

Απαραίτητες γνώσεις Θεωρίας

Θεωρία 5.

- α) Στο σύστημα (Σ): $\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + \beta'y = \gamma' \end{cases}$ να δώσετε τους ορισμούς των οριζουσών D, D_x, D_y .
- β) Να λυθεί και να διερευνηθεί το Σύστημα γράφοντας τα συμπεράσματά σας με τη βοήθεια των οριζουσών.

Απάντηση:

- α) • Ορίζουμε ορίζουσα D του συστήματος την παράσταση

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta \quad (1)$$

- Ορίζουμε με D_x την ορίζουσα που προκύπτει από την ορίζουσα D αν στη θέση των συντελεστών του x θέσουμε τους σταθερούς όρους. Δηλαδή:

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \beta'\gamma - \beta\gamma' \quad (2)$$

- Ορίζουμε με D_y την ορίζουσα που προκύπτει από την ορίζουσα D αν στη θέση των συντελεστών του y θέσουμε τους σταθερούς όρους. Δηλαδή:

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma \quad (3)$$

- β) Για τη διερεύνηση και λύση του (Σ)

$$(\Sigma) \begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + \beta'y = \gamma' \end{cases} \text{ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:}$$

1η περίπτωση:

Έστω ότι όλοι οι συντελεστές των άγνωστων και οι σταθεροί όροι είναι μηδέν
Δηλαδή $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = \gamma = \gamma' = 0$. Τότε:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Το (Σ) γίνεται $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$ το οποίο είναι αόριστο με λύσεις όλα τα ζεύγη (x, y) , $x, y \in \mathbb{R}$.

Συμπέρασμα

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{αν } D = D_x = D_y = 0 \\ \text{με } \alpha = \alpha' = \beta = \beta' = \gamma = \gamma' = 0 \end{array} \right\} \text{ τότε το (Σ) είναι αόριστο.}$$

2η περίπτωση:

Έστω ότι όλοι οι συντελεστές των αγνώστων είναι μηδέν δηλ $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$ και κάποιος από τους σταθερούς όρους γ ή γ' είναι $\neq 0$.

π.χ. έστω $\gamma \neq 0$, τότε:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma & 0 \\ \gamma' & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & \gamma' \end{vmatrix} = 0$$

Τότε το (Σ) γίνεται: $\begin{cases} 0x + 0y = \gamma \neq 0 \\ 0x + 0y = \gamma' \end{cases}$ το οποίο είναι αδύνατο
(διότι είναι αδύνατη η πρώτη εξίσωση)

Συμπέρασμα

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Αν } D = D_x = D_y = 0 \\ \text{με } \alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0 \\ \text{και } \gamma \text{ ή } \gamma' \neq 0 \end{array} \right\} \text{ τότε το (Σ) είναι αδύνατο.}$$

3η περίπτωση:

Έστω ότι ένας από τους συντελεστές των αγνώστων είναι διάφορος του μηδενός,
π.χ. $\alpha \neq 0$.

$$\text{Τότε στο (Σ)} \quad \begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma & (4) \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' & (5) \end{cases}$$

Απαλλασσόμαστε από το x:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases} \begin{array}{l} -\alpha' \\ \alpha \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha\alpha'x - \alpha'\beta y = -\alpha'\gamma \\ \alpha\alpha'x + \alpha\beta'y = \alpha\gamma' \end{cases}$$

$$(+)\quad (\alpha\beta' - \alpha'\beta)y = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \mathbf{D} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{D}_y \quad (6)$$

Απαλλασσόμαστε από το y:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases} \begin{array}{l} \beta' \\ -\beta \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\beta'x + \beta\beta'y = \beta'\gamma \\ -\alpha'\beta x - \beta\beta'y = -\beta\gamma' \end{cases}$$

$$(+)\quad (\alpha\beta' - \alpha'\beta)x = \beta'\gamma - \beta\gamma' \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{D}_x \quad (7)$$

Από (6) και (7) έχουμε $\begin{cases} \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{D}_x \\ \mathbf{D} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{D}_y \end{cases} \quad (8)$

Διακρίνουμε τις εξής υποπεριπτώσεις:

A) αν $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$

τότε από (8) $\Leftrightarrow x = \frac{\mathbf{D}_x}{\mathbf{D}}$ και $y = \frac{\mathbf{D}_y}{\mathbf{D}}$ και το (Σ)

έχει μοναδική λύση την $(x, y) = \left(\frac{\mathbf{D}_x}{\mathbf{D}}, \frac{\mathbf{D}_y}{\mathbf{D}} \right)$

B) Αν $\mathbf{D} = 0$

τότε από (8) έχουμε $\begin{cases} 0 \cdot x = \mathbf{D}_x \\ 0 \cdot y = \mathbf{D}_y \end{cases} \quad (9)$

