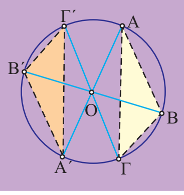
3ο μάθημα

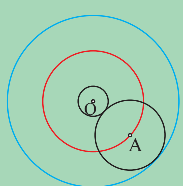
Τρίγωνα



3ο Κεφάλαιο

4ο μάθημα

Βασικοί γεωμετρικοί τόποι - Ανισοτικές σχέσεις



Μάθημα 3 Τρίγωνα

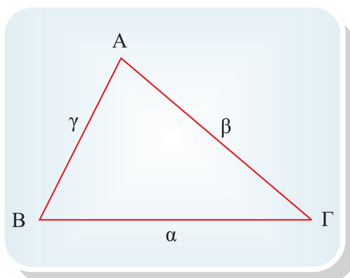
Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ορισμός - Κύρια στοιχεία τριγώνου

Τρίγωνο ονομάζεται ένα πολύγωνο με τρεις πλευρές και τρεις γωνίες. Οι πλευρές και οι γωνίες είναι τα κύρια στοιχεία του τριγώνου.
Οι σχετικές θέσεις των γωνιών ως προς τις πλευρές είναι:

Γωνία περιεχόμενη σε δυο πλευρές:

Στο διπλανό σχήμα η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι περιεχόμενη στις πλευρές α και β.



Γωνία απέναντι από πλευρά:

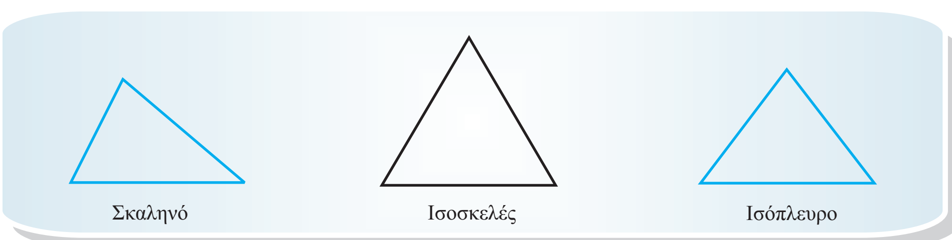
Στο διπλανό σχήμα η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι απέναντι από την πλευρά γ.

Γωνίες προσκείμενες σε πλευρά:

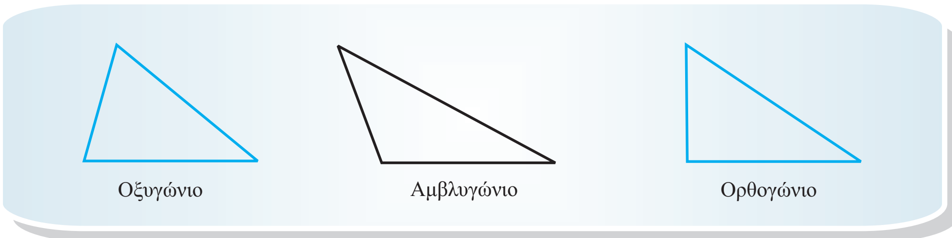
Στο διπλανό σχήμα η γωνία $\hat{\Gamma}$ και η γωνία $\hat{B}$ είναι προσκείμενες στην πλευρά α.

Τα τρίγωνα ανάλογα με τις πλευρές τους χωρίζονται σε:

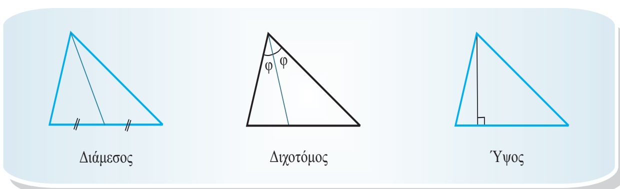
- ***Σκαληνά***, αν έχουν άνισες πλευρές.
- ***Ισοκελή***, αν έχουν δυο πλευρές ίσες. Τότε η τρίτη πλευρά λέγεται **βάση** του τριγώνου και η απέναντι της κορυφή λέγεται **κορυφή** αυτού.
- ***Ισόπλευρα***, αν και οι τρείς πλευρές είναι ίσες.



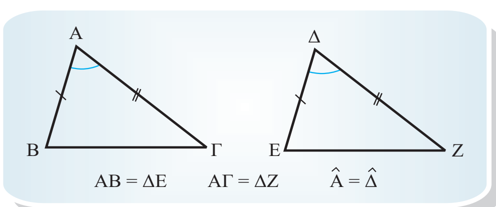
Τα τρίγωνα ανάλογα με τις γωνίες τους χωρίζονται σε:
• ***Οξυγώνια***, αν και οι τρείς γωνίες τους είναι οξείες.
• ***Ορθογώνια***, αν έχουν μια ορθή γωνία. Τότε οι δυο πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία λέγονται **κάθετες** και η πλευρά που είναι απέναντι απο την ορθή λέγεται **υποτείνουσα**.
• ***Αμβλυγώνια***, αν έχουν μια αμβλεία γωνία.



