



Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών

A. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Οι γωνίες στους παρακάτω τύπους, αν δεν δίνονται περιορισμοί, θα θεωρούμε ότι είναι τέτοιες ώστε να έχουν νόημα οι τριγωνομετρικοί αριθμοί και οι παραστάσεις.

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ | $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$ |
| $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ | $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$ |
| $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$ | $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$ |
| $\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot\alpha \cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$ | $\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot\alpha \cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$ |

B. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Για την εύρεση τριγωνομετρικών αριθμών μιας συγκεκριμένης γωνίας προσπαθούμε αρχικά να γράψουμε αυτή σαν άθροισμα ή διαφορά γωνιών ή πολ/σίων τους ή υποπολ/σίων τους, άλλων γωνιών με γνωστούς τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί το $\eta\mu 165^\circ$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $165^\circ = 2 \cdot 60^\circ + 45^\circ$ οπότε:

$$\eta\mu 165^\circ = \eta\mu(120^\circ + 45^\circ) = \eta\mu 120^\circ \sin 45^\circ + \eta\mu 45^\circ \sin 120^\circ =$$

$$\eta\mu(90^\circ + 30^\circ) \sin 45^\circ + \eta\mu 45^\circ \sin(90^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ \sin 45^\circ - \eta\mu 45^\circ \eta\mu 30^\circ =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \quad \text{Δηλαδή } \eta\mu 165^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

- Για να αποδείξουμε μια τριγωνομετρική ταυτότητα συνήθως ακολουθούμε έναν από τους παρακάτω τρόπους:
 - Από το ένα μέλος συνήθως το πιο πολύπλοκο και με τη βοήθεια κατάλληλων τύπων και πράξεων προσπαθούμε να καταλήξουμε στο άλλο.
 - Μετασχηματίζουμε την ταυτότητα μέχρι να καταλήξουμε σε ισοδύναμη ταυτότητα που να είναι φανερό ότι αληθεύει.
 - Παίρνουμε κάθε μέλος ξεχωριστά και με τη βοήθεια κατάλληλων τύπων και πράξεων προσπαθούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.
- Όταν σε τριγωνομετρική ταυτότητα περιέχονται όροι, καθένας από τους οποίους προκύπτει με κυκλική εναλλαγή των γραμμμάτων που περιέχει από τους άλλους, τότε αρκεί να υπολογίζουμε ένα μόνο από αυτούς τους όρους και οι άλλοι υπολογίζονται όμοια.

Παράδειγμα 2

Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\eta\mu(\alpha - \beta)} = \frac{\sigma\phi\beta + \sigma\phi\alpha}{\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha}$

Λύση

$$\text{Είναι } \frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\eta\mu(\alpha - \beta)} = \frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\alpha}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\alpha} = \frac{\frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta} + \frac{\eta\mu\beta\sigma\upsilon\alpha}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}}{\frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta} - \frac{\eta\mu\beta\sigma\upsilon\alpha}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}} = \frac{\sigma\phi\beta + \sigma\phi\alpha}{\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha}$$

Παράδειγμα 3

Να αποδείξετε ότι $\frac{\eta\mu(\alpha - \beta)}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta} + \frac{\eta\mu(\beta - \gamma)}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma} + \frac{\eta\mu(\gamma - \alpha)}{\eta\mu\gamma\eta\mu\alpha} = 0$

Λύση

$$\text{Είναι: } \frac{\eta\mu(\alpha - \beta)}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta} = \frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\alpha}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta} = \frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta} - \frac{\eta\mu\beta\sigma\upsilon\alpha}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta} = \sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha \quad (1)$$

$$\text{Όμοια βρίσκουμε ότι: } \frac{\eta\mu(\beta - \gamma)}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma} = \sigma\phi\gamma - \sigma\phi\beta \quad (2)$$

$$\text{και } \frac{\eta\mu(\gamma - \alpha)}{\eta\mu\gamma\eta\mu\alpha} = \sigma\phi\alpha - \sigma\phi\gamma \quad (3)$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{\eta\mu(\alpha - \beta)}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta} + \frac{\eta\mu(\beta - \gamma)}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma} + \frac{\eta\mu(\gamma - \alpha)}{\eta\mu\gamma\eta\mu\alpha} = \sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha + \sigma\phi\gamma - \sigma\phi\beta + \sigma\phi\alpha - \sigma\phi\gamma = 0$$

