

Α.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

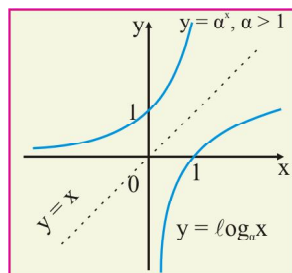
Ορισμός

Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in (0, +\infty)$ στο $\log_a x$ ορίζουμε μια συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \log_a x$, $1 \neq a > 0$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση a** .

Παρατήρηση

Επειδή είναι: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, αν το $A(\kappa, \lambda)$ είναι σημείο γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\log_a x = y$, τότε το $B(\lambda, \kappa)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = a^x$ και αντιστρόφως. Τα σημεία $A(\kappa, \lambda)$ και $B(\lambda, \kappa)$ όμως είναι συμμετρικά ως προς την διχοτόμο των γωνιών $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$. Άρα:

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\log_a x = y$ και $y = a^x$ είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο των γωνιών $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.



Ιδιότητες

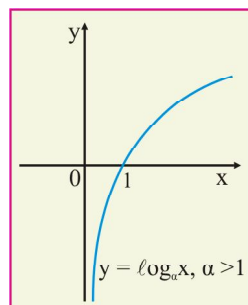
1. Αν $a > 1$ η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_a x$:

- Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$
- Έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} .
- Είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή:

Αν $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ τότε $\log_a x_1 < \log_a x_2$.

Απ' όπου προκύπτει ότι:
$$\begin{cases} \log_a x < 0, & 0 < x < 1 \\ \log_a x > 0, & x > 1 \end{cases}$$

- Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα x' στο σημείο $A(1, 0)$ και έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα Oy' .



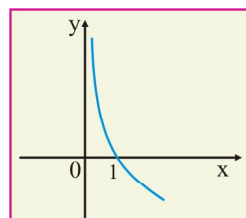
2. Αν $0 < \alpha < 1$ η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_{\alpha} x$:

- Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$
- Έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R}
- Είναι γνησίως φθίνουσα, δηλαδή:

Αν $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ τότε $\log_{\alpha} x_1 > \log_{\alpha} x_2$.

Απ' όπου προκύπτει ότι:
$$\begin{cases} \log_{\alpha} x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \\ \log_{\alpha} x < 0 \Leftrightarrow x > 1 \end{cases}$$

- Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1, 0)$ και έχει ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα Oy .



3. Από την μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης προκύπτει ότι:

$$\log_{\alpha} x_1 = \log_{\alpha} x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

B.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Ασκήσεις που αναφέρονται στον ορισμό της λογαριθμικής συνάρτησης. Για την επίλυσή τους πρέπει να λάβουμε υπόψιν μας τα εξής:

- Η $f(x) = \log_{\alpha} x$: ορίζεται μόνο όταν $x > 0$ και $1 \neq \alpha > 0$,
- είναι γνησίως αύξουσα αν $\alpha > 1$ και γνησίως φθίνουσα αν $0 < \alpha < 1$.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{\log x}{\log^2 x - 9}$.

Λύση

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} x > 0 \\ \log^2 x - 9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log^2 x \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x \neq \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x \neq 3 \\ \log x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 10^3 \\ x \neq 10^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1000 \\ x \neq 0,001 \end{cases}$$

Άρα πεδίο ορισμού είναι το $A_f = (0, 0,001) \cup (0,001, 1000) \cup (1000, +\infty)$.

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Επίλυση λογαριθμικών εξισώσεων όπου ο άγνωστος, ή παράσταση του αγνώστου εμφανίζονται στον λογαριθμιζόμενο αριθμό ή στην βάση της λογαρίθμησης.

Η λύση τους στηρίζεται στις ιδιότητες των λογαρίθμων και στις σχέσεις

$$\log_{\alpha} x_1 = \log_{\alpha} x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$\log_{\alpha} \theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta$$

Επίσης στην αρχή πρέπει να τεθούν οι κατάλληλοι περιορισμοί για να έχουν νόημα οι λογαριθμικές παραστάσεις.

Παράδειγμα 2

Να λυθεί η εξίσωση $\ln(x-1) + \ln(2x+4) = 2\ln(x+2)$.

Λύση

Είναι $\ln(x-1) + \ln(2x+4) = 2\ln(x+2) \Leftrightarrow (1)$.

