ΔΚ άρα και ΗΖ//ΘΕ (2)
Από (1), (2) έχουμε ότι ΘΗΖΕ παραλληλόγραμμο.



Είναι $A\overset{\Delta}{\Lambda}B = A\overset{\Delta}{\Delta}K$ αφού $\hat{A} = \hat{B} = 90^o$, $AB = A\Delta$

και $AK = B\Lambda = \dfrac{\alpha}{2}$ όπου α η πλευρά του τετραγώνου

Τότε $\hat{K}_1 = \hat{\Lambda}_1$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\overset{\Delta}{\Lambda}B$ είναι

$\hat{A}_1 + \hat{\Lambda}_1 = 90^o \overset{\hat{K}_1 = \hat{\Lambda}_1}{\Leftrightarrow} \hat{A}_1 + \hat{K}_1 = 90^o$.

Τότε στο $A\overset{\Delta}{E}K$ είναι $\hat{E} = 90^o$
Αφού το ΘΗΖΕ έχει και μία γωνία ορθή είναι ορθογώνιο. Για να είναι τετράγωνο αρκεί να δείξω ότι δύο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες.

Είναι $\Theta E = \Delta K - \Delta\Theta - EK$

$EZ = A\Lambda - AE - Z\Lambda$

Είναι $\Delta K = A\Lambda$ (αφού $A\overset{\Delta}{\Lambda}B = A\overset{\Delta}{\Delta}K$)

$AE = \Delta\Theta$ (αφού $\Delta\overset{\Delta}{N}\Theta = A\overset{\Delta}{E}K$ $AK = \Delta N$, $\hat{\Theta} = \hat{E} = 90^o$, $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$)

$EK = Z\Lambda$ (αφού $A\overset{\Delta}{E}K = Z\overset{\Delta}{\Lambda}B$ $AK = \Lambda B$, $\hat{E} = \hat{Z} = 90^o$, $\hat{K}_1 = \hat{\Lambda}_1$)
Άρα $\Theta E = EZ$. Οπότε ΘΗΖΕ είναι τετράγωνο.

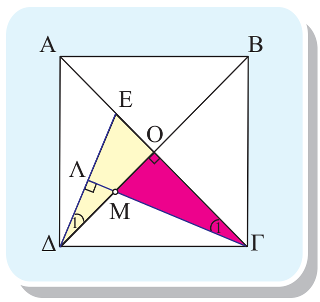
Άσκηση 13

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και Ο το κέντρο του και Ε τυχαίο σημείο της ΑΟ. Φέρνουμε $\Gamma\Lambda \perp \Delta E$ όπου Μ το σημείο τομής της ΓΛ με την ΔΟ.
Να δείξετε ότι:
i. $\Gamma M = \Delta E$ **ii. $BM = \Gamma E$**

Λύση

i. Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta\overset{\Delta}{E}O$ και $\Gamma\overset{\Delta}{M}O$. Αυτά έχουν $\Gamma O = \Delta O$ ως μισά των διαγωνίων του τετραγώνου.

Οι γωνίες $\hat{\Gamma}_1$ και $\hat{\Delta}_1$ είναι ίσες ως οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές αφού $\begin{matrix} \Delta E \perp \Gamma\Lambda \\ \Delta O \perp \Gamma O \end{matrix}$



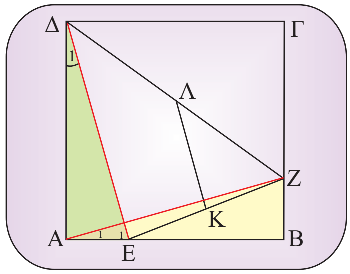
Άρα $\Delta\overset{\Delta}{E}O = \Gamma\overset{\Delta}{M}O \Leftrightarrow \Gamma M = \Delta E$

ii. Είναι $BM = BO + OM$ και $\Gamma E = \Gamma O + OE$
Όμως $BO = \Gamma O$ ως μισά των διαγωνίων και $OM = OE$ από την ισότητα των τριγώνων $\Delta\overset{\Delta}{E}O$ και $\Gamma\overset{\Delta}{M}O$. Άρα $BM = \Gamma E$.

Άσκηση 14

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και πάνω στις ΑΒ, ΒΓ, παίρνουμε τα σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα ώστε $AE = BZ$. Να δειχθεί ότι:
α. i. $AZ = \Delta E$, ii. $AZ \perp \Delta E$
β. Αν Κ είναι το μέσο της ΕΖ και Λ το μέσο της ΔΖ να δειχθεί ότι $K\Lambda \perp AZ$.

Λύση



α. i. Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΑΒΖ είναι ίσα, γιατί έχουν: $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, $A\Delta = AB$ ως πλευρές τετραγώνου και $AE = BZ$ από υπόθεση. Άρα: $AZ = \Delta E$ (1)

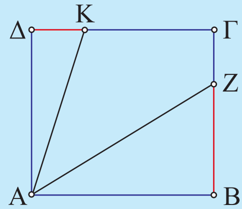
ii. Από την ισότητα των τριγώνων ΔΑΕ και ΑΒΖ έχουμε ότι $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$ (2). Για να δείξουμε ότι $AZ \perp \Delta E$, αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{A}_1 + \hat{E}_1 = 90°$.