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Αν δίνεται ισότητα γωνιών και ζητείται ισότητα τριγωνομετρικών αριθμών αυτών των

γωνιών χρησιμοποιούμε τη συνεπαγωγή: Αν $\alpha = \beta$ τότε:

$$\begin{cases} \eta\mu\alpha = \eta\mu\beta \\ \sigma\upsilon\alpha\alpha = \sigma\upsilon\eta\beta \\ \epsilon\phi\alpha = \epsilon\phi\beta \\ \sigma\phi\alpha = \sigma\phi\beta \end{cases}$$
Παράδειγμα 4

Αν $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$ να δειχθεί ότι ισχύει: $(\sigma\phi\beta + \sqrt{3})(\sigma\phi\alpha - \sqrt{3}) = -4$

Λύση**1ος τρόπος**

Αφού $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$ είναι διαδοχικά:

$$\sigma\phi(\alpha - \beta) = \sigma\phi \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta + 1}{\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta + 1 = \sqrt{3}\sigma\phi\beta - \sqrt{3}\sigma\phi\alpha \Leftrightarrow$$

$$\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta + \sqrt{3}\sigma\phi\alpha - \sqrt{3}\sigma\phi\beta - 3 = -4 \Leftrightarrow \sigma\phi\alpha(\sigma\phi\beta + \sqrt{3}) - \sqrt{3}(\sigma\phi\beta + \sqrt{3}) = -4 \Leftrightarrow$$

$$(\sigma\phi\beta + \sqrt{3})(\sigma\phi\alpha - \sqrt{3}) = -4$$

2ος τρόπος

Από τη σχέση $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$ παίρνουμε $\alpha = \beta + \frac{\pi}{6}$, οπότε:

$$\sigma\phi\alpha = \sigma\phi\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \sigma\phi\alpha = \frac{\sigma\phi\beta\sigma\phi\frac{\pi}{6} - 1}{\sigma\phi\beta + \sigma\phi\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow \sigma\phi\alpha = \frac{\sqrt{3}\sigma\phi\beta - 1}{\sigma\phi\beta + \sqrt{3}} \quad (1)$$

Το πρώτο μέλος της σχέσης που θέλουμε να δείξουμε γίνεται:

$$(\sigma\phi\beta + \sqrt{3})(\sigma\phi\alpha - \sqrt{3}) \stackrel{(1)}{=} (\sigma\phi\beta + \sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}\sigma\phi\beta - 1}{\sigma\phi\beta + \sqrt{3}} - \sqrt{3}\right) =$$

$$(\sigma\phi\beta + \sqrt{3})\frac{\sqrt{3}\sigma\phi\beta - 1 - \sqrt{3}\sigma\phi\beta - 3}{\sigma\phi\beta + \sqrt{3}} = -4$$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Όταν αναφερόμαστε σε τρίγωνο $AB\Gamma$ χρησιμοποιούμε την ισότητα: $A + B + \Gamma = \pi$ από όπου προκύπτουν:

$$\begin{aligned} \eta\mu(A + B) &= \eta\mu(\pi - \Gamma) = \eta\mu\Gamma & \sigma\upsilon\nu(A + B) &= \sigma\upsilon\nu(\pi - \Gamma) = -\sigma\upsilon\nu\Gamma \\ \eta\mu\left(\frac{A+B}{2}\right) &= \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Gamma}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} & \sigma\upsilon\nu\left(\frac{A+B}{2}\right) &= \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Gamma}{2}\right) = \eta\mu\frac{\Gamma}{2} \quad \kappa.\lambda.\pi. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5

Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει:

$$\varepsilon\varphi 2A + \varepsilon\varphi 2B + \varepsilon\varphi 2\Gamma = \varepsilon\varphi 2A \varepsilon\varphi 2B \varepsilon\varphi 2\Gamma$$

Λύση

Ισχύει:

$$A + B + \Gamma = \pi \Leftrightarrow 2A + 2B + 2\Gamma = 2\pi \Leftrightarrow 2A + 2B = 2\pi - 2\Gamma$$

$$\text{Οπότε: } \varepsilon\varphi(2A + 2B) = \varepsilon\varphi(2\pi - 2\Gamma) \Leftrightarrow \frac{\varepsilon\varphi 2A + \varepsilon\varphi 2B}{1 - \varepsilon\varphi 2A \varepsilon\varphi 2B} = -\varepsilon\varphi 2\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi 2A + \varepsilon\varphi 2B = -\varepsilon\varphi 2\Gamma + \varepsilon\varphi 2A \varepsilon\varphi 2B \varepsilon\varphi 2\Gamma \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 2A + \varepsilon\varphi 2B + \varepsilon\varphi 2\Gamma = \varepsilon\varphi 2A \varepsilon\varphi 2B \varepsilon\varphi 2\Gamma$$