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} x-1 > 0 \\ 2x+4 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -2 \\ x > -2 \end{cases} \text{ Άρα } x > 1.$$

Οπότε η (1) γίνεται: $\ln[(x-1)(2x+4)] = \ln(x+2)^2 \Leftrightarrow$

$$(x-1)(2x+4) = (x+2)^2 \Leftrightarrow (x-1)(2x+4) - (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1) \cdot 2(x+2) - (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)[2(x-1) - (x+2)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ απορρίπτεται} \\ \text{ή} \\ x = 4 \text{ δεκτή} \end{cases}$$

Παράδειγμα 3

Αν $2(\log_x 2)^2 + \log_x 4 = -1 + \log_x 32$, **να υπολογιστεί ο x.**

Λύση

Πρέπει: $x > 0, x \neq 1$

$$\text{Είναι } 2(\log_x 2)^2 + \log_x 4 = -1 + \log_x 32 \Leftrightarrow 2(\log_x 2)^2 + \log_x 2^2 = -1 + \log_x 2^5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\log_x 2)^2 + 2\log_x 2 = -1 + 5\log_x 2 \Leftrightarrow 2(\log_x 2)^2 - 3\log_x 2 + 1 = 0 \quad (1)$$

Αν θέσουμε $\log_x 2 = y$ η (1) γίνεται: $2y^2 - 3y + 1 = 0$ η οποία έχει λύσεις τις:

$$y_1 = 1 \text{ και } y_2 = \frac{1}{2} \text{ οπότε έχουμε: i. } \log_x 2 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ δεκτή}$$

$$\text{ii. } \log_x 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^{1/2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ δεκτή}$$

Παράδειγμα 4

Να λυθεί η εξίσωση: $\log_{x+1} \left(\frac{2x+3}{4} \right) = 1$

Λύση

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} x+1 \neq 1 \\ x+1 > 0 \\ \frac{2x+3}{4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -1 \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ άρα } x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty).$$

$$\text{Είναι } \log_{x+1} \left(\frac{2x+3}{4} \right) = \log_{x+1} (x+1) \Leftrightarrow \frac{2x+3}{4} = x+1 \Leftrightarrow 2x+3 = 4x+4 \Leftrightarrow$$

$$-2x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ δεκτή}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Επίλυση λογαριθμικών ανισώσεων όπου ο άγνωστος ή η παράσταση του αγνώστου εμφανίζονται στον λογαριθμιζόμενο αριθμό ή στην βάση της λογαρίθμησης.

Η επίλυσή τους στηρίζεται στην μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης δηλαδή:

$$\text{- Αν } 0 < a < 1 : \log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

$$\text{- Αν } a > 1 : \log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

Πρέπει και εδώ να τεθούν από την αρχή οι περιορισμοί ώστε να έχουν νόημα οι λογαριθμικές παραστάσεις.

Παράδειγμα 5

Να λυθεί η ανίσωση $\log \frac{x-1}{x+2} > 1$.

Λύση

$$\text{Πρέπει } \left. \begin{array}{l} \frac{x-1}{x+2} > 0 \\ x+2 \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow (x-1)(x+2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

$$\text{Είναι } \log \frac{x-1}{x+2} > 1 \Leftrightarrow \log \frac{x-1}{x+2} > \log 10 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} > 10 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} - 10 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-1-10x-20}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-9x-21}{x+2} > 0 \Leftrightarrow (-9x-21)(x+2) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{21}{9}, -2 \right) \Leftrightarrow$$

$$x \in \left(-\frac{7}{3}, -2 \right)$$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Επίλυση λογαριθμικών συστημάτων, όπου τουλάχιστον μία από τις εξισώσεις του είναι λογαριθμική.

Για να το επιλύσουμε εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των λογαρίθμων, αφού τεθούν οι περιορισμοί και καταλήγουμε σε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων.

Παράδειγμα 6

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \ln x - \ln y = 2 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

Λύση

Πρέπει $x, y > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \begin{cases} \ell n x - \ell n y = 2 \\ x + 2y = 10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \ell n \frac{x}{y} = 2 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = e^2 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ye^2 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ye^2 \\ ye^2 + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} x = ye^2 \\ y(e^2 + 2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10e^2}{e^2 + 2} \\ y = \frac{10}{e^2 + 2} \end{cases} \end{aligned}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Εκθετικές εξισώσεις που λύνονται με χρήση λογάριθμων.

Τέτοιες εξισώσεις είναι αυτές της μορφής $\alpha^x = \beta$ ή $\alpha^{f(x)} = \beta$, όπου το β δεν μπορεί να γραφεί στην μορφή $\beta = \alpha^x$.

Η επίλυσή τους στηρίζεται στους τύπους:

- i. $\alpha^x = \beta \Leftrightarrow x = \log_a \beta$
- ii. $\alpha^{f(x)} = \beta \Leftrightarrow f(x) = \log_a \beta$
- iii. $\alpha^{f(x)} = \beta^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \log_a \beta$

Παράδειγμα 7

Να λυθεί η εξίσωση: $2^{4x-3} = 3$.

