Ασκήσεις Άλγεβρας Α Λυκείου [1]

Λυγάτσικας Ζήνων
Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Βαρβακείου Σχολής

30 Μαρτίου 2013

[1] $\LaTeX$

Πρόλογος

Το εγχειρίδιο αυτό έχει γραφεί για τους μαθητές της Α Λυκείου του Προτύπου Πειραματικού Λυκείου της Βαρβακείου Σχολής. Βασική προϋπόθεση παραμένει η καλή γνώση των μεθοδολογιών και ασκήσεων του σχολικού βιβλίου. Οι ασκήσεις που περιέχονται εδώ είναι επι πλέον βοηθήματα και δεξιότητες.

Λυγάτσικας Ζήνων
Μαθηματικός
Καθηγητής του Προτύπου Πειραματικού Λυκείου της Βαρβακείου Σχολής
Αθήνα, Αύγουστος, 2012

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Τι είναι η απαγωγή σε άτοπο;

Πρόκειται για μια μέθοδο αποδοχής της αλήθειας μιας πρότασης παρά για μια απόδειξη της πρότασης της ίδιας! Για τον λόγο αυτό, μέχρι το 2002[1] η αρχή της ατόπου απαγωγής δεν θεωρήθηκε ισχυρή μαθηματική μέθοδος απόδειξης απο έναν στενό κύκλο μαθηματικών. Για να πούμε την αλήθεια δεν κρύβουμε τη συμπάθειά μας προς τον στενό αυτό κύκλο.

Grosso modo η μέθοδος βασίζεται σε μια αρχή η οποία ισχυρίζεται ότι δεν μπορεί ταυτόχρονα να είναι αληθής η πρόταση P καθώς και η άρνησή της $\neg P$.

Ας πάρουμε όμως τα πράγματα απο την αρχή, δηλαδή απο την μεριά της Λογικής Θεωρίας. Για να συνεννοηθούμε, μια πρόταση θα είναι για εμάς είτε μια αλγεβρική παράσταση (συντακτικά σωστή) ή μια απλή μη τυπική μαθηματική πρόταση (συντακτικά σωστή) της γεωμετρίας π.χ. υπάρχει μοναδική κάθετος απο σημείο προς ευθεία. Θεωρείστε λοιπόν μια τέτοια πρόταση P. Η απαγωγή σε άτοπο είναι μια μέθοδος που οδηγούμαστε στην αλήθεια της P μέσα απο το εξής σχήμα:

- **Σκοπός:** Υποθέστε ότι ισχύει η πρόταση Q και θέλουμε να αποδείξουμε ότι η πρόταση P είναι λογική συνέπεια της Q, συμβολικά $Q \Rightarrow P$.

- **Αρχή:** Αντί για να αποδείξουμε ευθέως ότι η αλήθεια της πρότασης P είναι λογική συνέπεια της Q κάνουμε το εξής: αποδεχόμαστε, προσωρινά, την αλήθεια της πρότασης $\neg P$, αν τότε οι προτάσεις Q και η $\neg Q$ είναι λογικές συνέπειες της $\neg P$, η μαθηματική θεωρία μου είναι αντιφατική, πράγμα που δεν είναι αποδεκτό. Αναιρώ λοιπόν την υπόθεση ότι η $\neg P$ είναι αληθής και δέχομαι, μή έχοντας τίποτα καλύτερο, την αλήθεια της P. Συμβολικά αυτό γράφεται:

$$\Big((\neg P \Rightarrow Q) \text{ και } (\neg P \Rightarrow \neg Q)\Big) \Rightarrow P \tag{1.1}$$

Δεν είναι δύσκολο να διακρίνετε εδώ τη διάσημη επιχειρηματολογία της κλασσικής μαθηματικής λογικής που λέει ότι αν μέσα σε μια θεωρία, όπως είναι η γεωμετρία ή η άλγεβρα, απο μια πρόταση μπορούμε να αποδείξουμε ταυτόχρονα μια πρόταση Q καθώς και την άρνησή της $\neg Q$, τότε μπορούμε να αποδείξουμε οτιδήποτε. Απαράδεκτο στα μαθηματικά και όχι μόνο! Πράγματι, είναι το παράδοξο του ψευδόμενου που

[1] Για τους μυημένους, είναι η χρονιά όπου η αρχή του αποκλειομένου τρίτου πήρε μια θέση στον πίνακα των ισομορφισμών Curry-Howard.

ανάδειξε ο βρετανός B. Russell, δες επίσης την μετάφραση της ομιλίας του J.Y. Girard στο blog μου: http://blogs.sch.gr/zenonlig/.

Ας δούμε για παράδειγμα την εφαρμογή σελίδα 49 του σχολικού βιβλίου η οποία ισχυρίζετε την αλήθεια της εξής συνεπαγωγής:

Αν ο a^2 είναι άρτιος ακέραιος, τότε και ο a είναι άρτιος.

Αν προσπαθήσετε να δώσετε μια ευθεία απόδειξη της συνεπαγωγής αυτής, θα σκοντάψετε πάνω στην διττή συμπεριφορά του ακεραίου a: άλλη συμπεριφορά έχουν τα τετράγωνα των αριθμών 2,4,6,... και άλλη των αριθμών 3,5,7,... Είναι απολύτως λογικό λοιπόν να σκεφθείτε ότι η απόδειξη εξαρτάται άμεσα απο το ότι ο a είναι άρτιος ή περιττός, επιλογή που σχετίζεται με το συμπέρασμα της αρχικής πρότασης. Επίσης, η θεωρία αριθμών ταξινομεί τους ακεραίους ανάλογα με την διαιρετότητα, με το 2 συγκεκριμμένα, σε δύο μεγάλες κατηγορίες τους άρτιους και περιττούς. Ακέραιος που να είναι ταυτόχρονα άρτιος και περιττός δεν υπάρχει! Αυτό μου δίνει ένα μεγάλο avantage και αποφεύγω ταυτόχρονα τον φαύλο κύκλο του ευθύ αποδεικτικού συλλογισμού! Απλά θα χρειασθώ μια στρατηγική, που δεν είναι και τελείως άγνωστη, και δεν είναι τίποτα άλλο παρά αυτό που καλούμε: *η αρχή της απαγωγής σε άτοπο.*

Όμως κάνουμε μαθηματικά, δεν θα αφήσουμε τη θέση μας στη χρήση των λέξεων της καθημερινής γλώσσας. Δεν ψάχνουμε για αληθείς προτάσεις αλλά για **τυπικά**[2] **αληθείς** προτάσεις! Έχει διαφορά...

Η πρόταση P είναι: **Ο a είναι άρτιος ακέραιος**

Η πρόταση $\neg P$ είναι: **Ο a είναι περιττός**.

Η πρόταση Q είναι: **Ο a^2 είναι άρτιος ακέραιος**.

Η πρόταση $\neg Q$ είναι: **Ο a^2 είναι περιττός**

Ας δούμε το σχέδιο της απόδειξης. Υποθέτουμε ότι η $\neg P$ είναι τυπικά αληθής. Προφανώς αφού η πρόταση Q είναι υπόθεση, είναι τυπικά αληθής και έτσι η συνεπαγωγή $(\neg P \Rightarrow Q)$ είναι εκ των προτέρων αληθής.

Σημειώστε ότι αν A είναι ψευδής και B αληθής, τότε ο συλλογισμός $A \Rightarrow B$ είναι αληθής. Έτσι, *Έχω σπίτι στο Λονδίνο άρα είμαι πλούσιος*, είναι αληθής συλλογισμός αν και δεν έχω σπίτι στο Λονδίνο. Ενώ ο συλλογισμός *Η γή είναι στρογγυλή τότε ο Γαλιλαίος είναι πλοίο*, είναι λάθος. Αν ψευδής πρόταση εξάγεται απο αληθή, τότε η συνεπαγωγή είναι λάθος.

Στη σελίδα 49 του σχολικού βιβλίου βλέπουμε ότι και η $(\neg P \Rightarrow \neg Q)$ είναι αληθής, ισχύει δηλαδή:

αν a είναι περιττός, (πρόταση $\neg P$) $\Rightarrow$ ο a^2 είναι περιττός, (πρόταση $\neg Q$)

Έτσι, η αρχική παραδοχή ότι η πρόταση $\neg P$ είναι τυπικά αληθής οδηγεί σε αδιέξοδο, αφού είναι υπεύθυνη για την φαυλότητα της ισχύος της Q και $\neg Q$. Άρα σύμφωνα με την αρχή 1.1, ισχύει η αντίθετή της που δεν είναι άλλη εκτός απο την ίδια την P. ■

[2]Η τυπικότητα είναι κάτι το αυστηρά ορισμένο στα μαθηματικά.

Ας επιχειρήσουμε και δεύτερο παράδειγμα: **Για κάθε πραγματικούς a και b ισχύει: Αν $a^2 + b^2 = 0$ τότε $a = b = 0$.**

Απόδειξη

Ας δούμε το σύνολο των προτάσεων αναλυτικά:

Η πρόταση P είναι: $a = b = 0$

Η πρόταση $\neg P$ είναι: Ένας τουλάχιστον απο τους a και b είναι $\neq 0$

Η πρόταση Q είναι: $a^2 + b^2 = 0$

Η πρόταση $\neg Q$ είναι: $a^2 + b^2 \neq 0$

Ας υποθέσουμε ότι είναι αληθής η $\neg P$. Τότε είναι αληθές ότι:

$$\neg P \Rightarrow Q \tag{1.2}$$

Θα αποδείξουμε ότι και η συνεπαγωγή:

$$\neg P \Rightarrow \neg Q \tag{1.3}$$

είναι αληθής!

Πράγματι:

1. Αν $a = 0$ και $b \neq 0$, τότε $a^2 + b^2 = 0^2 + b^2 = b^2 \neq 0$.
2. Ομοίως αν $a \neq 0$ και $b = 0$.
3. Αν $a, b \neq 0$, τότε $a^2 + b^2 \neq 0^2 + 0^2 = 0$

Άρα, απο τις σχέσεις 1.2 και 1.3 έπεται ότι η αρχική υπόθεση ότι η $\neg P$ είναι αληθής, δεν ευσταθεί διότι τότε όλη η μαθηματική μας θεωρία είναι αντιφατική. Άρα σύμφωνα με την αρχή 1.1 είναι αληθής η P ή ότι $a = b = 0$. ■

Ας πάρουμε και ένα παράδειγμα απο τη Γεωμετρία. Πάρτε το Θεώρημα: *Απο σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος στην ευθεία (σελίδα 43 σχολικού βιβλίου).*

Απόδειξη
Δεν θα επαναλάβουμε εδώ την απόδειξη, αλλά θα κάνουμε το σκελετό του συλλογισμού.

Η πρόταση P είναι: **Υπάρχει μοναδική κάθετος προς ευθεία απο δοθέν σημείο εκτός αυτής.**

Η πρόταση $\neg P$ είναι: **Υπάρχουν δύο τουλάχιστον διαφορετικές ευθείες κάθετες προς ευθεία απο δοθέν σημείο εκτός αυτής.**

Η πρόταση Q είναι: **Όλες οι εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες έχουν τις μη κενές πλευρές αντικείμενες ημιευθείες** (θεώρημα σελ. 19).

Η πρόταση $\neg Q$ είναι: **Υπάρχουν εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες που δεν έχουν τις μη κενές πλευρές αντικείμενες ημιευθείες.**

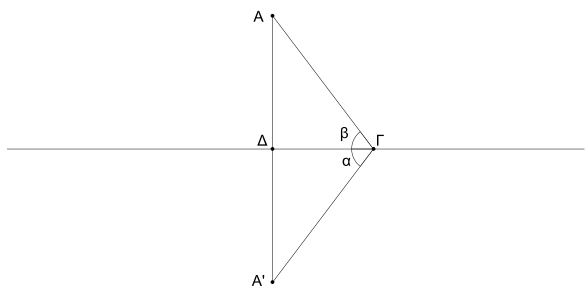
Ας υποθέσουμε ότι είναι αληθής η $\neg P$. Τότε είναι αληθές ότι:

$$\neg P \Rightarrow Q \tag{1.4}$$

Το βιβλίο αποδεικνύει ότι και η συνεπαγωγή:

$$\neg P \Rightarrow \neg Q \tag{1.5}$$

είναι αληθής!



Σχήμα 1.1: Η απόδειξη της σχέσης 1.5 είναι η ακόλουθη. Έστω ότι ισχύει η $\neg P$, δηλαδή υπάρχει και άλλη κάθετος $A\Gamma$ εκτός της AA', όπου A' το συμμετρικό του A. Τότε $\widehat{\alpha}+\widehat{\beta} = 90^o + 90^o = 180^o$ με τα σημεία A, Γ και A' όχι συνευθειακά. Άρα ισχύει η $\neg Q$.

Αφού λοιπόν είναι αληθείς και η 1.4 και η 1.5, συμπεραίνουμε σύμφωνα με την αρχή 1.1, ότι η P είναι αληθής, δηλαδή η μοναδικότητα της καθέτου. ∎

Θα αναρωτηθείτε ίσως αν κάθε φορά που χρησιμοποιείτε την αρχή της απαγωγής σε άτοπο θα πρέπει στήνετε όλο αυτό το ιδιόρυθμο σκηνικό! Άλλωστε δεν υπάρχει και στο βιβλίο! Έχετε απόλυτο δίκαιο. Αυτό που αναλύσαμε δεν είναι η καθημερινότητα αλλά το υπόβαθρο του μηχανισμού. Μπορείτε να το αγνοήσετε, αλλά αν κάνετε λάθος στους συλλογισμούς να ξέρετε ότι θα ακυρωθεί η προσπάθειά σας! Είναι μηχανισμός και θέλει και αυτός τον απαιτούμενο χρόνο εξοικείωσης... Μην ξεχνάτε επίσης ότι οι σπουδές που κάνουμε είναι εγκύκλιες ...

Μία παρατήρηση ακόμα: θα προσέξατε μία διαφορά στη χρήση της απαγωγής σε άτοπο στην άλγεβρα και γεωμετρία. Η πρόταση Q δεν είναι σχηματικά η ίδια στους δύο μαθηματικούς τομείς. Στο γεωμετρικό παράδειγμα η πρόταση δεν βρίσκεται μεταξύ των προτάσεων της υπόθεσης του προβλήματος, αντίθετα στην άλγεβρα είναι η υπόθεση η ίδια. Αυτό συμβαίνει εξ αιτίας της πολυπλοκότητας των γεωμετρικών προτάσεων οι οποίες δεν είναι τυπικές όπως αυτές της άλγεβρας. Για τον λόγο αυτό μάλλον, εκτός μερικών εξαιρέσεων, στη γεωμετρία μένει να ανακαλυφθεί η πρόταση Q.

1.1 Ασκήσεις στην απαγωγή σε άτοπο

Πρίν λύσουμε μερικές ασκήσεις ας δούμε μερικές χρήσιμες ισότητες της λογικής που θα τις χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια.

Έστω δύο προτάσεις P και Q, τότε:

$$\begin{aligned} \neg(P \vee Q) &\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \\ \neg(P \wedge Q) &\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, αν $P \equiv (a = 0)$ και $Q \equiv (b = 0)$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \neg(a = 0 \vee b = 0) &\Leftrightarrow \neg a = 0 \wedge \neg b = 0 &\Leftrightarrow a \neq 0 \text{ και } b \neq 0 \\ \neg(a = 0 \wedge b = 0) &\Leftrightarrow \neg a = 0 \vee \neg b = 0 &\Leftrightarrow a \neq 0 \text{ ή } b \neq 0 \end{aligned}$$

Επίσης, αν $P \equiv (a$ ρητός$)$ και $Q \equiv (b$ άρρητος$)$, τότε:

$$\begin{aligned} \neg\Big((a \text{ ρητός }) \vee (b \text{ άρρητος })\Big) &\Leftrightarrow \neg(a \text{ ρητός }) \wedge \neg(b \text{ άρρητος }) \\ &\Leftrightarrow (a \text{ άρρητος }) \text{ και } (b \text{ ρητός }) \\ \neg\Big((a \text{ ρητός }) \wedge (b \text{ άρρητος })\Big) &\Leftrightarrow \neg(a \text{ ρητός }) \vee \neg(b \text{ άρρητος }) \\ &\Leftrightarrow (a \text{ άρρητος }) \text{ ή } (b \text{ ρητός }) \end{aligned}$$

Παρακάτω, γράψτε τον πίνακα των εμπλεκομένων προτάσεων στην απόδειξη των κατωτέρω συλλογισμών με άτοπο απαγωγή. Οι αποδείξεις των προτάσεων είναι στο σχολικό βιβλίο.