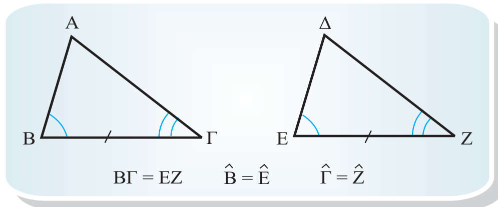
Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου (*διάμεσοι, διχοτόμοι, ύψη*)
Τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου είναι:
• ***Η διάμεσος*** που είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς.
• ***Η διχοτόμος*** που είναι το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας,απο την κορυφή μέχρι την απέναντι πλευρά.
• ***Το ύψος*** που είναι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται απο μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς.



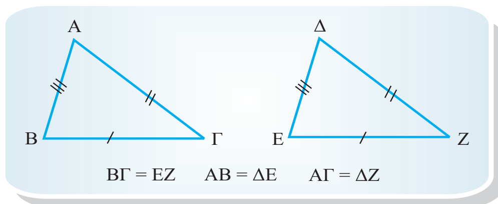
Κριτήρια ισότητας τριγώνων
1ο Κριτήριο (Π-Γ-Π)
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.



2ο Κριτήριο (Γ-Π-Γ)
Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



3ο Κριτήριο (Π-Π-Π)
Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



Παρατήρηση: Το κριτήριο (Γ-Π-Γ) γενικεύεται για μια πλευρά και δύο γωνίες όχι απαραίτητα προσκείμενες στην πλευρά.
Δηλαδή **αν δυο τρίγωνα έχουν μόνο μια πλευρά αντίστοιχα ίση και δυο οποιεσδήποτε γωνίες ίσες τότε είναι ίσα.**

Ειδικότερα για δύο ορθογώνια τρίγωνα ισχύουν τα επόμενα
κριτήρια ισότητας:

1ο Κριτήριο
- **Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία ίσες, τότε είναι ίσα.**

2ο Κριτήριο
- **Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο ομόλογες πλευρές ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.**

Με τη βοήθεια των παραπάνω κριτηρίων αποδεικνύονται τα επόμενα πορίσματα και θεωρήματα:
1. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
2. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι ταυτόχρονα ύψος και διάμεσος.
3. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που άγεται απο την κορυφή είναι ταυτόχρονα διχοτόμος και διάμεσος.
4. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος που άγεται απο την κορυφή είναι ταυτόχρονα ύψος και διχοτόμος .
5. Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.
6. Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του

ευθύγραμμου τμήματος και αντίστροφα αν ένα σημείο ισαπέχει απο τα άκρα ευθύγραμμου τμήματος τότε ανήκει στη μεσοκάθετο αυτού.

7. Σε κάθε κύκλο, αν δύο τόξα είναι ίσα τότε και οι αντίστοιχες χορδές είναι ίσες και αντίστροφα.

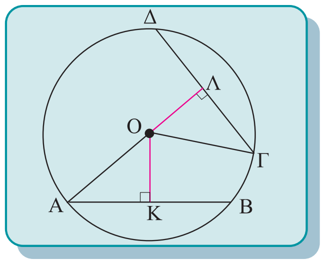
(**Σημείωση**: το αντίστροφο ισχύει δεδομένου ότι και τα δύο τόξα είναι μεγαλύτερα ή μικρότερα του ημικυκλίου.)

8. Σε κάθε κύκλο η κάθετος από το κέντρο του προς μια χορδή, διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.

Θεώρημα

Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.

Απόδειξη



$K\overset{\Delta}{O}A = \Lambda\overset{\Delta}{O}\Gamma$ διότι: $\left(\begin{array}{l} \hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^o \\ OA = O\Gamma = \rho \\ AK = \Gamma\Lambda \end{array}\right)$

άρα είναι $OK = O\Lambda$.

Αντίστροφα:

Αν $OK = O\Lambda$, τότε $K\overset{\Delta}{O}A = \Lambda\overset{\Delta}{O}\Gamma$, διότι:

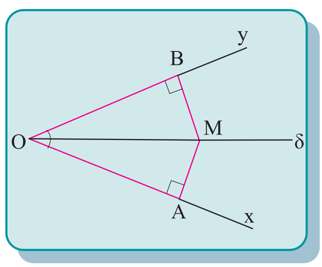
$\left(\begin{array}{l} \hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^o \\ OA = OB = \rho \\ OK = O\Lambda \end{array}\right)$

Επομένως $AK = \Gamma\Lambda \Leftrightarrow \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow AB = \Gamma\Delta$

Θεώρημα

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα.

Απόδειξη



$A\overset{\Delta}{O}M = B\overset{\Delta}{O}M$ διότι: $\left(\begin{array}{l} A = B = 90^o \\ OM : \text{κοινή} \\ M\hat{O}A = M\hat{O}B \end{array}\right)$

Επομένως, $MA = MB$

Αντίστροφα:

Αν $MA = MB$ τότε $A\overset{\Delta}{O}M = B\overset{\Delta}{O}M$, διότι: $\hat{A} = \hat{B} = 90^o$, OM κοινή, $MA = MB$.