B₁) Αν $\mathbf{D}_x \neq 0$ ή $\mathbf{D}_y \neq 0$ τότε από (9)

θα έχουμε $0 \cdot x = \mathbf{D}_x \neq 0$ ή $0 \cdot y = \mathbf{D}_y \neq 0$ αδύνατο

Άρα και το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο

B₂) αν $\mathbf{D}_x = \mathbf{D}_y = 0$ τότε από

(9) $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot x = 0 \\ 0 \cdot y = 0 \end{cases}$ αόριστο

άρα και το αρχικό σύστημα είναι αόριστο, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις τις οποίες και θα βρούμε. Λύνουμε την εξίσωση (1) ως προς x (διότι $\alpha \neq 0$) και έχουμε:

$$\alpha x + \beta y = \gamma \Leftrightarrow \alpha x = \gamma - \beta y \Leftrightarrow x = \frac{\gamma - \beta y}{\alpha}$$

Άρα οι άπειρες λύσεις είναι $(x,y) = \left(\frac{\gamma - \beta y}{\alpha}, y \right), y \in \mathbb{R}$

Συμπέρασμα (επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία της 3ης περίπτωσης και για τα $\alpha', \beta, \beta' \neq 0$)

- Αν $D = 0$ και $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$ το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $D = 0$ και $D_x = 0$ και $D_y = 0$ το σύστημα είναι αόριστο.

Θεωρία 6.

Έστω το Σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$ Να γράψετε με τη βοήθεια των οριζουσών τα συμπεράσματά σας για τη λύση του συστήματος.

Απάντηση:

- 1) • Αν $D \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την: $(x,y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right)$
- 2) • Αν $D = 0$ και $(D_x \neq 0 \text{ ή } D_y \neq 0)$ το σύστημα είναι αδύνατο.
- 3) • Αν $D = D_x = D_y = 0$ τότε το σύστημα θα είναι:
 - α) Αόριστο, αν τουλάχιστον ένας από τους $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \neq 0$
 - β) Αόριστο, αν $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = \gamma = \gamma' = 0$
 - γ) Αδύνατο αν $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$ και $\gamma \neq 0$ ή $\gamma' \neq 0$

Θεωρία 7.

- α) Πότε ένα σύστημα λέγεται ομογενές;
- β) Τί γνωρίζετε για τις λύσεις του;
- γ) Αν $D \neq 0$ τι συμπεραίνετε για τις λύσεις του;
- δ) Αν $D = 0$ τι συμπεραίνετε για τις λύσεις του;

Απάντηση:

- α) Ομογενές λέγεται το (Σ) που οι σταθεροί όροι είναι όλοι μηδέν

$$\text{Δηλαδή } \begin{cases} \alpha x + \beta y = 0 \\ \alpha' x + \beta' y = 0 \end{cases}$$

- β) Το ομογενές σύστημα έχει πάντα τη μηδενική λύση $(0,0)$.
Δηλαδή, δεν είναι ποτέ αδύνατο. Μπορεί όμως να είναι αόριστο, δηλ., να έχει άπειρες λύσεις εκ των οποίων η μία είναι η μηδενική $(x, y) = (0,0)$.
- γ) Αν $D \neq 0$ το ομογενές σύστημα θα έχει μοναδική λύση η οποία προφανώς θα είναι η μηδενική $(x, y) = (0,0)$.
- δ) Αν $D = 0$ τότε το σύστημα είναι αόριστο (μιας και δεν μπορεί να είναι αδύνατο)
δηλαδή, έχει άπειρες λύσεις (μια εκ των οποίων θα είναι η μηδενική $(x, y) = (0, 0)$)

Ερωτήσεις κατανόησης - Λυμένα παραδείγματα.

Παράδειγμα 12 (Σωστό - Λάθος)

Χαρακτηρίστε σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τα παρακάτω αιτιολογώντας τα

- α) αν $D = D_x = D_y = 0$ το σύστημα είναι πάντα αόριστο
 β) αν $D^2 + (7 - D_y)^2 = 0$ το σύστημα είναι αδύνατο
 γ) αν $|D| + |3 - D_x| = 0$ το σύστημα είναι αόριστο
 δ) αν $(2 - D)^{24} + (\alpha - 3\beta)^2 = 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Απάντηση:

α) (Λ) • Διότι αν $D = D_x = D_y = 0$ με $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$ και $\gamma \neq 0$ ή $\gamma' \neq 0$ το σύστημα είναι αδύνατο.

