

## **3ο Κεφάλαιο**



## Α.

## ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

- **Τριγωνομετρικοί αριθμοί που συνδέονται με τις οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου**

Έστω  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ) ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές  $\alpha, \beta, \gamma$ .

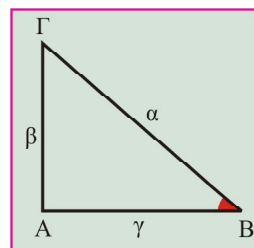
Γνωρίζουμε ότι:

$$\eta\mu B = \frac{\text{μήκος απέναντι πλευράς}}{\text{μήκος υποτείνουσας}} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\text{μήκος προσκείμενης πλευράς}}{\text{μήκος υποτείνουσας}} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\epsilon\phi B = \frac{\text{μήκος απέναντι κάθετης}}{\text{μήκος προσκείμενης κάθετης}} = \frac{\beta}{\gamma}$$

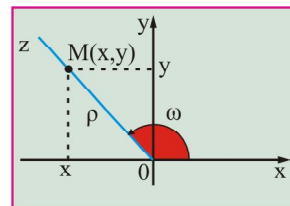
$$\sigma\phi B = \frac{\text{μήκος προσκείμενης κάθετης}}{\text{μήκος απέναντι κάθετης}} = \frac{\gamma}{\beta}$$



## Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας $\omega$ με $0 \leq \omega \leq 360^\circ$ .

Έστω  $\omega$  η γωνία που παράγεται από τον ημιάξονα  $Ox$  όταν περιστραφεί αριστερόστροφα (δηλαδή αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού).

Η ημιευθεία  $Ox$  λέγεται **αρχική πλευρά** της γωνίας  $\omega$  και η ημιευθεία  $Oz$  **τελική πλευρά** αυτής.



Για την γωνία  $\omega$  ορίζουμε:

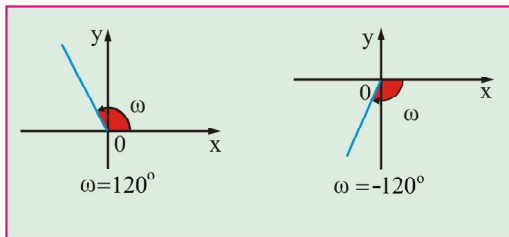
$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}, \quad \epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} (x \neq 0), \quad \sigma\phi\omega = \frac{x}{y} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} (y \neq 0)$$

όπου  $M(x, y)$  οποιοδήποτε σημείο της τελικής πλευράς διαφορετικό από το σημείο  $O$  και

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

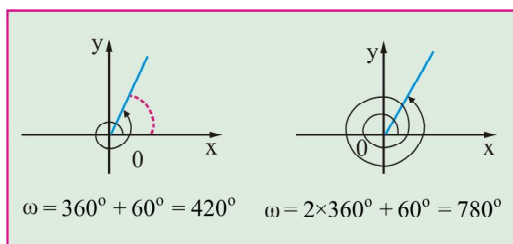
• Γωνίες μεγαλύτερες των  $360^\circ$  – “Αρνητικές γωνίες”

Αν φανταστούμε ότι ο ημιάξονας  $Ox$  περιστραφεί αριστερόστροφα (θετική φορά) κατά  $120^\circ$  λέμε ότι έχει διαγράψει θετική γωνία  $120^\circ$ . Αν περιστραφεί δεξιόστροφα κατά γωνία  $120^\circ$ , λέμε ότι έχει διαγράψει αρνητική γωνία  $120^\circ$  δηλαδή γωνία:  $-120^\circ$



Αν ο ημιάξονας  $Ox$  περιστραφεί αριστερόστροφα και αφού συμπληρώσει μια πλήρη περιστροφή ( $360^\circ$ ) διαγράψει επιπλέον γωνία  $60^\circ$ , τότε λέμε ότι έχει διαγράψει γωνία

$$\omega = 360^\circ + 60^\circ = 420^\circ$$



Αν συμπληρώσει δύο πλήρεις περιστροφές και επιπλέον γωνία  $60^\circ$  λέμε ότι έχει διαγράψει γωνία:

$$\omega = 2 \cdot 360^\circ + 60^\circ = 780^\circ$$

Γενικότερα, αν ο ημιάξονας  $Ox$  συμπληρώσει  $k$  πλήρεις περιστροφές κινούμενος αριστερόστροφα ή δεξιόστροφα και επιπλέον διαγράψει γωνία  $\omega$  τότε λέμε ότι έχει διαγράψει γωνία:

$$k \cdot 360^\circ + \omega, \text{ όπου } k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

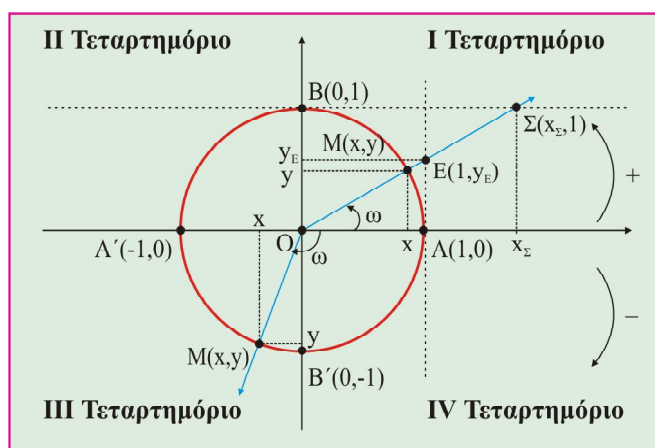
(αν  $k > 0$  έχει διαγράψει θετική γωνία, αν  $k < 0$  έχει διαγράψει αρνητική γωνία)

Οι γωνίες που δίνονται από τον τύπο (1) έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς, αφού όλες έχουν την ίδια τελική πλευρά δηλαδή:

$$\eta\mu(k \cdot 360^\circ + \omega) = \eta\mu\omega \quad \sigma\upsilon\nu(k \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\epsilon\varphi(k \cdot 360^\circ + \omega) = \epsilon\varphi\omega \quad \sigma\varphi(k \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\varphi\omega$$

• Τριγωνομετρικός κύκλος



Ο κύκλος με κέντρο την αρχή ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων και ακτίνα  $\rho = 1$ , λέγεται **τριγωνομετρικός κύκλος**.

Αν η τελική πλευρά μιας γωνίας  $\omega$  τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο  $M(x, y)$ , τότε:

$$\sin \omega = y \quad \text{και} \quad \eta \mu \omega = x$$

Φανερό είναι ότι:

$$-1 \leq \sin \omega \leq 1 \quad \text{και} \quad -1 \leq \eta \mu \omega \leq 1$$

αφού πάντα οι προβολές του  $M$  θα ανήκουν στα ευθύγραμμα τμήματα  $A'A$  και  $B'B$ . Επίσης τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας  $\omega$  φαίνονται στον επόμενο πίνακα και είναι ανάλογα με το τεταρτημόριο που βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας  $\omega$ .

**Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας  $\omega$**

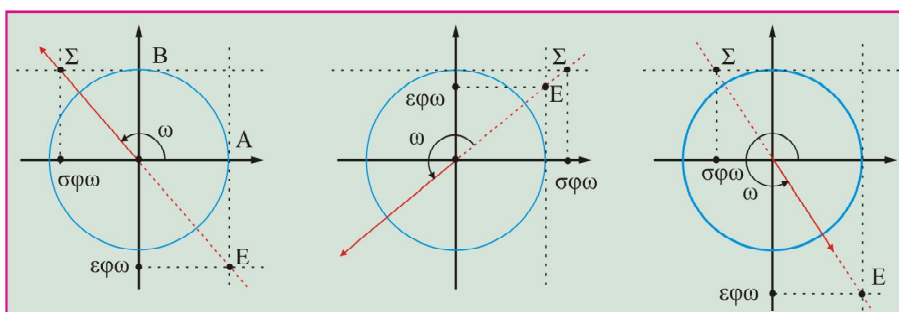
	Τεταρτημόρια			
	I	II	III	IV
$\eta \mu \omega$	+	+	-	-
$\sin \omega$	+	-	-	+
$\epsilon \phi \omega$	+	-	+	-
$\sigma \phi \omega$	+	-	+	-

### • Άξονες των εφαπτομένων και συνεφαπτομένων

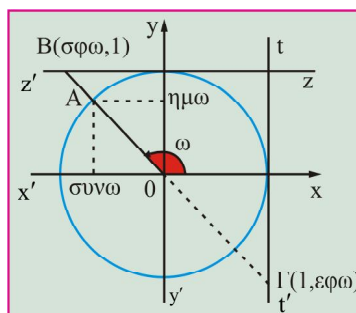
Στο σχήμα της προηγούμενης σελίδας, που φαίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο  $A(1,0)$  και την εφαπτομένη στο σημείο  $B(0,1)$ . Η εφαπτομένη στο  $A$  λέγεται ευθεία των εφαπτομένων και η εφαπτομένη στο  $B$  λέγεται ευθεία των συνεφαπτομένων.

Είναι:

$$\varepsilon\varphi\omega = y_{\Sigma} \text{ και } \sigma\varphi\omega = x_{\Sigma}$$



Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας  $\omega$  με τελική πλευρά στο 2<sup>ο</sup> τεταρτημόριο.



### • Το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών

Γνωρίζουμε το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης τόξων και συγκεκριμένα:

**Αν ένα κυκλικό τόξο έχει μήκος ίσο με το μήκος της ακτίνας του κύκλου που ανήκει, τότε αυτό χαρακτηρίζεται ως τόξο ενός ακτινίου (1 rad).**

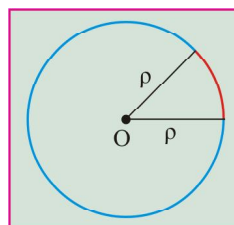
Επειδή το μήκος ενός κύκλου ακτίνας  $\rho$  ισούται με  $2\pi\rho$  (όπου  $\pi \approx 3,14$ ) είναι φανερό ότι κάθε κύκλος μπορεί να χαρακτηρίζεται και ως κυκλικό τόξο  $2\pi$  ακτινίων ( $2\pi$  rad)

Φανερό είναι επίσης ότι κάθε ημικύκλιο μπορεί να δηλωθεί και ως τόξο  $\pi$  ( $\approx 3,14$ ) ακτινίων και κάθε τεταρτημόριο (κύκλου), ως τόξο

$$\frac{\pi}{2} (\approx 1,57) \text{ ακτινίων.}$$

Προσδιορίζουμε την τιμή (έκφραση) ενός τόξου  $\mu^\circ$  (μοιρών) σε ακτίνια από τον τύπο:

$$\alpha = \frac{\mu^\circ}{180^\circ} \cdot \pi$$



αφού ο αριθμός  $\frac{\pi}{180}$  δηλώνει το μέρος της ακτίνας που καλύπτει τόξο μιας μοίρας,

δηλαδή κάθε κυκλικό τόξο ίσο προς το  $\frac{1}{360}$  του κύκλου που ανήκει.

**Ορίζουμε το ακτίνιο (1 rad) ως τη γωνία που όταν γίνει επίκεντρη ενός κύκλου (O,ρ), βαίνει σε τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ του κύκλου αυτού.**

π.χ.  $360^\circ$  αντιστοιχούν σε  $2\pi$  rad

$1^\circ$  αντιστοιχεί σε  $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$  rad

1 rad αντιστοιχεί σε  $\frac{360}{2\pi}$  μοίρες

$\alpha$  rad αντιστοιχεί σε  $\alpha \frac{360}{2\pi} = \alpha \frac{180}{\pi}$  μοίρες

$\mu^\circ$  αντιστοιχούν σε  $\frac{\pi}{180}\mu$  rad

#### • Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών βασικών γωνιών

$\omega$ (μοίρες)	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$\omega$ (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\eta\mu\omega$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\sigma\upsilon\nu\omega$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\epsilon\phi\omega$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\sigma\phi\omega$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

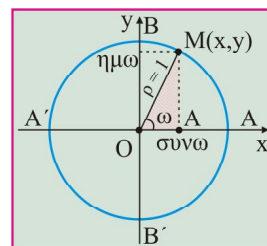
#### • Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

1. Από το ορθογώνιο τρίγωνο OAM παίρνουμε:

$$(AM)^2 + (OA)^2 = (OM)^2 \text{ δηλαδή } (\eta\mu\omega)^2 + (\sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 1$$

Συνηθως γράφουμε:

$$\boxed{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1} \quad (1)$$



2. Είναι :  $\text{εφ}\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$  και  $\text{σφ}\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$  (2)

εφόσον  $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$  και  $\eta\mu\omega \neq 0$  αντίστοιχα.

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των παραπάνω παίρνουμε:  $\text{εφ}\omega \cdot \text{σφ}\omega = 1$  (3)

3. Από την ταυτότητα (1), αν  $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$  έχουμε:

$$\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \text{εφ}^2\omega + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \text{εφ}^2\omega}$$
 (4)

Ομοίως, αν διαιρέσουμε την (1) με  $\eta\mu\omega \neq 0$ , παίρνουμε:  $\eta\mu^2\omega = \frac{\text{εφ}^2\omega}{1 + \text{εφ}^2\omega}$  (5)

Συγκεντρώσαμε τις παραπάνω ταυτότητες στον επόμενο πίνακα:

Ταυτότητα	Με την προϋπόθεση
$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$	$\omega \in \mathbb{R}$
$\text{εφ}\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$	$\omega \in \mathbb{R}, \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$
$\text{σφ}\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$	$\omega \in \mathbb{R}, \eta\mu\omega \neq 0$
$\text{εφ}\omega \cdot \text{σφ}\omega = 1$	$\omega \in \mathbb{R}, \eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$
$\eta\mu^2\omega = \frac{\text{εφ}^2\omega}{1 + \text{εφ}^2\omega}$	$\omega \in \mathbb{R}, \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$
$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \text{εφ}^2\omega}$	$\omega \in \mathbb{R}, \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$

### Παρατηρήσεις

- Οι αριθμοί  $\eta\mu\omega$ ,  $\sigma\upsilon\nu\omega$ ,  $\text{εφ}\omega$  και  $\text{σφ}\omega$  (όταν υπάρχουν) καλούνται (βασικοί) **τριγωνομετρικοί αριθμοί** του τόξου  $\omega$  ή της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας  $\omega$ .
- Ο τύπος (1) ισχύει, όπως εύκολα διαπιστώνουμε, και όταν το πέρας  $M$  του τόξου ταυτίζεται με ένα από τα σημεία  $A(1,0)$ ,  $B(0,1)$ ,  $A'(-1,0)$ ,  $B'(0,-1)$ , όταν δηλαδή

$$\omega = 2\kappa\pi \text{ ή } 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ή } 2\kappa\pi + \pi \text{ ή } 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}.$$



3. Για κάθε τόξο με πέρας τα σημεία  $B(0,1)$  ή  $B'(0,-1)$  (ή κάθε γωνία με τελική πλευρά του ημιιάξονα  $Oy$  ή  $Oy'$  αντίστοιχα) **δεν ορίζεται εφαπτομένη**, μια και όλα αυτά τα τόξα έχουν συνημίτονο ίσο με μηδέν.

Άρα, τα τόξα με προσημασμένα μέτρα:  $\omega = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$  δεν έχουν εφαπτομένη.

Κάθε τόξο με πέρας το σημείο  $A(1,0)$  ή  $A'(-1,0)$  δεν έχει συνεφαπτομένη, μια και όλα αυτά τα τόξα έχουν ημίτονο ίσο με μηδέν.