Επομένως $M\hat{O}A = M\hat{O}B$ δηλαδή ανήκει στη διχοτόμο Οδ.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Μέθοδος 1

1. **Για να δείξουμε ότι δυο τρίγωνα είναι ίσα,** αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιούν ένα απο τα κριτήρια ισότητας τριγώνων. Δηλ.
   - έχουν τις πλευρές τους ίσες μια προς μια, ή
   - έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, ή
   - έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία πρός μία.

Μέθοδος 2

2. **Για να δείξουμε ότι δυο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα**, αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιούν ένα απο τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων. Δηλ.
   - έχουν δυο κάθετες πλευρές ίσες μια προς μια, ή
   - έχουν μια πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία πρός μία.

Μέθοδος 3

3. **Για να δείξουμε ότι δυο ευθύγραμμα τμήματα ή δυο γωνίες είναι ίσες** αναζητούμε κατάλληλα τρίγωνα - τα οποία έχουν στοιχεία τα ζητούμενα - και δείχνουμε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

Μέθοδος 4

4. **Για να δείξουμε ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές**, αρκεί να δείξουμε ότι
   - έχει δυο πλευρές ίσες ή
   - έχει δυο γωνίες ίσες, ή
   - το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή με τη βάση είναι:

     α. ύψος και διάμεσος
     β. ύψος και διχοτόμος
     γ. διάμεσος και διχοτόμος.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

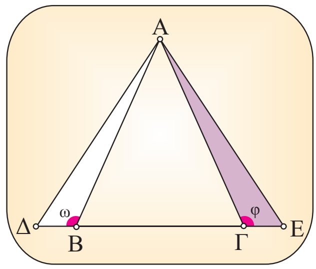
Άσκηση 1

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη βάση ΒΓ κατά ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΒΔ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

α. οι γωνίες $\widehat{ΑΒΔ}$ και $\widehat{ΑΓΕ}$ είναι ίσες

β. το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

Λύση



α. Είναι $\hat{Β}+\hat{ω}=180^{o}$, $\hat{Γ}+\hat{φ}=180^{o}$ και επειδή $\hat{Β}=\hat{Γ}$ παίρνουμε: $\hat{Β}+\hat{ω}=\hat{Γ}+\hat{φ}\Rightarrow\hat{ω}=\hat{φ}$.

β. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:

ΑΒ = ΑΓ (από υπόθεση)

$\hat{ω}=\hat{φ}$ (από α. ερώτημα)

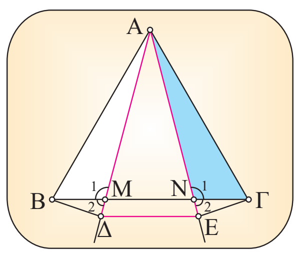
ΒΔ = ΓΕ (από υπόθεση).

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα αφού έχουν τις δύο πλευρές τους ίσες και τις αντίστοιχα περιεχόμενες γωνίες ίσες. Οπότε ΑΔ = ΑΕ, δηλαδή το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

Άσκηση 2

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε στη ΒΓ τα σημεία Μ και Ν, ώστε ΒΜ = ΓΝ. Εάν Δ και Ε είναι οι προβολές των Β και Γ στις ΑΜ και ΑΝ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

Λύση



Στα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΝΓ είναι:

ΑΒ = ΑΓ, $\hat{Β}=\hat{Γ}$ (γωνίες βάσης ισοσκελούς) και ΒΜ = ΝΓ (από υπόθεση). Άρα είναι ίσα , οπότε ΑΜ = ΑΝ και $\hat{Μ}_1=\hat{Ν}_1\Rightarrow\hat{Μ}_2=\hat{Ν}_2$ (παραπληρωματικές των $\hat{Μ}_1,\hat{Ν}_1$).

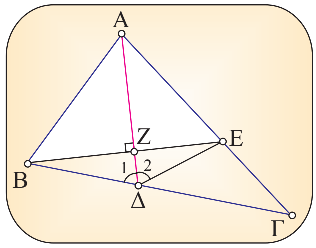
Στα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΝΕ έχουμε:

$\hat{Δ}=\hat{Ε}=90^{o}$, ΒΜ = ΝΓ , $\hat{Μ}_2=\hat{Ν}_2$. Άρα είναι ίσα και συνεπώς ΜΔ = ΝΕ. Τότε ΑΜ + ΜΔ = ΑΝ + ΝΕ ή ΑΔ = ΑΕ.

Άσκηση 3

Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α. Από την κορυφή Β φέρνουμε τη $ΒΖ\perp ΑΔ$, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να δειχθεί ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΔΕ.