Λύση

$$\text{Είναι } 2^{4x-3} = 3 \Leftrightarrow 4x - 3 = \log_2 3 \Leftrightarrow 4x = \log_2 3 + 3 \Leftrightarrow 4x = \log_2 3 + \log_2 2^3 \Leftrightarrow$$

$$4x = \log_2 (3 \cdot 2^3) \Leftrightarrow 4x = \log_2 24 \Leftrightarrow x = \frac{\log_2 24}{4}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Επίλυση εκθετικών συστημάτων όπου μία τουλάχιστον εξίσωσή του είναι της μορφής:

$$\alpha^x = \beta, \alpha^{f(x)} = \beta, \alpha^{f(x)} = \beta^{g(x)}$$

Για την επίλυσή τους χρησιμοποιούμε τους τύπους:

$$\alpha^x = \beta \Leftrightarrow x = \log_a \beta, \alpha^{f(x)} = \beta \Leftrightarrow f(x) = \log_a \beta, \alpha^{f(x)} = \beta^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \log_a \beta$$

Παράδειγμα 8

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x^y = y^x \\ y = 2x \end{cases}$ όπου $x > 0, y > 0$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \begin{cases} x^y = y^x \\ y = 2x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x)^{2x} = (2x)^x \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \log x = x \log 2x \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} 2 \log x = \log 2 + \log x \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x = \log 2 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Γ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \log_{5x} (2x^2 + x + 1)$ ii. $g(x) = \ln \frac{1-x}{2+x}$

Λύση

i. Πρέπει $5x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{5}$, $5x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ και $2x^2 + x + 1 > 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

αφού $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 - 8 = -7 < 0$. Άρα $A_f = \left(0, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$

ii. Πρέπει $\frac{1-x}{2+x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)(2+x) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$ και $2+x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$.

Άρα $A_g = (-2, 1)$

Άσκηση 2

Να βρεθεί για ποια x ορίζονται οι συναρτήσεις:

i. $f(x) = (\log 2x - 1)^{\frac{3}{x+4}}$ ii. $g(x) = \left(\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}\right)^x$

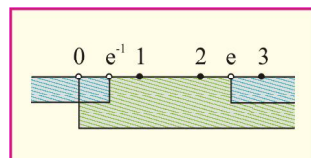
Λύση

i. Πρέπει $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$, $x+4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -4$ και

$\log 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow \log 2x > 1 \Leftrightarrow 2x > 10 \Leftrightarrow x > 5$. Άρα $A_f = (5, +\infty)$

ii.
$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x + 1 \neq 0 \\ \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e^{-1} \\ (\ln x - 1)(\ln x + 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e^{-1} \\ x < e^{-1} \text{ ή } x > e \end{cases}$$

Άρα τελικά $A_g = (0, e^{-1}) \cup (e, +\infty)$.



Άσκηση 3

Να γίνει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \ln(x-2) + 3$

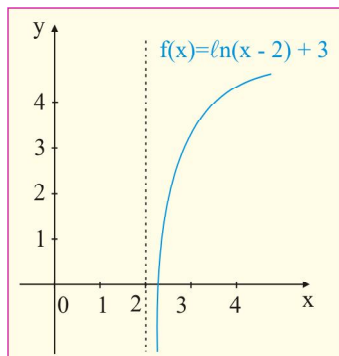
ii. $g(x) = \ln|x|$

Λύση

Πρέπει $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$, άρα $A_f = (2, +\infty)$.

i. Κάνουμε πρώτα την γραφική παράσταση της

$h(x) = \ln x$. Στην συνέχεια τη μετατοπίζουμε κατά 2 μονάδες δεξιά και συγχρόνως κατά 3 μονάδες κατακόρυφα προς τα πάνω.



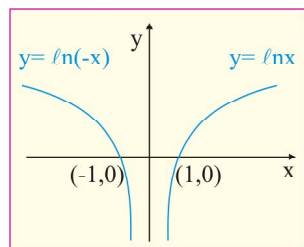
ii. Πρέπει $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

Είναι $g(-x) = \ln|-x| = \ln|x| = g(x)$, $x \neq 0$, άρα η g είναι άρτια οπότε η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως

προς τον άξονα $y'y$. Επίσης $g(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$.

Η $y = \ln x$, $x > 0$ είναι η γνωστή λογαριθμική συνάρτηση,

και η $y = \ln(-x)$, $x < 0$, έχει γραφική παράσταση συμμετρική της $y = \ln x$, $x > 0$ ως προς τον $y'y$.

**Άσκηση 4**

Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $3\log x + 6 = 0$

ii. $2\log(x-2) = \frac{1}{2}\log x^3 - \log\sqrt{x}$

Λύση

i. Πρέπει $x > 0$. Είναι $3\log x = -6 \Leftrightarrow \log x = -2 \Leftrightarrow x = 10^{-2} = 0,01$

ii. Πρέπει $\begin{cases} x-2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > 0 \end{cases}$. Άρα $x > 2$.

$$\text{Είναι } 2\log(x-2) = \frac{1}{2}\log x^3 - \log\sqrt{x} \Leftrightarrow \log(x-2)^2 = \frac{3}{2}\log x - \log x^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\log(x-2)^2 = \frac{3}{2}\log x - \frac{1}{2}\log x \Leftrightarrow (x-2)^2 = x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \text{ απορρίπτεται λόγω περιορισμών} \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Άσκηση 5**Να λυθούν οι εξισώσεις:**

$$\text{i. } \log_3(x^2 + 6x + 8) = 3 + \log_3(x + 2) \quad \text{ii. } \log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \frac{11}{6}$$