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Ένας τρόπος λύσης της εξίσωσης $\alpha\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu x = \gamma$ με $\alpha\beta \neq 0$ είναι και ο εξής:

$$\text{Διαιρούμε και τα δύο μέλη με το } \beta \text{ και έχουμε: } \frac{\alpha}{\beta}\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \frac{\gamma}{\beta}$$

$$\text{Επειδή υπάρχει } \omega \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ έτσι ώστε } \varepsilon\varphi\omega = \frac{\alpha}{\beta} \text{ γίνεται: } \varepsilon\varphi\omega\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow \eta\mu\omega\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\gamma}{\beta}\sigma\upsilon\nu\omega \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(x - \omega) = \frac{\gamma}{\beta}\sigma\upsilon\nu\omega \quad (1)$$

Η τελευταία εξίσωση έχει λύση, αν και μόνο αν, $\left|\frac{\gamma}{\beta}\sigma\upsilon\nu\omega\right| \leq 1$ που ισοδυναμεί με $\alpha^2 + \beta^2 \geq \gamma^2$, που είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει επίλυση η αρχική.

Παράδειγμα 6

Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{3}\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 1$

Λύση

Επειδή $\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ η εξίσωση γίνεται:

$$\varepsilon\varphi \frac{\pi}{3} \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu \frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}} \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu \frac{\pi}{3} \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ x - \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Άρα } x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \text{ ή } x = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Γ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των τόξων 15° και 75° .

Λύση

$$\text{Είναι: } \sigma\upsilon\nu 75^\circ = \eta\mu 15^\circ = \eta\mu (45^\circ - 30^\circ) = \eta\mu 45^\circ \sigma\upsilon\nu 30^\circ - \sigma\upsilon\nu 45^\circ \eta\mu 30^\circ =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Είναι: } \eta\mu 75^\circ = \sigma\upsilon\nu 15^\circ = \sigma\upsilon\nu (45^\circ - 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 45^\circ \sigma\upsilon\nu 30^\circ + \eta\mu 45^\circ \eta\mu 30^\circ =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Είναι: } \sigma\varphi 75^\circ = \varepsilon\varphi 15^\circ = \frac{\eta\mu 15^\circ}{\sigma\upsilon\nu 15^\circ} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{4} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{Είναι: } \varepsilon\varphi 75^\circ = \sigma\varphi 15^\circ = \frac{1}{\varepsilon\varphi 15^\circ} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

Άσκηση 2

Αν εφα και εφβ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + \kappa x + \lambda = 0$, τότε να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $\Pi = \eta\mu^2(\alpha + \beta) + \kappa\eta\mu(\alpha + \beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) + \lambda\sigma\upsilon\nu^2(\alpha + \beta)$ συναρτήσει των κ και λ .

Λύση

Επειδή εφα και εφβ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + \kappa x + \lambda = 0$ από τους τύπους του Vieta ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta = -\frac{\kappa}{1} = -\kappa \quad (1) \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta = \frac{\lambda}{1} = \lambda \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \Pi &= \sigma\upsilon\nu^2(\alpha+\beta) \left[\frac{\eta\mu^2(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+\beta)} + \frac{\kappa\eta\mu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+\beta)} + \frac{\lambda\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+\beta)} \right] = \\ &= \sigma\upsilon\nu^2(\alpha+\beta) [\epsilon\varphi^2(\alpha+\beta) + \kappa\epsilon\varphi(\alpha+\beta) + \lambda] = \frac{\epsilon\varphi^2(\alpha+\beta) + \kappa\epsilon\varphi(\alpha+\beta) + \lambda}{1 + \epsilon\varphi^2(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

$$\text{και επειδή } \epsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\epsilon\varphi\alpha + \epsilon\varphi\beta}{1 - \epsilon\varphi\alpha\epsilon\varphi\beta} \stackrel{(1)}{=} \frac{-\kappa}{1-\lambda} = \frac{\kappa}{\lambda-1}, \text{ έχουμε:}$$

$$\Pi = \frac{\frac{\kappa^2}{(\lambda-1)^2} + \frac{\kappa^2}{\lambda-1} + \lambda}{1 + \frac{\kappa^2}{(\lambda-1)^2}} = \frac{\kappa^2 + \kappa^2(\lambda-1) + \lambda(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)^2 + \kappa^2} = \frac{\kappa^2\lambda + \lambda(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)^2 + \kappa^2} = \frac{\lambda[\kappa^2 + (\lambda-1)^2]}{(\lambda-1)^2 + \kappa^2} = \lambda$$

Άρα $\Pi = \lambda$.