Λύση

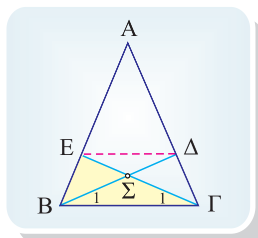


Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές (η ΑΖ είναι διχοτόμος και ύψος). Άρα είναι και διάμεσος δηλ. το Ζ είναι μέσο της ΒΕ. Επομένως στο τρίγωνο ΒΔΕ, η ΔΖ είναι διάμεσος και ύψος, που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές, άρα η ΔΖ είναι και διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Delta}E$.

Άσκηση 4

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Σ εσωτερικό σημείο του. Οι ΒΣ και ΓΣ τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Αν $B\Delta = \Gamma E$ και $\widehat{B\Delta E} = \widehat{\Gamma E\Delta}$ δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Λύση

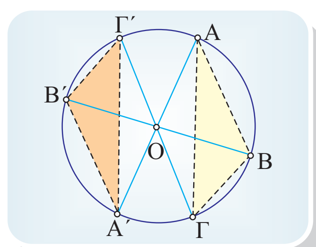


Επειδή $\widehat{B\Delta E} = \widehat{\Gamma E\Delta}$ το τρίγωνο ΣΕΔ είναι ισοσκελές.
Άρα $\Sigma E = \Sigma\Delta$ (1).
Από την υπόθεση έχουμε $\Gamma E = B\Delta$ (2).
Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε: $\Gamma\Sigma = B\Sigma$.
Άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$.
Επίσης τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ είναι ίσα διότι:
- $B\Delta = \Gamma E$,απο την υπόθεση
- $B\Gamma = B\Gamma$,κοινή πλευρά
- $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$.Άρα θα έχουν και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Άσκηση 5

Έστω κύκλος (Ο,ρ) και ΑΑ΄,ΒΒ΄,ΓΓ΄ διάμετροι. Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄είναι ίσα.

Λύση



Είναι

$\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$, $\widehat{BO\Gamma} = \widehat{B'O\Gamma'}$, $\widehat{AO\Gamma} = \widehat{A'O\Gamma'}$ ως κατά κορυφήν γωνίες. Επειδή είναι και επίκεντρες οι αντίστοιχες χορδές είναι ίσες.
Δηλαδή $AB = A'B'$, $B\Gamma = B'\Gamma'$ και $A\Gamma = A'\Gamma'$, που σημαίνει ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.

Άσκηση 6

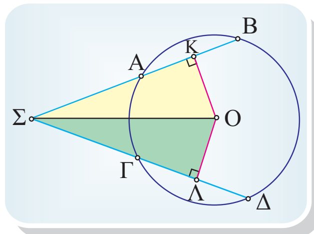
Έστω κύκλος (Ο, ρ) και δύο ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ με αποστήματα ΟΚ και ΟΛ αντίστοιχα.

Αν οι προεκτάσεις των ΒΑ και ΔΓ τέμνονται στο σημείο Σ, δείξτε ότι:
i) τα τρίγωνα ΣΟΚ και ΣΟΛ είναι ίσα.
ii) ΣΑ = ΣΓ και ΣΒ = ΣΔ.

Λύση

i) Τα τρίγωνα ΣΟΚ και ΣΟΛ είναι ορθογώνια και έχουν την ΣΟ κοινή πλευρά και ΟΚ = ΟΛ ,ως αποστήματα ίσων χορδών. Άρα είναι ίσα.

ii. Από το i. ερώτημα έχουμε ΣΚ = ΣΛ.Επειδή οι ΟΚ και ΟΛ διχοτομούν τις ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα και ΑΒ = ΓΔ θα είναι και ΑΚ = ΓΛ.
Οπότε ΣΑ = ΣΚ - ΑΚ = ΣΛ - ΓΛ = ΣΓ και
ΣΒ = ΣΚ + ΚΒ = ΣΛ + ΛΔ = ΣΔ.



Άσκηση 7

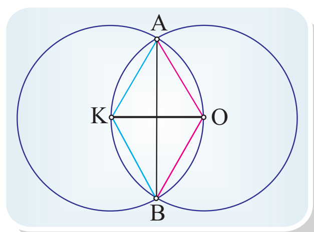
Έστω κύκλος (Ο,ρ) και Κ τυχαίο σημείο του. Αν ο κύκλος (Κ,ρ) τέμνει τον προηγούμενο στα σημεία Α και Β, δείξτε ότι:
i. οι γωνίες ΑΟΒ και ΑΚΒ είναι ίσες και η ΟΚ είναι διχοτόμος τους.
ii. οι ΟΚ και ΑΒ είναι κάθετες.

Λύση

i. Επειδή οι κύκλοι είναι ίσοι και η ΑΒ είναι κοινή χορδή, τα τόξα $\overset{\frown}{AOB}$ και $\overset{\frown}{AKB}$ είναι ίσα άρα και οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες $\widehat{AOB}$ και $\widehat{AKB}$ είναι ίσες.

Επίσης ΟΑ = ΟΒ = ρ οπότε και $\overset{\frown}{OA} = \overset{\frown}{OB}$,συνεπώς $A\hat{K}O = B\hat{K}O$. Άρα η ΚΟ είναι διχοτόμος της $\widehat{AKB}$.