β) (Σ) • Διότι $D^2 + (7 - D_y)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D^2 = 0 \\ \text{και} \\ (7 - D_y)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ \text{και} \\ 7 - D_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ \text{και} \\ D_y = 7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\Sigma) \text{ αδύνατο}$$

γ) (Λ) • Διότι $|D| + |3 - D_x| = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |D| = 0 \\ \text{και} \\ |3 - D_x| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ \text{και} \\ 3 - D_x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ \text{και} \\ D_x = 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\Sigma) \text{ αδύνατο}$$

δ) (Σ) • Διότι αν $(2 - D)^{24} + (\alpha - 3\beta)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2 - D)^{24} = 0 \\ \text{και} \\ (\alpha - 3\beta)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - D = 0 \\ \text{και} \\ \alpha - 3\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 2 \\ \text{και} \\ \alpha = 3\beta \end{cases}$$

Δηλαδή: $D = 2 \neq 0 \Leftrightarrow$ το (Σ) έχει μοναδική λύση.

Παράδειγμα 13 (Συμπλήρωσης)

Συμπληρώστε τα παρακάτω αιτιολογώντας τα:

- α) αν $D^2 - 2D + 1 = 0$ τότε το (Σ)
 β) αν $D = 0$ και $D_x^6 + D_y^{100} \neq 0$ τότε το (Σ)
 γ) αν $D \cdot (D_x^2 + 5) = 0$ τότε το (Σ) δεν μπορεί να έχει

Απάντηση:

α) ... έχει μοναδική λύση (διότι $D^2 - 2D + 1 = 0 \Leftrightarrow (D-1)^2 = 0 \Leftrightarrow D-1=0 \Leftrightarrow D=1 \neq 0$)

β) ... είναι αδύνατο

$$(\text{διότι } \begin{cases} D=0 \\ \text{και} \\ D_x^6 + D_y^{100} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D=0 \\ \text{και} \\ D_x^6 \neq 0 \text{ ή } D_y^{100} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D=0 \\ \text{και} \\ D_x \neq 0 \text{ ή } D_y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\Sigma) \text{ (αδύνατο).}$$

γ) μοναδική λύση

$$(\text{διότι } D \cdot (D_x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} D=0 \\ \text{ή} \\ D_x^2 + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D=0 \\ \text{ή} \\ D_x^2 = -5 \end{cases} \text{ (αδύνατο)})$$

Άρα $D=0 \Leftrightarrow (\Sigma)$ αδύνατο ή αόριστο.

Παράδειγμα 14 (πολλαπλής επιλογής)

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση αιτιολογώντας

α) Αν $\begin{vmatrix} -x-1 & \frac{x}{2}-4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ τότε

A) $x = \frac{7}{2}$ B) $x = 3$ Γ) αληθεύει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ Δ) δεν υπάρχει τέτοιο x

β) αν το σύστημα $\begin{cases} \kappa x + 2y = 4 \\ 8x + \kappa y = \lambda \end{cases}$ έχει μοναδική λύση τότε το κ είναι:

A) $\kappa = 4$

B) $\kappa \neq 4$

Γ) $\kappa \neq 4$ και $\kappa \neq -4$

Απάντηση:

α) Σωστή είναι η (Δ) διότι:

$$\begin{vmatrix} -x-1 & \frac{x}{2}-4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2(-x-1) + 4\left(\frac{x}{2}-4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x - 2 + 2x - 16 = 0 \Leftrightarrow -2x + 2x = 16 + 2 \Leftrightarrow 0x = 18 \text{ αδύνατη.}$$

β) Σωστή είναι η Γ) διότι αφού το (Σ) έχει μοναδική λύση θα ισχύει

$$D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \kappa & 2 \\ 8 & \kappa \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \kappa^2 - 16 \neq 0 \Leftrightarrow \kappa^2 \neq 16 \Leftrightarrow \kappa \neq 4 \text{ και } \kappa \neq -4$$

Παράδειγμα 15 (Διάταξης)

Να διατάξετε από τη μεγαλύτερη προς τη μικρότερη τις ρίζες των εξισώσεων:

$$\alpha) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -x \end{vmatrix} = 0 \quad \beta) \begin{vmatrix} \alpha^2 + 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \gamma) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & x \end{vmatrix} = -2x + 5 \quad \delta) \begin{vmatrix} 3\alpha & -\frac{1}{2} \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} = 49$$

Λύση:

$$\alpha) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

$$\beta) \begin{vmatrix} \alpha^2 + 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot (\alpha^2 + 1) - 6 = 0 \Leftrightarrow 0 - 6 = 0 \Leftrightarrow -6 = 0 \text{ αδύνατη}$$

$$\gamma) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & x \end{vmatrix} = -2x + 5 \Leftrightarrow -x - 0 \cdot 3 = -2x + 5 \Leftrightarrow -x + 2x = 5 \Leftrightarrow x = 5$$

$$\delta) \begin{vmatrix} 3\alpha & -\frac{1}{2} \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} = 49 \Leftrightarrow 3\alpha \cdot \alpha - 2 \left(-\frac{1}{2} \right) = 49 \Leftrightarrow 3\alpha^2 + 1 = 49 \Leftrightarrow 3\alpha^2 = 48 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{48}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = 16 \Leftrightarrow \alpha = \pm \sqrt{16} \Leftrightarrow \alpha = \pm 4$$

Άρα οι ρίζες είναι 6, 5, -4, 4 και η ζητούμενη διάταξη είναι $6 > 5 > 4 > -4$.