Άσκηση 3

Ν' αποδειχθεί ότι αναγκαία και ικανή συνθήκη για να ισχύει η σχέση

$\epsilon\varphi x + \epsilon\varphi y + \epsilon\varphi z = \epsilon\varphi x \cdot \epsilon\varphi y \cdot \epsilon\varphi z$ **(1) είναι** $x + y + z = \kappa\pi$ **(2), όπου κ ακέραιος.**

Λύση

Η συνθήκη είναι αναγκαία. Δηλαδή από την (1) έπεται η (2). Από την (1) έχουμε:

$$\epsilon\varphi x + \epsilon\varphi y = \epsilon\varphi x \cdot \epsilon\varphi y \cdot \epsilon\varphi z - \epsilon\varphi z \Leftrightarrow \epsilon\varphi x + \epsilon\varphi y = \epsilon\varphi z(1 - \epsilon\varphi x\epsilon\varphi y) \quad (3).$$

$$\text{Αν } 1 - \epsilon\varphi x\epsilon\varphi y = 0 \Leftrightarrow \epsilon\varphi x\epsilon\varphi y = 1 \quad (4),$$

τότε από την (3) έπεται $\epsilon\varphi x + \epsilon\varphi y = 0 \Leftrightarrow \epsilon\varphi y = -\epsilon\varphi x$ οπότε η (4) γράφεται

$$\epsilon\varphi x(-\epsilon\varphi x) = 1 \Leftrightarrow -\epsilon\varphi^2 x = 1 \Leftrightarrow \epsilon\varphi^2 x = -1 \text{ άτοπον. Άρα } 1 - \epsilon\varphi x\epsilon\varphi y \neq 0 \text{ οπότε από την (3)}$$

$$\text{έπεται: } \frac{\epsilon\varphi x + \epsilon\varphi y}{1 - \epsilon\varphi x\epsilon\varphi y} = -\epsilon\varphi z \Leftrightarrow \epsilon\varphi(x+y) = \epsilon\varphi(-z) \text{ από τις οποίες έπεται:}$$

$$x+y = \kappa\pi - z \quad \text{ή} \quad x+y+z = \kappa\pi, \text{ όπου } \kappa \text{ ακέραιος.}$$

Η συνθήκη είναι ικανή. Δηλαδή από την (2), όπου κ ακέραιος έπεται η (1).

Από την (2) έπεται $x+y = \kappa\pi - z$ και συνεπώς $\epsilon\varphi(x+y) = \epsilon\varphi(\kappa\pi - z) = \epsilon\varphi(-z) = -\epsilon\varphi z$, άρα

$$\frac{\epsilon\varphi x + \epsilon\varphi y}{1 - \epsilon\varphi x\epsilon\varphi y} = -\epsilon\varphi z \Leftrightarrow \epsilon\varphi x + \epsilon\varphi y = -\epsilon\varphi z + \epsilon\varphi x \cdot \epsilon\varphi y \cdot \epsilon\varphi z \Leftrightarrow \epsilon\varphi x + \epsilon\varphi y + \epsilon\varphi z = \epsilon\varphi x \cdot \epsilon\varphi y \cdot \epsilon\varphi z$$

Άσκηση 4

Αν Α, Β, Γ είναι γωνίες τριγώνου να δειχθεί ότι: $\sigma\varphi^2 A + \sigma\varphi^2 B + \sigma\varphi^2 \Gamma \geq 1$