1. Αν $x,\ y \in \mathbb{R}$ και $|x| + |y| = 0$ τότε $x =$ και $y = 0$ (Μπορούμε να γράψουμε εν συντομία $x = y = 0$).
   Η πρόταση P είναι:
   Η πρόταση $\neg P$ είναι:
   Η πρόταση Q είναι:
   Η πρόταση $\neg Q$ είναι:

2. Χρησιμοποιώντας απαγωγή σε άτοπο για την αλήθεια του συλλογισμού: Για ν φυσικός αριθμός ισχύει ότι: $\nu^2 + 4\nu + 5$ περιττός τότε ο $\nu \in \mathbb{N}$ είναι άρτιος, να γράψετε τις προτάσεις που εμπλέκονται όπως κάναμε στα παραδείγματα.
   Η πρόταση P είναι:
   Η πρόταση $\neg P$ είναι:
   Η πρόταση Q είναι:
   Η πρόταση $\neg Q$ είναι:

3. Σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο, να γράψετε τις προτάσεις που εμπλέκονται στην απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο του συλλογισμού: *Αν x, y θετικοί πραγματικοί και ν θετικός ακέραιος, τότε:*

$$\left\{ \begin{array}{c} x < y \\ x > y \\ x = y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^\nu < y^\nu \\ x^\nu > y^\nu \\ x^\nu = y^\nu \end{array} \right\}$$

   Η πρόταση P είναι:
   Η πρόταση $\neg P$ είναι:
   Η πρόταση Q είναι:
   Η πρόταση $\neg Q$ είναι:

4. *Ο αριθμος $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.* Να γράψετετε τις παρακάτω προτάσεις απο την απόδειξη σε απαγωγή σε άτοπο που είναι γραμμλενη στο σχολικό βιβλίο.
   Η πρόταση P είναι:
   Η πρόταση $\neg P$ είναι:
   Η πρόταση Q είναι:
   Η πρόταση $\neg Q$ είναι:

5. Αν α^2 είναι άρτιος τότε και ο α είναι άρτιος.Να γράψετετε τις παρακάτω προτάσεις απο την απόδειξη σε απαγωγή σε άτοπο που είναι γραμμλενη στο σχολικό βιβλίο.
   Η πρόταση P είναι:
   Η πρόταση $\neg P$ είναι:
   Η πρόταση Q είναι:
   Η πρόταση $\neg Q$ είναι:

6. Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μία ορθή γωνία. (Βιβλ. Γεωμετρίας σελ. 53, Πόρισμα).
   Η πρόταση P είναι:
   Η πρόταση $\neg P$ είναι:
   Η πρόταση Q είναι:
   Η πρόταση $\neg Q$ είναι:

7. Απο σημείο εκτός ευθείας άγεται μοναδική κάθετος προς την ευθεία. (Βιβλ. Γεωμετρίας σελ. 43, Θεώρημα).
   Η πρόταση P είναι:
   Η πρόταση $\neg P$ είναι:
   Η πρόταση Q είναι:
   Η πρόταση $\neg Q$ είναι:

8. Αποδείξτε όλους τους παραπάνω συλλογισμούς.

9. Δείξτε με απαγωγή σε άτοπο την αλήθεια της πρότασης: *Για κάθε πραγματικό αριθμό $x \neq -2$ ισχύει ότι* $\dfrac{x+1}{x+2} \neq 1$.

10. Ο φίλος μου ο Πέτρος μου είπε ότι: Το απόγευμα της Δευτέρας ίσως περάσω απο το σπίτι σου. Αν δεν σε βρώ εκεί τότε θα σου αφήσω μήνυμα κάτω απο την πόρτα. Αλλά, το απόγευμα της Δευτέρας αναγκάστηκα να φύγω απο το σπίτι μου. Γυρνώντας το βράδυ στο σπίτι δεν βρήκα τίποτα κάτω απο την πόρτα... Τι έχει συμβεί πραγματικά;

    Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας με απαγωγή σε άτοπο.

11. Δείξτε ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός έτσι ώστε $x^2 = -1$.

12. Δείξτε ότι: σε κάθε τρίγωνο απέναντι απο άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες. Διατυπώστε το αντίστροφο του θεωρήματος αυτού και αποδείξτε το με απαγωγή σε άτοπο (θεώρημα παρ. 3.11 σελ. 54 σχολικό βιβλίο γεωμετρίας).

13. Αν οι αριθμοί e, π, π^2, e^2 και $e\pi$ είναι άρρητοι, αποδείξτε ότι το πολύ ένας απο τους αριθμούς $\pi + e$, $\pi - e$. $\pi^2 - e^2$, $\pi^2 + e^2$ είναι ρητός.

Κεφάλαιο 2

Πιθανότητες

14. Το Παράδοξο του Μεγάλου Δούκα της Τοσκάνης

Ο Γαλιλαίος (1554-1642) είναι γνωστός για το έργο του στην αστρονομία και φυσικά για την εφεύρεση του τηλεσκοπίου. Ωστόσο, το 1620 έγραψε ένα μικρό μνημόνιο που αφορούσε το παιχνίδι των ζαριών σε απάντηση ενός αιτήματος του προστάτη του Δούκα της Τοσκάνης. Ο Γαλιλαίος ήταν τότε Πρώτος Μαθηματικός του Πανεπιστημίου της Πίζας και Πρώτος Φιλόσοφος του Μεγάλου Δούκα και είναι αυτός που μαζύ με τον Καρντάν έγραψε για πρώτη φορά σχετικά με τον λογισμό των πιθανοτήτων. Τα γραπτά τους δημοσιεύθηκαν μετά την περίφημη αλληλογραφία μεταξύ του Πασκάλ και Φερμά, η οποία σηματοδοτεί επίσημα την έναρξη της θεωρίας πιθανοτήτων. Είναι γνωστό ότι ο Μεγάλος Δούκας, έζησε τον XVII αιώνα, είχε αδυναμία στα τυχερά παιχνίδια. Ένα από τα αγαπημένα του παιχνίδια ήταν να αθροίζει τους αριθμούς που έφερναν τρία ζάρια. Ένα ζάρι είναι ένας κύβος με 6 πλευρές. Σε κάθε πλευρά αναγράφεται ένας εκ των αριθμών 1,2,3,4,5,6. Σαν μεγάλος παίκτης που ήταν παρατήρησε ότι το αθροισμα 10 εμφανιζόταν ελαφρώς συχνότερα από ότι το άθροισμα 9. Είπε λοιπόν στο Γαλιλαίο την παρατήρησή του, εκφράζοντας την απορία αφού και στις δύο περιπτώσεις είναι έξι οι δυνατότητες των αριθμών 1,2,3,4,5,6 που φέρνουν άθροισμα 10 ή 9, δηλαδή:

$$
\begin{aligned}
10 &= 6+3+1 \\
&= 6+2+2 \\
&= 5+4+1 \\
&= 5+3+2 \\
&= 4+4+2 \\
&= 4+3+3 \text{ (6 δυνατότητες)} \\
9 &= 6+2+1 \\
&= 5+3+1 \\
&= 5+2+2 \\
&= 4+4+1 \\
&= 4+3+2 \\
&= 3+3+3 \text{ (6 δυνατότητες)}
\end{aligned}
$$

Δεν θα εξηγήσουμε εδώ το γιατί θεωρήθηκε η παρατήρηση αυτή παράδοξο . . . Μπορούμε όμως να κάνουμε το πρώτο βήμα για την προσέγγισή του.

Υποθέστε λοιπόν ότι ρίχνετε τρία ζάρια και σημειώνετε κάθε φορά τις ενδείξεις κάθε πλευράς. Συμβολίζουμε με Ω τον δειγματικό χώρο του πειράματος. Δίδεται το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου N(Ω) = 216. Κατασκευάστε δύο δενδροδιαγράμματα, ένα για το ενδεχόμενο

A: να φέρω άθροισμα ενδείξεων ίσο με 10
και ένα για το ενδεχόμενο
B: να φέρω άθροισμα ενδείξεων 9

(α') Ποιο είναι το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου A και ποιο για το ενδεχόμενο B·

(β') Βρείτε την πιθανότητα P(A) και P(B).

(γ') Μπορείτε να εξηγείσετε γιατί ο Μεγάλος Δούκας είχε κάνει σωστή παρατήρηση·

15. Ρίχνουμε τρείς φορές ένα ζάρι, με έξι αριθμημένες πλευρές 1,2,3,4,5,6, και σημειώνουμε τα αποτελέσματα: a την πρώτη φορά, b την δεύτερη και c την τρίτη. Έτσι έχουμε ένα ενδεχόμενο που το σημειώνουμε με (a, b, c).

    (α') Βρείτε τον αριθμό όλων των πιθανών ενδεχομένων του πειράματος.

    (β') Θέλουμε τώρα απο τις τιμές του (a, b, c) να σχηματίσουμε ένα τρίγωνο (πιθανόν πεπλατυσμένο, το άθροισμα των δύο πλευρών είναι ίσο με την τρίτη πλευρά) με πλευρές a, b και c (το (c, a, b) δίνει άλλο τρίγωνο)

    i. Μεταξύ των παρακάτω αποτελεσμάτων, ποιά δίνουν πραγματικά ένα τρίγωνο:

    Α'. $(3, 5, 3)$
    Β'. $(2, 5, 2)$
    Γ'. $(4, 2, 6)$
    Δ'. $(6, 3, 5)$
    Ε'. $(6, 1, 4)$

    Ας δεχθούμε ότι έχουμε 156 περιπτώσεις που οι τρείς αριθμοί είναι πλευρές τριγώνου.

    ii. Ποιά είναι η πιθανότητα το τρίγωνο να είναι ισόπλευρο;

    iii. Ποιά είναι η πιθανότητα το τρίγωνο να είναι ορθογώνιο;

    iv. Είναι αλήθεια ότι είναι πιθανότερο να πάρετε ένα τρίγωνο ισοσκελές παρά ένα τρίγωνο όχι ισοσκελές; Γιατί.

Κεφάλαιο 3

Πραγματικοί Αριθμοί

3.1 Οι Πράξεις και οι ιδιότητές τους

16. Η πρόταση:

$$(x-1)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \text{ και } x^2+1=0$$

είναι αληθής ή ψευδής για κάθε πραγματικό x; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

17. Τοποθετήστε το σύμβολο $\Rightarrow$ ή $\Leftrightarrow$ στα κενά ώστε να είναι σωστοί οι παρακάτω συλλογισμοί:

(α') $x=y \ldots\ldots x+3=y+3$

(β') $x=y \ldots\ldots x^2=y^2$

(γ') $xy \neq 0 \ldots\ldots x \neq 0$ και $y \neq 0$

18. Η παρακάτω πρόταση ισχύει για κάθε $a,\ b,\ c \in \mathbf{R}$ με $b,\ c \neq 0$;

$$\text{Αν } \frac{a}{b}=\frac{a}{c}, \text{ τότε } b=c.$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

19. Για ποιές τιμές του $x \in \mathbf{R}$ ορίζεται η παράσταση;

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$$

Να γίνει απλό το παραπάνω σύνθετο κλάσμα.

20. Αν $x = \frac{1}{2004}$ και $y = 2004$, να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = -6(x-y)x - 3[x - (x+y)x - x(x+y)] + 3x$$

21. Αν $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ και $y + z = 5$, να βρείτε τους αριθμούς $x,\ y$ και z.

22. Αν $x + y = 3$ να βρεθεί η τιμή της παράστασεις:

$$A = (6x-2y)\Big[-(x+2y)2 + 4(-x-2y) - [x-(x-2y)]\Big].$$

23. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{4}{1-\frac{2}{x+3}} \qquad B = \frac{\frac{1}{2x}-1}{4-\frac{2}{x+1}}.$$

24. Υποθέτω ότι: $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbf{R}^*$ με $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$. Δείξτε ότι: $\frac{c+d}{d} = \frac{ac^2+b^2d}{acd}$.

3.2 Δυνάμεις

25. Ισχύει $(\alpha-\beta)^2 = (-\alpha+\beta)^2$ για κάθε $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

26. Ισχύει $(\alpha-\beta)^3 = (\beta-\alpha)^3$ για κάθε $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

27. Να συμπληρώστε τα κενά ώστε οι παραστάσεις να είναι τέλεια τετράγωνα:

(α') $a^2 - 3a + \dots$

(β') $x^2 + xy + \dots$

(γ') $16a^2 - 24a + \dots$

(δ') $\frac{1}{x^2} + x + \dots$

(ε') $\dots + 6ab + a^2$

(ϝ') $\dots + 5 + x^2$

28. Να δειχθεί ότι η τιμή της παράστασης $A = \dfrac{\left(x^2-10x+25\right)^3(x+5)^3}{(5-x)^3(25-x^2)^3}$, είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής x, $(x \neq 5, -5)$.

29. Να δείξετε ότι: $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 - \left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2 = 4$, $x \neq 0$.

30. (α') Να απλοποιηθεί η παράσταση: $(a+\beta)^2-(a-\beta)^2$.

    (β') Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$\left(\frac{2004}{2005}+\frac{2005}{2004}\right)^2-\left(\frac{2004}{2005}-\frac{2005}{2004}\right)^2.$$

31. Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

    (α') $27x^3-8$

    (β') x^3+1

    (γ') x^4+4

    (δ') $100a^2-4(a-1)^2$

32. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

    (α') $\dfrac{a^3+b^3}{(a-b)^2+ab}$

    (β') $\dfrac{a}{a+1}-\dfrac{a}{1-a}-\dfrac{2a^2}{a^2-1}$

    (γ') $\dfrac{a^3-b^3}{(a+b)^2-ab}$

33. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

    1) $\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\cdot\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ 2) $\dfrac{(x^2-x)+2x-2}{x^2-1}$

    3) $\dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2-x}$ 4) $\dfrac{x(x-2)+1}{(x-2)(x-1)}$

    5) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x}\cdot\dfrac{x^2+2x}{x^2+x-2}$

34. Αν $a^2-b^2-2a-6b-8=0$, δείξτε ότι $b=-a-2$ ή $b=a-4$.

35. Αν $x^2-a^2-2xy+y^2=0$, δείξτε ότι $y=x-a$ ή $y=x+a$.

36. (α') Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις: $A=x^2-10x+25$ και $B=25-x^2$.

    (β') Έστω $\Gamma=\dfrac{(x^2-10x+25)^{2005}(x+5)^{2005}}{(5-x)^{2005}(25-x^2)^{2005}}$

    i. Για ποιές τιμές του x ορίζεται η παράσταση Γ;

    ii. Απλοποιήστε την Γ.

37. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α') $A = \dfrac{(x-2)^2}{(3-y)^2} \div \dfrac{2x-x^2}{9-y^2}$

(β') $B = \left(\dfrac{x^2+xy}{xy^2-y^3}\right)^4 \left(\dfrac{y-x}{x^2+2xy+y^2}\right)^3$

38. Να δειχθεί ότι η τιμή της παρακάτω παράστασης είναι ανεξάρτητη των x και y.

$$\Big[(x^{-3}y^2 - xy^3) \div xy^2\Big] \div \Big(\frac{1-x^4y}{x^4}\Big).$$

39. Να δειχθεί ότι ισχύει: $\left[\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^3+y^3}(x^2-y^2)\right] \div \dfrac{1}{x^2+xy+y^2} = x^3-y^3.$

40. Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις:

$$A = 2x(4x+6)(2x+2) + 6x(2x+3)(3x+3) - 4x(6x+9)(x+1)(x+5)$$
$$\Gamma = 9x^2y^3 - 3x^4y^2 - 6x^3y^3 + 18xy^4$$

41. (α') Να γίνει γινόμενο η παράσταση: $x^3+6x^2+12x+8$.

(β') Να λύσετε την εξίσωση: $x^3+6x^2+12x+8=0$.

42. Να γίνει γινόμενο η παράσταση:

$$(x-y)\Big(x^2+xy+y^2\Big) + (y-x)\Big(x^2-xy+y^2\Big) + xy^2 - yx^2.$$

43. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

(α') $\dfrac{(2x^2+x-6)(x^3-3x^2+2x)}{(x^2+4x-5)(4x^2-6x)}$

(β') $\dfrac{x^3-8}{x^2-4} \div \dfrac{x^2+2x+4}{x^3+8}$

(γ') $\dfrac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}} \div \dfrac{xy}{x-y}.$

44. Αν $\alpha+\beta=1$ και $\alpha^2+\beta^2=1$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A=\alpha^3+\beta^3$.

45. Αν $x+\dfrac{1}{x}=y+\dfrac{1}{y}$, τότε να δείξτε ότι είτε $x=y$ είτε $xy=1$.

46. (α') Να μετατρέψτε σε γινόμενο την παράσταση $\alpha+\beta+1+\alpha\beta$.

(β') Αν $\alpha>1$ και $\alpha\beta+\beta+\alpha=0$, να δείξτε ότι ο αριθμός $\alpha+1$ είναι αριθμός διαφορετικός του 0 και έχει αντίστροφο τον $\beta+1$.

47. Να εκτελεσθούν με σύντομο τρόπο οι πράξεις:

(α') $(x+a)(x^2-ax+a^2)-(x-a)(x^2+ax+a^2)$

(β') $(x+a)(x-a)(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)$

48. Δείξτε ότι x και y πραγματικοί αριθμοί:

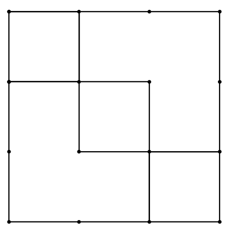
(α') Αν $(x+y)^2 = x^2+y^2$ τότε $x=0$ ή $y=0$. Ισχύει το αντίστροφο;

(β') Αν $(x+y)^3 = x^3+y^3$, τότε $x=0$ ή $y=0$ ή $x+y=0$. Ισχύει το αντίστροφο;

49. Στην άκσηση αυτή, καλό θα είναι να δώσετε στο τέλος μία γενίκευση του ισχυρισμού σας.