Λύση

$$\text{i. Πρέπει } \begin{cases} x^2 + 6x + 8 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x+4) > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \text{ ή } x > -2 \\ x > -2 \end{cases}. \text{ Άρα } x > -2.$$

$$\text{Είναι } \log_3(x^2 + 6x + 8) - \log_3(x + 2) = 3 \Leftrightarrow \log_3 \frac{x^2 + 6x + 8}{x + 2} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\log_3 \frac{(x+2)(x+4)}{x+2} = 3 \Leftrightarrow \log_3(x+4) = 3 \Leftrightarrow x+4 = 3^3 \Leftrightarrow x+4 = 27 \Leftrightarrow x = 23 \text{ δεκτή}$$

ii. Πρέπει $x > 0$.

$$\text{Είναι } \log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \frac{11}{6} \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \frac{\log_2 x}{\log_2 8} = \frac{11}{6} \Leftrightarrow$$

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{2} + \frac{\log_2 x}{3} = \frac{11}{6} \Leftrightarrow 6\log_2 x + 3\log_2 x + 2\log_2 x = 11 \Leftrightarrow$$

$$11\log_2 x = 11 \Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ δεκτή}$$

Άσκηση 6**Να λυθεί η εξίσωση:** $2^{\ell_{nx} - \frac{1}{2}} + 2^{\ell_{nx} + \frac{1}{2}} + 2^{\ell_{nx} + \frac{5}{2}} = 11.$ **Λύση****Πρέπει** $x > 0$.

$$\text{Είναι } 2^{\ell_{nx} - \frac{1}{2}} + 2^{\ell_{nx} + \frac{1}{2}} + 2^{\ell_{nx} + \frac{5}{2}} = 11 \Leftrightarrow \frac{2^{\ell_{nx}}}{2^{1/2}} + 2^{\ell_{nx}} \cdot 2^{1/2} + 2^{\ell_{nx}} \cdot 2^{5/2} = 11 \Leftrightarrow$$

$$2^{\ell_{nx}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2^{\ell_{nx}} \sqrt{2} + 2^{\ell_{nx}} \sqrt{2^5} = 11 \Leftrightarrow 2^{\ell_{nx}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} + 4\sqrt{2} \right) = 11 \Leftrightarrow$$

$$2^{\ell_{nx}} \frac{11}{\sqrt{2}} = 11 \Leftrightarrow 2^{\ell_{nx}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \ell_{nx} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \text{ δεκτή}$$

Άσκηση 7**Να λυθεί η εξίσωση:** $\ell_n 2^{x+3} + \ell_n 4^{x+2} = \ell_n 108 + \ell_n \left(8^x + \frac{4}{2^x} - 1 \right)$ **Λύση**

$$\text{Πρέπει: } 8^x + \frac{4}{2^x} - 1 > 0 \quad (1)$$

$$\ln 2^{x+3} + \ln 4^{x+2} = \ln 128 + \ln \left(8^x + \frac{4}{2^x} - 1 \right) \Leftrightarrow \ln (2^{x+3} \cdot 4^{x+2}) = \ln \left[128 \left(8^x + \frac{4}{2^x} - 1 \right) \right] \Leftrightarrow$$

$$2^{x+3} \cdot 4^{x+2} = 128 \left(8^x + \frac{4}{2^x} - 1 \right) \Leftrightarrow 2^x \cdot 8 \cdot 4^x \cdot 16 = 128 \left(8^x + \frac{4}{2^x} - 1 \right) \Leftrightarrow$$

$$2^x \cdot 4^x = 8^x + \frac{4}{2^x} - 1 \Leftrightarrow 8^{3x} = 8^{3x} + \frac{4}{2^x} - 1 \Leftrightarrow 0 = \frac{4}{2^x} - 1 \Leftrightarrow 1 = \frac{4}{2^x} \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

η οποία είναι δεκτή διότι επαληθεύει την (1).

$$\text{Πράγματι: } 8^2 + \frac{4}{2^2} - 1 > 0 \Leftrightarrow 64 + 1 - 1 > 0 \Leftrightarrow 64 > 0$$

Άσκηση 8

Να λυθούν οι ανισώσεις: **i.** $\ln x^2 > (\ln x)^2$ **ii.** $(\log_3 x)^2 - 2 \log_3 x > 3$

Λύση

i. Πρέπει $x > 0$.

$$\text{Είναι: } \ln x^2 > (\ln x)^2 \Leftrightarrow 2 \ln x > (\ln x)^2 \Leftrightarrow 2 \ln x - (\ln x)^2 > 0 \quad (1)$$

Αν θέσουμε $\ln x = y$ (2) η (1) δίνει: $2y - y^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < y < 2$ που από τη (2)

$$0 < \ln x < 2 \Leftrightarrow \ln 1 < \ln x < \ln e^2 \Leftrightarrow 1 < x < e^2$$

ii. Πρέπει $x > 0$.