Παράδειγμα 16

Να λυθεί η ανίσωση: $\left| \frac{2x-1}{3} - \frac{-5x+1}{3} \right| \leq \frac{1-x}{2} - \left| \frac{1}{-3} - \frac{0}{x} \right|$

Λύση:

$$\left| \frac{2x-1}{3} - \frac{-5x+1}{3} \right| \leq \frac{1-x}{2} - \left| \frac{1}{-3} - \frac{0}{x} \right| \Leftrightarrow 3 \frac{2x-1}{3} - 2(-5x+1) \leq \frac{1-x}{2} - [1 \cdot x - (-3) \cdot 0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 + 10x - 2 \leq \frac{1-x}{2} - (x - 0) \Leftrightarrow 12x - 3 \leq \frac{1-x}{2} - x \Leftrightarrow 2 \cdot 12x - 2 \cdot 3 \leq 2 \cdot \frac{1-x}{2} - 2 \cdot x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24x - 6 \leq 1 - x - 2x \Leftrightarrow 24x + x + 2x \leq 6 + 1 \Leftrightarrow 27x \leq 7 \Leftrightarrow x \leq \frac{7}{27}$$

Παράδειγμα 17

Να δείξετε ότι η παράσταση: $A = \begin{vmatrix} 9x & 6 \\ x - \frac{1}{6} & x \end{vmatrix}$ είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση:

$$A = \begin{vmatrix} 9x & 6 \\ x - \frac{1}{6} & x \end{vmatrix} = 9x \cdot x - 6\left(x - \frac{1}{6}\right) = 9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2 = \alpha^2 \text{ όπου } \alpha = 3x - 1$$

Παράδειγμα 18

Να λυθεί το (Σ) $\begin{cases} \frac{x-1}{3} - 2x = \frac{y}{2} - 1 & (1) \\ -2(1+y) + 3 = -3(x-2) + 2y & (2) \end{cases}$

με τη μέθοδο των οριζουσών (ή μέθοδο Grammer)

Λύση:

Έχουμε:

$$\begin{aligned} (1) & \Leftrightarrow \frac{x-1}{3} - 2x = \frac{y}{2} - 1 \Leftrightarrow 6 \cdot \frac{x-1}{3} - 6 \cdot 2x = 6 \cdot \frac{y}{2} - 6 \cdot 1 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 2(x-1) - 12x = 3y - 6 \Leftrightarrow 2x - 2 - 12x = 3y - 6 \\ & \Leftrightarrow 2x - 12x - 3y = -6 + 2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -10x - 3y = -3 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & \Leftrightarrow -2(1+y) + 3 = -3(x-2) + 2y \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -2 - 2y + 3 = -3x + 6 + 2y \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -2y + 3x - 2y = 6 + 2 - 3 \Leftrightarrow -4y + 3x = 5 \Leftrightarrow 3x - 4y = 5 \quad (4)$$

Από (3) και (4) έχουμε το (Σ) $\begin{cases} -10x - 3y = -3 \\ 3x - 4y = 5 \end{cases}$

$$\bullet D = \begin{vmatrix} -10 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -10(-4) - 3(-3) = 40 + 9 = 49 \neq 0$$

$$\bullet D_x = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -3(-4) - 5(-3) = 12 + 15 = 27$$

$$\bullet D_y = \begin{vmatrix} -10 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-10) \cdot 5 - 3(-3) = -50 + 9 = -41$$

Μέθοδος

Για να λύσουμε ένα σύστημα (Σ) με τη μέθοδο των οριζουσών φέρνουμε πάντα το (Σ) στην

μορφή $\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + b'y = \gamma' \end{cases}$

(προσοχή το $a'x$ να είναι κάτω από το ax και το $b'y$ κάτω από το by)

Επειδή $D = 49 \neq 0$ το (Σ) έχει μοναδική λύση την $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{27}{49} \\ y = \frac{D_y}{D} = -\frac{41}{49} \end{cases}$

Δηλαδή: $(x, y) = \left(\frac{27}{49}, -\frac{41}{49} \right)$

Παράδειγμα 19

Να λυθεί το (Σ) $\begin{cases} 2x - \frac{3}{2}y = 1 \\ -x + \frac{3}{4}y = \frac{1}{2} \end{cases}$ με τη μέθοδο των οριζουσών

Λύση:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = 2 \cdot \frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{2} \right) \cdot (-1) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = 1 \cdot \frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \neq 0$$

Δηλαδή έχουμε $D = 0$, $D_x \neq 0$ Άρα το (Σ) είναι αδύνατο.