Όμοια αποδεικνύεται ότι είναι διχοτόμος της $\widehat{AOB}$.

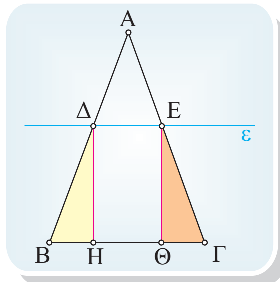


ii. Επειδή το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές (ΚΑ = ΚΒ = ρ) η διχοτόμος της $\widehat{AKB}$ είναι και ύψος του τριγώνου. Άρα $AB \perp KO$.

Άσκηση 8

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε παράλληλη στην βάση ΒΓ , που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Αν Η και Θ είναι οι προβολές των Δ και Ε αντίστοιχα πάνω στην ΒΓ, δείξτε ότι ΒΗ = ΓΘ.

Λύση



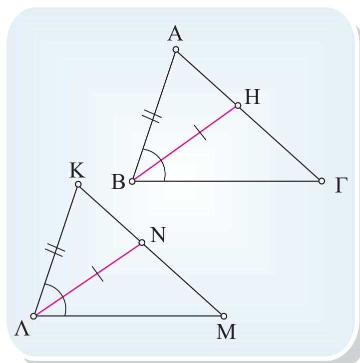
$$\text{Έχουμε}\ \left.\begin{array}{l} \widehat{Η}, \widehat{Θ}\ \text{ορθές} \\ ΔΗ = ΕΘ\ (\text{αποστάσεις μεταξύ παραλλήλων}) \\ \widehat{Β} = \widehat{Γ}\ (\overset{\triangle}{ΑΒΓ}\ \text{ισοσκελές}) \end{array}\right\}$$

Άρα $\overset{\triangle}{ΒΗΔ} = \overset{\triangle}{ΓΘΕ}$.
Συνεπώς είναι και ΒΗ = ΓΘ.

Άσκηση 9
Αν δύο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές αντίστοιχα ίσες , μια απο τις προσκείμενες σε αυτές γωνία ίση και τις αντίστοιχες διχοτόμους της ίσες, δείξτε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

Λύση

Έστω τρίγωνα ΑΒΓ, ΚΛΜ με διχοτόμους ΒΗ και ΛΝ και ΑΒ = ΚΛ, ΒΗ = ΛΝ και $\widehat{Β} = \widehat{Λ}$.
Τότε



$$\left.\begin{array}{l} ΑΒ = ΚΛ\ \ (\text{απο υπόθεση}) \\ ΒΗ = ΛΝ\ \ (\text{απο υπόθεση}) \\ Α\widehat{Β}Η = \dfrac{\widehat{Β}}{2} = \dfrac{\widehat{Λ}}{2} = Κ\widehat{Λ}Ν \end{array}\right\}$$

Άρα $\overset{\triangle}{ΑΒΗ} = \overset{\triangle}{ΚΛΝ}$ και συνεπώς $\widehat{Α} = \widehat{Κ}$

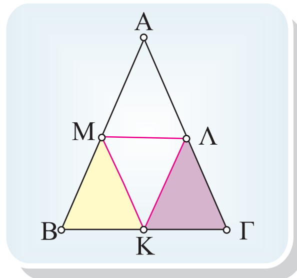
Επίσης

$$\left.\begin{array}{l} ΑΒ = ΚΛ\ (\text{απο υπόθεση}) \\ \widehat{Β} = \widehat{Λ}\ (\text{απο υπόθεση}) \\ \widehat{Α} = \widehat{Κ}\ (\text{απο την}\,(1)) \end{array}\right\}\ \text{Άρα}\ \overset{\triangle}{ΑΒΓ} = \overset{\triangle}{ΚΛΜ}$$

Άσκηση 10
Να δείξετε ότι αν ενώσουμε τα μέσα των πλευρών ενός ισοσκελούς τριγώνου, σχηματίζεται ισοσκελές τρίγωνο.

Λύση

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Κ, Λ, Μ τα μέσα των ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Τότε



$$\left.\begin{array}{l} BM=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{A\Gamma}{2}=\Lambda\Gamma \\ \hat{B}=\hat{\Gamma}\ \ (A\overset{\triangle}{B}\Gamma \text{ ισοσκελές}) \\ \quad BK=\Gamma K\ \ (K \text{ μέσο}) \end{array}\right\}$$

Άρα $B\overset{\triangle}{M}K=\Gamma\overset{\triangle}{\Lambda}K$ και συνεπώς $K\Lambda=KM$

Άρα το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές.

Άσκηση 11

Δίνεται γωνία $\chi\hat{O}\psi$ και τυχαίο σημείο Σ της διχοτόμου Οδ. Πάνω στην Οχ παίρνουμε τμήματα ΟΑ, ΟΒ και στην Οψ παίρνουμε
ΟΓ = ΟΑ και ΟΔ = ΟΒ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΣΑΒ και ΣΓΔ είναι ίσα.