Είναι $(\log_3 x)^2 - 2 \log_3 x - 3 > 0$ (1). Θέτουμε $\log_3 x = y$ και η (1) μας δίνει:

$$y^2 - 2y - 3 > 0 \Leftrightarrow y > 3 \quad \text{ή} \quad y < -1 \quad \text{δηλαδή} \quad \log_3 x > 3 \quad \text{ή} \quad \log_3 x < -1 \Leftrightarrow x > 3^3 \quad \text{ή}$$

$$x < 3^{-1} \Leftrightarrow x > 27 \quad \text{ή} \quad x < \frac{1}{3}. \text{ Άρα } x \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup (27, +\infty).$$

Άσκηση 9

Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\textbf{i. } \log_{1/3} (x^2 + 5x - 1) > 0 \quad \textbf{ii. } \log (2^x + 2 \cdot 3^x) + \log 81 > x \log 3 + \log 178$$

Λύση

i. Πρέπει $x^2 + 5x - 1 > 0$: $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 25 + 4 = 29$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}. \text{ Άρα } x^2 + 5x - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(\frac{-5 + \sqrt{29}}{2}, +\infty\right) \quad (1)$$

$$\text{Είναι } \log_{1/3} (x^2 + 5x - 1) > 0 \Leftrightarrow \log_{1/3} (x^2 + 5x - 1) > \log_{1/3} 1 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 5x - 1 < 1 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{-5 - \sqrt{33}}{2}, \frac{-5 + \sqrt{33}}{2}\right) \quad (2)$$

Συναληθεύοντας τις (1) και (2) έχουμε ότι:

$$x \in \left(\frac{-5 - \sqrt{33}}{2}, \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \right) \cup \left(\frac{-5 + \sqrt{29}}{2}, \frac{-5 + \sqrt{33}}{2} \right)$$

ii. Είναι:

$$\log(2^x + 2 \cdot 3^x) + \log 81 > x \log 3 + \log 178 \Leftrightarrow \log[(2^x + 2 \cdot 3^x) 81] > \log(3^x \cdot 178) \Leftrightarrow$$

$$(2^x + 2 \cdot 3^x) 81 > 3^x \cdot 178 \Leftrightarrow 81 \cdot 2^x + 162 \cdot 3^x > 178 \cdot 3^x \Leftrightarrow 81 \cdot 2^x > 16 \cdot 3^x \Leftrightarrow$$

$$\frac{2^x}{3^x} > \frac{16}{81} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^4 \Leftrightarrow x < 4 \text{ αφού η } f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \text{ είναι γνησίως φθίνουσα.}$$

Άσκηση 10

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \ell n x + \ell n y = 1 \\ \ell n x^4 - \ell n y^3 = 11 \end{cases}$$

Λύση

Πρέπει $x, y > 0$

$$\begin{cases} \ell n x + \ell n y = 1 \\ \ell n x^4 - \ell n y^3 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell n x + \ell n y = 1 \\ 4 \ell n x - 3 \ell n y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \ell n x - 4 \ell n y = -4 \\ 4 \ell n x - 3 \ell n y = 11 \quad (+) \\ \hline -7 \ell n y = 7 \Leftrightarrow \ell n y = -1 \Leftrightarrow y = e^{-1} \end{cases}$$

$$\text{Είναι } \begin{cases} \ell n x + \ell n y = 1 \\ \ell n y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \ell n x - 1 = 1 \Leftrightarrow \ell n x = 2 \Leftrightarrow x = e^2.$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $(x, y) = (e^2, e^{-1})$ δεκτή.

Άσκηση 11

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \log x + \log y = \log 2 \\ 3x^2 + 2y^2 = 10 \end{cases}$$

Λύση

Πρέπει $x, y > 0$.

$$\text{Είναι: } \begin{cases} \log x + \log y = \log 2 \\ 3x^2 + 2y^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log(xy) = \log 2 \\ 3x^2 + 2y^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 2 \\ 3x^2 + 2y^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{x} & (1) \\ 3x^2 + 2y^2 = 10 & (2) \end{cases}$$

Η (2) με τη βοήθεια της (1) γίνεται:

$$3x^2 + 2\left(\frac{2}{x}\right)^2 = 10 \Leftrightarrow 3x^2 + \frac{8}{x^2} = 10 \Leftrightarrow 3x^4 + 8 = 10x^2 \Leftrightarrow 3x^4 - 10x^2 + 8 = 0 \quad (3)$$

Θέτουμε $x^2 = \omega$ (4) και η (3) γίνεται:

$$3\omega^2 - 10\omega + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 2 \\ \text{ή} \\ \omega = \frac{4}{3} \end{cases} \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2 = 2 \\ \text{ή} \\ x^2 = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \pm\sqrt{2} \\ \text{ή} \\ x^2 = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

και λόγω των περιορισμών έχουμε: $x = \sqrt{2}$ ή $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Άρα από την (1) έχουμε:

• Αν $x = \sqrt{2}$ τότε $y = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ οπότε μια λύση είναι η $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

• Αν $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ τότε $y = \frac{2}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$.

Άρα η άλλη λύση είναι η $(x, y) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right)$

Άσκηση 12

Να βρεθεί σε ποια σημεία η γραφική παράσταση της $f(x) = \ln[\ln(x^2 - x + e)]$ τέμνει τον άξονα x' .