Παρατήρηση

Όταν βρούμε $D = 0$ και $D_x \neq 0$, τότε δεν χρειάζεται να βρούμε το D_y διότι το σύστημα είναι αδύνατο. (οτι και αν είναι το D_y)
Αν όμως βρούμε το $D_x = 0$ δεν μπορούμε να συμπεράνουμε τίποτα για το σύστημα γι'αυτό προχωρούμε στην εύρεση του D_y .

Παράδειγμα 20

Να λυθεί το (Σ) $\begin{cases} -3x + 5y = 7 \\ 6x - 10y = -14 \end{cases}$ με τη μέθοδο των οριζουσών

Λύση:

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -10 \end{vmatrix} = (-3)(-10) - 5 \cdot 6 = 30 - 30 = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -14 & -10 \end{vmatrix} = 7(-10) - (-14) \cdot 5 = -70 + 70 = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 6 & -14 \end{vmatrix} = -3(-14) - 6 \cdot 7 = 42 - 42 = 0$$

Δηλαδή: $D = D_x = D_y = 0$

Επειδή στην πρώτη εξίσωση ο x έχει συντελεστή $-3 \neq 0$ το (Σ) είναι ΑΟΡΙΣΤΟ.

Δηλαδή έχει άπειρες λύσεις τις οποίες και θα βρούμε.

Για να βρούμε τις άπειρες λύσεις λύνουμε τη μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο.

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε:

$$-3x + 5y = 7 \Leftrightarrow 5y = 7 + 3x \Leftrightarrow y = \frac{7 + 3x}{5}$$

Άρα οι άπειρες λύσεις είναι: $(x, y) = \left(x, \frac{7 + 3x}{5}\right), x \in \mathbb{R}$

και αν θέσουμε $x = \kappa$ οι άπειρες λύσεις είναι: $\left(\kappa, \frac{7 + 3\kappa}{5}\right), \kappa \in \mathbb{R}$

Σχόλιο

Αν $D = D_x = D_y = 0$ και ένας τουλάχιστον από τους συντελεστές των αγνώστων είναι $\neq 0$ τότε το (Σ) είναι αόριστο.

Παράδειγμα 21

Να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων των συστημάτων με τη βοήθεια των οριζουσών χωρίς να τα λύσετε.

$$(\Sigma_1) \begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \quad (\Sigma_2) \begin{cases} -5x + 2y = 3 \\ x - \frac{2}{5}y = 1 \end{cases} \quad (\Sigma_3) \begin{cases} x - y = 4 \\ -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = -2 \end{cases}$$

Λύση:

- Για το (Σ_1) έχουμε: $D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1(-1) = 6 + 1 = 7 \neq 0$

Δηλαδή $D \neq 0$ άρα το (Σ_1) έχει μοναδική λύση.

- Για το (Σ_2) έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -\frac{2}{5} \end{vmatrix} = (-5) \left(-\frac{2}{5}\right) - 1 \cdot 2 = 2 - 2 = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -\frac{2}{5} \end{vmatrix} = 3 \left(-\frac{2}{5}\right) - 1 \cdot 2 = -\frac{6}{5} - 2 = -\frac{6}{5} - \frac{10}{5} = -\frac{16}{5} \neq 0$$

Δηλαδή: $D = 0$ και $D_x \neq 0$. Άρα το (Σ) είναι αδύνατο δηλαδή δεν έχει καμία λύση.

- Για το (Σ_3) έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1 \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 4 \cdot \frac{1}{2} - (-2)(-1) = 2 - 2 = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 4 \left(-\frac{1}{2} \right) = -2 + 2 = 0$$

Δηλαδή: $D = D_x = D_y = 0$ και επειδή στο (Σ_3) υπάρχει συντελεστής του αγνώστου $\neq 0$ (π.χ. ο συντελεστής του x στην πρώτη εξίσωση είναι $1 \neq 0$) συμπεραίνουμε ότι το σύστημα **είναι αόριστο** δηλαδή έχει **άπειρες λύσεις**.

Παράδειγμα 22

Δίνεται το $(\Sigma) \begin{cases} 2x - 3y = \lambda + 1 \\ 2x - 3y = 2\lambda \end{cases}$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ παράμετρος. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ το (Σ) :

α) έχει μοναδική λύση β) έχει άπειρο πλήθος λύσεων γ) δεν έχει λύση

Λύση:

Όταν το (Σ) είναι παραμετρικό βρίσκουμε τα D, D_x, D_y

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 2(-3) - 2(-3) = -6 + 6 = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -3 \\ 2\lambda & -3 \end{vmatrix} = -3(\lambda + 1) - 2\lambda(-3) = -3\lambda - 3 + 6\lambda = 3\lambda - 3$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & \lambda + 1 \\ 2 & 2\lambda \end{vmatrix} = 2 \cdot 2\lambda - 2(\lambda + 1) = 4\lambda - 2\lambda - 2 = 2\lambda - 2$$

α) Για να έχει το (Σ) μοναδική λύση πρέπει $D \neq 0$. Όμως $D=0$ και επομένως δεν υπάρχει τιμή του λ ώστε να έχει το (Σ) μοναδική λύση.