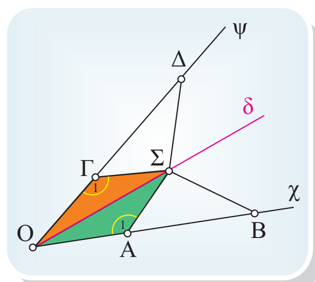
Λύση

$$\text{Έχουμε}\quad \left.\begin{array}{l} O\Gamma=OA \ (\text{απο υπόθ.}) \\ \Gamma\hat{O}\Sigma=A\hat{O}\Sigma \ (O\delta \text{ διχοτ.}) \\ O\Sigma \text{ κοινή πλευρά} \end{array}\right\} \text{Άρα } \Gamma\overset{\triangle}{O}\Sigma=A\overset{\triangle}{O}\Sigma \text{ και συνεπώς } \Sigma\Gamma=\Sigma A \quad (1)$$

και $\hat{\Gamma}_1=\hat{A}_1$.

$$\text{Είναι}\ \left.\begin{array}{l} O\Delta=OB \\ O\Gamma=OA \end{array}\right\} \text{ τότε } O\Delta-O\Gamma=OB-OA \Leftrightarrow \Gamma\Delta=AB \quad (2).$$

Επίσης $\widehat{\Delta\Gamma\Sigma}=\widehat{\Sigma AB}$ (3) ως παραπληρώματα ίσων γωνιών. Απο τις (1),(2) και (3) προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΓΔΣ και ΑΒΣ είναι ίσα.

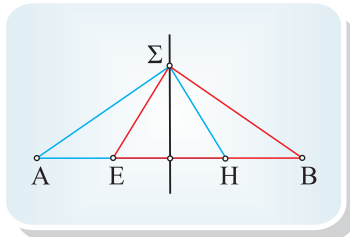


Άσκηση 12

Έστω Σ τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Η κάθετος προς τη ΣΑ από το Σ τέμνει την ΑΒ στο Η και η κάθετος προς τη ΣΒ από το Σ τέμνει την ΑΒ στο Ε. Δείξτε ότι το Σ βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΗΕ.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι ΣΕ = ΣΗ.Επειδή το Σ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ , ισχύει ΣΑ = ΣΒ και συνεπώς $\hat{A} = \hat{B}$. Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΣΗ και ΒΣΕ είναι ίσα. Οπότε θα είναι και ΣΕ = ΣΗ ,που σημαίνει ότι το Σ βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΗΕ.



Άσκηση 13

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ (ΑΒ = ΑΓ). Εκατέρωθεν της ΒΓ φέρουμε στα άκρα της Β και Γ ημιευθείες κάθετες σ'αυτήν, επί των οποίων παίρνουμε τα ίσα τμήματα ΒΔ και ΓΕ. Αφού δείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ και ΔΕ τέμνονται, έστω σε σημείο Μ, στη συνέχεια να δείξετε ότι $\mathrm{AM} \perp \mathrm{B\Gamma}$.

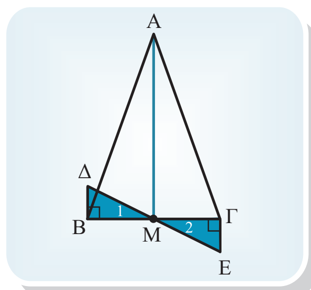
Λύση

Εφόσον τα Δ, Ε βρίσκονται εκατέρωθεν του ΒΓ και τα Β, Γ εκατέρωθεν του ΔΕ, τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ και ΔΕ τέμνονται σε εσωτερικό τους

σημείο Μ. Τα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{M}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Delta$ και $\mathrm{M}\overset{\Delta}{\Gamma}\mathrm{E}$ έχουν:
ΒΔ = ΓΕ (υπόθεση).

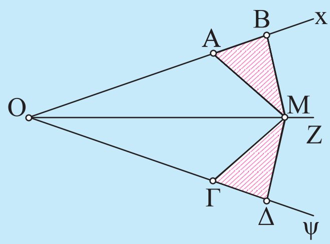
$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (ως κατακορυφήν γωνίες).

Άρα $\mathrm{M}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Delta = \mathrm{M}\overset{\Delta}{\Gamma}\mathrm{E}$, οπότε ΜΒ = ΜΓ. Δηλαδή το Μ είναι μέσο του ΒΓ. Συνεπώς στο ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Gamma$ η ΑΜ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην βάση του ΒΓ, άρα θα είναι και ύψος, δηλαδή $\mathrm{AM} \perp \mathrm{B\Gamma}$.

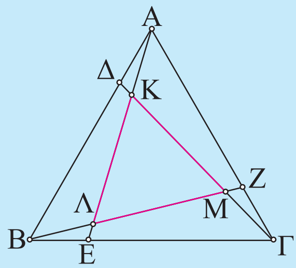


Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

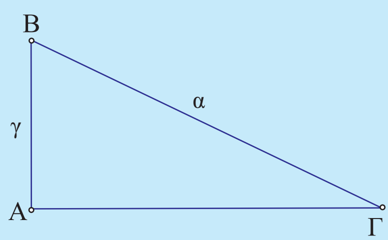
1. Δίνεται γωνία xOψ και ένα σημείο Μ της διχοτόμου ΟΖ. Στην Οx παίρνουμε τα τμήματα ΟΑ και ΟΒ και στην Οψ τα τμήματα ΟΓ και ΟΔ, έτσι ώστε ΟΓ = ΟΑ και ΟΔ = ΟΒ. Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΓΔ είναι ίσα.