Λύση

Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 0$ δηλαδή $\ln[\ln(x^2 - x + e)] = 0$ (1)

Πρέπει $x^2 - x + e > 0$ και $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot e = 1 - 4e < 0$ άρα $x^2 - x + e > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επίσης πρέπει: $\ln(x^2 - x + e) > 0 \Leftrightarrow x^2 - x + e > 1 \Leftrightarrow x^2 - x + e - 1 > 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(e - 1) = 1 - 4e + 4 = 5 - 4e < 0$$

Άρα $x^2 - x + e - 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$H(1) \text{ δίνει } \ln(x^2 - x + e) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + e = e \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

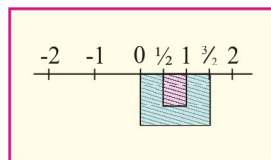
Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x' στα σημεία $O(0, 0)$, $B(1, 0)$.

Άσκηση 13

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = \sqrt{\log(3x - 2x^2)}$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Πρέπει: } \begin{cases} 3x - 2x^2 > 0 \\ \log(3x - 2x^2) \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(0, \frac{3}{2}\right) \\ 3x - 2x^2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x \in \left(0, \frac{3}{2}\right) \\ -2x^2 + 3x - 1 \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(0, \frac{3}{2}\right) \\ x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases} \end{aligned}$$



Άρα $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Άσκηση 14

Να λυθεί η εξίσωση: $x^{\log_2 x} = 16$

Λύση

Πρέπει $x > 0$, $x \neq 1$.

$$\text{Είναι } x^{\log_2 x} = 16 \Leftrightarrow \log_2 (x^{\log_2 x}) = \log_2 16 \Leftrightarrow \log_2 x \cdot \log_2 x = \log_2 2^4 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^2 = 4 \\ x = 2^{-2} = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ δεκτές}$$

Άσκηση 15

Δίνεται η συνάρτηση $Q(x) = 2\kappa + \lambda e^{\alpha x}$, $x \geq 0$, $\kappa \cdot \lambda \cdot \alpha \neq 0$. Αν είναι $Q(0) = 0$, $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 3$,

$Q(1) = 4$: i. Να βρείτε τον τύπο της $Q(x)$

ii. Να λυθεί η εξίσωση $Q(x) = 2$

Λύση

i. Η συνάρτηση γίνεται $Q(x) = 2\kappa + \lambda(e^{\alpha})^x$ (1)

Θέτουμε $e^{\alpha} = \beta > 0$ και η (1) γίνεται $Q(x) = 2\kappa + \lambda\beta^x$ (2)

Από την υπόθεση έχουμε:

$$Q(0) = 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 2\kappa + \lambda\beta^0 = 0 \Leftrightarrow 2\kappa + \lambda = 0 \Leftrightarrow 2\kappa = -\lambda \quad (3)$$

$$Q\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 2\kappa + \lambda\beta^{1/2} = 3 \Leftrightarrow 2\kappa + \lambda\sqrt{\beta} = 3 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} -\lambda + \lambda\sqrt{\beta} = 3 \Leftrightarrow \lambda(-1 + \sqrt{\beta}) = 3 \quad (4)$$

$$Q(1) = 4 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 2\kappa + \lambda\beta = 4 \Leftrightarrow 2\kappa + \lambda\beta = 4 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} -\lambda + \lambda\beta = 4 \Leftrightarrow \lambda(-1 + \beta) = 4 \quad (5)$$

Διαιρούμε τις (4) και (5) κατά μέλη και έχουμε:

$$\frac{\lambda(-1+\sqrt{\beta})}{\lambda(-1+\beta)} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{-1+\sqrt{\beta}}{-1+\beta} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow -3+3\beta = -4+4\sqrt{\beta} \Leftrightarrow 3\beta-4\sqrt{\beta}+1=0 \quad (6)$$

Θέτουμε $\sqrt{\beta} = \omega \geq 0$ (7) και η εξίσωση (6) γίνεται:

$$3\omega^2 - 4\omega + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 1 \\ \text{ή} \\ \omega = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\beta} = 1 \\ \text{ή} \\ \sqrt{\beta} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

• Αν $\sqrt{\beta} = 1 \Leftrightarrow \beta = 1 \Leftrightarrow e^a = 1 \Leftrightarrow a = 0$ αδύνατο από υπόθεση.

$$\text{Άρα } \sqrt{\beta} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{9}.$$

$$\text{Για } \beta = \frac{1}{9} \text{ η (5) γίνεται: } \lambda\left(-1+\frac{1}{9}\right) = 4 \Leftrightarrow \lambda\left(-\frac{8}{9}\right) = 4 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{36}{8} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{9}{2}.$$

$$\text{Για } \lambda = -\frac{9}{2} \text{ η (3) γίνεται: } 2\kappa = -\left(-\frac{9}{2}\right) \Leftrightarrow \kappa = \frac{9}{4}.$$

$$\text{Άρα από την (2) η συνάρτηση είναι η } Q(x) = 2\frac{9}{4} + \left(-\frac{9}{2}\right)\left(\frac{1}{9}\right)^x \Leftrightarrow Q(x) = \frac{9}{2} - \frac{9}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^x.$$

$$\text{ii. } Q(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{9}{2} - \frac{9}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^x = 2 \Leftrightarrow 9 - 9 \cdot 9^{-x} = 4 \Leftrightarrow 9^{-x} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \log 9^{-x} = \log \frac{5}{9} \Leftrightarrow$$

$$-x \log 9 = \log \frac{5}{9} \Leftrightarrow x = -\frac{\log \frac{5}{9}}{\log 9} \Leftrightarrow x = -\log_9 \left(\frac{5}{9}\right)$$