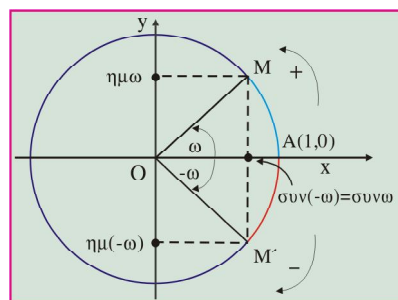
Οπότε, τα τόξα με “προσημασμένα μέτρα”:  $\omega = \kappa\pi$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$  δεν έχουν συνεφαπτομένη.

### • Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

#### 1. Αντίθετα τόξα (αντίθετες γωνίες)

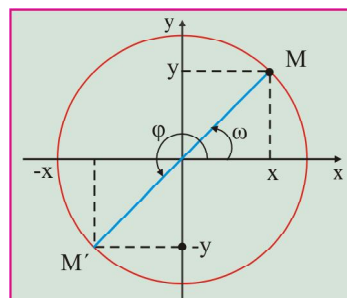
Δύο αντίθετα τόξα  $\omega$  και  $-\omega$  με κοινή αρχή το  $A(1,0)$  (ή αντίθετες γωνίες με κοινή αρχική πλευρά την  $OA$ ) έχουν προφανώς περατα  $M$  και  $M'$  (τελικές πλευρές) συμμετρικά (συμμετρικές) ως προς τον άξονα  $x'x$ , οπότε:

$$\begin{aligned}\eta\mu(-\omega) &= -\eta\mu\omega, & \sigma\upsilon\nu(-\omega) &= \sigma\upsilon\nu\omega, \\ \epsilon\phi(-\omega) &= -\epsilon\phi\omega, & \sigma\phi(-\omega) &= -\sigma\phi\omega\end{aligned}$$



#### 2. Τόξα (γωνίες) με διαφορά $180^\circ$ ή $\pi$

$$\begin{aligned}\text{Είναι } \varphi &= \pi + \omega \text{ τότε: } \eta\mu\varphi = \eta\mu(\pi + \omega) = -\eta\mu\omega \\ \sigma\upsilon\nu\varphi &= \sigma\upsilon\nu(\pi + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega \\ \epsilon\phi\varphi &= \epsilon\phi(\pi + \omega) = \epsilon\phi\omega \\ \sigma\phi\varphi &= \sigma\phi(\pi + \omega) = \sigma\phi\omega\end{aligned}$$



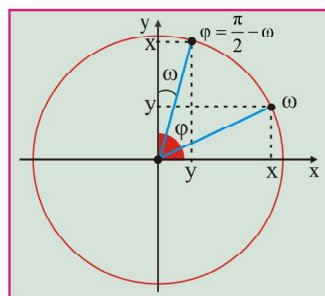
### 3. Τόξα (γωνίες) με άθροισμα (διαφορά) $90^\circ$ ή $\frac{\pi}{2}$

Αν  $\varphi + \omega = \frac{\pi}{2}$ , τότε:  $\eta\mu\varphi = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\omega$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\omega$$

$$\epsilon\varphi\varphi = \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi\varphi = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \epsilon\varphi\omega$$

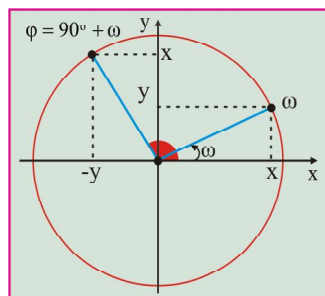


Αν  $\varphi = \frac{\pi}{2} + \omega$ , τότε:  $\eta\mu\varphi = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\omega$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\eta\mu\omega$$

$$\epsilon\varphi\varphi = \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\sigma\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi\varphi = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\epsilon\varphi\omega$$



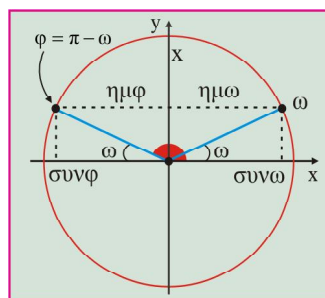
### 4. Τόξα (γωνίες) με άθροισμα $180^\circ$ ή $\pi$

Είναι  $\varphi = \pi - \omega$ , τότε:  $\eta\mu\varphi = \eta\mu(\pi - \omega) = \eta\mu\omega$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\epsilon\varphi\varphi = \epsilon\varphi(\pi - \omega) = -\epsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi\varphi = \sigma\varphi(\pi - \omega) = -\sigma\varphi\omega$$



	$-x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{3\pi}{2} - x$	$\frac{3\pi}{2} + x$	$2\pi - x$	$2\pi + x$
		$90 - x$	$90 + x$	$180 - x$	$180 + x$	$270 - x$	$270 + x$	$360 - x$	$360 + x$
$\eta\mu$	$-\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x$	$-\eta\mu x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	$\eta\mu x$
$\sigma\upsilon\nu$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x$	$-\eta\mu x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	$\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\sigma\upsilon\nu x$
$\epsilon\varphi$	$-\epsilon\varphi x$	$\sigma\varphi x$	$-\sigma\varphi x$	$-\epsilon\varphi x$	$\epsilon\varphi x$	$\sigma\varphi x$	$-\sigma\varphi x$	$-\epsilon\varphi x$	$\epsilon\varphi x$
$\sigma\varphi$	$-\sigma\varphi x$	$\epsilon\varphi x$	$-\epsilon\varphi x$	$-\sigma\varphi x$	$\sigma\varphi x$	$\epsilon\varphi x$	$-\epsilon\varphi x$	$-\sigma\varphi x$	$\sigma\varphi x$

**Παράδειγμα**

Να εκφράσετε τα  $\eta\mu\phi$ ,  $\sigma\upsilon\nu\phi$  συναρτήσει των  $\eta\mu\omega$ ,  $\sigma\upsilon\nu\omega$  στις παρακάτω περιπτώσεις:

i.  $\phi + \omega = 2\pi$       ii.  $\phi + \omega = \frac{3\pi}{2}$       iii.  $\phi - \omega = \frac{3\pi}{2}$

**Λύση**

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε:

i.  $\eta\mu\phi = \eta\mu(2\pi - \omega) = \eta\mu(2\pi + (-\omega)) = \eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$  και

$$\sigma\upsilon\nu\phi = \sigma\upsilon\nu(2\pi - \omega) = \sigma\upsilon\nu(2\pi + (-\omega)) = \sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$$

ii.  $\eta\mu\phi = \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)\right) = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = -\sigma\upsilon\nu\omega$  και

$$\sigma\upsilon\nu\phi = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)\right) = -\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = -\eta\mu\omega$$

iii.  $\eta\mu\phi = \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right) = \eta\mu\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)\right) = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\sigma\upsilon\nu\omega$  και

$$\sigma\upsilon\nu\phi = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)\right) = -\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = \eta\mu\omega$$

**B.****ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ****Κατηγορία – Μέθοδος 1**

Σε ασκήσεις μετατροπής μοιρών σε rad και αντίστροφα χρησιμοποιούμε:

α. τον τύπο  $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$       β.  $\pi \text{ rad} = 3,14 \text{ rad}$  αντιστοιχούν σε  $180^\circ$

**Παράδειγμα 1**

Να μετατρέψετε σε μοίρες τη γωνία  $10 \text{ rad}$

**Λύση**

$$\text{Ισχύει: } \frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \frac{10}{3,14} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow 3,14 \cdot \mu = 10 \cdot 180 \Leftrightarrow \mu = \frac{1800}{3,14} \approx 573^\circ$$

**Παράδειγμα 2**

Να μετατρέψετε σε μοίρες τη γωνία  $\frac{3\pi}{20} \text{ rad}$ .

**Λύση**

$$\text{Επειδή } \pi(\text{rad}) \text{ αντιστοιχούν σε } 180^\circ \text{ έχουμε } \frac{3\pi}{20} \text{ rad αντιστοιχούν σε } \frac{3 \cdot 180^\circ}{20} = 27^\circ.$$

**Παράδειγμα 3**

Να μετατρέψετε τη γωνία τις  $390^\circ$  σε rad.