β) Για να έχει άπειρο πλήθος λύσεων (επειδή υπάρχει κάποιος συντελεστής του αγνώστου $\neq 0$) πρέπει $D = 0$ (που ισχύει)

$$\text{και συγχρόνως } \begin{cases} D_x = 0 \\ \text{και} \\ D_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda - 3 = 0 \\ \text{και} \\ 2\lambda - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda = 3 \\ \text{και} \\ 2\lambda = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \text{και} \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Άρα για $\lambda = 1$ το (Σ) έχει άπειρο πλήθος λύσεων (δηλαδή είναι αόριστο).

γ) Για να μην έχει το (Σ) λύση (δηλαδή για να είναι αδύνατο) πρέπει $D = 0$

$$(που ισχύει) και συγχρόνως: \begin{cases} D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda - 3 \neq 0 \\ 2\lambda - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda \neq 3 \\ 2\lambda \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \neq 1 \\ \lambda \neq 1 \end{cases}$$

Δηλαδή: $\lambda \neq 1$

Άρα για $\lambda \neq 1$ το (Σ) δεν έχει καμμία λύση (δηλαδή είναι αδύνατο).

Παράδειγμα 23

Να λυθεί και να διερευνηθεί το (Σ) $\begin{cases} (\lambda - 2)x + \lambda y = 2\lambda \\ 3x + (\lambda + 2)y = 12 \end{cases}$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ παράμετρος

Λύση:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & \lambda \\ 3 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 2) - 3\lambda = \lambda^2 - 4 - 3\lambda = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

Για να παραγοντοποιήσουμε το $\lambda^2 - 3\lambda - 4$ βρίσκουμε τις ρίζες του. Αυτές είναι το 4 και το -1.

Άρα το $\lambda^2 - 3\lambda - 4$

παραγοντοποιείται ως εξής: $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1)$

Δηλαδή: $D = (\lambda - 4)(\lambda + 1)$ (1)

$$\bullet D_x = \begin{vmatrix} 2\lambda & \lambda \\ 12 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 2\lambda \cdot (\lambda + 2) - 12\lambda = 2\lambda^2 + 4\lambda - 12\lambda = 2\lambda^2 - 8\lambda = 2\lambda(\lambda - 4) \quad (2)$$

$$\bullet D_y = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2\lambda \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 12(\lambda - 2) - 3 \cdot 2\lambda = 12\lambda - 24 - 6\lambda = 6\lambda - 24 = 6(\lambda - 4) \quad (3)$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1η περίπτωση:

$$An: D \neq 0 \Leftrightarrow \stackrel{(1)}{(\lambda - 4)(\lambda + 1) \neq 0} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 4 \neq 0 \\ \lambda + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \neq 4 \\ \lambda \neq -1 \end{cases}$$

$$το (Σ) \text{ έχει μοναδική λύση την: } \begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{2\lambda(\lambda - 4)}{(\lambda - 4)(\lambda + 1)} = \frac{2\lambda}{\lambda + 1} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{6(\lambda - 4)}{(\lambda - 4)(\lambda + 1)} = \frac{6}{\lambda + 1} \end{cases}$$

Μέθοδος

Για να λύσουμε ένα παραμετρικό σύστημα κάνουμε τα εξής βήματα:
α) Βρίσκουμε τα D, D_x, D_y και τα παραγοντοποιούμε
β) Ελέγχουμε μήπως το $D \neq 0$ οπότε το (Σ) θα έχει μοναδική λύση. Αν είναι $D = 0$ τότε το (Σ) θα είναι αόριστο ή αδύνατο. Δηλαδή διακρίνουμε δύο περιπτώσεις τις $D \neq 0$ και $D = 0$.

2η περίπτωση:

$$\text{Αν } D=0 \Leftrightarrow \lambda=4 \text{ ή } \lambda=-1$$

α) αν $\lambda=4$

$$D_x = 2 \cdot 4(4-4) = 8 \cdot 0 = 0 \quad \text{και} \quad D_y = 6(4-4) = 6 \cdot 0 = 0$$

Δηλαδή αν $\lambda=4$ τότε $D=D_x=D_y=0$ και επειδή υπάρχει συντελεστής του αγνώστου x στην 2η εξίσωση $\neq 0$ (το $3 \neq 0$) το (Σ) είναι αόριστο δηλ έχει άπειρες λύσεις τις οποίες και θα βρούμε.

Για να βρούμε τις άπειρες λύσεις στο παραμετρικό σύστημα θέτουμε όπου $\lambda=4$ σε μία απο τις δύο εξισώσεις του (Σ) και μετά λύνουμε την εξίσωση ως προς έναν άγνωστο.