Δ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $\log_2(2x+3) = \log_2 3 - \log_2(x-1)$

ii. $2\log_5(1-x) - \log_5 4 = \log_5 9$

iii. $\ln(x^2 - x) - 2 = \ln(x-1)$

(Απ.: i. $\frac{3}{2}$, ii. -5 , iii. e^2)

2. Να υπολογιστεί ο x στις παρακάτω εξισώσεις:

$$\text{i. } \log_{2\sqrt{2}} x = 4 \quad \text{ii. } \log_{1/2} x = -3 \quad \text{iii. } \log_3 (x-1) = 2 \quad \text{iv. } \log_2 x = -\frac{3}{2}$$

$$(\text{Απ.: i. } 64, \text{ ii. } 8, \text{ iii. } 10, \text{ iv. } \frac{\sqrt{2}}{4})$$

3. Για ποια τιμή του a ισχύει:

$$\text{i. } \log_a 8 = -3 \quad \text{ii. } \log_a \frac{2}{3} = -1 \quad \text{iii. } \log_2 2\sqrt{2} = \frac{3}{2} \quad \text{iv. } \log_a \frac{1}{27} = 3$$

$$(\text{Απ.: i. } \frac{1}{2}, \text{ ii. } \frac{3}{2}, \text{ iii. } 2, \text{ iv. } \frac{1}{3})$$

4. Για ποια τιμή του x ισχύει:

$$\text{i. } \log_{3\sqrt{3}} \frac{1}{3} = x \quad \text{ii. } \log_{1/2} 8 = x \quad \text{iii. } \log_{\sqrt{3}/2} \frac{3\sqrt{3}}{8} = x \quad \text{iv. } \log_{5/2} \frac{125}{8} = x$$

$$(\text{Απ.: i. } -\frac{2}{3}, \text{ ii. } -3, \text{ iii. } 3, \text{ iv. } 3)$$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i. } 2^x = 5^{1-x} \quad \text{ii. } 7^{1-\ln x} = 49 \quad \text{iii. } 3e^{-2x} - 8 = 0 \quad \text{iv. } 2^{2x} = 3^{x+1}$$

$$(\text{Απ.: i. } \log 5, \text{ ii. } \frac{1}{e}, \text{ iii. } -\frac{\ln \frac{8}{3}}{2}, \text{ iv. } \log_{\frac{4}{3}} 3)$$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις: **i.** $\log(2^{x+1} + 1) - \log 4^x = \log 3$

$$\text{ii. } \log[\log(2x^2 + x - 11)] = 0$$

$$\text{iii. } x + \log(1 + 2^x) = x \log 5 + \log 6$$

$$(\text{Απ.: i. } 0, \text{ ii. } 1, \text{ iii. } 3, \frac{7}{2})$$

7. Να βρεθούν τα σημεία στα οποία τέμνουν τον άξονα x' οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$\text{i. } f(x) = \log(4^x - 8), g(x) = \log 7 + x \log 2$$

$$\text{ii. } f(x) = \ln x (\ln x + 4), g(x) = 8 \ln x - 3$$

$$(\text{Απ.: i. } A(3, \log 56), \text{ ii. } A(e, 5), B(e^3, 21))$$

8. Να λυθεί η εξίσωση:

i. $\log_3 x \cdot \log_9 x = \frac{9}{2}$

ii. $\log_\alpha x \cdot \log_{\alpha^2} x \cdot \log_{\alpha^3} x \cdot \dots \cdot \log_{\alpha^v} x = \frac{1}{v!}, 1 \neq \alpha > 0, v \in \mathbb{N}^*. \text{ Όπου } v! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot v.$

(Απ.: i. $x_1 = 27, x_2 = \frac{1}{27}$, ii. $\forall v = 2k: x_1 = \alpha, x_2 = \frac{1}{\alpha}, \forall v = 2k+1: x = \alpha$)

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $(x^2 - 1)e^{\ln(x-2)} = \ln e^{x+1}$

ii. $2e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$

iii. $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$

(Απ.: i. $x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$, ii. $\begin{cases} x = 0 \\ x = -\ln 2 \end{cases}$, iii. $\begin{cases} x = 100 \\ x = \frac{1}{100} \end{cases}$)

10. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i. $\log_{1/3}(3x - 2) > 0$

ii. $\log_{1/4}(3 + 5x) > -1$

iii. $\log_4 \frac{3x}{x+2} > \frac{1}{2}$

(Απ.: i. $\frac{2}{3} < x < 1$, ii. $-\frac{3}{5} < x < \frac{1}{5}$, iii. $x > 4$)

11. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i. $2(\log x)^2 - \log x^5 < -4$

ii. $\log_\alpha(3x - 8) > \log_\alpha(x + 1)$

iii. $\log[\log(3x^2 - 8x + 15)] < 0$

(Απ.: i. $\sqrt{10} < x < 100$, ii. $\begin{cases} \alpha v \alpha > 1, & x > 4,5 \\ \alpha v 0 < \alpha < 1, & \text{αδύνατη} \end{cases}$, iii. $\frac{2}{3} < x < 2$)

12. Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{1}{\ln x - 1} > \frac{2}{3 \ln x + 1}$.