(α') i. Δείξτε ότι $1^3+2^3=(1+2)^2 \qquad (E_2)$

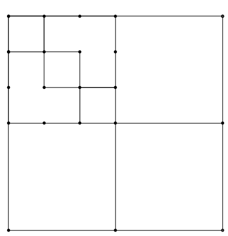
ii. Εξηγείστε βάσει του παρακάτω σχήματος 3.1, την αλήθεια της ισότητας E_2



Σχήμα 3.1: $1^3+2^3=(1+2)^2$

(β') i. Δείξτε ότι $1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2 \qquad (E_3)$

ii. Εξηγείστε βάσει του παρακάτω σχήματος 3.2, την αλήθεια της ισότητας E_3



Σχήμα 3.2: $1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$

(γ') Ποιό σχήμα θα μπορούσε να δικαιολογήσει την αλήθεια των παρακάτω παραστάσεων:

$$1^3+2^3+4^3=(1+2+3+4)^2$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=(1+2+3+4+5)^2$$

50. Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

(α') $(\alpha+\beta)(\alpha^3-\beta^3)-(\alpha-\beta)(\alpha^3+\beta^3)=2\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

(β') $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=\alpha\beta^2+\beta\gamma^2+\gamma\alpha^2+\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+2\alpha\beta\gamma$

(γ') $(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\alpha+\beta-\gamma)^2-(\alpha-\beta+\gamma)^2-(\alpha-\beta-\gamma)^2=8\alpha\beta.$

(δ') $(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)+3\beta\gamma(\beta+\gamma)+3\gamma\alpha(\gamma+\alpha)+6\alpha\beta\gamma$

(ε') $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\Big((\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\Big)$

(ϝ') Αν: $\alpha+\beta+\gamma=0$ τότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$

51. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

(α') $A=\left[\frac{(x-1)^2(x-1)^{-4}}{(x-1)^{-3}}\right]^{-2}$

(β') $B=\frac{7x^3y^{-1}-x^3y^{-1}}{y^3x^5}$

52. Να γίνουν οι πράξεις:

(α') $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}$.

(β') $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2+\dfrac{2x^2}{1+\dfrac{x+y}{x-y}}}$.

53. (α') Δείξτε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό β ισχύει: $\left(\frac{\beta+1}{2}\right)^2-\left(\frac{\beta-1}{2}\right)^2=\beta$.

(β') Αν β είναι ένας περιττός ακέραιος, τότε οι $\beta+1$ και $\beta-1$ είναι άρτιοι και οι $\frac{\beta+1}{2}$, $\frac{\beta-1}{2}$ ακέραιοι αριθμοί.

(γ') Δείξτε ότι κάθε περιττός ακέραιος είναι διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων αριθμών.

54. Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση: $A=\left(1+x-x^2+x^3\right)^2+x^3$.

Υπόδειξη: $\left(1+x-x^2+x^3\right)^2+x^3=\left(1+x-x^2+x^3\right)^2-1+x^3+1$.

55. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $A=2007\cdot2009^3-2008\cdot2006^3$ είναι κύβος ακεραίου αριθμού.

Υπόδειξη: Αν $a=2007$ ο αριθμός A γράφεται $a(a+2)^3-(a+1)(a-1)^3$. Δείξτε ότι: $(2a+1)^3$.

56. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ισχύει: $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, τότε: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\alpha\beta+\gamma\delta\neq1$.

Υπόδειξη: Υποθέστε το αντίθετο, ότι δηλαδή

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\alpha\beta+\gamma\delta=1=\alpha\delta-\beta\gamma$$

Άρα, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\alpha\beta+\gamma\delta=1=\alpha\delta-\beta\gamma$.
Δείξτε ότι η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\delta)^2+(\gamma+\delta)^2+(\beta+\gamma)^2=0$$

η οποία οδηγεί σε άτοπο.

57. (α') Να υπολογίσετε το κλάσμα

$$\frac{\left(8^{n+1}+8^{n}\right)^{2}}{\left(4^{n}-4^{n-1}\right)^{3}} \tag{3.1}$$

για $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

(β') Δείξτε ότι το αποτέλεσμα είναι το ίδιο για όλες τις τιμές του n.

3.3 Διάταξη Πραγματικών

58. Αν $\alpha - \beta > \alpha + \beta$, τότε:

(α') $\alpha > \beta$

(β') $\beta < 0$

(γ') $\alpha < 0$

(δ') $\beta > 0$

(ε') Τίποτα απο τα προηγούμενα.

59. Αν $\alpha \geq 0$ να συγκριθούν οι αριθμοί α και α^2.

60. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί και

(α') $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ δείξτε ότι $\alpha = \beta = 0$.

(β') $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (w-3)^2 = 0$, να βρείτε τους πραγματικούς x, y και w.

61. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί και $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ δείξτε ότι $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.

62. (α') Αν x πραγματικός, να λυθεί η ανίσωση $(x^2+1)(x-1) > 0 \qquad (1)$.

(β') Αν x επαληθεύει την ανίσωση (1), να δείξετε ότι $x^2 > x$.

(γ') Αν $x < y$ θετικοί πραγματικοί οι οποίοι δεν επαληθεύουν την ανίσωση (1), να συγκρίνεται τους αριθμούς $|x-1|y$ και $|1-y|x$.

63. Αν $1 \leq x \leq 2$ και $3 \leq y < 5$, να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

(α') $2x + y$,

(β') $3x - 2y$,

(γ') $\dfrac{2x}{y}$ και

(δ') $2x^2 + y^2$

64. Αν $\alpha + \beta = 4$ να δειχθεί ότι: $\alpha\beta \leq 4$ και $\alpha^2 + \beta^2 \geq 8$.

65. (α') Αν $\alpha > -2$ να δείξτε ότι $4 + 2\alpha > 2 + \alpha$.

(β') Αν $\alpha > -1 > \beta$, να αποδείξτε ότι $1 + \alpha + \beta + \alpha\beta < 0$.

(γ') Αν $\alpha \leq -2$ να αποδείξτε ότι $\dfrac{\alpha^3}{2} + 4 \leq \alpha^2 + 2\alpha$.

(δ') Αν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$ να αποδείξτε ότι: $(\alpha - \beta)\Big(\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{\beta}\Big) \geq 4$.

66. Αν α, β, γ είναι θετικοί πραγματικοί, να δείξετε ότι:

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) \geq 9$$

67. Αν για τους $\alpha,\ \beta$ ισχύουν:

(α') $\alpha > 0$,

(β') $\alpha > \beta$ και

(γ') $\alpha^2 - \beta^2 = -\dfrac{1}{2}$,

να δείξετε ότι $\beta < 0$.

68. Αν $x \in [-2\pi, \pi)$ και $x = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{4}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ να βρείτε τον x.

69. Αν $x, y,\ z > 0$ να δειχθεί ότι:

(α') $\dfrac{x^2 + y^2}{x + y} \geq \dfrac{x + y}{2}$ και

(β') $\dfrac{x^2 + y^2}{x + y} + \dfrac{y^2 + z^2}{y + z} + \dfrac{z^2 + x^2}{z + x} \geq x + y + z$.

70. Να βρείτε τις τιμές των x, y γαι τις οποίες ισχύει:

$$5x^2 + 4x + y^2 - 2xy + 1 = 0.$$

71. Να βρείτε τις κοινές λύσεις, σε μορφή διαστημάτων, των ανισώσεων:

(α') $-2(x + 1) \leq 5$ και $3x + 1 > 2(x - 3)$

(β') $x + 6 > 0$ και $1 - 3x < 0$.

72. (α') Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A = 2x^2 + y^2 - 2x - 4xy + 7$.

(β') Να βρείτε την ελαχίστη τιμή της παράστασης A και στη συνέχεια να προσδιορίσετε τις τιμές των x και y για τις οποίες συμβαίνει το ελάχιστο.

73. Να βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί x που επαληθεύουν τις ανισώσεις

$$1)\ -4(x + 4) \leq 3(x + 1) + 4 \qquad\qquad 2)\ \frac{5(x - 2)}{2} + 3 < \frac{3x + 1}{2}$$

74. Να εξετάσετε το πρόσημο των παρακάτω αλγεβρικών παραστάσεων:

(α') $A = x^2 + y^2 - xy$

(β') $B = x^2 + y^2 + xy$.

75. (α') Δείξτε ότι αν $0 < x < 1$ τότε: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} \geq 4$.

(β') Δείξτε ότι η πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου $A \subset \Omega$, ικανοποιεί την ανισοτική σχέση του πρώτου ερωτήματος.

76. Έστω δειγματικός χώρος Ω με A ένα εκ των ενδεχομένων του. Αν $\alpha < \beta$ τότε:

$$\alpha < \alpha \cdot P(A) + \beta \cdot P(A') < \beta$$

77. Δείξτε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$: $2x(x-y) \geq 2x - (y^2+1)$.

3.3.1 Κάποιες αξιοσημείωτες ανισότητες

78. Για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς α, β ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες:

$$\frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}} \leq \sqrt{\alpha \cdot \beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2} \leq \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}$$

79. (Ανισότητα Andreescu) Για οπουσδήποτε θετικούς αριθμούς x, y και αυθαίρετους αριθμούς α, β ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$\frac{\alpha^2}{x} + \frac{\beta^2}{y} \geq \frac{(\alpha+\beta)^2}{x+y} \tag{3.2}$$

80. Χρησιμοποιώντας την ανίσωση 3.2, σελίδα 11, αποδείξτε ότι:

(α') για οπουσδήποτε θετικούς αριθμούς x, y, z και αυθαίρετους αριθμούς α, β, γ ισχύει:

$$\frac{\alpha^2}{x} + \frac{\beta^2}{y} + \frac{\gamma^2}{z} \geq \frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{x+y+z} \tag{3.3}$$

(β') Δείξτε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς a, b και c ισχύει: $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$

81. Χρησιμοποιώντας την ανίσωση 3.3, σελίδα 11, αποδείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwartz για οποιουσδήποτε αριθμούς $\alpha_{1,2,3}$ και $\beta_{1,2,3}$:

$$\Big(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3\Big)^2 \leq \Big(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2\Big)\Big(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2\Big)$$

82. (α') Δείξτε ότι $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

(β') Αν επι πλέον $x \geq y$ και $y \geq z$, δείξτε ότι $z^2 + xy \geq xz + yz$.

(γ') Δείξτε ότι για κάθε τιμή x, y, z έχουμε:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz \tag{3.4}$$

83. Χρησιμοποιώντας την ανίσωση 3.4, σελίδα 11, δείξτε ότι για τους θετικούς πραγματικούς α, β, γ ισχύει:

(α') $\dfrac{\alpha\beta}{\gamma} + \dfrac{\alpha\gamma}{\beta} + \dfrac{\beta\gamma}{\alpha} \geq \alpha + \beta + \gamma$

(β') $\dfrac{\alpha^2}{\beta^2} + \dfrac{\beta^2}{\gamma^2} + \dfrac{\gamma^2}{\alpha^2} \geq \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\gamma} + \dfrac{\gamma}{\alpha}$

3.3.2 Παρατηρήσεις

Υπάρχουν δύο πράγματα που θα πρέπει να γίνουν κατανοητά στο κεφάλαιο των ανισοτήτων:

(α') οι ανισοτικές σχέσεις μεταξύ των στοιχείων των αριθμοσυνόλων και ειδικότερα του $\mathbb{R}$ (πυκνότητα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Q}_\alpha$) και

(β') οι συνέπειες των ανισωτικών σχέσεων μεταξύ αλγεβρικών παραστάσεων.

Οι πρώτες θα μας οδηγήσουν να κατανοήσουμε την ανάλυση και ειδικότερα την δομή του συνόλου των πραγματικών αριθμών και φυσικά την έννοια του απείρου. Δύο χαρακτηριστικές ασκήσεις είναι:

84. Έστω ότι ισχύει $a < b$ για τους πραγματικούς a και b. Να αποδείξετε ότι $a < \frac{a+b}{2} < b$. Στη συνέχεια να γράψετε δέκα τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $a < x < b$.

85. Δείξτε ότι μεταξύ δύο ρητών πάντα μπορούμε να βρούμε έναν άρρητο[1] ή δείξτε ότι αν $\alpha,\ \beta \in \mathbb{Q}$ με $\alpha < \beta$, ο αριθμός $\frac{\alpha+\beta\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$ και ότι

$$\alpha < \frac{\alpha+\beta\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} < \beta$$

86. Έστω $x = 0.9999999999999999999999999999999999\ldots$. Ποιά απο τα παρακάτω είναι σωστά:

(α') $x = 1$

(β') $x < 1$

(γ') Το x είναι ο μεγαλύτερος θετικός μικρότερος του 1

Φυσικά θα πρέπει να δώσετε μια μαθηματική αιτιολόγιση.

Οι αλγεβρικές ανισώσεις παίζουν σημαντικό ρόλο σε όλους τους μαθηματικούς κλάδους. Αν δεν πεισθείτε απο την πολυμορφία των ασκήσεων που παραθέτουμε, μπορείτε να ανατρέξετε στο: V.M. Tikhomirov: *ΙΣΤΟΡΙΕΣ ΓΙΑ ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ*, εκδόσεις Κάτοπτρο, 1999. Μία μικρή γεύση πήρατε στο κεφάλαιο 3.3.1. Περισσότερες πληροφορίες μπορείτε να αντλήσετε απο θέματα Μαθηματικών διαγωνισμών και ιδίως την βιβλιογραφία που προέρχεται απο χώρες όπως Ρουμανία, Ουγγαρία, Πολωνία και Βουλγαρία.

3.4 Απόλυτη Τιμή

87. Να χαρακτηρίσετε σαν Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

[1] Στην Γ Λυκείου θα αντιμετωπίσετε το Θεώρημα των ενδοιαμέσων τιμών που λύνει και το παρακάτω σημαντικό πρόβλημα: Δείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ είναι σταθερή.

(α') $|-3+2| < |-3| + |2|$.

(β') Αν $\alpha \neq 0$ τότε: $\left|\alpha + \frac{1}{\alpha}\right| > |\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right|$.

(γ') Αν $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ τότε $\alpha\beta > 0$.

(δ') Αν $|\alpha + 5| < |\alpha| + 5$, τότε $\alpha < 0$.

Δικαιολογήστε την απάντησή σας στις περιπτώσεις (β) και (δ).

88. Απο την ισότητα $|x| + |y| = 0$, όπου x και y οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί, προκύπτει ότι:

(α') $x > 0$ και $y > 0$

(β') $|x|$ και $|y|$ είναι αντίθετοι αριθμοί

(γ') $x = 0$ και $y = 0$

(δ') $x > 0$ και $y < 0$

89. Η εξίσωση $|2 - 3x| + |5x - 6| = 0$ έχει:

(α') 1 λύση

(β') 2 λύσεις

(γ') αδύνατη

(δ') έχει λύση για κάθε $x > \frac{6}{5}$.

90. Η ανίσωση $|x| \leq -x$ αληθεύει:

(α') για κάθε x πραγματικό

(β') δεν υπάρχει πραγματικός x έτσι ώστε να είναι αληθής

(γ') για κάθε $x > 0$

(δ') για κάθε $x \leq 0$

(ε') για $x = 0$.

91. Αν $x \leq 0$ και $y \geq 0$ ποιό απο τα παρακάτω είναι σωστό:

(α') $|x| + |y| = x + y$

(β') $|x| + |y| \geq |x + y|$

(γ') $|x| - |y| = -x - y$

(δ') $|y| - |x| = |x - y|$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας στις περιπτώσεις (γ) και (δ).

92. Να συμπληρώσετε τα κενά σε κάθε μία από τις παρακάτω σχέσεις:

(α') $x > 1 \Longrightarrow |x - 1| = \ldots$

(β') $x > 1 \Longrightarrow |2 - 2x| = \ldots$

(γ') Αν $|a| = -a \Longrightarrow a \ldots 0$

(δ') Η εξίσωση $|x| = -1$ είναι $\ldots$

(ε΄) Η ανίσωση $|x| < -5$ είναι ...

(ϛ΄) $|x| > -5 \Longrightarrow \dots$

93. Αν a, b είναι πραγματικοί αριθμοί, η εξίσωση $\Big(|a| + |b| + 100\Big)x = 2004$

(α΄) έχει μοναδική λύση

(β΄) είναι αόριστη

(γ΄) είναι αδύνατη

94. Στη σχέση $|a - b| \leq |a| + |b|$ μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών a και b, το ίσον ισχύει όταν

(α΄) $a,\ b$ ετερόσημοι

(β΄) $a = 0$ ή $b = 0$

(γ΄) $a + b = 0$

(δ΄) $a + b \neq 0$

(ε΄) $a,\ b > 2$

95. (α΄) Δείξτε ότι: για a, b πραγματικοί ισχύει $\Big||a| - |b|\Big| \leq \big|a - b\big|$. Πότε ισχύει το ίσον;

96. (α΄) Αν $x,\ y \neq 0$, να δειχθεί ότι $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} \geq 2$. Πότε ισχύει το ίσον;

(β΄) Να λυθεί η εξίσωση: $\dfrac{(2x-1)^2}{(x+1)^2} + \dfrac{(x+1)^2}{(2x-1)^2} = 2$.

97. Να βρείτε τις τιμές των $x,\ y,\ z$ σε κάθε παράσταση:

(α΄) $|x - 1| + |y + 2| + |z| = 0$,

(β΄) $x^2 - 2x + 1 + |x - y| + z^2 - 4z + 4 = 0$,

(γ΄) $(x+1)^2 - 2|x+1| \cdot |y+1| + y^2 + 2y + 1 + x^2 - 4x + 4 = 0$.