Για $\lambda=4$ η πρώτη εξίσωση του (Σ) γίνεται:

$$(4-2)x + 4y = 2 \cdot 4 \Leftrightarrow 2x + 4y = 8 \Leftrightarrow x + 2y = 4 \Leftrightarrow x = 4 - 2y$$

Άρα οι άπειρες λύσεις είναι $(x,y) = (4-2y,y), y \in \mathbb{R}$

β) αν $\lambda=-1$

$$D_x = 2(-1)(-1-4) = -2(-5) = 10 \neq 0$$

Δηλαδή, αν $\lambda=-1$ τότε το $D=0$ και $D_x \neq 0$ οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

Συμπέρασμα

- 1) Αν $\lambda \neq 4$ και $\lambda \neq -1$ το (Σ) έχει μοναδική λύση την $(x,y) = \left(\frac{2\lambda}{\lambda+1}, \frac{6}{\lambda+1} \right)$
- 2) Αν $\lambda=4$ το (Σ) έχει άπειρες λύσεις τις $(x,y) = (4-2y,y), y \in \mathbb{R}$
- 3) Αν $\lambda=-1$ το (Σ) είναι αδύνατο.

Παράδειγμα 24

Να λυθεί και διερευνηθεί το (Σ) $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda^2 \\ x - \lambda y = \lambda^4 \end{cases}$ για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$

Λύση:

$$\begin{aligned} \bullet D &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 - 1(-1) = -\lambda^2 + 1 = -(\lambda^2 - 1) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1) \\ \bullet D_x &= \begin{vmatrix} \lambda^2 & -1 \\ \lambda^4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(-\lambda) - \lambda^4(-1) = -\lambda^3 + \lambda^4 = \lambda^4 - \lambda^3 = \lambda^3(\lambda - 1) \\ \bullet D_y &= \begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^4 \end{vmatrix} = \lambda^5 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda^3 - 1) = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) \end{aligned}$$

1η περίπτωση:

Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow -(\lambda-1)(\lambda+1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda-1 \neq 0$ και $\lambda+1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$ το σύστημα έχει μοναδική λύση την:

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{\lambda^3(\lambda-1)}{-(\lambda-1)(\lambda+1)} = -\frac{\lambda^3}{\lambda+1} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{\lambda^2(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)}{-(\lambda-1)(\lambda+1)} = -\frac{\lambda^2(\lambda^2+\lambda+1)}{\lambda+1} \end{cases}$$

2η περίπτωση:**α) αν $\lambda = 1$**

$$D_x = \lambda^3(\lambda-1) = 1^3(1-1) = 0$$

$$D_y = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1) = 1^2(1-1)(1^2+1+1) = 1 \cdot 0 \cdot 3 = 0$$

Δηλαδή, αν $\lambda = 1$ τότε $D = D_x = D_y = 0$ οπότε το σύστημα είναι αόριστο (επειδή ο συντελεστής του άγνωστου x στην δεύτερη εξίσωση που είναι $1 \neq 0$). Δηλαδή έχει άπειρες λύσεις τις οποίες και θα βρούμε. Για $\lambda = 1$ η πρώτη εξίσωση του συστήματος γίνεται:

$$\lambda x - y = \lambda^2 \xrightarrow{\lambda=1} 1 \cdot x - y = 1^2 \Leftrightarrow x = 1 + y$$

Άρα οι άπειρες λύσεις είναι: $(x, y) = (1 + y, y), y \in \mathbb{R}$

β) αν $\lambda = -1$

$$D_x = \lambda^3(\lambda-1) = (-1)^3(-1-1) = -1(-2) = 2 \neq 0$$

Δηλαδή, αν $\lambda = -1$ τότε το $D = 0$ και $D_x \neq 0$ Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Συμπέρασμα

1) Αν $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$ το (Σ) έχει μοναδική λύση την: $(x, y) = \left(-\frac{\lambda^3}{\lambda+1}, -\frac{\lambda^2(\lambda^2+\lambda+1)}{\lambda+1} \right)$

2) Αν $\lambda = 1$, το (Σ) έχει άπειρες λύσεις τις $(x, y) = (1 + y, y), y \in \mathbb{R}$

3) Αν $\lambda = -1$, το (Σ) είναι αδύνατο.