**Λύση:**

$$\text{Ισχύει: } \frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\pi} = \frac{390}{180} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\pi} = \frac{13}{6} \Leftrightarrow 6\alpha = 13\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{13\pi}{6} \text{ rad} = \frac{13 \cdot 3,14}{6} \text{ rad} = 6,8 \text{ rad}$$

**Κατηγορία – Μέθοδος 2**

Σε ασκήσεις που μας ζητείται να υπολογίσουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας, έστω  $\alpha$ , θα ελέγχουμε:

1. Αν  $0 \leq \alpha \leq 360^\circ$  και θα χρησιμοποιούμε τους τύπους της αναγωγής στο  $1^\circ$  τεταρτημόριο
2. Αν  $\alpha > 360^\circ$  και θα διαιρούμε το  $\alpha$  με το 360 φέρνοντας το  $\alpha$  στην μορφή  $\alpha = 360\kappa + \omega$  ή  $\alpha = 2\pi \cdot \kappa + \omega$ .

**Παράδειγμα 4**

Να υπολογίσετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α.  $\eta\mu 120^\circ$

β.  $\sigma\upsilon\nu 210^\circ$

γ.  $\epsilon\phi 330^\circ$

δ.  $\sigma\upsilon\nu 330^\circ$

ε.  $\eta\mu(-300^\circ)$

στ.  $\sigma\upsilon\nu 3540^\circ$

ζ.  $\sigma\phi(-4440)$

η.  $\eta\mu 2001\pi$

θ.  $\epsilon\phi 2002\pi$

**Λύση**

α. είναι  $\eta\mu 120^\circ = \eta\mu(90^\circ + 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

β. είναι  $\sigma\upsilon\nu 210^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ + 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

γ. είναι  $\epsilon\phi 330^\circ = \epsilon\phi(270^\circ + 60^\circ) = -\sigma\phi 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

δ. είναι  $\sigma\upsilon\nu 330^\circ = \sigma\upsilon\nu(360^\circ - 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ε. είναι  $\eta\mu(-300^\circ) = -\eta\mu 300^\circ = -\eta\mu(270^\circ + 30^\circ) = -(-\sigma\upsilon\nu 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

στ. Απ' την διαίρεση  $3540:360$  έχουμε:  $3540 = 360 \cdot 9 + 300$

Άρα  $\sigma\upsilon\nu 3540^\circ = \sigma\upsilon\nu(360^\circ \cdot 9 + 300^\circ) = \sigma\upsilon\nu 300^\circ = \sigma\upsilon\nu(270^\circ + 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$

ζ. Απ' την διαίρεση  $4440:360$  έχουμε:  $4440 = 360 \cdot 12 + 120$

$$\text{Άρα } \sigma\phi(-4440^\circ) = -\sigma\phi 4440^\circ = -\sigma\phi(360^\circ \cdot 12 + 120^\circ)$$

$$= -\sigma\phi 120^\circ = -\sigma\phi(90^\circ + 30^\circ) = -(-\epsilon\phi 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\eta. \eta\mu 2001\pi = \eta\mu(2000\pi + \pi) = \eta\mu(1000 \cdot 2\pi + \pi) = \eta\mu\pi = 0$$

$$\theta. \epsilon\phi 2002\pi = \epsilon\phi(1001 \cdot 2\pi) = \epsilon\phi 0 = 0$$

### Κατηγορία – Μέθοδος 3

Δεν χρειάζεται να απομνημονεύσουμε τον πίνακα της σελ. 20 αρκεί να γνωρίζουμε ότι:

- Αν η γωνία  $x$  είναι της μορφής  $(2\kappa + 1)\pi \pm \alpha$  ή  $2\kappa\pi \pm \alpha$  ή  $-\alpha$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$  τότε ο τριγωνομετρικός αριθμός παραμένει ο ίδιος με πρόσημο  $+$  ή  $-$  ανάλογα με το τεταρτημόριο που βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας (θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ )

$$\text{τητας ότι } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{π.χ. } \eta\mu(3\pi - \alpha) = \eta\mu(\pi - \alpha) = \eta\mu\alpha$$

- Αν η γωνία  $x$  είναι της μορφής  $(2\kappa + 1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$  τότε καταλήγουμε σε μορφή:

$\frac{\pi}{2} \pm \alpha$  ή  $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$  κάνοντας την διαίρεση  $(2\kappa + 1) : 2$  και ο τριγωνομετρικός αριθμός αλλάζει από  $\eta\mu$  σε  $\sigma\upsilon\nu$ , από  $\epsilon\phi$  σε  $\sigma\phi$  και αντίστροφα. Το πρόσημο που θέτουμε εξαρτάται πάλι από το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας.

$$\text{π.χ. } \sigma\upsilon\nu\left(\frac{21\pi}{2} - \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \eta\mu\theta, \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{23\pi}{2} + \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \eta\mu\theta$$

### Παράδειγμα 5

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$$\text{i. } \sigma\upsilon\nu\left(\frac{121\pi}{2} + \theta\right) \quad \text{ii. } \epsilon\phi\left(\frac{45\pi}{2} - \theta\right) \quad \text{iii. } \eta\mu(2003\pi + \theta)$$

### Λύση

$$\text{i. } \sigma\upsilon\nu\left(\frac{121\pi}{2} + \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\left(60\pi + \frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\eta\mu\theta$$

$$\text{ii. } \epsilon\phi\left(\frac{45\pi}{2} - \theta\right) = \epsilon\phi\left(22\pi + \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sigma\phi\theta$$

$$\text{iii. } \eta\mu(2003\pi + \theta) = \eta\mu(2002\pi + \pi + \theta) = \eta\mu(\pi + \theta) = -\eta\mu\theta$$

**Κατηγορία – Μέθοδος 4**

Όταν μας δίνεται ο τριγωνομετρικός αριθμός μιας γωνίας και ζητείται να υπολογίσουμε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας χρησιμοποιούμε τις γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες λαμβάνοντας υπόψιν το διάστημα μεταβολής της γωνίας.

**Παράδειγμα 6**

Δίνεται ότι:  $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$  (1) και  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$  (2)

Να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας  $x$ .

**Λύση**

Από την ταυτότητα  $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ , παίρνουμε  $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x$ .

Αντικαθιστούμε το  $\eta\mu x$  με  $-\frac{\sqrt{5}}{3}$  και έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

Επειδή  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ , είναι  $\sigma\upsilon\nu x < 0$  και συνεπώς:

$$\sigma\upsilon\nu x = -\sqrt{\frac{4}{9}} = -\frac{2}{3}$$

Από τις ταυτότητες  $\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$  και  $\sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$  έχουμε:

$$\bullet \epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}. \text{ Δηλαδή } \epsilon\phi x = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\bullet \sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \text{ Δηλαδή } \sigma\phi x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$(\text{ή αλλιώς: } \sigma\phi x = \frac{1}{\epsilon\phi x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5})$$

**Κατηγορία – Μέθοδος 5**

Για να αποδείξουμε μια τριγωνομετρική ταυτότητα εργαζόμαστε με τους εξής τρόπους:

**1<sup>ος</sup> τρόπος**

Αρχίζουμε από το πιο σύνθετο μέλος και χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες τριγωνομετρικές ταυτότητες και πράξεις προσπαθούμε να καταλήξουμε στο άλλο μέλος.

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

Ξεκινάμε και από τα δύο μέλη συγχρόνως και κάνοντας πράξεις χρησιμοποιώντας κατάλληλες τριγωνομετρικές ταυτότητες προσπαθούμε με ισοδυναμίες να καταλήξουμε σε μία σχέση που ισχύει.