98. Αν $-1 < x < 2$ να δειχθεί ότι $\big|3 - |x - 2|\big| = x + 1$.

99. Αν $|x| \leq 2$ και $|y| \leq 3$ να δειχθεί ότι $|3x - y| \leq 9$.

100. Αν $x \neq 0$, να δειχθεί ότι: $(|x| - x) \cdot \left(\dfrac{x}{|x|} + 1\right) = 0$.

101. Αν $\left|\dfrac{4-x}{1-x}\right| = 2$, τότε $|x| = 2$. Ισχύει το αντίστροφο;

102. (α΄) Να δειχθεί ότι αν $x,\ y \in \mathbb{R}$ τότε: $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$.

(β΄) Να δειχθεί ότι αν $x,\ y \in \mathbb{R}$ με $|x| = |y| = |x + y|$ τότε $|x - y| = \sqrt{3}|x|$.

103. Να δειχθεί ότι:

(α΄) $\dfrac{36 - a^2}{2|a| + 12} = 3 - \dfrac{|a|}{2}$, (β') $\dfrac{2a^2-18}{6+2|a|}=|a|-3.$

104. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $\dfrac{x^2+2|x|}{x^2-4}+2\dfrac{2-|x|}{x^2-4|x|+4}$.

105. Να δειχθεί ότι: $\dfrac{x}{|x|}+\dfrac{y}{|y|}+\dfrac{x}{|z|}\leq 3.$

106. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A=\frac{|\alpha+1|}{|-1-\alpha|}+\frac{|\alpha^2-2|}{|2-\alpha^2|}+\frac{|\alpha^3-\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma|}{|3\alpha\beta\gamma-\gamma^3+\beta^3-\alpha^3|}$$

Υποθέστε ότι τα κλάσματα είναι καλά ορισμένα.

107. Να υπολογισθούν τα $x,\ y\in\ \mathbf{R}$ αν $|x-y|+|y+3|=0.$

108. (α') Να δείξετε ότι: $|x-y|\leq|x|+|y|$ και $|x|-|y|\leq|x-y|$

(β') Αν ισχύει $|x-1|+|x-3|<\alpha$ για κάποιο x πραγματικό, να δείξετε ότι $\alpha>2$.

109. Δίδεται η παράσταση: $S=\dfrac{|x|+|\alpha|}{|x|-|\alpha|}$, όπου $\alpha\in\ \mathbf{R}^*$.

(α') Να υπολογίσετε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η S.

(β') Να λύσετε την εξίσωση $S=2$.

(γ') Δείξτε ότι: $S=\dfrac{x^2+\alpha^2+2|x\alpha|}{x^2-\alpha^2}$.

110. Αν $x,y\in\ \mathbf{R}^*$ και $\left|\dfrac{x|y|+y|x|}{xy}\right|=2$, να δείξετε ότι οι αριθμοί x,y είναι ομόσημοι.

111. Αν $x,y,z,\omega>0$ και $\dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{z}=\dfrac{z}{\omega}$, να δείξετε ότι: $|x-\omega|\geq 3|y-z|$.

112. Αν $x,y\in\ \mathbf{R}^*$ να δείξετε την ισοδυναμία:

$$|2x+3y|<|x+6y|\Longleftrightarrow\left|\frac{x}{y}\right|-\left|\frac{y}{x}\right|<\frac{8}{3}.$$

113. (α') Για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει: $|\alpha|\geq\alpha$ ή $|\alpha|\geq-\alpha$; Δικαιολογήστε.

(β') Να συμπληρώσετε την ισοδυναμία $|x|=|\alpha|\Longleftrightarrow\ldots$

(γ') Για τους μη μηδενικούς πραγματικούς x,y ισχύει $|xy|+xy=0$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K=\dfrac{2x}{|x|}+\dfrac{|y|}{y}$.

(δ') Να βρείτε το x το οποίο ανήκει στο διάστημα $[-1,10]$ και για το οποίο ισχύει: $||x-2|-3|\leq 4$.

3.5 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

114. Είναι σωστή ή λανθασμένη καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $x,\ y \in \mathbb{R}$:

   (α') $\sqrt[3]{x^6 y^{12}} = x^2 y^4$

   (β') $\sqrt[4]{x^{12} y^8} = x^3 y^2$

   (γ') $\sqrt[4]{x^4 y^8} = |x| y^2$

   (δ') $\sqrt[2\nu]{\alpha^{2\nu} \cdot \beta^{2\nu}} = |\alpha| \cdot |\beta|$

   (ε') $\sqrt[2\nu]{\alpha^{2\nu} + \beta^{2\nu}} = |\alpha| + |\beta|$

   (ϛ') $\sqrt[3]{\alpha^3 + \beta^3} < \alpha + \beta$, με $(\alpha, \beta > 0)$.

   (ζ') $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x^4} = x \sqrt[3]{x}$

   (η') Αν $x > 0$ τότε $\sqrt{x^2 \sqrt[3]{x\sqrt{x}}} = x \sqrt[4]{x}$.

115. Γράψτε απλούστερα τις παραστάσεις:

$$\sqrt{8} \cdot \sqrt{72} \cdot \sqrt{144} \qquad \sqrt{7,5} \cdot \sqrt{30} \cdot \sqrt{0,09} \qquad \sqrt{\frac{44}{40}} \cdot \sqrt{\frac{8}{11}}$$

$$\sqrt{5^2 \cdot 7} \qquad \sqrt{3 \cdot 10^8} \qquad \sqrt{5 \cdot 10^3}$$

$$-\sqrt{28} - 2\sqrt{175} + 4\sqrt{0,63} \qquad \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} - \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$$

$$(7\sqrt{2} + 2\sqrt{7}) \cdot (7\sqrt{2} - 2\sqrt{7})$$

116. Απλοποιήστε χωρίς υπολογιστή το $\sqrt{\dfrac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 4^{11}}}$.

117. Λύστε τις εξισώσεις:

$$x^2 = 81, \qquad 1,21 - x^2 = 0, \qquad x^2 + 25 = 0,$$
$$x^3 - 25 \cdot 10^6 = 0, \qquad x^4 = 9 \cdot 10^6, \qquad 0,3x^2 = 0,147$$

118. Να απλοποιήσετε τους παρακάτω αριθμούς με την βοήθεια των ταυτοτήτων:

   (α') $(\sqrt{5} - 2)^2$

   (β') $(3 - 2\sqrt{2})^{50} (3 + 2\sqrt{2})^{50}$

119. Να απλοποιηθεί η παράσταση αν $|x| < 1$:

$$\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} + \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x + 1}$$

120. Η παράσταση $A = \sqrt{x^2 - 8x + 16} - \sqrt{x^2 - 10x + 25}$ να γραφεί χωρίς ριζικά και απόλυτες τιμές.

121. Γράψτε τους παρακάτω αριθμούς χωρίς ριζικά στον παρανομαστή:

$$\frac{2}{1-\sqrt{3}}, \quad \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1-5\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

122. Αν $x>4$ να μετασχηματίσετε την παράσταση A σε ισοδύναμη με ρητό παρανομαστή:

$$A=\frac{(x-4)^2}{x-4\sqrt{x}+4}.$$

123. Να λυθεί η εξίσωση: $2(1-x)-\sqrt{3}(x+1)=0$.

124. (α') Να δειχθεί ότι για $\alpha,\ \beta \geq 0$ ισχύει $\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}\geq 0$.

(β') Να προσδιορίσετε τις τιμές των θετικών αριθμών $\alpha,\ \beta$ για τους οποίους ισχύει: $\beta-2\sqrt{\alpha\beta}+\alpha^2-\alpha+1=0$.

125. Βρείτε ποιά απο τις ακόλουθες παραστάσεις

$$1-x\sqrt{2}, \quad x\sqrt{2}-2, \quad -2x\sqrt{2}+2, \quad -2x+\sqrt{2}, \quad 2-\sqrt{x},$$

έχει τον εξής πίνακα προσήμου:

ξ	$-\infty$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
		$+$	0	$-$	

126. Να υπολογισθεί η παράσταση: $A=\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt[3]{4-\sqrt{7}}$.

127. Να βρείτε τους α, β και γ, γνωρίζοντας ότι:

$$(\alpha-1)^2+|2\alpha-\beta|+\sqrt{\alpha-\beta-\gamma}=0$$

128. Αν $\sqrt{xy}\Big(\sqrt{\frac{1}{xy}}+\sqrt{xy}-\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\Big)=0$ να δειχθεί ότι $x=1$ ή $y=1$.

129. (α') Ποιά συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν οι ακέραιοι n και m έτσι ώστε:

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{m}}=\sqrt{n}-\sqrt{m}\ ?$$

(β') Βρείτε τον πιό μικρό ακέραιο n τέτοιον ώστε:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\geq 100$$

3.6 Ασκήσεις Επανάληψης

130. Να αποδείξετε ότι:

(α') $(x^2+y^2)(z^2+t^2) \geq (xz+yt)^2$

(β') $\sqrt{(x^2+5)(y^2+7)} \geq |xy+\sqrt{35}|$.

131. (α') Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα: $\left(x-\frac{y}{2}\right)^2$ και $\left(y\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

(β') Αν $x^2-xy+\frac{9y^2}{4}-2y+\frac{1}{2}=0$, να αποδείξετε ότι $x=\frac{1}{4}$ και $y=\frac{1}{2}$.

132. (α') Να αποδειχθεί ότι: $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$

(β') Αν για τους θετικούς a και b ισχύει: $a+b=3$, να αποδειχθεί ότι:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{169}{18}$$

133. Σ' ένα δεδομένο κύκλο (O,r) να εγγραφεί ορθογώνιο μεγίστου εμβαδού.

134. (α') Να αποδειχθεί η ταυτότητα

$$\begin{aligned}&(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2 = \\ &= (\beta x-\alpha y)^2+(\gamma y-\beta x)^2+(\gamma x-\alpha z)^2\end{aligned}$$

(β') Δείξτε ότι οι διχοτόμοι τριγώνου $AB\Gamma$ διέρχονται απο ένα σημείο I (το οποίο ονομάζεται έγκεντρο).

(γ') Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο P στο εσωτερικό του. Αν x, y, z οι αποστάσεις του P απο τις πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$, και $x+y+z=\delta$, όπου δ γνωστό μήκος, να βρεθεί η θέση του σημείου P ώστε το άθροισμα $x^2+y^2+z^2$ να είναι το ελάχιστο δυνατό.

135. Για ποιές τιμές του πραγματικού αριθμού x η παράσταση:

$$A=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x+1}}$$

είναι ανεξάρτητη του x.

136. Να λυθεί η εξίσωση: $3x^2+3y^2+3z^2=2xy+2xz+2yz$.

137. Αν α,β,γ πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδειχθεί ότι:

(α') $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3<\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\gamma+\alpha)$.

(β') $\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\beta+\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\gamma+\beta}<4$.

(γ') $\left|\alpha^2+\beta^2-\gamma^2\right|<2\alpha\beta$.

138. Αν $\kappa \in \mathbb{Q}$ και $0 < \kappa < 1$, να δειχθεί ότι ο αριθμός

$$\alpha = \sqrt{\frac{9}{\kappa + 1 - 2\sqrt{\kappa}}} + \sqrt{\frac{9}{\kappa + 1 + 2\sqrt{\kappa}}}$$

είναι ρητός.

139. Αν $\sqrt[\nu]{|\alpha|^\nu + \beta - 1} \geq |\alpha| \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$ και $\alpha \in \mathbb{Z}^*$, $\beta \in (1, +\infty)$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, να δείξετε ότι: ή $\alpha^{2013} = 1$ ή $\alpha^{2013} = -1$.

140. (*Διαγωνισμός Θαλής Μαθ. Ετ. 1998/9, Α΄ Λυκείου*): Έστω ότι για θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει:

$$\alpha\beta\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \gamma\right) + \beta\gamma\left(\frac{\beta + \gamma}{2} - \alpha\right) + \gamma\alpha\left(\frac{\gamma + \alpha}{2} - \beta\right) = 0$$

141. (*Διαγωνισμός Θαλής Μαθ. Ετ. 2001/2, Α΄ Λυκείου*): Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει ότι: $xyz = 1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{1}{y + 1 - \dfrac{y}{x + 1}} + \frac{1}{z + 1 - \dfrac{z}{y + 1}} + \frac{1}{x + 1 - \dfrac{x}{z + 1}}$$

142. (*Διαγωνισμός Θαλής Μαθ. Ετ. 2003/4, Α΄ Λυκείου*): Να βρεθούν οι ακέραιοι α, β για τους οποίους ισχύει η ισότητα:

$$\alpha\beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha = 2\beta^2 + 4\beta + 3$$

Κεφάλαιο 4

Εξισώσεις

4.1 Η Εξίσωση $\alpha \cdot x + \beta = 0$

143. Να λυθεί η εξίσωση: $\dfrac{5x-1}{x^2-1} - \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{3}{x+1}$.

144. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε η εξίσωση $\lambda(\lambda x - 1) = x(4\lambda - 4) - \lambda^2$, να είναι α) αδύνατη και β) ταυτότητα.

145. Να λυθούν οι εξισώσεις:

(α') $(x^2-4)(x-1) = (x^2-1)(x-2)$,

(β') $2 - \dfrac{x^2+7x}{x^2-1} = \dfrac{2x-1}{x+1} + \dfrac{3}{1-x}$

(γ') $x^2(x-4) + 2x(x-4) + (x-4) = 0$

(δ') $x(x^2-1) - x^3 + x^2 = 0$

(ε') $(x+1)^2 + x^2 - 1 = 0$

(ϛ') $x(x-2)^2 + x^2 - 4x + 4 = 0$

(ζ') $(x^2-4)(x+1) = (x^2-1)(x-2)$

(η') $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x}{x^2-4}$

(θ') $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{-x+x^2}$

(ι') $\dfrac{x+1}{x^2-1} + \dfrac{2}{x^2-2x+1} = 0$

146. Αν $9x^2+6x+2+y^2-2y+z^2=0$, μπορείτε να προσδιορίσετε τους πραγματικούς $x,\ y$ και z;

147. (α') Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbf{R}$ έτσι ώστε η εξίσωση $\lambda^2 x - \lambda^2 + 4 = (4\lambda - 4)x$ να είναι ταυτότητα.

(β') Για τις τιμές του λ που βρήκατε στην ερώτηση (α), να λυθεί ως προς y η εξίσωση $(y^2 - \lambda^2) = 2y - 2\lambda - 1$.

148. Για ποιές τιμές των $\lambda,\ \mu \in \mathbf{R}$ η εξίσωση:

$$\lambda^2(x-1) + \lambda^2 + \mu^2 x + 2 = (2\lambda - 1) + 2\lambda + \mu$$

είναι ταυτότητα.

149. Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2 x + 2\lambda + \lambda^2 + 4x = 0$.

(α') Να γραφεί στην γενικευμένη μορφή εξίσωσης 1ου βαθμού.

(β') Να λυθεί για τις διάφορες τιμές του λ.

(γ') Να βρείτε το λ ώστε να έχει λύση το 2.

150. Να λυθεί η εξίσωση: $\dfrac{|x+1| - |1-x|}{x} = \dfrac{x}{2}$.

151. Να λυθεί για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbf{R}$ η εξίσωση:

$$x - \frac{2}{\lambda^3} = \frac{4x+1}{\lambda^2}.$$

152. Αν ο $x = 2$ είναι λύση της εξίσωσης $\alpha x - 3 = 11$ να βρείτε τον α.

153. Να λυθουν οι εξισώσεις:

(α') $1 - \dfrac{|x| - 1}{7} = \dfrac{3|x| - 2}{5} - |x|$

(β') $|x+1| + |1 - x^2| = 0$

154. Να λυθούν οι εξισώσεις:

(α') $|x-2| = 2x - 1$,

(β') $|x-2| = |2x-1|$,

(γ') $(x+2)^2 - |x+2| + \dfrac{1}{4} = 0$,

(δ') $|x|^3 - 3x^2 + 3|x| - 1 = 0$.

155. (α') Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, να δείξετε ότι: $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \Longleftrightarrow \alpha \cdot \beta \geq 0$.

(β') Να λύσετε την εξίσωση: $|7 - 6x| + |x^2 - 2x + 5| = |x^2 - 8x + 12|$.

156. (α') Αν $x, y \in \mathbf{R}$, να δείξετε ότι: $|x| + |y| = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0$.

(β') Να λύσετε την εξίσωση: $2|x+3| = |x^2 - 9| = 0$.

157. Να γίνει γινόμενο η παράσταση $A = 7(3x+2)^2(3-x)^2 + (3x+2)(x-3)^3$ και να λύσετε την εξίσωση $A = 0$.

158. Να λυθεί ως προς x η παράσταση: $\dfrac{3\alpha+1}{\alpha+x} - \dfrac{\alpha-1}{\alpha-x} = \dfrac{2\alpha(a^2-1)}{x^2-\alpha^2}$, $a \in \mathbf{R}$. Για ποιές τιμές του α οι ρίζες της εξίσωσης είναι πρώτοι αριθμοί;

159. Θεωρώ την εξίσωση $\lambda^2(\lambda - x) + \lambda^2\mu = \mu^2(\mu - x) + \lambda\mu^2$, (1) με $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.
   (α') Να λύσετε την εξίσωση.
   (β') Αν $\mu < 0$ και $\mu^2 > \lambda^2$ και x_0 η μοναδική λύση της (1), δείξτε ότι: $x_0^3 + (\mu - \lambda)^3 - 8\mu^3 > 0$.