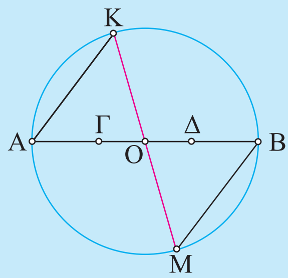
2. Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ αντίστοιχα στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο, όπου Κ, Λ, Μ τα σημεία τομής των ΑΕ, ΓΔ, ΒΖ.



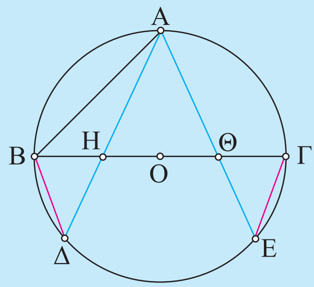
3. Μεταξύ των στοιχείων τριγώνου ΑΒΓ αληθεύουν συγχρόνως οι σχέσεις $α = 2γ$ και $\hat{B} = 2\hat{Γ}$. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.



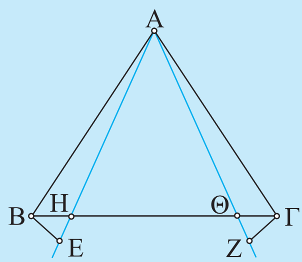
4. Έστω κύκλος διαμέτρου ΑΒ και Γ,Δ σημεία της που ισαπέχουν από το κέντρο Ο. Αν ΚΜ είναι διάμετρος, δείξτε ότι ΑΚ//ΒΜ.



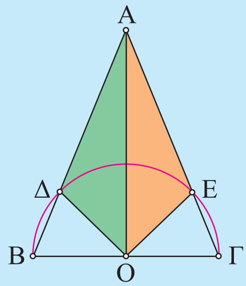
5. Έστω κύκλος (Ο,ρ) διαμέτρου ΒΓ και Α σημείο του κύκλου τέτοιο ώστε $A\hat{B}\Gamma = 45^o$. Αν Η και Θ είναι σημεία της ΒΓ τέτοια ώστε ΟΗ = ΟΘ και οι ΑΗ και ΑΘ τέμνουν τον κύκλο στα Δ και Ε αντίστοιχα, να δείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ.



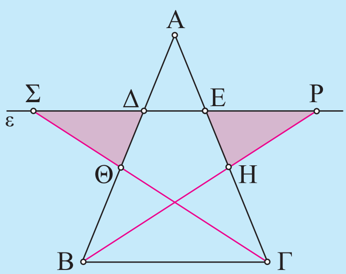
6. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και Η, Θ σημεία της βάσης ΒΓ τέτοια ώστε ΒΗ = ΓΘ. Αν Ε και Ζ είναι οι προβολές των Β και Γ πάνω στις ΑΗ και ΑΘ αντίστοιχα, δείξτε ότι οι γωνίες $H\hat{B}E$ και $\Theta\hat{\Gamma}Z$ είναι ίσες.



7. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. Με διάμετρο τη βάση ΒΓ φέρνουμε ημικύκλιο που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΟ και ΑΔΟ είναι ίσα.

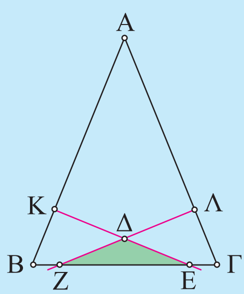


8. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε παράλληλη στην βάση ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Αν οι διχοτόμοι ΒΗ και ΓΘ τέμνουν την ευθεία ε στα Ρ και Σ αντίστοιχα, δείξτε ότι τα τρίγωνα ΣΔΘ και ΕΡΗ είναι ίσα.

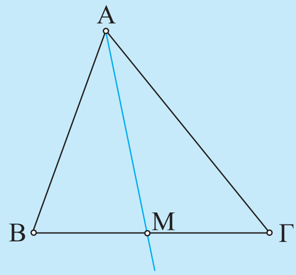


9. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ κάθετες στις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Κ και Λ που τέμνουν τη ΒΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Αν ΑΚ = ΑΛ και οι $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται μεταξύ τους στο Δ να δείξετε ότι

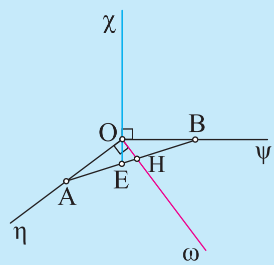
α. ΖΒ = ΓΕ **β.** Το τρίγωνο ΔΕΖ ισοσκελές.