**Παράδειγμα 7**

**Ν' αποδείξετε ότι:**     **α.**  $\frac{\varepsilon\phi x - \sigma\phi y}{\varepsilon\phi x + \sigma\phi y} = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2 x$      **β.**  $\frac{1 + \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 - \eta\mu\alpha}$

**Λύση**

**α.** Από το 1<sup>ο</sup> μέλος (το πιο σύνθετο) θα φθάσουμε στο 2<sup>ο</sup> μέλος.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \frac{\varepsilon\phi x - \sigma\phi y}{\varepsilon\phi x + \sigma\phi y} &= \frac{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}} = \frac{\frac{\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}}{\frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}} = \frac{\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} \cdot \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu^2 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{1} = \\ &= \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x = (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) - \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2 x \end{aligned}$$

**β.** Κάνουμε πράξεις στα δύο μέλη συγχρόνως:

$$\begin{aligned} \text{έχουμε: } \frac{1 + \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} &= \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 - \eta\mu\alpha} \Leftrightarrow (1 + \eta\mu\alpha)(1 - \eta\mu\alpha) = \sigma\upsilon\nu^2\alpha \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - \eta\mu^2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha \Leftrightarrow 1 = \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha \Leftrightarrow 1 = 1, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

**Κατηγορία – Μέθοδος 6**

Όταν ζητείται ν' αποδείξουμε ότι μια τριγωνομετρική παράσταση είναι σταθερή (δηλαδή ανεξάρτητη από το τόξο που υπάρχει στην παράσταση) χρησιμοποιούμε γνωστές ταυτότητες όπως:  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ ,  $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$ ,

$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$ , καθώς και γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Επίσης μπορούμε, αν στην παράσταση μετέχουν  $\eta\mu x$  και  $\sigma\upsilon\nu x$ , να θέσουμε  $\eta\mu^2 x = \alpha$  οπότε  $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \alpha$  και προσπαθούμε ν' αποδείξουμε ότι η παράσταση είναι ανεξάρτητη του  $\alpha$ .

**Παράδειγμα 8**

Ν' αποδείξετε ότι η παράσταση  $A = 3(\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x) - 2(\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x)$  είναι ανεξάρτητη του  $x$  (ή σταθερή).

**Λύση**

*1<sup>ος</sup> τρόπος*

$$\begin{aligned} A &= 3[(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)^2 - 2\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x] \\ &\quad - 2[(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)^3 - 3\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)] = \\ &= 3(1^2 - 2\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x) - 2(1^3 - 3\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x) = 3 - 6\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x - 2 + 6\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x = 1. \end{aligned}$$

*2<sup>ος</sup> τρόπος*

Θέτουμε  $\eta\mu^2 x = \alpha$  οπότε:  $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x = 1 - \alpha$ .

Έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= 3[\alpha^2 + (1 - \alpha)^2] - 2[\alpha^3 + (1 - \alpha)^3] = 3(\alpha^2 + 1 - 2\alpha + \alpha^2) - 2(\alpha^3 + 1 - 3\alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3) \\ &= 3(2\alpha^2 - 2\alpha + 1) - 2(1 - 3\alpha + 3\alpha^2) = 6\alpha^2 - 6\alpha + 3 - 2 + 6\alpha - 6\alpha^2 = 1 \end{aligned}$$

**Γ.****ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ****Άσκηση 1**

Να χαρακτηρίσετε σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τα επόμενα:

α.  $\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$

β.  $\epsilon\phi x \cdot \sigma\phi x = \eta\mu^2 \alpha + \sigma\upsilon\nu^2 \alpha$

γ.  $\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega = \eta\mu\omega$

δ.  $\eta\mu^2 x = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2 x}$

**Λύση**

α. Λ (διότι  $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ )

β. Σ (διότι  $\epsilon\phi x \cdot \sigma\phi x = 1$  και  $\eta\mu^2 \alpha + \sigma\upsilon\nu^2 \alpha = 1$ )

γ. Σ (διότι  $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \Leftrightarrow \epsilon\phi\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega = \eta\mu\omega$ )

δ. Λ (διότι  $\eta\mu^2 x = \frac{\epsilon\phi^2 x}{1 + \epsilon\phi^2 x}$ )



**Άσκηση 2**

Να επιλέξετε το σωστό στα παρακάτω:

α.  $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)$  είναι ίσο με:    1.  $\eta\mu\omega$ ,    2.  $-\sigma\upsilon\nu\omega$ ,    3.  $\sigma\upsilon\nu\omega$

β.  $\epsilon\varphi(\pi - \omega)$  είναι ίση με:    1.  $\epsilon\varphi\omega$ ,    2.  $-\epsilon\varphi\omega$ ,    3.  $-\sigma\varphi\omega$

γ.  $\sigma\upsilon\nu(2001\pi - \omega)$  είναι ίσο με:    1.  $-\sigma\upsilon\nu\omega$ ,    2.  $\sigma\upsilon\nu\omega$ ,    3.  $-\eta\mu\omega$

**Λύση**

α. 3                      β. 2                      γ. 1

**Άσκηση 3**

Να υπολογίσετε την παράσταση:  $K = \frac{\epsilon\varphi 420^\circ - \eta\mu 510^\circ - \eta\mu(-750^\circ)}{\eta\mu^2 100^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 80^\circ + 2\epsilon\varphi 160^\circ \cdot \sigma\varphi 20^\circ}$

**Λύση**

Είναι  $\epsilon\varphi 420^\circ = \epsilon\varphi(360^\circ + 60^\circ) = \epsilon\varphi 60^\circ = \sqrt{3}$

$$\eta\mu 510^\circ = \eta\mu(360^\circ + 150^\circ) = \eta\mu 150^\circ = \eta\mu(90^\circ + 60^\circ) = \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\eta\mu(-750^\circ) = -\eta\mu 750^\circ = -\eta\mu(2 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = -\eta\mu 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\eta\mu^2 100^\circ = \eta\mu^2(180^\circ - 80^\circ) = \eta\mu^2 80^\circ$$

$$\epsilon\varphi 160^\circ = \epsilon\varphi(180^\circ - 20^\circ) = -\epsilon\varphi 20^\circ$$

$$\text{Έτσι έχουμε: } K = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{\eta\mu^2 80^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 80^\circ + 2(-\epsilon\varphi 20^\circ) \cdot \sigma\varphi 20^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{1 - 2 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

**Άσκηση 4**

Ν'απλοποιήσετε την παράσταση  $\Pi = \frac{\eta\mu \frac{13\pi}{6} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 3\epsilon\varphi \frac{23\pi}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu^2\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \eta\mu \frac{19\pi}{3}}$

**Λύση**

Ισχύει  $\eta\mu \frac{13\pi}{6} = \eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$     και     $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$$\text{Επίσης } \varepsilon\varphi \frac{23\pi}{4} = \varepsilon\varphi \left( 6\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = -1 \text{ και } \sigma\upsilon\nu \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Είναι } \sigma\upsilon\nu \left( \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = -\eta\mu \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και } \eta\mu \frac{19\pi}{3} = \eta\mu \left( 6\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \eta\mu \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Έτσι η παράσταση Π γίνεται: } \Pi = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2}{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = -\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} = -\sqrt{3} - \sqrt{2}$$

### Άσκηση 5

Ν' αποδείξετε ότι η παράσταση

$$K = \frac{\sigma\varphi \left( \frac{3\pi}{2} - \alpha \right) \eta\mu \left( \frac{3\pi}{2} - \alpha \right)}{\eta\mu (2\pi - \alpha)} - \eta\mu \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) + \sigma\upsilon\nu (\pi - \alpha) + \eta\mu (\pi + \alpha) + \sigma\upsilon\nu \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right)$$

είναι ανεξάρτητη του  $\alpha$ .