160. Δίνονται οι εξισώσεις:

$$\begin{cases} (x-5)^3 + (8-2x)^3 = -(x-3)^3 & (1) \\ (\lambda^2 - 25)x = \lambda - 6 + (-\rho + 4)^{100000} & (2) \\ (\lambda - 5)^2 - \lambda x = 5x + 3 & (3) \end{cases}$$

Δείξτε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου. Αν ρ είναι το μήκος της υποτείνουσας του προηγουμένου όρθογωνίου τριγώνου δείξτε ότι για την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση (2) είναι αόριστη, η εξίσωση (3) είναι αδύνατη.

161. Να βρείτε τη τιμή του $\lambda \in \mathbf{R}$ για την οποία η εξίσωση $\lambda\sqrt[3]{|x|\sqrt{|x|}} = \sqrt{|x|}$ με άγνωστο το x, είναι αόριστη.

162. (*Διαγωνισμός Θαλής Μαθ. Ετ. 2006/7, Α΄ Λυκείου*): Να λυθεί η εξίσωση:

$$\lambda(\lambda x + 3) = \lambda^3 + 2\lambda x - 2$$

για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ.

4.2 Η Εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

163. Να γίνουν οι ερωτήσεις κατανόησης στη σελίδα 96 και 97 του σχολικού.

164. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως Σ ή Λ.
   (α') Ισχύει: $2x^2 - 3x + 1 = 0 \Longleftrightarrow -2x^2 + 3x - 1 = 0$.
   (β') Έστω $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$. Όταν τα α, β και γ αντικατασταθούν απο τα αντίθετά τους η τιμή της διακρίνουσας αλλάζει.
   (γ') Η εξίσωση $\left(x - \sqrt{\sqrt{2}}\right)^2 = 0$ έχει διπλή ρίζα.
   (δ') Η εξίσωση $\alpha x^2 + \gamma = 0$ έχει διακρίνουσα πάντα αρνητική.
   (ε') Η εξίσωση $x^2 = x$ έχει διπλή ρίζα το 0.
   (ϝ') Το κλάσμα $\dfrac{1}{x^2 + x + 1}$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbf{R}$.
   (ζ') Αν $\Delta = 0$ τότε η διπλή ρίζα της $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι η $-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

(η') Αν $\Delta > 0$ και $\gamma = 0$ τότε η $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει ρίζα το 0.

(θ') Αν υπάρχει $\varrho \in \mathbf{R}$ έτσι ώστε $\alpha\varrho^2 + \beta\varrho + \gamma = 0$, τότε η $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει δύο παραγματικές ρίζες.

165. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει ρίζα τη 1.

166. Αν p είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ να αποδειχθεί ότι $|p|^2 \leq |\alpha||p| + |\beta|$.

167. Να λυθούν οι εξισώσεις:

(α') $x^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$.

(β') $\alpha\beta x^2 - (\alpha - \beta)x - 1 = 0,\ \alpha\beta \neq 0$.

(γ') $x^2 - \Delta x + 2\Delta = 0$, όπου Δ η διακρίνουσά της.

168. Δίδεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda^3 - 2013\lambda)x - (|\lambda|^{2013} + |\lambda|^{2012} + |\lambda| + 1) = 0$. Δείξτε ότι για κάθε λ πραγματικό, η εξίσωση έχει δύο ρίζες.

169. Έστω η εξίσωση $x^2 - x(5\alpha - 4) + 6\alpha^2 + 13a - 5 = 0$

(α') Βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης,

(β') να προσδιορισθεί η παράμετρος α έτσι ώστε οι ρίζες να ανήκουν στο διάστημα $(-10, 4]$.

170. (α') Αν x, y ρητοί, $\lambda > 0$ και $\sqrt{\lambda}$ άρρητος τότε να αποδείξετε ότι:
$x + y\sqrt{\lambda} = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ και $y = 0$

(β') Να δειχθεί ότι αν $\alpha, \beta, \gamma, \kappa$ ρητοί αριθμοί, $\lambda > 0$ και $\sqrt{\lambda}$ άρρητος και η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, έχει ρίζα τον αριθμό $\kappa + \sqrt{\lambda}$, τότε η εξίσωση αυτή έχει για ρίζα και τον συζυγή του, $\kappa - \sqrt{\lambda}$.

171. Δείξτε ότι η πραγματική ρίζα ρ της εξίσωσης $x^3 - 5 = 0$, δεν είναι δυνατόν να είναι ρίζα μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού με συντελεστές ρητούς αριθμούς. Μπορείτε με την βοήθεια ενός συστήματος συμβολικού υπολογισμού, το Maple ή το Mathematica, να βρείτε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού με συντελεστές στο $\mathbf{R}$ έτσι ώστε να έχει ρίζα το ρ και της οποίας οι συντελεστές να είναι όλοι διάφοροι του 0.

172. Αν $\alpha\beta \neq 0, 1$ και $|\alpha - \beta| = |\alpha| + |\beta|$, η εξίσωση $\alpha x^2 + \dfrac{|\alpha\beta| - 1}{\alpha\beta - 1}x + \beta = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

173. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ και $a \neq 0$, με την ιδιότητα: $d(\beta^2, \alpha) + \alpha = 0$.

(α') Να αποδείξετε ότι $\alpha < 0$.

(β') Να υπολογίσετε το β.

(γ') Για την τιμή του β που βρήκατε στο δεύτερο ερώτημα, δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 - 2(\alpha + \beta)x + \alpha(\beta + 1) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

174. Αν οι αριθμοί $(x - 1)(4x - 3)$ και $\dfrac{1}{2}(4x - 30)(26x - 6)$ είναι διαδοχικοί ακέραιοι τότε:

(α') να υπολογίσετε το x,

(β') να βρείτε αυτούς τους ακεραίους.

175. Θεωρούμε τις δύο εξισώσεις:

$$x^2 + \alpha x + 2\beta = 0 \quad (1) \qquad \text{και} \qquad x^2 + \gamma x + 2\delta = 0 \quad (2)$$

όπου α, β, γ και δ πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί ανα δύο, για τους οποίους ισχύει: $\dfrac{\alpha\gamma}{4} = \beta + \delta$. Αν Δ_1 και Δ_2 οι διακρίνουσες των (1) και (2) αντίστοιχα, τότε:

(α') να βρείτε το πρόσημο του αθροίσματος $\Delta_1 + \Delta_2$,

(β') να αποδείξετε ότι τουλάχιστον μία από αυτές έχει ρίζες πραγματικές.

176. Δίνονται οι δύο εξισώσεις:

$$x^2 - (2\lambda - 1)x - 3 = 0 \quad (1) \qquad \text{και} \qquad x^2 - (\lambda - 2)x + 3\lambda = 0 \quad (2)$$

με $\lambda \neq 1$. Αν οι δύο εξισώσεις έχουν κοινή ρίζα, να βρείτε:

(α') την κοινή ρίζα,

(β') την τιμή του λ.

177. Ρίχνουμε τρείς φορές ένα ζάρι, με έξι αριθμημένες πλευρές 1,2,3,4,5,6, και σημειώνουμε τα αποτελέσματα: a την πρώτη φορά, b την δεύτερη και c την τρίτη. Έτσι έχουμε ένα ενδεχόμενο που το σημειώνουμε με (a, b, c).

(α') Βρείτε τον αριθμό όλων των πιθανών ενδεχομένων του πειράματος.

(β') Αν έχουμε σε μία ρίψη το ενδεχόμενο (a, b, c), τότε σχηματίζουμε την εξίσωση $p(x) = ax^2 + bx + c = 0$ με άγνωστο τον x.
Για παράδειγμα: αν έχουμε $(2, 5, 6)$ τότε σχηματίζουμε την εξίσωση $p(x) = 2x^2 + 5x + 6 = 0$.

i. Το 0 μπορεί να είναι ρίζα της εξίσωσης $p(x) = 0$;

ii. Δείξτε ότι η εξίσωση $p(x) = ax^2 + bx + c = 0$ δεν δέχεται καμμία πραγματική ρίζα θετική ή μηδέν.

iii. Υπάρχουν a, b, c έτσι ώστε το -1 να είναι ρίζα της $p(x) = ax^2 + bx + c = 0$; Ποιές είναι αυτές οι τιμές των a, b, c;
Ποιά είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου:*A : το* -1 *είναι ρίζα της εξίσωσης*

178. (Μηχανολόγοι ΕΜΠ, 1954) Έστω τριώνυμο $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, όπου $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{Z}$. Αν $p(0)$ και $p(1)$ είναι περιττοί αριθμοί, να δείξετε ότι το $p(x)$ δεν έχει ακέραια ρίζα.

179. Δίδονται δύο πραγματικά τριώνυμα:

$$p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$$

$$q(x) = \alpha' x^2 + \beta' x + \gamma', \alpha' \neq 0$$

(α') Δείξτε ότι για να έχουν τα δύο τριώνυμα αντίστροφες ρίζες πρέπει και αρκεί:

$$\frac{\alpha}{\gamma'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\alpha'}$$

(β') Να προσδιορισθούν οι τιμές των παραγματικών παραμέτρων λ και μ ώστε τα τριώνυμα:

$$p(x) = (\lambda + 2)x^2 - (2\mu + 3)x + 3$$

και

$$q(x) = (\mu - 2)x^2 - 13x + 2\lambda$$

να έχουν ρίζες αντίστροφες.

180. Δίδονται δύο πραγματικά τριώνυμα:

$$p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$$

$$q(x) = \alpha' x^2 + \beta' x + \gamma', \alpha' \neq 0$$

Δείξτε ότι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχουν τα δύο τριώνυμα ρίζες ανάλογες με λόγο $\kappa \neq 0$, είναι:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'\kappa} = \frac{\gamma}{\gamma'\kappa^2}$$

181. (Απαλείφουσα τριωνύμων) Δίδονται δύο πραγματικά τριώνυμα:

$$p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$$

$$q(x) = \alpha' x^2 + \beta' x + \gamma', \alpha' \neq 0$$

Έστω $\rho_1 < \rho_2$ οι δύο πραγματικές ρίζες του $p(x) = 0$. Δείξτε ότι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχιουν τα τριώνυμα $p(x)$ και $q(x)$ μία τουλάχιστον κοινή ρίζα, είναι η αλγεβρική παράσταση:

$$R = \alpha^2 q(\rho_1) q(\rho_2) = (\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)^2 - (\alpha\beta' - \alpha'\beta)(\beta\gamma' - \beta'\gamma) \qquad (4.1)$$

να είναι ίση με 0 και $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$. Η δε κοινή ρίζα είναι ίση με

$$-\frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$$

182. Να προσδιορισθεί η τιμές των $\lambda,\ \mu \in$ **R** ώστε τα τριώνυμα:

$$p(x) = x^2 - (2\lambda + 1)x + 10$$

$$q(x) = x^2 + (\mu - 3)x + 3\lambda + 1$$

να έχουν ρίζες αντίθετες.

183. Να προσδιορισθεί ο πραγματικός λ για να έχουν οι παρακάτω εξισώσεις μία κοινή ρίζα και να υπολογισθεί:

$$p(x) = x^2 + (\lambda - 8)x + 3(\lambda - 4) = 0$$

$$q(x) = x^2 + (2\lambda - 19)x + 2(2\lambda - 3) = 0$$

4.2.1 Άθροισμα και γινόμενο ριζών

184. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως Σ ή Λ.

    (α΄) Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$, με ρίζες ϱ_1 και ϱ_2 είναι ισοδύναμη με την $(x - \varrho_1)(x - \varrho_2) = 0$.

    (β΄) Όταν η μία εκ των δύο ριζών μίας εξίσωσης δευτέρου βαθμού είναι το 2 και το άθροισμα των ριζών $P = 4$ τότε $\Delta = 0$.

    (γ΄) Υπάρχουν δύο πραγματικοί αριθμοί με γινόμενο και άθροισμα 1.

    (δ΄) Αν οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$, είναι ετερόσημες τότε $\alpha\gamma > 0$.

    (ε΄) Η εξίσωση $x^2 - 5x + 2 = 0$ έχει 2 ρίζες αντίθετες.

    (ϝ΄) Αν η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$, $\lambda \in \mathbf{R}^*$, έχει δύο ρίζες άνισες, αυτές είναι αντίστροφες.

    (ζ΄) Αν ϱ_1, ϱ_2 είναι δύο ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, οι $|\varrho_1|$, $|\varrho_2|$ είναι ρίζες της εξίσωσης: $\alpha x^2 + \beta|x| + \gamma = 0$.

185. Να βρεθεί η συνθήκη μεταξύ των α, β, γ, $\alpha \neq 0$, έτσι ώστε οι ρίζες της εξίσωσης: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ να είναι:

    (α΄) αντίθετοι αριθμοί

    (β΄) αντίστροφοι αριθμοί.

186. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί p για τους οποίους η διαφορά των δύο ριζών της εξίσωσης $x^2 - px + p - 9 = 0$, είναι ίση με 6.

187. Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί p και q για τους οποίους η εξίσωση $x^2 + px + q = 0$ έχει ριζες τους p και q.

188. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda^3 - 28)x - 1 = 0$ (1).

    (α΄) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbf{R}$.

    (β΄) Να βρείτε το λ ώστε οι ρίζες της (1) να είναι αντίθετες.

    (γ΄) Ποιές είναι οι δύο αυτές αντίθετες ρίζες;

189. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x + |1 - \lambda| = 0$, (1).

    (α΄) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

    (β΄) Αν x_1, x_2 οι πραγματικές ρίζες της (1) και ισχύει $x_1 = 2x_2$, να βρείτε τις ρίζες x_1 και x_2, καθώς και την αντίστοιχη τιμή του λ.

190. (α΄) Αν δύο θετικοί αριθμοί x και y έχουν σταθερό άθροισμα, $x + y = \alpha$, δείξτε ότι το γινόμενό τους γίνεται μέγιστο όταν $x = y$.

    (β΄) Αν δύο θετικοί αριθμοί x και y έχουν σταθερό γινόμενο, $x \cdot y = \alpha$, δείξτε ότι το άθροισμά τους γίνεται ελάχιστο όταν $x = y$.

191. Αν ρ_1 και ρ_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - \beta x + \gamma = 0$, να υπολογισθεί το άθροισμα: $x_1^3 + x_2^3$ συναρτήσει των συντελεστών της εξίσωσης.
    Υπόδειξη: $x_1^3 + x_2^3 = \beta^3 - 3\beta\gamma$.

192. Αν ρ_1 και ρ_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$, να υπολογίσετε το $|x_1 - x_2|$ συναρτήσει των συντελεστών της εξίσωσης.

     Υπόδειξη : $|x_1 - x_2| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{|\alpha|}$

193. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$, έχει ρίζες ομόσημες όταν είναι:

     $A : P > 0$ και $S < 0$ $\quad B : P > 0$ και $S > 0$ $\quad \Gamma : \Delta > 0$ και $S > 0$

     $\Delta : \Delta \geq 0$ και $P > 0$ $\quad E : \Delta > 0$ και $P > 0$

     Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση και να τη διακαιολογήσετε.

194. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - \Delta x + S = 0$, όπου Δ η διακρίνουσά της και S το άθροισμα των ριζών.

195. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2(\mu + 3)x + \mu^2 + 6\mu - 5$ με ρίζες ρ_1 και ρ_2. Αποδείξτε ότι η διαφορά $\rho_1 - \rho_2$ δεν εξαρτάται απο το μ.

196. Αν ρ_1 και ρ_2 είναι ρίζες της $x^2 + (\alpha + \gamma)x + \alpha\gamma - \beta^2 = 0$ να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης $y^2 - (\rho_1 + \rho_2)y + \rho_1\rho_2 + \beta^2$ χωρίς να χρησιμοποιηθεί ο τύπος που λύνει τη δευτεροβάθμια εξίσωση.

197. Δίδεται η εξίσωση $x^2 - 27x + 180 = 0$. Χωρίς να υπολογισθούν οι ρίζες της, βρείτε μία δευτεροβάθμια εξίσωση της οποίας οι ρίζες είναι οι αντίστροφοι των ριζών της δοθείσας εξίσωσης.

198. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ να σχηματίσετε μία άλλη εξίσωση η οποία να δέχεται ως ρίζες τους αριθμούς κx_1, κx_2 όπου κ ακέραιος αριθμός.

199. Δίδεται η εξίσωση $x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της, να κατασκευασθεί μία δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες τις $2|x_1| + 3|x_2|$ και $2|x_2| + 3|x_1|$.

200. Δίδεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ και $\alpha, \gamma \neq 0$, με ρίζες ρ_1 και ρ_2 έτσι ώστε $|\rho_1| \neq |\rho_2|$. Αν μ ο μεγαλύτερος από τους: $\left|\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right|$, $\left|\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right|$ να αποδειχθεί:

     (α') ότι: $2\left|1 - \dfrac{\beta^2}{2\alpha\gamma}\right| - 1 < \mu < 2\left|1 - \dfrac{\beta^2}{2\alpha\gamma}\right|$,

     (β') $1 < \left|1 - \dfrac{\beta^2}{2\alpha\gamma}\right|$

     (γ') Εξετάστε τις προυποθέσεις έτσι ώστε ο β να είναι μηδέν.