Έχουμε: $\hat{A}_1 + \hat{E}_1 \overset{(2)}{=} \hat{\Delta}_1 + \hat{E}_1 = 90°$, άρα $AZ \perp \Delta E$

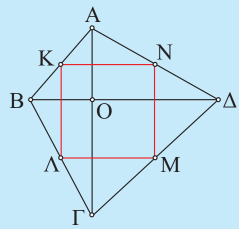
β. Στο τρίγωνο ΔΖΕ, τα Λ, Κ είναι μέσα των ΔΖ και ΕΖ αντίστοιχα, οπότε ΚΛ//ΔΕ. Όμως $\Delta E \perp AZ$, άρα $K\Lambda \perp AZ$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

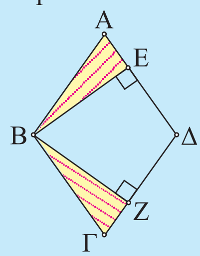
1. Στην πλευρά ΓΔ τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε τυχαίο σημείο Κ. Αν η διχοτόμος της $B\hat{A}K$ τέμνει την ΒΓ στο Ζ, να δείξετε ότι η ΑΚ είναι ίση με το άθροισμα των ΒΖ και ΔΚ.



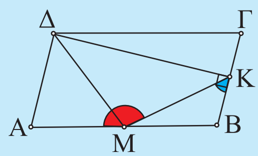
2. Θεωρούμε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε οι διαγώνιοι του να τέμνονται κάθετα . Να αποδείξετε, ότι τα μέσα Κ, Λ, Μ, Ν των πλευρών του, είναι κορυφές ορθογωνίου.



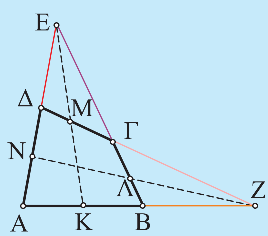
3. Να αποδείξετε, ότι ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, αν και μόνον αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.



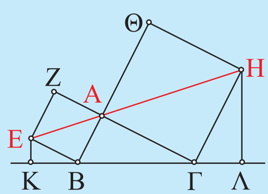
4. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με την πλευρά ΑΒ να είναι διπλάσια της ΒΓ. Από την κορυφή Δ φέρνουμε τη ΔΚ κάθετη στη ΒΓ. Αν Μ είναι το μέσο της ΑΒ, να δείξετε ότι η γωνία ΑΜΚ είναι τριπλάσια της γωνίας ΜΚΒ.



5. Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ με τις δύο απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές. Αν οι πλευρές ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο Ε, οι πλευρές ΒΑ, ΓΔ στο Ζ και οι διχοτόμοι των γωνιών Ε και Ζ τέμνουν τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ στα Κ, Λ, Μ, Ν, να δείξετε ότι το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.



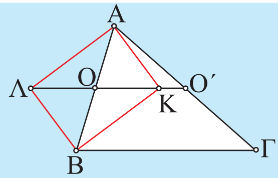
6. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^{o}\right)$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά τα τετράγωνα ΑΒΕΖ και ΑΓΗΘ. Φέρνουμε τις αποστάσεις ΕΚ και ΗΛ στη ΒΓ. Να δειχθεί ότι:
α. Τα τμήματα ΓΛ = ΚΒ **β.** ΕΚ + ΗΛ = ΒΓ
γ. Τα σημεία Ε, Α, Η είναι συνευθειακά



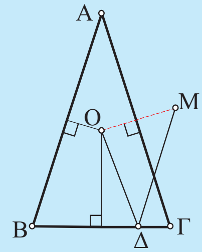
7. Από την κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε τις αποστάσεις ΑΚ και ΑΛ στην εσωτερική και στην εξωτερική διχοτόμο της γωνίας Β. Να δειχθεί ότι:

α. Το ΑΚΒΛ είναι ορθογώνιο

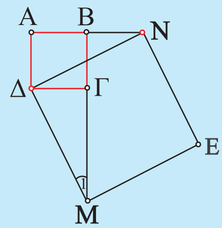
β. Η ευθεία ΚΛ είναι παράλληλη στη ΒΓ και περνάει από το μέσο της πλευράς ΑΓ.



8. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρνουμε τις μεσοκάθετες στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ, που τέμνονται στο Ο. Από το Μ, που είναι το συμμετρικό του Ο ως προς την ΑΓ φέρνουμε τη ΜΔ//ΑΒ (Δ σημείο της ΒΓ). Να δειχθεί ότι $M\hat{O}\Delta = 90^o$.



9. Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒκατά ΒΝ ίσο με ΑΒ και την πλευρά ΒΓ κατά ΓΜ ίσο με ΑΝ. Κατασκευάζουμε το παραλληλλόγραμμο ΔΝΕΜ. Να αποδείξετε ότι είναι τετράγωνο.



Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Στο εσωτερικό τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε το σημείο Ο ώστε $O\hat{A}B = O\hat{B}A = 15^o$. Να δειχθεί ότι τα τρίγωνα ΔΟΓ είναι ισόπλευρο.