### Λύση

$$\sigma\varphi \left( \frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = \varepsilon\varphi \alpha,$$

$$\eta\mu \left( \frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = -\sigma\upsilon\nu \alpha,$$

$$\eta\mu (2\pi - \alpha) = -\eta\mu \alpha,$$

$$\eta\mu \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \eta\mu \left[ -\left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] = -\eta\mu \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = -\sigma\upsilon\nu \alpha,$$

$$\sigma\upsilon\nu (\pi - \alpha) = -\sigma\upsilon\nu \alpha,$$

$$\eta\mu (\pi + \alpha) = -\eta\mu \alpha,$$

$$\sigma\upsilon\nu \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \sigma\upsilon\nu \left[ -\left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] = \sigma\upsilon\nu \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \eta\mu \alpha.$$

$$\text{Έτσι η παράσταση K γίνεται: } K = \frac{\varepsilon\varphi \alpha (-\sigma\upsilon\nu \alpha)}{-\eta\mu \alpha} - (-\sigma\upsilon\nu \alpha) + (-\sigma\upsilon\nu \alpha) + (-\eta\mu \alpha) + \eta\mu \alpha$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\eta\mu \alpha}{\eta\mu \alpha} \cdot \sigma\upsilon\nu \alpha \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu \alpha}{\eta\mu \alpha} + \sigma\upsilon\nu \alpha - \sigma\upsilon\nu \alpha - \eta\mu \alpha + \eta\mu \alpha = 1 \text{ (ανεξάρτητη του } \alpha) \end{aligned}$$

**Άσκηση 6**

**Ν' αποδείξετε ότι:**  $\eta\mu^2 x \cdot \epsilon\phi x + \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \sigma\phi x + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \epsilon\phi x + \sigma\phi x$ .

**Λύση**

Είναι  $\eta\mu^2 x \cdot \epsilon\phi x + \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \sigma\phi x + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x =$

$$\eta\mu^2 x \cdot \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu x} + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

$$= \frac{\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x + 2\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \frac{(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)^2}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}$$

$$\frac{1}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \epsilon\phi x + \sigma\phi x$$

**Άσκηση 7**

**Αν**  $\sigma\phi x = \sqrt{3}$  **και**  $x \in (180^\circ, 270^\circ)$  **να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.**

**Λύση**

Αφού  $x \in (180^\circ, 270^\circ)$  η τελική πλευρά της γωνίας  $x$  είναι στο III τεταρτημόριο.

$$\text{Άρα } \begin{cases} \eta\mu x < 0 \\ \sigma\upsilon\nu x < 0 \end{cases} \quad (1). \text{ Τότε: } \epsilon\phi x = \frac{1}{\sigma\phi x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ Δηλαδή } \epsilon\phi x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ και}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2 x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{3}{9}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{και λόγω της (1) έχουμε } \sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Είναι } \epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \eta\mu x = \epsilon\phi x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}. \text{ Δηλαδή } \eta\mu x = -\frac{1}{2}$$

**Άσκηση 8**

**1. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ν' αποδείξετε ότι:**

$$\alpha. \sigma\upsilon\nu B = -\sigma\upsilon\nu(A + \Gamma)$$

$$\beta. \epsilon\phi \frac{A}{2} = \sigma\phi \frac{B + \Gamma}{2}$$

**2. Σε κάθε τετράπλευρο ΑΒΓΔ ν' αποδείξετε ότι:**

$$\alpha. \eta\mu(A + \Gamma) = -\eta\mu(B + \Delta)$$

$$\beta. \sigma\upsilon\nu \frac{A + B}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma + \Delta}{2} = 0$$

$$\gamma. \text{ συν} \frac{A+B}{4} - \eta\mu \frac{\Gamma+\Delta}{4} = 0$$

**Λύση**

$$1 \alpha. \text{ Ισχύει, } A+B+\Gamma=180^\circ \Leftrightarrow B=180^\circ-(A+\Gamma)$$

$$\text{Άρα } \text{συν} B = \text{συν}[180^\circ-(A+\Gamma)] = -\text{συν}(A+\Gamma)$$

$$\beta. \text{ Είναι } \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{\Gamma}{2} = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{A}{2} = 90^\circ - \left(\frac{B+\Gamma}{2}\right).$$

$$\text{Άρα } \varepsilon\varphi \frac{A}{2} = \varepsilon\varphi \left[ 90^\circ - \left(\frac{B+\Gamma}{2}\right) \right] = \sigma\varphi \frac{B+\Gamma}{2}$$

$$2 \alpha. \text{ Είναι } A+B+\Gamma+\Delta=360^\circ \Leftrightarrow A+\Gamma=360^\circ-(B+\Delta)$$

$$\text{Άρα } \eta\mu(A+\Gamma) = \eta\mu[360^\circ-(B+\Delta)] = -\eta\mu(B+\Delta)$$

$$\beta. \text{ Ισχύει, } \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{\Gamma}{2} + \frac{\Delta}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{A+B}{2} = 180^\circ - \frac{\Gamma+\Delta}{2}$$

$$\text{Άρα } \text{συν} \frac{A+B}{2} = \text{συν} \left[ 180^\circ - \frac{\Gamma+\Delta}{2} \right] \Leftrightarrow$$

$$\text{συν} \frac{A+B}{2} = -\text{συν} \frac{\Gamma+\Delta}{2} \Leftrightarrow \text{συν} \frac{A+B}{2} + \text{συν} \frac{\Gamma+\Delta}{2} = 0$$

$$\gamma. \text{ Είναι } \frac{A}{4} + \frac{B}{4} + \frac{\Gamma}{4} + \frac{\Delta}{4} = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{A+B}{4} = 90^\circ - \frac{\Gamma+\Delta}{4}$$

$$\text{Άρα } \text{συν} \frac{A+B}{4} = \text{συν} \left[ 90^\circ - \frac{\Gamma+\Delta}{4} \right] \Leftrightarrow$$

$$\text{συν} \frac{A+B}{4} = \eta\mu \frac{\Gamma+\Delta}{4} \Leftrightarrow \text{συν} \frac{A+B}{4} - \eta\mu \frac{\Gamma+\Delta}{4} = 0$$

**Άσκηση 9**

$$\text{Να αποδειχθεί η ισότητα: } 6\varepsilon\varphi(\pi+x) + 3\sigma\varphi\left(\frac{43\pi}{2}-x\right) - 43\varepsilon\varphi(21\pi-x) = 52\varepsilon\varphi x$$

**Λύση**

$$\text{Είναι } \varepsilon\varphi(\pi+x) = \varepsilon\varphi x.$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{43\pi}{2}-x\right) = \sigma\varphi\left(21\pi + \frac{\pi}{2}-x\right) = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \varepsilon\varphi x$$

$$\varepsilon\varphi(21\pi - x) = \varepsilon\varphi(20\pi + \pi - x) = \varepsilon\varphi(\pi - x) = -\varepsilon\varphi x$$

$$\text{Οπότε: } 6\varepsilon\varphi x + 3\varepsilon\varphi x - 43(-\varepsilon\varphi x) = 52\varepsilon\varphi x$$

### Άσκηση 10

**Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:**  $\sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{B+\Gamma}{2} = 1$

#### Λύση

$$\text{Επειδή } A+B+\Gamma = \pi \text{ είναι } \frac{B+\Gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \text{ οπότε } \sigma\upsilon\nu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \eta\mu \frac{A}{2}.$$

$$\text{Τότε: } \sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{B+\Gamma}{2} = \sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} + \eta\mu^2 \frac{A}{2} = 1.$$

### Άσκηση 11

**Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:**  $A = \varepsilon\varphi 5^\circ \cdot \varepsilon\varphi 95^\circ \cdot \varepsilon\varphi 7^\circ \cdot \varepsilon\varphi 97^\circ$ .

#### Λύση

$$\text{Είναι } \varepsilon\varphi 95^\circ = \varepsilon\varphi(90^\circ + 5^\circ) = -\sigma\varphi 5^\circ \text{ και } \varepsilon\varphi 97^\circ = \varepsilon\varphi(90^\circ + 7^\circ) = -\sigma\varphi 7^\circ$$

$$\text{Οπότε: } A = \varepsilon\varphi 5^\circ \cdot \varepsilon\varphi 95^\circ \cdot \varepsilon\varphi 7^\circ \cdot \varepsilon\varphi 97^\circ = \varepsilon\varphi 5^\circ (-\sigma\varphi 5^\circ) \cdot \varepsilon\varphi 7^\circ (-\sigma\varphi 7^\circ) = (-1)(-1) = 1$$

### Άσκηση 12

**Να αποδειχθεί ότι:**  $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \varepsilon\varphi(\pi + x) \geq 4 + 5\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right), x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$

#### Λύση

$$\text{Είναι } \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu x, \varepsilon\varphi(\pi + x) = \varepsilon\varphi x, \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\sigma\upsilon\nu x$$

$$\text{Οπότε: } \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \varepsilon\varphi(\pi + x) \geq 4 + 5\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x \varepsilon\varphi x \geq 4 + 5\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x} \geq 4 - 5\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu^2 x \geq 4\sigma\upsilon\nu x - 5\sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$(\text{η φορά της ανίσωσης παρέμεινε διότι } \sigma\upsilon\nu x > 0 \text{ όταν } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right))$$

$$5\sigma\upsilon\nu^2 x + 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$4\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

Α.