201. Αν μεταξύ των ριζών x_1, x_2 και των ακεραίων συντελεστών α, β, γ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ισχύουν οι σχέσεις $\alpha\gamma < 0$ και $|\alpha| \cdot |x_1 + x_2| + \dfrac{1}{2} > 2\alpha^2 \cdot |x_1 \cdot x_2|$, να αποδειχθεί ότι οι ρίζες είναι άρρητοι αριθμοί.

4.2.2 Αναγωγή σε δευτέρου βαθμού εξίσωση

202. Να λυθούν οι εξισώσεις:

(α') $\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^2 - 3\left(2x+\dfrac{1}{x}\right) - 4 = 0$

(β') $(2x-1)^2 - \left|\dfrac{1}{2} - x\right| - \dfrac{1}{2} = 0.$

(γ') $(x-2)^2 + \sqrt{x^2-4x+4} = 3,$

(δ') $5 \cdot 25^n - 7 \cdot 10^n + 2 \cdot 4^n = 0$ με $n \in \mathbb{N}$,

(ε') $\dfrac{2x-1}{x-2} + \dfrac{x-2}{2x-1} - \dfrac{5}{2} = 0,$

(ϝ') αν $x - \dfrac{1}{x} = y$, δείξτε ότι $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 + 2$. Με την παρατήρηση αυτή λύστε την εξίσωση: $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2x - \dfrac{2}{x} = 5.$

203. Να βρεθούν οι κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου, του οποίου η υποτείνουσα είναι 15 cm και το εμβαδόν του δεν αλλάζει αν η μια κάθετη πλευρά αυξηθεί κατά 2 cm ενώ η άλλη ελαττωθεί κατά 10 cm. Μπορείτε να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη ένα τέτοιο ορθογώνιο τρίγωνο;

204. Δίδονται δύο καμπύλες με εξισώσεις $x^2 + y^2 = 5$ (είναι ένας κύκλος) και $y = \dfrac{1}{x}$ (είναι μια ισοσκελής υπερβολή).

(α') Σχεδιάστε στο Geogebra τις δύο καμπύλες και βρείτε τα κοινά του σημεία.

(β') Να βρεθούν αλγεβρικά τα σημεία τομής των δύο καμπυλών.

205. Αν ξέρουμε ότι το σύστημα $\begin{cases} x^4 + y^4 = \alpha \\ xy = \beta \end{cases}$ έχει τέσσερες ακέραιες λύσεις από τις οποίες η μια είναι η $(1, 2)$, να βρείτε τις άλλες λύσεις χωρίς να λύσετε το σύστημα.

206. Έστω η διτετράγωνος εξίσωση: $(1): \ \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$. Να αποδειχθεί ότι:

(α') η (1) έχει τέσσερες πραγματικές και άνισες ρίζες, όταν $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, $-\dfrac{\beta}{\alpha} > 0$ και $\dfrac{\gamma}{\alpha} > 0$,

(β') η (1) έχει μόνο δύο πραγματικές ρίζες, αν $\dfrac{\gamma}{\alpha} < 0$,

(γ') η (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, $-\dfrac{\beta}{\alpha} < 0$ και $\dfrac{\gamma}{\alpha} > 0$ ή $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$.

207. Να διερευνηθεί το είδος των ριζών της $(\mu-1)x^4 - 4x^2 + \mu + 2 = 0$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού μ.

Υπόδειξη: Δείξτε ότι για $\mu \in (-\infty, -3)$ και $\mu \in (-3, -2)$ η εξίσωση δεν έχει ρίζες, για $\mu \in (-2, 1)$ μόνο δύο πραγματικές, για $\mu \in (1, 2)$ έχει 4 πραγματικές και για $\mu \in (2, \infty)$ καμμία πραγματική ρίζα.

208. Να λυθεί η εξίσωση: $(x^2 - x + 1)^4 - 6x^2(x^2 - x + 1)^2 + 5x^4 = 0$.

209. Να λυθεί η εξίσωση: $\alpha|x|^3 + \beta|x|^2 + \beta|x| + \alpha = 0$.

210. (*Διαγωνισμός Θαλής Μαθ. Ετ. 1998/9, Α΄ Λυκείου*): Να βρεθούν οι πραγματικές λύσεις της εξίσωσης:
$$x^2 + x = \frac{42}{x^2 + x + 1}$$

211. (*Διαγωνισμός Θαλής Μαθ. Ετ. 2007/8, Α΄ Λυκείου*): Να βρεθούν οι ακέραιες θετικές ρίζες της εξίσωσης:
$$x^6 + 2x^3y^2 + 3x^3 + 3y^2 + y^4 - 40 = 0$$

212. Για ποιές τιμές του μ η εξίσωση $\dfrac{x+3}{2} = |x| + \mu(x+1)(3-x)$ έχει τέσσερες διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

213. (*Διαγωνισμός Θαλής Μαθ. Ετ. 2001/2, Α΄ Λυκείου*): Να λυθεί η εξίσωση:
$$3(1 + \alpha^2 + \alpha^4)x = (1 + \alpha + \alpha^2)^2 x + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha - 1$$
ως προς x θεωρώντας το α ως παράμετρο.

214. (CRUX, v37, n4, 2011, M452)

(α΄) Υποθέστε ότι: $x = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha + \ldots}}}$, για $\alpha > 0$. Αποδείξτε ότι $x^2 - \alpha = x$.

(β΄) Να υπολογίστε τον ακέραιο:
$$\frac{\sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \ldots}}}}{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots}}}} - \sqrt{42 + \sqrt{42 + \sqrt{42 + \ldots}}}$$

Υπόδειξη:

(α΄) $x^2 = \alpha + \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha + \ldots}}$.

(β΄) Το $\sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \ldots}}}$ *είναι η θετική ρίζα της* $x^2 - 30 = x$ *ή* $x = -5,\ 6$. *Άρα* $\sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \ldots}}} = 6$, *ομοίως* $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots}}} = 3$ *και* $\sqrt{42 + \sqrt{42 + \sqrt{42 + \ldots}}} = 7$.

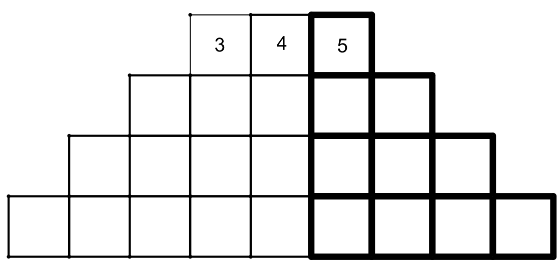
4.3 Διαθεματικά Θέματα

215. Έστω εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$. Είναι γνωστό ότι η *αλγεβρική* διακρίνουσα δίνει την ποιότητα των ριζών της δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Υπάρχει *γεωμετρική* διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης; Ένα γεωμετρικό μέγεθος δηλαδή που θα καθορίζει αν το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει ή όχι κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

216. Θέλουμε να συνεχίσουμε να συμπληρώσουμε τον παρακάτω πίνακα με φυσικούς αριθμούς ακολουθώντας τους δύο παρακάτω κανόνες:

1ος Κανόνας Κάθε γραμμή περιέχει διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς.

2ος Κανόνας Σε κάθε γραμμή το άθροισμα των τετραγώνων των αριθμών που βρίσκονται στην αριστερή περιοχή είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των αριθμών στην δεξιά περιοχή με τα έντονα τετράγωνα, δες σχήμα 4.1. Έτσι για παράδειγμα στην πρώτη γραμμή $3^2 + 4^2 = 5^2$.



Σχήμα 4.1: Άσκηση 216

Τότε:

(α') Δείξτε ότι δεν υπάρχει άλλος τρόπος να συμπληρώσουμε την πρώτη γραμμή.

(β') Συμπληρώστε τις επόμενες γραμμές του πίνακα.

(γ') Δείξτε ότι αν συνεχίσουμε να συμπληρώνουμε τον πίνακα προσθέτοντας κάθε φορά και μία νέα γραμμή στο κάτω μέρος, θα υπάρξει γραμμή που θα περιέχει τον αριθμό 2004. Προσδιορίστε την ακριβή θέση του 2004 στον πίνακα.

Κεφάλαιο 5

Ανισώσεις

5.1 Ανίσωση $1^{ου}$ Βαθμού

217. Να λύσετε τις ανισώσεις $\begin{cases} d(2x,1) & \geq & \frac{1}{2} \\ d(x,5) & \leq & 2 \end{cases}$

218. Να λύσετε τις ανισώσεις:

    (α') $2(|x|-3) \leq 3(|x|-4)$

    (β') $|x-4| \leq 4$

    (γ') $\begin{cases} |x| & = & 2 \\ |x| & > & 1 \end{cases}$

    (δ') $1 < |x| < 4$

    (ε') $-1 \leq |x+3| \leq 0$

    (ϛ') $\Big|2|x|-3\Big| < 2$

    (ζ') $\Big||x-3|-2\Big| < 1$

    (η') $\Big|3|x|-1\Big| < 2$

    (θ') $|x+1| < |x-3| < 4$

    (ι') $|x-2|+|x+3| \leq 4-x$

219. Αν $\alpha < \beta < \gamma < \delta$, να βρεθεί πότε η παράσταση

$$A = |\alpha - x| + |\beta - x| + |\gamma - x| + |\delta - x|$$

διατηρεί σταθερή τιμή.

5.2 Ανίσωση $2^{ου}$ Βαθμού

220. Να λύσετε τις ανισώσεις:

221. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α') $\sqrt{x^2-10x+25}<9$,

(β') $\dfrac{|x-1|-4}{2}+\dfrac{5}{3}<\dfrac{|x-1|}{3}$.

222. (α') Να κάνετε πίνακα προσήμων για την $-x^2+x+2$

(β') Να λύσετε την ανίσωση $|-x^2+x+2|\leq 1-x(x+6)$.

223. Δίδεται το τριώνυμο $p(x)=x^2-3\alpha x+\dfrac{(\beta+\gamma)^2}{9}$. Αν $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ είναι πλευρές τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

224. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbf{R}$ η εξίσωση $x^2-2\lambda x+\lambda-1=0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

225. Δίνεται η εξίσωση $ax^2+3ax+a+5=0$, $a\in\mathbf{R}$. Να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες η εξίσωση:

(α') έχει ρίζες ίσες

(β') έχει ρίζες άνισες

(γ') είναι αδύνατη

226. Να βρείτε για ποιές τιμές του λ ισχύουν τα επόμενα:

(α') Η εξίσωση $3x^2-4\lambda x+\lambda+1=0$ έχει δύο διάφορες λύσεις.
Απάντηση: $\lambda<\frac{3-\sqrt{57}}{8}$ ή $\lambda>\frac{3+\sqrt{57}}{8}$)

(β') $\lambda x^2+4\lambda x+1>0$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$.(Απάντηση: $0<\lambda\leq\frac{1}{4}$)

(γ') Το κλασμα $\dfrac{x}{x^2+x+\lambda}$ ορίζεται για κάθε $x\in\mathbf{R}$. (Απάντηση: $\frac{1}{4}<\lambda$)

(δ') Η παράσταση $\sqrt{2x^2+\lambda x+1}$ ορίζεται για κάθε $x\in\mathbf{R}$. (Απάντηση: $-2\sqrt{2}<\lambda<2\sqrt{2}$.

227. Δίνεται το τριώνυμο: $p_\lambda(x)=\lambda x^2+2(\lambda-1)x+\lambda+1$ με $\lambda\in\mathbf{R}$.

(α') Να βρείτε το πλήθος των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της $p_\lambda(x)$ με τους άξονες για τις διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ.

(β') Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του λ ώστε η εξίσωση $p_\lambda(x)=0$ να έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες $x_1,\ x_2$ με $|x_1+x_2|=-x_1-x_2$.

Απάντηση:

(α') Να διακρίνεται δύο περιπτώσεις $\lambda=0$ και $\lambda\neq 0$.

(β') Απο την $|x_1+x_2|=-x_1-x_2$ και το ότι $|x|=-x$, για $x<0$, συμπεραίνουμε ότι $x_1+x_2<0$.

■

228. Έστω Ω δειγματικός χώρος με ισοπίθανα ενδεχόμενα.

$$\Omega = \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου:

$$A = \{x \in \Omega \ : \ 2x - 1 < x^2 - 4 < 12\}$$

229. Ονομάζουμε ακέραιο μέρος ενός πραγματικού x, συμβολικά $[x]$, το μεγαλύτερο ακέραιο μικρότερο ή ίσο του x. Εύκολα μπορείτε να δείτε ότι ισχύει: $[x] \leq x \leq [x] + 1$. Για παράδειγμα:

$$[2,4] = 2,\ [-2,45] = -3,\ [\sqrt{2}] = 1,\ [67] = 67,\ [-\pi] = -4$$

Έστω $f(x) = x^2 - 46[x] + 13$. Ο στόχος της άσκησης είναι να λυσουμε την εξίσωση $f(x) = 0$.

(α') Βρείτε το ακέραιο μέρος του αριθμού $\sqrt{2057}$ και επαληθεύστε ότι είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(β') i. Δείξτε ότι το 1 δεν είναι λύση της $f(x) = 0$.
ii. Δείξτε ότι αν $x < 1$ η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύση.

Έστω $p(x) = x^2 - 46x + 13$.
i. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $[x] \leq x$, δείξτε ότι για κάθε x, $p(x) \leq f(x)$.
ii. Δείξτε ότι, αν $x \in \mathbf{R}$ και $p(x) > 0$, τότε ο πραγματικός x δεν είναι λύση της $f(x) = 0$.

(γ') Για κάθε x δώστε τον πίνακα μεταβολής προσήμου του $p(x)$. Δείξτε ότι όλες οι λύσεις της $f(x) = 0$ είναι αυστήρα μικρότερες του 46.

(δ') i. Αν $x - 1 < [x]$, για κάθε x, τότε $f(x) < p(x) + 46$.
ii. Δείξτε ότι όλες οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι αυστηρά μεγαλύτερες του 44.

(ε') i. Ποιά είναι τα πιθανά ακέραια μέρη των λύσεων της $f(x) = 0$;
ii. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δέχεται σαν ρίζες την $\sqrt{2057}$ και μια άλλη την οποία και να βρείτε.

230. Για ποιές τιμές του x καθεμία από τις παρακάτω ρίζες:

$$\sqrt{2x^2 - 7x + 3},\ \ \sqrt{x^2 - 4x + 4},\ \ \sqrt{x^2 + 9x + 18},\ \ \sqrt{2x^2 - x + 1}$$

έχει έννοια πραγματικού αριθμού.

231. Το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 5x - 6$ έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 6. Ποιά από τις παρακάτω ανισώσεις είναι σωστή;

Α. $f(0,97777) > 0$ *Β*. $f(0,2008) \geq 0$ Γ. $f(1,97777) < 0$

Δ. $f(2008) \leq 0$ *Ε*. $f(-2008) > 0$

232. Για ποιές τιμές του x ισχύει η διπλή ανισώτητα:

$$-3 < -x^2 + 2x + 3 < 0$$

233. Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης $f(x) = (x+3)^2 - 12x$.

234. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α') $2x^2 \leq 1$

(β') $x^2 \leq 3x + 1$

(γ') $x^2 - 5x + 6 > 0$

(δ') $4x^2 \geq 4x - 1$

(ε') $x^2 \geq 4x - 4$

235. Υπάρχουν τιμές του λ ώστε οι τιμές της συνάρτησης

$$\lambda x^2 - 3x\sqrt{2} + \lambda - 1, \quad \text{με} \qquad \lambda \neq 0$$

να διατηρούν σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$;

236. (α') Κατασκευάστε στο Geogebra το τριώνυμο $f(x) = x^2 + 4x + \lambda + 3$.

(β') Υπάρχουν τιμές της παραμέτρου λ ώστε το τριώνυμο να βρίσκετε πάνω από τον οριζόντιο άξονα;

(γ') Να βρείτε τις τιμές αυτές της παραμέτρου λ.

(δ') Για τις τιμές του λ που βρήκατε παραπάνω, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\lambda f(x) = (x^2+2)(\lambda - 1)$.

237. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $y \neq 0$ η παράσταση $x^2 + xy + y^2$ είναι θετική.

238. Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης

$$p(x) = (1-x)(2+x-x^2)(x^2-x+1)$$

και να λύσετε την ανίσωση: $p(x) \leq 0$.

239. Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης

$$p(x) = x^{2012}(x-2)^{2013}(x^2-16)^{2014}(x^2-x-1)$$

και να λύσετε την ανίσωση $p(x) > 0$.

240. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α') $\dfrac{2x+1}{x-1} > 0$,

(β') $\dfrac{x+1}{2x-1} \geq 1$

241. Αν η εξίσωση $(2\lambda - 1)x^2 - 3x - \lambda + 2 = 0$, έχει δύο ρίζες ετερόσημες να βρείτε το λ.