(Απ.: $\frac{1}{e^3} < x < \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, x > e$)

13. Να λυθεί η ανίσωση: $3^{\log_2(x^2 + 3x)} \leq 9$

(Απ.: $x \in (-4, -3) \cup (0, 1)$)

14. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x - y = -3 \end{cases}$$

(Απ.: $(x, y) = (4, 5)$)

15. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \log_2 x + \log_2 y = 1 \end{cases}$$

(Απ.: $(x, y) = \begin{pmatrix} (1, 2) \\ (2, 1) \end{pmatrix}$)

16. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 2^{\log x} \cdot 3^{\log y} = 12 \\ 4^{\log x} - 9^{\log y} = 7 \end{cases}$$

(Απ.: $(x, y) = (100, 10)$)

17. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \log_2 (x - y) + \log_2 (x + y) = \log_2 4 \\ \log_2 (x^2 + y^2) - \log_2 3 = 1 \end{cases}$$

(Απ.: $(x, y) = \begin{pmatrix} (\sqrt{10}, \sqrt{6}) \\ (\sqrt{10}, -\sqrt{6}) \end{pmatrix}$)

18. Να λυθούν τα συστήματα: **i.**
$$\begin{cases} \log x + \log y = \frac{5}{2} \\ \log x - \log y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

ii.
$$\begin{cases} (\log x)^2 + (\log y)^2 = 5 \\ \log x - \log y = 3 \end{cases}$$

(Απ.: **i.** $(x, y) = (100, \sqrt{10})$, **ii.** $(x, y) = \left(10, \frac{1}{100}\right)$)

19. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 2^y - 2^x = 4 \\ \log(2x + 2) - \log(y + 3) = 0 \end{cases}$$

(Απ.: $(x, y) = (2, 3)$)

20. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} x^y = y^x \\ x^2 = y^3 \end{cases}$$

(Απ.: $(x, y) = (1, 1)$ ή $(x, y) = \left(\frac{27}{8}, \frac{27}{2}\right)$)

21. Να βρεθούν για ποια x ορίζονται οι παρακάτω συναρτήσεις:

i. $f(x) = \ln \frac{x+1}{1-x}$

ii. $g(x) = \frac{\log(x^2 - 2x - 80)}{\sqrt{100 - x^2}}$

(Απ.: i. $x \in (-1, 1)$, ii. $x \in (-10, -8)$)

22. Να βρεθεί για ποια x ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = \log_{(2x^2 - 2x + 1)} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 + 1}$

(Απ.: $x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{2}{3}\right) \cup (1, +\infty)$)

23. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln(9^x - 4 \cdot 3^x + 3)$

(Απ.: $x < 0$ ή $x > 1$)

24. Να λυθεί η εξίσωση

i. $\log_v x + \log_{\sqrt{v}} x + \log_{\sqrt[3]{v}} x + \dots + \log_{\sqrt[v]{v}} x = \frac{v+1}{2}, v \geq 2, v \in \mathbb{N}.$

ii. $\log_{\sqrt{2}} x \cdot \log_2 x \cdot \log_{2\sqrt{2}} x \cdot \log_4 x = 54$

(Απ.: i. $\sqrt[v]{v}$, ii. $x = 8$ ή $x = \frac{1}{8}$)

25. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $\ln x^2 + \log_x e^2 = 5$

ii. $x^2 \cdot \log_x 25 \cdot \log_5 x = x$

(Απ.: i. $x_1 = e^2, x_2 = \sqrt{e}$, ii. $x = \frac{1}{2}$)

26. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $(\ln \alpha)x^2 - (\ln \alpha + 3)x + 3 = 0, 1 \neq \alpha > 0$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 .

Στην συνέχεια να βρεθεί ο α αν $x_1 \cdot x_2 = 27$.

(Απ.: $\alpha = \sqrt[3]{e}$)

27. Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{\ln x + 10}{\ln x - 5} - \frac{10}{\ln x} > \frac{11}{6}$

(Απ.: $x \in (e^{-4}, 1) \cup (e^5, e^{15})$)

Ε

“ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ”

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{\ln(x^2 - 4x + 3)}{\sqrt{9 - x^2}}$.

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{2-x}{2+x}$ είναι περιττή.

3. Να λύσετε την ανίσωση $\log_a(2x+1) > \log_a(x+3)$ με $a > 0, a \neq 1$.

4. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} \log(x+y) + \log(x-y) = \log 15 \\ \log(x^2 + y^2) - 1 = \log 1,7 \end{cases}$$