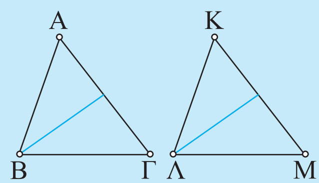
10. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΜ διάμεσος. Να δείξετε ότι οι άλλες δυο κορυφές ισαπέχουν από τη διάμεσο ΑΜ.



11. Έστω οι ορθές γωνίες χΟψ και ηΟω με κοινή κορυφή Ο και τα σημεία Α και Β στις ημιευθείες Οη και Οψ αντίστοιχα έτσι ώστε ΟΑ = ΟΒ. Αν η ευθεία ΑΒ τέμνει τις Οχ και Οω στα Ε και Η αντίστοιχα δείξτε ότι ΟΗ = ΟΕ.

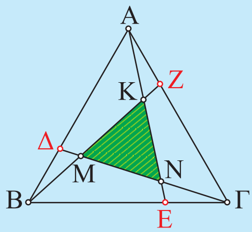


12. Να δείξετε ότι αν δύο τρίγωνα έχουν δύο ομόλογες πλευρές ίσες μία προς μία και τις διαμέσους μίας εκ των δύο πλευρών ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



13. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ παίρνουμε σημεία Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΒΔ = ΓΕ = ΑΖ. Αν τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΖ, ΓΔ και ΑΕ τέμνονται ανα δύο στα Μ,Ν και Κ αντίστοιχα, δείξτε ότι:

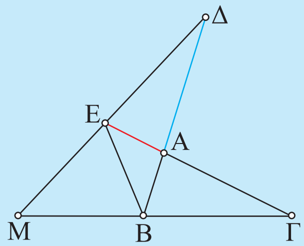
ι. ΑΕ = ΓΔ = ΒΖ **ιι.** το τρίγωνο ΜΝΚ είναι επίσης ισόπλευρο.



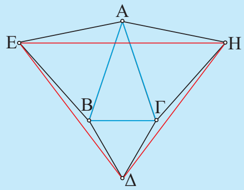
14. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Προεκτείνουμε τις ΑΒ και ΑΓ προς το Α και παίρνουμε ΑΔ = ΑΓ και ΑΕ = ΑΒ αντίστοιχα. Αν η ΔΕ τέμνει την ΒΓ στο Μ, να δείξετε ότι:

i. $A\hat{E}B = A\hat{B}E$, $A\hat{E}\Delta = A\hat{B}\Gamma$ και το τρίγωνο ΜΒΕ είναι ισοσκελές.

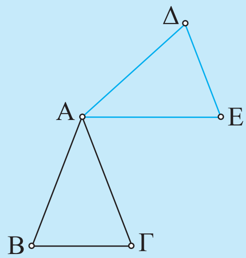
ii. Η διχοτόμος της γωνίας ΕΜΒ διέρχεται από το σημείο Α.



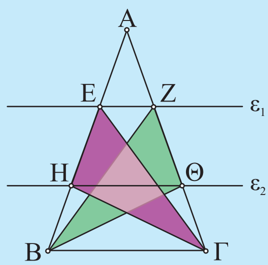
15. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και εξωτερικά από αυτό τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΔ και ΑΓΗ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΗ είναι ισοσκελές.



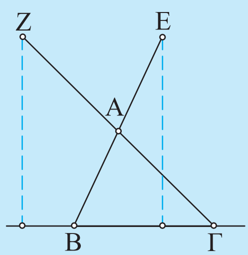
16. Έστω τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ με κοινή κορυφή την Α και $B\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}E$.Να δείξετε ότι ΒΕ = ΓΔ.



17. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ παράλληλες στη βάση του που τεμνουν την ΑΒ στα Ε και Η και την ΑΓ στα Ζ και Θ αντίστοιχα. Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΒΖΘ και ΓΕΗ είναι ίσα.



18. Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ κατά τμήματα ΑΕ = ΑΒ και ΑΖ = ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα σημεία Ε και Ζ ισαπέχουν από τη ΒΓ.



19. Αποδείξτε ότι αν ένα τρίγωνο έχει δύο ύψη ίσα μεταξύ τους τότε είναι ισοσκελές και αντίστροφα.

Ε ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Στις πλευρές Οχ και Οψ μιας γωνίας παίρνουμε αντίστοιχα ίσα τμήματα ΟΑ = ΟΒ. Στο

εσωτερικό της γωνίας φέρνουμε ημιευθείες Οζ και Οη τέτοιες ώστε $\chi\widehat{O}\zeta = \psi\widehat{O}\eta$ και $\chi\widehat{O}\zeta < \dfrac{\chi\widehat{O}\psi}{2}$. Στις πλευρές Οζ και Οη παίρνουμε αντίστοιχα ίσα τμήματα ΟΜ = ΟΝ. Αν οι ΑΝ και ΒΜ τέμνονται στο Σ να δείξετε ότι:

ι. Τα τρίγωνα ΣΑΜ και ΣΒΝ είναι ίσα.

ιι. Η διχοτόμος της $\chi\widehat{O}\psi$ διέρχεται από το Σ.