242. Να λύσετε τα συστήματα ανισώσεων:

$$i. \begin{cases} 1-3x<0 \\ x^2 \geq 2x-4 \end{cases} \qquad ii. \begin{cases} x^2<5 \\ x(1-x) \leq -1 \end{cases}$$

$$iii. \begin{cases} 4-x^2 \leq 0 \\ x^2 \geq x-4 \end{cases} \qquad iv. \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x^2 > 4x \\ -x^2 < -4x+4 \end{cases}$$

243. Να λύσετε την ανίσωση: $\left(\dfrac{x}{x-2}\right)^2 - \dfrac{|x|}{|x-2|} - 1 < 0.$

244. (Μια άσκηση του Μ. Γκούρη από το www.mathematica.gr)
Δίνεται η εξίσωση

$$\Big(|m|-1\Big)x^2 - mx + 1 = 0 \tag{5.1}$$

(α′) Αποδείξτε ότι η εξίσωση (5.1) έχει λύση για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού m.

(β′) Για ποιές τιμές του m η η εξίσωση (5.1) έχει δύο λύσεις x_1, x_2 με $x_1 - x_2 \neq 0$;

(γ′) Έστω $m \neq \pm 1$, και S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (5.1) αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $m \cdot S \geq P + 1$.

(δ′) Για ποιές τιμές του m η εξίσωση (5.1) έχει λύση το 1;

(ε′) Αν $m = 2011^{2012}$, δείξτε ότι η εξίσωση (5.1) θα έχει δύο άνισες λύσεις, από τις οποίες μόνο μια θα είναι ακέραια.

Απάντηση:

(α′) Η εξίσωση μπορεί να είναι πρωτοβάθμια ή δευτεροβάθμια εξίσωση. Άρα, θα διακρίνουμε περιπτώσεις.

i. Αν $|m| \neq 1$ ή $m \neq \pm 1$ έχουμε πάντα $\Delta = (|m|-2)^2 \geq 0$.

ii. Για $m = 1$ δίνει $x = 1$ και για $m = -1$ δίνει $x = -1$.

Άρα, η (5.1) έχει τουλάχιστον 1 ρίζα για κάθε $m \in \mathbb{R}$.

(β′) Οι δύο ρίζες της εξίσωσης (5.1) είναι

$$x_{1,2} = \frac{m \pm (|m|-2)}{2}$$

έτσι, $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow \dfrac{m+|m|-2}{2} \neq \dfrac{m-|m|+2}{2} \Leftrightarrow 2|m| \neq 4 \Leftrightarrow m \neq 2,\ m \neq -2.$

(γ′) Για $m \neq \pm 1$ είναι $S = \dfrac{m}{|m|-1}$ και $P = \dfrac{1}{|m|-1}$. Άρα,

$$\begin{aligned}
mS \geq P+1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{m^2}{|m|-1} \geq \frac{1}{|m|-1}+1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{m^2}{|m|-1} - \frac{1}{|m|-1} - 1 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{|m|^2 - |m| + 1 - 1}{|m|-1} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{|m|(|m|-1)}{|m|-1} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad |m| \geq 0
\end{aligned}$$

Που ισχύει για κάθε m.

(δ') Αν $x_1 = 1$, τότε η (5.1) γίνεται:
$|m| - 1 - m + 1 = 0 \Leftrightarrow |m| = m$ η οποία ισχύει όταν $m \geq 0$.

(ε') Για $m = 20111^{2012}$ προφανώς η διακρίνουσα είναι > 0 και η εξίσωση (5.1) έχει δύο πραγματικές ρίζες. Τότε:

$$x = \frac{2011^{2012} - (|2011^{2012}| - 2)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

■

Κεφάλαιο 6

Πρόοδοι

6.1 Αριθμητική Πρόοδος

245. Να βρείτε το άθροισμα:

    (α') των πρώτων 30 όρων της ακολουθίας $a_n = 5n - 4,\ n \in \mathbb{N}^*$,

    (β') των πρώτων 40 όρων της ακολουθίας, $a_n = -5n - 4,\ n \in \mathbb{N}^*$.

246. Να βρείτε το άθροισμα των ακεραίων από 1 μέχρι 200 που δεν είναι πολλαπλάσια του 4 ή του 9.

247. Να λυθούν οι εξισώσεις:

    (α') $1 + 7 + 13 + \ldots + x = 280$,

    (β') $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \ldots + (x + 28) = 155$

248. Αν σε μια αριθμητική πρόοδο με 2003 όρους ο μεσαίος είναι 1 να βρείτε το S_{2003}.

249. Έστω ότι το άθροισμα των πρώτων n όρων μιας ακολουθίας (a_n) είναι $S_n = 2n^2 - n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

    (α') Να βρείτε τον a_n

    (β') Να δείξετε ότι η ακολουθία (a_n) είναι αριθμητική πρόοδος.

    (γ') Να βρείτε τον a_1 και τη διαφορά ω.

250. Ένα θέατρο έχει 15 σειρές καθισμάτων. Στη πρώτη σειρά έχει 60 θέσεις και στη τελευταία 18 θέσεις. Αν το πλήθος των θέσεων ελαττώνεται από σειρά σε σειρά κατά τον ίδο πάντα αριθμό θέσεων, να βρείτε το πλήθος των θέσεων,

    (α') που ελαττώνεται από σειρά σε σειρά, (β') της μεσαίας σειράς,

(γ') όλων των θέσεων του θεάτρου,

(δ') από τη 5^η σειρά εως και τη 13^η σειρά.

251. Για έναν σταθερό ακέραιο $k \geq 2$, λέμε ότι ο ακέραιος N είναι ένας $k-$αριθμός, αν μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$N = 1 \pm 2 \pm \ldots \pm k \tag{6.1}$$

Για παράδειγμα,

- Αν $k = 2$ οι $2-$αριθμοί είναι ο -1 και 3 αφού: $1 - 2 = -1$ και $1 + 2 = 3$.
- Αν $k = 3$, οι $3-$αριθμοί είναι:

$$\begin{cases} 1 - 2 - 3 = -4 \\ 1 + 2 - 3 = 0 \\ 1 - 2 + 3 = 2 \\ 1 + 2 + 3 = 6 \end{cases}$$

(α') i. Γράψτε σε αύξουσα σειρά όλους τους $4-$αριθμούς.

ii. Ο φυσικός 11 είναι ένας $5-$αριθμός;

(β') i. Ποιός είναι ο μεγαλύτερος $k-$αριθμός και ποιός ο μικρότερος, συναρτήσει του k;

ii. Ποιός είναι ο μικρότερος ακέραιος $k \geq 2$ έτσι ώστε ο 51 να είναι $k-$αριθμός;

(γ') i. Για κάθε $k \geq 2$, δείξτε ότι όλοι οι $k-$αριθμοί είναι είτε άρτιοι είτε περιττοί.

ii. Να βρείτε τους ακεραίους $k \geq 2$ για τους οποίους οι $k-$αριθμοί είναι περιττοί.

(δ') Για $k = 2$ και $k = 3$, μπορείτε εύκολα να επαληθεύσετε ότι η γραφή του $k-$αριθμού N, στη μορφή 6.1 είναι μοναδική.

i. Βρείτε όλες τις τιμές του k που η γραφή 6.1 είναι μοναδική.

ii. Υπάρχει ακέραιος k για τον οποίο ένας $k-$αριθμός N, δέχεται 2011 διαφορετικές γραφές της μορφής 6.1;

252. Ένας τετράγωνος πίνακας με 2012 γραμμές (αριθμημένες από 1 έως 2012) και 2012 στήλες (αριθμημένες από 1 έως 2012), είναι χρωματισμένος σε άσπρο και μαύρο, όπως μια σκακιέρα. Το πρώτο τετράγωνο (1^η γραμμή $-$ 1^η στήλη) έχει χρώμα μαύρο.

Σε κάθε τετράγωνο γράφουμε το γινόμενο του αριθμού της γραμμής επι του αριθμού της στήλης, που βρίσκεται το τετράγωνο. Π.χ. αν το τετράγωνο είναι στην 41-η γραμμή και στην 2 στήλη τότε το τετράγωνο έχει τον αριθμό $41 \times 2 = 82$. Έστω M το άθροισμα των αριθμών των μαύρων τετραγώνων και A το άθροισμα των αριθμών των άσπρων τετραγώνων.

(α') Με M_i σημειώνουμε το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στην $i-$οστή γραμμή και στα μαύρα κουτάκια και με A_i σημειώνουμε το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στην $i-$οστή γραμμή και στα άσπρα κουτάκια.

i. Δείξτε ότι $M_1 - A_1 = -1006$ και $M_2 - A_2 = 2 \cdot 1006$.

ii. Δείξτε κάτι γενικότερο: $M_i - A_i = \lambda \cdot i \cdot 1006$, με $\lambda = 1$ αν ο αριθμός της γραμμής είναι άρτιος και $\lambda = -1$ αν ο αριθμός της γραμμής είναι περιττός.

(β') Δείξτε ότι $M - A = 1006^2$.

6.2 Γεωμετρική Πρόοδος

253. (α') Αν οι $a,\ b,\ g$ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου, να δείξετε ότι $a^2 + b^2 + g^2 = (a + b + g)(a - b + g)$.

(β') Αν οι $a,\ b,\ g$ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου, να δείξετε ότι $(a - g)^2 + (b - g)^2 + (b - d)^2 = (a - d)^2$.

254. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων δέκα όρων της γεωμετρικής προόδου, στην οποία είναι $a_2 + a_6 = 34$ και $a_3 + a_7 = 68$.

255. Η ένταση του φωτός μειώνεται κατά 10% όταν διέρχεται από ένα φίλτρο. Αν I_n είναι η ένταση του φωτός, αφού διέλθει διαδοχικά μέσα από n τέτοια φίλτρα, να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο, καθώς και το γενικό όρο της ακολουθίας (I_n).

Ποιά θα είναι η ένταση του φωτός, αν διέλθει μέσα από 10 τέτοια φίλτρα και η αρχική ένταση είναι I_0.

256. Να βρείτε τέσσερις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου ώστε να έχουν γινόμενο 16 και οι δύο μεσαίοι να έχουν άθροισμα $\frac{20}{3}$.

257. Έστω ότι οι αριθμοί x, y, z, ω είναι τέσσεροι διαδοχικοί όροι, με τη σειρά που δίνονται, γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda = 2$. Αν $x + y + z = 336$, να βρείτε το άθροισμα $y + z + \omega$.

Κεφάλαιο 7

Βασικές έννοιες των Συναρτήσεων

258. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση: $f(x) = x^7 - \sqrt{3-6x}$.

259. Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = |\lambda|x - 3(x+1)$.

   (α') Να κατασκευάσετε στο Geogebra ένα μοντέλο της συνάρτησης παραμετρικό ως προς λ. Για ποιές τιμές του λ αλλάζει μονοτονία;

   (β') Να εξετάσετε αλγεβρικά τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x)$ επαληθεύοντας τους προηγούμενους ισχυρισμούς.

260. Αν η συνάρτηση h είναι γνησίως μονότονη στο σύνολο $\mathbf{R}$, να λύσετε τις εξισώσεις: $h(x) = h(2x-3)$ και $h(x^3) - h(27) = 0$.

   Υπόδειξη: Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη ισχύει ότι:

$$f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2$$

261. Έστω δυο συναρτήσεις $f, g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ με το ίδιο είδος μονοτονίας. Να δείξετε ότι η συνάρτηση: $h(x) = f\Big(g(x)\Big)$ είναι γνησίως αύξουσα.

262. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$ να δείξετε ότι:

$$f\left(\ \frac{2}{\pi}\ \right) < f\left(\ \frac{\pi}{3}\ \right), \qquad f(2\alpha) \leq f(\alpha^2+1)$$

263. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$ να δείξετε ότι:

$i.\quad f(\sqrt{6}-3) > f\Big(\sqrt{3}-\sqrt{2}\Big)$ $\quad ii.\quad f\Big(\sqrt[4]{34}\Big) > f(\sqrt{6})$

$iii.\quad f(2x^2+2013) < f(2012)$ $\quad iv.\quad f(-\alpha^2+\alpha) > f(-\alpha+2)$

264. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \sqrt{x-1}$.

(α') Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(β') Να εξετάσετε την μονοτονία της f.

(γ') Να εξετάσετε αν η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο.

(δ') Να βρείτε το $f(10)$ και να λύσετε:

i. την εξίσωση $f(x) = 103$

ii. την ανίσωση $f(x) < 103$

(ε') Να δείξετε ότι $f\left(\frac{2012}{2011}\right) - 1 > 0$.

265. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}+2}{x}$.

(α') Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(β') Σχεδιάστε την συνάρτηση στο Geogebra.

(γ') Μπορείτε να δικαιολογήσετε τη μορφολογία της συνάρτησης;

(δ') Γιατί το γράφημα $\mathcal{C}_f$ έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$;

266. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^{2013}, & \text{αν } x < 0 \\ x^{2013}, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$. Να δείξετε ότι η $\mathcal{C}_f$ έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

267. Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}$ είναι περιττή, τότε η συνάρτηση $g(x) = |f(x)|$ είναι άρτια.

268. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,\ g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ όπου η f είναι περιττή και η g άρτια. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ είναι περιττή.

269. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(α') Να βρείτε το $f(0)$.

(β') Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

270. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι περιττή. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(|x|) \cdot |f(x)|$, είναι άρτια.

271. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

(α') η συνάρτηση $g(x) = f(a+x) - f(a-x)$ είναι περιττή,

(β') η συνάρτηση $h(x) = f(b-x) + f(b+x)$ είναι άρτια.

272. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) \cdot f(-x) = [f(x)]^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είνα άρτια.

273. Σκοπός είναι να βρούμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ που επαληθεύει τις δύο παρακάτω συνθήκες:

- $f(1) = 1$
- για κάθε φυσικό m και n,

$$f(m+n) = f(m) \times f(n) + f(n) + f(m)$$

(α') Υποθέτουμε ότι μια τέτοια συνάρτηση f υπάρχει.

i. Υπολογίστε το $f(0)$.

ii. Υπολογίστε τα $f(2)$, $f(3)$, $f(6)$.

(β') Δείξτε ότι για κάθε φυσικό n $f(n+1) = 2f(n) + 1$.

(γ') Θέτω για κάθε φυσικό n: $g(n) = f(n) + 1$.
Δείξτε ότι για κάθε φυσικό m και n: $g(n+m) = g(n) \times g(m)$.

(δ') Να βρείτε την συνάρτηση f που ανταποκρίνεται στο πρόβλημα.

274. Έστω η συνάρτηση f που πάει ζύγη φυσικών αριθμών σε φυσικούς αριθμούς σύμφωνα με τους κανονες:

$$f(0, y) = y + 1, \quad f(x, 0) = f(x-1, 1), \quad f(x+1, y+1) = f(x, f(x+1, y))$$

Να βρείτε τις τιμές $f(2, 1)$ και $f(2, 2)$.

275. Έστω μια πραγματική συνάρτηση f ορισμένη στο $(0, +\infty)$, όπως ο παρακάτω πίνακας:

Πίνακας Τιμών

x	$f(x)$
2	$3,0103$
3	$4,7712$
4	
5	$6,9897$
6	$7,7815$
7	$8,4510$
8	
9	
10	
100	
1000	
1000000	
10^9	

Η συνάρτηση αυτή έχει την εξής ιδιότητα:
Για κάθε πραγματικούς αριθμούς $x > 0$ και $y > 0$ ισχύει:

$$f(x \times y) = f(x) + f(y)$$

(α') Βρείτε το $f(4)$ και συμπληρώστε τον διπλανό πίνακα.

(β') Υπολογίστε το $f(245)$.

(γ') Υπολογίστε το $f(1)$.

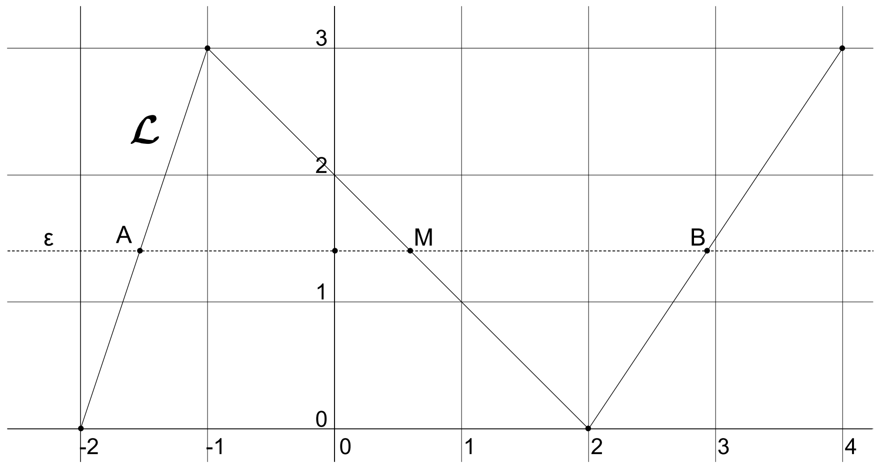
(δ') Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

276. Η τεθλεσμένη γραμμή $\mathcal{L}$ στο σχήμα 7.1 είναι δεδομένη.

Θέλουμε να βρούμε μια ευθεία ϵ παράλληλη στον άξονα των τετμημένων έτσι ώστε $AM = MB$.
Μέθοδος:

(α') Βρείτε την συνάρτηση f που έχει σαν γράφημα την τεθλασμένη $\mathcal{L}$.



Σχήμα 7.1: Άσκηση 276.