Λύση

$$\text{Εφόσον } A+B+\Gamma = \pi \text{ ισχύει: } \sigma\varphi(A+B) = \sigma\varphi(\pi - \Gamma) = -\sigma\varphi\Gamma \Leftrightarrow \frac{\sigma\varphi A \sigma\varphi B - 1}{\sigma\varphi B + \sigma\varphi A} = -\sigma\varphi\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\phi A \sigma\phi B + \sigma\phi B \sigma\phi \Gamma + \sigma\phi A \sigma\phi \Gamma = 1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε: } \sigma\phi^2 A + \sigma\phi^2 B + \sigma\phi^2 \Gamma &\geq 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \sigma\phi^2 A + \sigma\phi^2 B + \sigma\phi^2 \Gamma \geq \sigma\phi A \sigma\phi B + \sigma\phi B \sigma\phi \Gamma + \sigma\phi \Gamma \sigma\phi A \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\sigma\phi^2 A + 2\sigma\phi^2 B + 2\sigma\phi^2 \Gamma \geq 2\sigma\phi A \sigma\phi B + 2\sigma\phi B \sigma\phi \Gamma + 2\sigma\phi \Gamma \sigma\phi A \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\sigma\phi^2 A - 2\sigma\phi A \sigma\phi B + \sigma\phi^2 B) + (\sigma\phi^2 B - 2\sigma\phi B \sigma\phi \Gamma + \sigma\phi^2 \Gamma) + (\sigma\phi^2 \Gamma - 2\sigma\phi \Gamma \sigma\phi A + \sigma\phi^2 A) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (\sigma\phi A - \sigma\phi B)^2 + (\sigma\phi B - \sigma\phi \Gamma)^2 + (\sigma\phi \Gamma - \sigma\phi A)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

Α.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να βρεθεί με τι ισούται η καθεμιά από τις παραστάσεις:

α. $\eta\mu 5x \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 5x \eta\mu x$

β. $\sigma\upsilon\nu 3x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu 3x \eta\mu x$

γ. $\eta\mu(x+y) \sigma\upsilon\nu y - \sigma\upsilon\nu(x+y) \eta\mu y$

δ. $\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu(x+y) + \eta\mu x \eta\mu(x+y)$

ε. $\frac{\epsilon\phi 4x - \epsilon\phi x}{1 + \epsilon\phi 4x \epsilon\phi x}$

στ. $\frac{\sigma\phi 3x \sigma\phi x - 1}{\sigma\phi 3x - \sigma\phi x}$

2. Ν' αποδειχθεί ότι:

α. $\frac{\epsilon\phi \alpha + \epsilon\phi \beta}{\epsilon\phi \alpha - \epsilon\phi \beta} = \frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\eta\mu(\alpha - \beta)}$

β. $\frac{\sigma\phi \beta - \epsilon\phi \alpha}{\sigma\phi \beta + \epsilon\phi \alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)}$

γ. $\epsilon\phi^2 \alpha - \epsilon\phi^2 \beta = \frac{\eta\mu(\alpha + \beta) \cdot \eta\mu(\alpha - \beta)}{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \beta}$

δ. $\frac{\epsilon\phi(\alpha + \beta) + \epsilon\phi(\alpha - \beta)}{\epsilon\phi(\alpha + \beta) - \epsilon\phi(\alpha - \beta)} = \frac{\epsilon\phi \alpha}{\epsilon\phi \beta} \cdot \frac{1 + \epsilon\phi^2 \beta}{1 + \epsilon\phi^2 \alpha}$

3. Ν' αποδειχθεί ότι:

α. $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu^2 \alpha - \eta\mu^2 \beta$

β. $\eta\mu \alpha \cdot \eta\mu(\beta - \gamma) + \eta\mu \beta \cdot \eta\mu(\gamma - \alpha) + \eta\mu \gamma \cdot \eta\mu(\alpha - \beta) = 0$

4. Ν' αποδειχθεί ότι αν $x + y = 45^\circ$, τότε $(1 + \epsilon\phi x) \cdot (1 + \epsilon\phi y) = 2$.

5. Ν' αποδειχθεί ότι: $\eta\mu(\alpha + \beta) \cdot \sigma\upsilon\nu \beta - \eta\mu(\alpha + \gamma) \cdot \sigma\upsilon\nu \gamma = \eta\mu(\beta - \gamma) \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta + \gamma)$

6. Ν' αποδειχθεί ότι αν $x + y = 225^\circ$, τότε $\frac{\sigma\phi x \cdot \sigma\phi y}{(1 + \sigma\phi x) \cdot (1 + \sigma\phi y)} = \frac{1}{2}$

7. Να αποδειχθεί ότι αν $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) \cdot \eta\mu(\gamma - \delta) = \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \cdot \eta\mu(\gamma + \delta)$, τότε

$$\sigma\phi \delta = \sigma\phi \alpha \cdot \sigma\phi \beta \cdot \sigma\phi \gamma$$