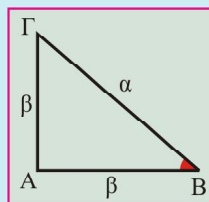
## ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με κάθετες πλευρές  $\beta$  cm . Να υπολογίσετε:

α. Την υποτείνουσά του

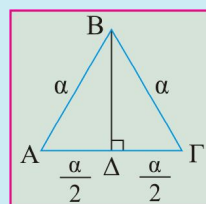
β. Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας των  $45^\circ$  και να συμπληρώσετε τον πίνακα.

ημ $45^\circ$	συν $45^\circ$	εφ $45^\circ$	σφ $45^\circ$



2. Στο διπλανό σχήμα να εντοπίσετε τις γωνίες: α.  $60^\circ$  και β.  $30^\circ$ .  
Στη συνέχεια να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των  $30^\circ$  και  $60^\circ$  και να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Γωνία α	$30^\circ$	$60^\circ$
ημ α		
συν α		
εφ α		
σφ α		



3. Να μετατρέψετε τις μοίρες σε rad και αντίστροφα.

α.  $3690^\circ$

β.  $\frac{10\pi}{3}$  rad

γ. 15 rad

4. Να υπολογίσετε:

α. ημ $3090^\circ$

β. συν $(-2640^\circ)$

γ. εφ $\left(-\frac{185\pi}{6}\right)$

δ. σφ $\frac{85\pi}{4}$

5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ):

α. Δίνεται συν $B = 0,6$ . Υπολογίστε: i. ημ $B$ , ii. εφ $B$

β. Δίνεται ημ $B = \frac{\sqrt{3}}{4}$ . Υπολογίστε: i. συν $B$ , ii. εφ $B$

6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) στο οποίο  $B\Gamma = 26$  cm και  $\widehat{AB\Gamma} = 47^\circ$ .  
Υπολογίστε:

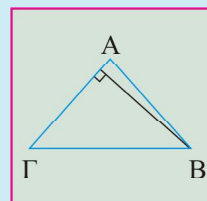
α. Την πλευρά  $AB$ ,

β. Το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά  $A\Gamma$ .

7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) όπου  $\hat{A} = 84^\circ$  και  $AB = 50 \text{ cm}$ . Υπολογίστε:

**α.** Την πλευρά  $AB$ ,

**β.** το ύψος  $AH$ .



8. Συμπληρώστε στον παρακάτω πίνακα το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας  $\theta$ .

	τεταρτημόριο τελικής πλευράς
$\eta\mu\theta < 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta > 0$	
$\epsilon\phi\theta > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta > 0$	
$\sigma\phi\theta < 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$	
$\epsilon\phi\theta > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$	
$\eta\mu\theta > 0$ και $\epsilon\phi\theta > 0$	
$\sigma\phi\theta > 0$ και $\eta\mu\theta < 0$	
$\eta\mu\theta < 0$ και $\epsilon\phi\theta < 0$	
$\eta\mu\theta < 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta > 0$	

9. Αν  $0 < x < 90^\circ$  βρείτε το πρόσημο της παράστασης:

$$A = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - x) + \sigma\phi(90^\circ - x) - \eta\mu(270^\circ - x)$$

10. Υπολογίστε την τιμή της παράστασης:  $\sigma\upsilon\nu^2 0 + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{6} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{3\pi}{2}$

11. Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω βασικές ταυτότητες (α)-(στ) απαντήστε στα επόμενα ερωτήματα **ι.** έως και **iv.**

<b>α.</b> $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$	<b>β.</b> $\sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$	<b>γ.</b> $\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1$
<b>δ.</b> $\sigma\upsilon\nu\omega = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon\phi^2\omega}}$	<b>ε.</b> $\eta\mu\omega = \pm \frac{\epsilon\phi\omega}{\sqrt{1 + \epsilon\phi^2\omega}}$	<b>στ.</b> $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

- ι. α.**  $\sigma\upsilon\nu\theta = 0,4$  όπου  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ . Υπολογίστε το  $\eta\mu\theta$  και την  $\epsilon\phi\theta$ .

- β.**  $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{\sqrt{3}}{4}$  όπου  $180^\circ < \theta < 270^\circ$ . Υπολογίστε το  $\eta\mu\theta$  και την  $\epsilon\phi\theta$ .

ii. Εάν  $\eta\mu y = \frac{\sqrt{2}}{3}$  και  $90^\circ < y < 180^\circ$ , υπολογίστε το  $\sigma\upsilon\nu y$  και την  $\epsilon\varphi y$ .

iii. Εάν  $\epsilon\varphi\theta = \frac{8}{15}$  και  $180^\circ < \theta < 270^\circ$ , υπολογίστε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\theta$ .

iv. Να βρείτε τη γωνία  $\theta$ , αν γνωρίζετε ότι  $\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  και  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ .

12. Αν  $2\epsilon\varphi\theta - 3 = 0$  και  $\eta\mu\theta < 0$ , να βρεθεί το  $\sigma\upsilon\nu\theta$ .

13. Αποδείξτε ότι για οποιεσδήποτε γωνίες  $x$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  ισχύουν:

$$\alpha. (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 = 1 - 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

$$\beta. \eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2 x = 2\eta\mu^2 x - 1$$

$$\gamma. (1 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 2(1 + \sigma\upsilon\nu x)(1 + \eta\mu x)$$

$$\delta. \frac{1 - \epsilon\varphi^2 x}{1 + \epsilon\varphi^2 x} = 1 - 2\eta\mu^2 x$$

14. Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων:

$$\alpha. y = 2 + 3\sigma\upsilon\nu x$$

$$\beta. y = 5 + \eta\mu^2 x$$

$$\gamma. y = \frac{1}{2 - \eta\mu x}$$

15. Αν  $\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = \sqrt{2}\eta\mu x$ , τότε και  $\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x$ .

16. Αν  $3\eta\mu\theta + 5\sigma\upsilon\nu\theta = 5$ , τότε να δείξετε ότι:  $(3\eta\mu\theta - 5\sigma\upsilon\nu\theta)^2 = 9$ .

17. Να υπολογισθεί η παράσταση  $\Pi = \frac{2\epsilon\varphi 30^\circ - \sigma\upsilon\nu 690^\circ + 2\epsilon\varphi \frac{41\pi}{6}}{2\epsilon\varphi 405^\circ - 4\eta\mu 570}$

18. Να αποδείξετε ότι:

$$A = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\epsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu^2(41\pi + x)} + \frac{\eta\mu^2(x - \pi) + \sigma\upsilon\nu^2(21\pi + x)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{81\pi}{2} - x\right)} = \frac{2}{\eta\mu x}$$



19. Να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς όταν δίνονται:

α.  $\sin x = -\frac{4}{5}$  και  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

β.  $\eta\mu x = \frac{\sqrt{5}}{3}$  και  $0 < x < \frac{\pi}{2}$

γ.  $\sigma\phi x = -\sqrt{3}$  και  $\frac{83\pi}{2} < x < \frac{442\pi}{2}$

δ.  $\epsilon\phi x = \frac{\sqrt{5}}{2}$  και  $100\pi < x < \frac{201\pi}{2}$

20. Να αποδείξετε ότι:

α.  $\frac{\sigma\phi^2 x - 1}{\sigma\phi^2 x + 1} = 2 \sin^2 x - 1$

β.  $\sin^2 \alpha (1 + \epsilon\phi^2 \alpha) + \eta\mu^2 \alpha (1 + \sigma\phi^2 \alpha) = 2$

γ.  $1 - \frac{\eta\mu^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$

δ.  $\frac{\eta\mu x}{1 + \sin x} + \sigma\phi x = \frac{1}{\eta\mu x}$

21. Να εξετάσετε αν υπάρχει  $x$  για το οποίο:

α. να ισχύει συγχρόνως  $\eta\mu x = \frac{1}{5}$  και  $\sin x = \frac{1}{5}$

β. να ισχύει συγχρόνως  $\eta\mu^4 x = \frac{1}{16}$  και  $\sin^6 x = \frac{1}{64}$

22. Ν' αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$A = \eta\mu^2(x - 180) + \sin 300 - \sin(180 - x) \sin(360 - x) + \\ + \eta\mu 1590^\circ + 8\eta\mu^2 y + 2\eta\mu^2(90 - y) + 6\sin^2 y \quad \text{είναι σταθερή.}$$

23. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{\eta\mu(-x) \cdot \epsilon\phi(5\pi + x) \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \sigma\phi(2\pi - x)}{\sin(3\pi - x) \epsilon\phi\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{15\pi}{2} - x\right)}$$

$$B = \frac{\eta\mu(\pi - x) \cdot \sin(2\pi + x) \cdot \sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}{\epsilon\phi\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \eta\mu(\pi + x)}$$

Ν' αποδείξετε ότι  $A = B^3$ .

24. Να απλοποιηθεί το κλάσμα:  $\frac{\eta\mu(3\pi + \alpha)\sigma\phi(7\pi + \alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu(3\pi + \alpha)\sigma\phi(4\pi + \alpha)\eta\mu\alpha}$

25. Να εκφράσετε συναρτήσει του  $\sigma\upsilon\nu x$  και του  $\eta\mu x$  την παράσταση:

$$A = \sigma\upsilon\nu(-x) + \eta\mu(-x) + \eta\mu(\pi + x) + \sigma\upsilon\nu(\pi - x)$$

26. Να αποδείξετε ότι:  $\sigma\upsilon\nu 560^\circ \eta\mu 140^\circ - \eta\mu 680^\circ \sigma\upsilon\nu 380^\circ = 0$

27. Δίνεται ότι:  $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$ .

α. Να υπολογίσετε : i.  $\eta\mu \frac{\pi}{5}$  και ii.  $\epsilon\phi \frac{\pi}{5}$

β. Από τα  $\eta\mu \frac{\pi}{5}$  και  $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{5}$ , να υπολογισθούν:

i.  $\eta\mu \frac{4\pi}{5}$  και  $\sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{5}$ , ii.  $\eta\mu \frac{6\pi}{5}$  και  $\sigma\upsilon\nu \frac{6\pi}{5}$ .

28. Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \eta\mu(x - y)\sigma\upsilon\nu(y - x) + \eta\mu(y - x)\sigma\upsilon\nu(x - y)$$

29. Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ABΓ έχουμε:

α.  $\eta\mu A = \eta\mu(B + \Gamma)$

β.  $\eta\mu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2(A + \Gamma) = 1$

30. Αποδείξτε ότι:  $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 1 + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

31. Απλοποιήστε τις παραστάσεις:

α.  $\epsilon\phi x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

β.  $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^3 x$

γ.  $\sqrt{1 - \eta\mu x} \cdot \sqrt{1 + \eta\mu x}$

32. Απλοποιήστε τις κλασματικές παραστάσεις:

α.  $\frac{\sigma\upsilon\nu^4 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^4 x - \eta\mu^2 x}$

β.  $\frac{\eta\mu^2 x - \eta\mu^2 y}{\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 y}$

33. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Αποδείξτε ότι:

α. i.  $\eta\mu \frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{B + \Gamma}{2}$

ii.  $\epsilon\phi \frac{A}{2} = \sigma\phi \frac{B + \Gamma}{2}$

$$\text{iii. } \eta\mu \frac{A+B}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} \quad \text{iv. } \epsilon\varphi \frac{A+B}{2} = \sigma\varphi \frac{\Gamma}{2}$$

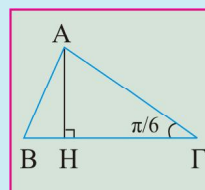
**β.** Χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα του α ερωτήματος, να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

$$\text{i. } \eta\mu \frac{A}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{B+\Gamma}{2} \quad \text{ii. } \epsilon\varphi \frac{A}{2} \cdot \epsilon\varphi \frac{B+\Gamma}{2} \quad \text{iii. } \eta\mu^2 \frac{A}{2} - \eta\mu^2 \frac{B+\Gamma}{2}$$

**34.** Ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma = \alpha$ ) η γωνία της κορυφής  $A$  έχει σε ακτίνια μέτρο

$$\theta. \text{ Αποδείξτε ότι η βάση } B\Gamma = 2\alpha\eta\mu \frac{\theta}{2}.$$

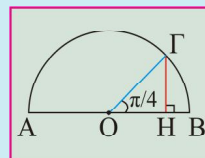
**35.** Στο διπλανό σχήμα είναι:  $BH = 1 \text{ m}$  και  $\Gamma H = 3 \text{ m}$ . Ποια είναι η ακριβής τιμή της περιμέτρου του τριγώνου  $AB\Gamma$ ;



**36.** Στο διπλανό σχήμα είναι  $OA = AB = O\Gamma = 1 \text{ m}$  και  $BO\Gamma = \pi/4 \text{ rad}$ .

**α.** Υπολογίστε την  $OH$  και την  $AH$  και στη συνέχεια δείξτε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu(\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}) = \frac{2+\sqrt{2}}{2A\Gamma} \quad (1)$$



**β.** Βρείτε το είδος του τριγώνου  $A\Gamma B$  και στη συνέχεια δείξτε ότι:  $\sigma\upsilon\nu(\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}) = \frac{A\Gamma}{2} \quad (2)$

**γ.** Αποδείξτε ότι: **i.**  $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$  και **ii.**  $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

**37.** Ν' αποδείξετε ότι  $\sqrt{2\epsilon\varphi x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = -1 + \epsilon\varphi x$  με  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

**38.** Αν  $\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = \sqrt{2}\eta\mu x$  ν' αποδείξετε ότι  $\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x$

**39.** Αν  $3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x = 5$  και  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  ν' αποδείξετε ότι  $\epsilon\varphi x = \frac{3}{4}$

(**Υπ:** Λύνουμε ως προς  $\eta\mu x$  και  $\eta\mu^2 x + \eta\mu^2 x = 1$ )

40. Αν  $3\eta\mu x + 5 \sigma\upsilon\nu x = 5$  ν' αποδείξετε ότι  $(3\sigma\upsilon\nu x - 5\eta\mu x)^2 = 9$

(Υπ:  $(3\eta\mu x + 5\sigma\upsilon\nu x)^2 = 5^2$  κ.τ.λ)

41. Αν  $v \in \mathbb{N}^*$  ν' αποδείξετε ότι  $(-1)^v \sigma\upsilon\nu x \left[ (2v + 1) \frac{\pi}{2} - \alpha \right] = \eta\mu \alpha$

**Ε**

**“ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ”**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  ορθογώνιο στο  $A$  και τέτοιο ώστε  $B\Gamma = 2a$  και  $B = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$ .

α. Εάν  $O$  το μέσο της  $B\Gamma$  και  $AH$  το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα  $B\Gamma$ :

i. Αποδείξτε ότι  $\hat{A\hat{O}H} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ .

ii. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο συμπέρασμα δικαιολογήστε γιατί

$$AH = OH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

iii. Στη συνέχεια δείξτε ότι:  $AB = a\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ .

β. Με τη βοήθεια του τριγώνου  $AHB$  υπολογίστε: το  $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{8}$  και το  $\eta\mu \frac{\pi}{8}$ .