(β΄) Αν ϵ η ζητούμενη ευθεία με τύπο $y = \lambda$, $0 \leq \lambda \leq 3$, εκφράστε συναρτήσει του λ τις τετμημένες των σημείων A, M και B.

(γ΄) Δείξτε ότι η ζητούμενη ευθεία ϵ αντιστοιχεί στην τιμή του λ που ικανοποιεί την σχέση $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$.

Κεφάλαιο 8

Μελέτη βασικών Συναρτήσεων

277. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \ \ \alpha \neq 0$:

    (α') Αν το τριώνυμο $f(x)$ γράφεται σαν τέλειο τετράγωνο τότε η $\mathcal{C}_f$ εφάπτεται στον άξονα των τετμημένων.

    (β') Αν $\Delta < 0$ και $\alpha < 0$ η $\mathcal{C}_f$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα των τετμημένων.

    (γ') Η κορυφή της $\mathcal{C}_f$ είναι το σημείο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, \frac{\Delta}{4\alpha} \right)$.

    (δ') Αν $\alpha\gamma < 0$, η $\mathcal{C}_f$ τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox και τον αρνητικό ημιάξονα Oy'.

    (ε') Η $\mathcal{C}_f$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = \frac{\beta}{2\alpha}$.

278. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

    (α') $4x^2 + 4xy - 15y^2$,

    (β') $3(2x - 5y)^2 - (2x - 5y) - 2$

279. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha x^2 + x + 5\alpha x + 5\alpha}{3x^2 + x - 2}$.

    (α') Να κάνετε το διάγραμμα στο Geogebra.

    (β') Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

    (γ') Να απλοποιήσετε την παράσταση της f.

    (δ') Μετακινήστε την παράμετρο α στον δρομέα. Δικαιολογήστε την μορφή της συνάρτησης όταν $\alpha = -1$.

    (ε') Για $\alpha = 2$ να βρείτε τα κοινά σημεία της $\mathcal{C}_f$ και της ευθείας $\varepsilon: \ y = \frac{x}{3} + 3$.

280. Να βρείτε το λ ώστε το τριώνυμο $2x^2 + \frac{4ax}{5} - \frac{1}{10}\lambda^2 + 3$

(α΄) να αναλύεται σε γινόμενο δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων,

(β΄) να είναι τέλειο τετράγωνο,

(γ΄) να μην αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων.

(δ΄) Να κάνετε το διάγραμμα στο Geogebra. Ποιά η γεωμετρική ερμηνεία των παραπάνω ερωτήσεων στο διάγραμμα;

281. Θέλουμε να δούμε πως μια αλγεβρική σχέση ερμηνεύεται γεωμετρικά μέσα από τα διαγράμματα συναρτήσεων. Λύστε πρώτα αλγεβρικά το πρόβλημα και στη συνέχεια με τη βοήθεια του Geogebra δείτε την γεωμετρική υόσταση των ανισοτήτων.

Αποδείξτε ότι:

(α΄) Για $0 \leq x \leq 1$ ισχύει $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$.

(β΄) Για $x \geq 1$ ισχύει $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$.

282. (α΄) Διατυπώστε έναν ισχυρισμό σχετικά με την θέση των δύο καμπυλών:

$$y = x^2 \tag{8.1}$$

$$y = 2x - 1 \tag{8.2}$$

(β΄) Δείξτε την αλήθεια του ισχυρισμού σας λύνοντας την ανίσωση:

$$x^2 \geq 2x - 1 \tag{8.3}$$

283. Δίνεται η παραβολή $y = x^2 - x - 2$. Να βρείτε:

(α΄) την κορυφή της παραβολής,

(β΄) τον άξονα συμμετρίας,

(γ΄) τα σημεία τομής της παραβολής με τους δύο άξονες συντεταγμένων.

284. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x^2 - 9|$.

285. Δίνεται η παραβολή $y = \sqrt{5}x^2 - \lambda - \sqrt{2+\sqrt{2}}x - \dfrac{\lambda}{3}$. Να βρείτε το λ ώστε:

(α΄) να τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία,

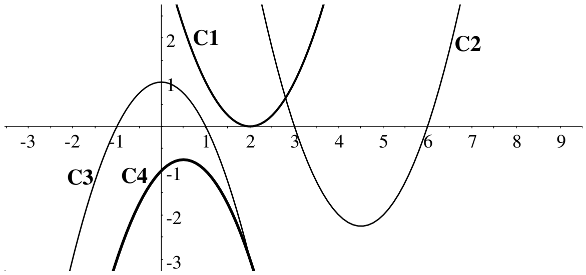
(β΄) να εφάπτεται στον άξονα $x'x$,

(γ΄) να μην έχει με τον άξονα $x'x$ κανένα κοινό σημείο.

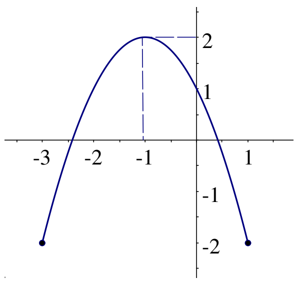
286. Αν για τη συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, ισχύει $\alpha \cdot \gamma < 0$ να βρείτε ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις, σχήμα 8.1, θα μπορούσε να αντιπροσωπεύσει την f.

287. Να βρείτε τη συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση είναι η παραβολή του παρακάτω σχήμα 8.2.

288. Να βρείτε το λ ώστε η συνάρτηση $f(x) = (2\lambda - 2)x^2 - 2(\lambda^2 - 7)x - 1$, $\lambda \neq 1$, να παρουσιάζει μέγιστο στο $x = \dfrac{1}{123}$.



Σχήμα 8.1: *Επέλεξτε την κατάλληλη καμπύλη*



Σχήμα 8.2: *Ποιά είναι η συνάρτηση;*

289. Δίδοντε οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 4x - 3$ και $h(x) = \left|2x - 3\right|$.

(α΄) Αν

$$A = \{x \in \mathbb{N} \ : \ f(x) < 0\}$$

και

$$B = \{x \in \mathbb{N} \ : \ h(x) \leq 2\}$$

να βρείτε τα: $A \cup B$, $A \cap B$ και $A - B$.

(β΄) Να υπολογίσετε την απόσταση της κορυφής της παραβολής $f(x)$ από το σημείο $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

(γ΄) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης

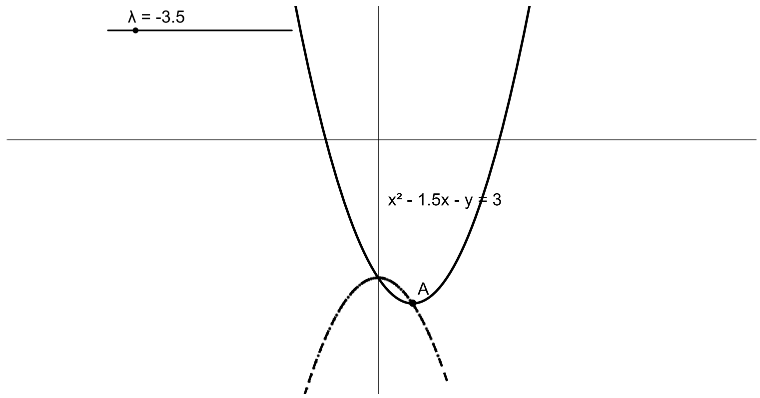
$$\sqrt{f(x) + 8} - h(x)$$

290. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ που τέμνει τον άξονα των x στα σημεία με τετμημένες -2 και 3.5, ενώ τον άξονα των y στο σημείο με τεταγμένη -4.08.

291. Να βρείτε την μεγίστη τιμή της ελάχιστης τιμής της συνάρτησης: $f(x) = x^2 + (\lambda + 2)x - 3$. Δουλέψτε στο Geogebra για να κατανοήσετε την μεταβολή του ελαχίστου της συνάρτησης $f(x)$, δες σχήμα 8.4.

292. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^2 + 2(2 - \lambda^2)x - 1$. Να βρείτε το λ ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1, \infty)$.

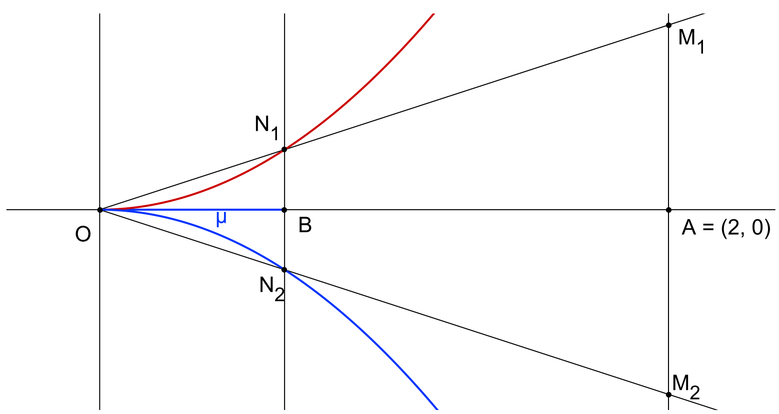
293. Να βρεθεί η καμπύλη στην οποία ανήκουν οι κορυφές των παραβολών $y = x^2 - 2\lambda x - 2$ για τις διάφορες τιμές του λ.



Σχήμα 8.3: Το μέγιστο του ελαχίστου A της συνάρτησης $f(x)$.

294. Αν η συνάρτηση $f(x) = (\lambda^3 - 1)x^2 + 2\lambda x - 8$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$ να βρείτε το λ.

295. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων θεωρούμε σημείο $A = (2, 0)$ και σημείο $B(x, 0)$, $x > 0$. Έστω ϵ η κάθετος από το A στον άξονα των τετμημένων και σημεία M_1 και M_2 σημεία της ϵ έτσι ώστε: $AM_1 = AM_2 = OB = \mu$. Η εύθεια η κάθετος στον άξονα των τετμημένων στο σημείο B, τέμνει τις OM_1 και OM_2 στα σημεία N_1 και N_2 αντίστοιχα, δες σχήμα 8.4.



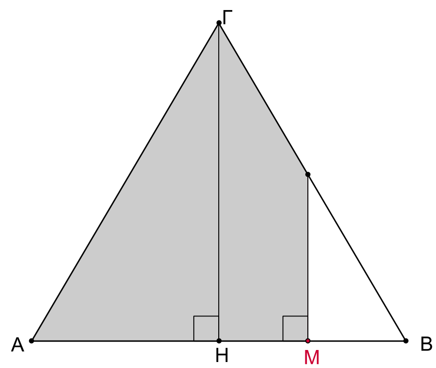
Σχήμα 8.4: Άσκηση 295.

Υπολογίστε τις συντεταγμένες των σημείων N_1 και N_2 συναρτήσει του x και δείξτε ότι τα σημεία αυτά ανήκουν στις παραβολές $y = \frac{1}{2}x^2$ και $y = -\frac{1}{2}x^2$.

296. Έστω τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκελές με κορυφή Γ, $AB = 8cm$ και $\Gamma H = 6cm$. Έστω M σημείο της πλαυράς AB, σημειώνουμε με $x = AM$ και $f(x)$ το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου πολυγώνου, δες σχήμα 8.5. Δείξτε ότι η συνάρτηση ορίζεται

στο διάστημα $[0, 8]$ και είναι η:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x^2 & \text{αν} \quad 0 \leq x \leq 4 \\ 24 - \frac{3}{4}(8-x)^2 & \text{αν} \quad 4 < x \leq 8 \end{cases}$$



Σχήμα 8.5: Άσκηση 296.

297. Σκοπός της άσκησης είναι να συγκρίνουμε τη θέση ενός αριθμού ξ ως προς τις δύο πραγματικές ρίζες ενός τριωνύμου.

(α΄) Έστω τριώνυμο με πραγματικούς συντελεστές $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $(\alpha \neq 0)$.

i. Δείξτε ότι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει το τριώνυμο δύο πραγματικές ρίζες έτσι ώστε ο ξ να είναι ανάμεσα στις ρίζες του, είναι

$$\alpha p(\xi) < 0 \tag{8.4}$$

ii. Δείξτε ότι αν το ξ είναι ίσο με μια εκ των δύο ριζών της $p(x) = 0$, τότε: $p(\xi) = 0$.

iii. Αν $\rho_1 < \rho_2$ οι δύο πραγματικές ρίζες της $p(x) = 0$, η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι $\xi < \rho_1 < \rho_2$, $\Big(\rho_1 < \rho_2 < \xi\Big)$, είναι:

$$\Delta > 0, \qquad \alpha p(\xi) > 0, \qquad \xi < -\frac{\beta}{2\alpha}, \left(\xi > -\frac{\beta}{2\alpha}\right) \tag{8.5}$$

(β΄) Στη συνέχεια θα κάνουμε μια εφαρμογή του αποτελέσματος που βρήκαμε παραπάνω. Θα βρούμε τις τιμές της παραμέτρου λ έτσι ώστε ο αριθμός 2 να βρίσκεται μεταξύ των ριζών της εξίσωσης:

$$p(x) = \lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 3 - \lambda = 0 \tag{8.6}$$

i. Γράψτε στο Geogebra το γράφημα του τριωνύμου $p(x)$ με την παράμετρο λ.

ii. Καταγράψτε τις τιμές της παραμέτρου λ που ικανοποιούν την συνθήκη του προβλήματος.

iii. Επαληθεύστε τον ισχυριμσμό σας με τα θεωρητικά αποτελέσματα που αποδείξατε στο πρώτο ερώτημα 297α΄.

298. Δίδεται πραγματική παράμετρος λ και το τριώνυμο

$$p(x) = (\lambda + 1)x^2 - 4\lambda x + 2\lambda + 3 \tag{8.7}$$

(α΄) Δώστε τη μορφή του τριωνύμου στο Geogebra.

(β΄) Καταγράψτε τη θέση του αριθμού -1 ως προς τις ρίζες του τριωνύμου $p(x)$ για τις διάφορες τιμές του λ.

(γ΄) Επαληθεύστε αλγεβρικά τις πειραματικές διαπυστώσεις σας.

299. Σκοπός της άσκησης είναι να παρουσιάσουμε έναν αλγόριθμο που θα καθορίζει τη θέση δύο αριθμών $\xi_1 < \xi_2$ ως προς τις ρίζες μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού.

(α΄) Έστω τριώνυμο με πραγματικούς συντελεστές:

$$p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \qquad (a \neq 0) \tag{8.8}$$

Δείξτε ότι η θέση των αριθμών ξ_1 και ξ_2 είναι αυτή που περιγράφεται από τον παρακάτων πίνακα:

$\alpha p(\xi_1) < 0$ και $\alpha p(\xi_2) < 0$	$\rho_1 < \xi_1 < \xi_2 < \rho_2$
$\alpha p(\xi_1) < 0$ και $\alpha p(\xi_2) > 0$	$\rho_1 < \xi_1 < \rho_2 < \xi_2$
$\alpha p(\xi_1) > 0$ και $\alpha p(\xi_2) < 0$ ή $p(\xi_1)p(\xi_2) < 0$	$\xi_1 < \rho_1 < \xi_2 < \rho_2$ $\begin{cases} \xi_1 < \rho_1 < \xi_2 < \rho_2 \\ \text{ή} \\ \rho_1 < \xi_1 < \rho_2 < \xi_2 \end{cases}$
$\begin{cases} \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0 \\ \alpha p(\xi_1) > 0 \\ \alpha p(\xi_2) > 0 \end{cases}$ και $\begin{cases} \xi_1 < -\dfrac{\beta}{2\alpha}, \quad \xi_2 > -\dfrac{\beta}{2\alpha} \\ \xi_2 < -\dfrac{\beta}{2\alpha} \\ \xi_1 > -\dfrac{\beta}{2\alpha} \end{cases}$	$\xi_1 < \rho_1 < \rho_2 < \xi_2$ $\xi_1 < \xi_2 < \rho_1 < \rho_2$ $\rho_1 < \rho_2 < \xi_1 < \xi_2$

(β΄) i. Δώστε το παραμετρικό τριώνυμο

$$p(x) = (\lambda - 1)x^2 - 2(3\lambda + 1)x + 9\lambda, \quad \lambda \neq 1 \tag{8.9}$$

στο Geogebra.

ii. Καταγράψτε, μετακινώντας την παράμετρο λ στην αντίστοιχη ράμβδο, τις τιμές της παραμέτρου που χαρακτηρίζουν τη θέση των αριθμών -1 και 0 ως προς τις ρίζες της $p(x) = 0$.

iii. Επαληθεύστε την καταγραφή σας με τον πίνακα που κατασκευάσαμε στο ερώτημα 299α΄.

300. Να αποδειχθεί, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την διακρίνουσα, ότι:

(α΄) η εξίσωση

$$(x-1)(x+2)+(x+1)(x-2)-(x-1)(x-2)=0$$

έχει δύο ρίζες πραγματικές εκ των οποίων η μια ανήκει στο διάστημα $(1,2)$.

(β΄) η εξίσωση

$$\frac{A^2}{x-a}+\frac{B^2}{x-\beta}=\Gamma^2,\ (x\neq\alpha,\beta)$$

έχει δύο πραγματικές ρίζες.

301. Να ευρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο του κλάσματος

$$\frac{x-4}{x^2-3x-3}$$

<u>Υπόδειξη</u>: Θέσε $\dfrac{x-4}{x^2-3x-3}=\mu$ και δουλέψτε για το τριώνυμο

$$\mu x^2-(3\mu+1)x-3\mu+4$$