8. Ν' αποδειχθεί ότι:

$$\alpha. \sin^2(\alpha + \beta) + \sin^2\beta - 2\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta = \eta\mu^2\alpha$$

$$\beta. \eta\mu^2(\alpha + \beta) + \eta\mu^2\beta - 2\eta\mu(\alpha + \beta) \cdot \eta\mu\beta \cdot \sin\alpha = \eta\mu^2\alpha$$

$$\gamma. \eta\mu x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \quad \delta. \sin x - \eta\mu x = \sqrt{2}\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

9. Ν' αποδειχθεί ότι οι παρακάτω παραστάσεις είναι ανεξάρτητες του x.

$$\alpha. \sin x + \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3} + x\right)$$

$$\beta. \sin^2 x + \sin^2(120^\circ + x) + \sin^2(240^\circ + x)$$

$$\gamma. \frac{\eta\mu(\alpha + x) - \eta\mu(\alpha - x)}{\sin(\beta - x) - \sin(\beta + x)}$$

$$\delta. \eta\mu^2 x + \eta\mu^2(120^\circ + x) + \eta\mu^2(240^\circ + x)$$

ε. $\sin^2 x - 2\sin x \cdot \sin\alpha \cdot \sin(\alpha + x) + \sin^2(\alpha + x)$ τόξα α, β, x, γ για τα οποία είναι

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \varepsilon\varphi\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \sin y = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \text{ ισχύει η σχέση}$$

$$\frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\eta\mu(x + y)} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

10. Ν' αποδειχθεί ότι αν Α, Β, Γ, Δ είναι γωνίες κυρτού τετραπλεύρου τότε ισχύει η σχέση:

$$\frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\gamma + \varepsilon\varphi\delta}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\gamma + \sigma\varphi\delta} = \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\gamma \cdot \varepsilon\varphi\delta$$

11. Ν' αποδειχθεί ότι αν $\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\gamma = 0$ τότε:

$$\varepsilon\varphi\alpha \cdot \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu(\beta + \gamma) = \varepsilon\varphi\beta \cdot \eta\mu\beta \cdot \eta\mu(\gamma + \alpha) = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \eta\mu\gamma \cdot \eta\mu(\alpha + \beta) = -\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma$$

12. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i. } 3\eta\mu x - \sqrt{3}\sin x = 3$$

$$\text{ii. } \eta\mu x + \sin x = \sqrt{2}$$

$$\text{iii. } \eta\mu x - \sin x = 1$$

$$\text{iv. } \eta\mu x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$$

13. Να αποδειχθεί ότι: $\varepsilon\varphi(45^\circ + \alpha) + \varepsilon\varphi(45^\circ - \alpha) = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

14. Αν $\alpha + \beta = 225^\circ$, να αποδειχθεί ότι: $\frac{\sigma\phi\alpha}{1+\sigma\phi\alpha} \cdot \frac{\sigma\phi\beta}{1+\sigma\phi\beta} = \frac{1}{2}$

15. Αν $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, να αποδειχθούν:

i. $\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta + \sigma\phi\beta\sigma\phi\gamma + \sigma\phi\alpha\sigma\phi\gamma = 1$

ii. $\sigma\phi^2\alpha + \sigma\phi^2\beta + \sigma\phi^2\gamma \geq 1$

iii. $\epsilon\phi^2 \frac{\alpha}{2} + \epsilon\phi^2 \frac{\beta}{2} + \epsilon\phi^2 \frac{\gamma}{2} \geq 1$

16. Σε κάθε τρίγωνο ABΓ ισχύει: $\eta\mu A\eta\mu(B + \Gamma) + \eta\mu B\eta\mu(\Gamma - A) + \eta\mu\Gamma\eta\mu(A - B) = 0$

17. Αν ισχύουν $\begin{cases} 3\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu(\alpha + 2\beta) \\ \eta\mu(\alpha + \beta), \eta\mu\beta \neq 0 \end{cases}$ να δειχθεί ότι: $\sigma\phi(\alpha + \beta)\sigma\phi\beta = -2$

18. Να δείξετε ότι:

i. $\eta\mu(\alpha + \beta)\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta = \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$

ii. $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$

iii. Σε κάθε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση:

$$\sigma\upsilon\nu\Gamma \sigma\upsilon\nu(A - B) - \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu(B - \Gamma) = \eta\mu B \eta\mu(A - \Gamma)$$

E

“ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ”

Να λυθεί η εξίσωση: $\eta\mu x + \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x = 2\lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}$