Παράδειγμα 25

α) Να λυθεί το $(\Sigma) \begin{cases} \lambda x - y = 3 \\ x + \lambda y = -2 \end{cases}$

β) Για την λύση (x_0, y_0) που θα βρείτε να λύσετε την ανίσωση $2x_0 + 3y_0 \geq -9$

Λύση:

$$\bullet D = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \cdot \lambda - 1(-1) = \lambda^2 + 1 \neq 0$$

$$\bullet D_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = 3\lambda - (-2)(-1) = 3\lambda - 2$$

$$\bullet D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2\lambda - 3$$

Επειδή $D \neq 0$ το (Σ) έχει μοναδική λύση: $x = \frac{D_x}{D} = \frac{3\lambda - 2}{\lambda^2 + 1}$, $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2\lambda - 3}{\lambda^2 + 1}$

Συμπέρασμα

Το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ την $(x, y) = \left(\frac{3\lambda - 2}{\lambda^2 + 1}, \frac{-2\lambda - 3}{\lambda^2 + 1} \right)$

β) Η μοναδική λύση που βρήκαμε είναι η $(x_0, y_0) = \left(\frac{3\lambda - 2}{\lambda^2 + 1}, \frac{-2\lambda - 3}{\lambda^2 + 1} \right)$

Έχουμε να λύσουμε την ανίσωση:

$$2x_0 + 3y_0 \geq -9 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{3\lambda - 2}{\lambda^2 + 1} + 3 \cdot \frac{-2\lambda - 3}{\lambda^2 + 1} \geq -9 \Leftrightarrow \frac{2(3\lambda - 2)}{\lambda^2 + 1} + \frac{3(-2\lambda - 3)}{\lambda^2 + 1} \geq -9$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 + 1) \cdot \frac{2(3\lambda - 2)}{\lambda^2 + 1} + (\lambda^2 + 1) \cdot \frac{3(-2\lambda - 3)}{\lambda^2 + 1} \geq -9(\lambda^2 + 1) \quad \left(\begin{array}{l} \text{Κάνουμε απαλοιφή παρο-} \\ \text{νομαστών επειδή } \lambda^2 + 1 > 0 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2(3\lambda - 2) + 3(-2\lambda - 3) \geq -9(\lambda^2 + 1) \Leftrightarrow 6\lambda - 4 - 6\lambda - 9 \geq -9\lambda^2 - 9$$

$$\Leftrightarrow 9\lambda^2 \geq -9 + 4 + 9 \Leftrightarrow 9\lambda^2 \geq 4 \Leftrightarrow \lambda^2 \geq \frac{4}{9} \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2} \geq \sqrt{\frac{4}{9}} \Leftrightarrow |\lambda| \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \geq \frac{2}{3} \text{ ή } \lambda \leq -\frac{2}{3}. \quad \text{Δηλαδή } \lambda \in (-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}, +\infty)$$

Παράδειγμα 26

Αν τα παρακάτω συστήματα έχουν κοινή λύση να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$(\Sigma_1) \begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ -x + 4y = 3 \end{cases} \quad \text{και} \quad (\Sigma_2) \begin{cases} 2\lambda x - 5\mu y = 7 \\ -3\lambda x + 2\mu y = -1 \end{cases}$$

Λύση:

Λύνουμε το (Σ_1)

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - (-3)(-1) = 20 - 3 = 17 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3(-3) = 8 + 9 = 17$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 2(-1) = 15 + 2 = 17$$

$$\text{Επειδή } D \neq 0 \text{ το } (\Sigma_1) \text{ έχει μοναδική λύση } \begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{17}{17} = 1 \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{17}{17} = 1 \end{cases}, (x, y) = (1, 1)$$

Επειδή τα συστήματα (Σ_1) και (Σ_2) έχουν κοινή λύση, η λύση του (Σ_1) θα είναι και λύση του (Σ_2) . Άρα η λύση $(x, y) = (1, 1)$ θα επαληθεύσει το (Σ_2) . Έτσι έχουμε:

$$(\Sigma_2) \begin{cases} 2\lambda x - 5\mu y = 7 \\ -3\lambda y + 2\mu x = -1 \end{cases} \stackrel{(x,y)=(1,1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2\lambda \cdot 1 - 5\mu \cdot 1 = 7 \\ -3\lambda \cdot 1 + 2\mu \cdot 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - 5\mu = 7 \\ -3\lambda + 2\mu = -1 \end{cases} \quad (\Sigma_3)$$

Λύνουμε το (Σ_3)

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-3)(-5) = 4 - 15 = -11 \neq 0$$

$$D_\lambda = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - (-1)(-5) = 14 - 5 = 9$$

$$D_\mu = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) - (-3) \cdot 7 = -2 + 21 = 19$$

Άρα το (Σ_3) έχει μοναδική λύση την $\begin{cases} \lambda = \frac{D_\lambda}{D} = \frac{9}{-11} = -\frac{9}{11} \\ \mu = \frac{D_\mu}{D} = \frac{19}{-11} = -\frac{19}{11} \end{cases}$, Δηλαδή $(\lambda, \mu) = \left(-\frac{9}{11}, -\frac{19}{11}\right)$

Παράδειγμα 27

Δίνεται το σύστημα των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

$$\begin{cases} 5x - 2y = 1 & (\varepsilon_1) \\ -3x + 4y = 5 & (\varepsilon_2) \\ 2x + 4y = \lambda + 1 & (\varepsilon_3) \end{cases}$$

Να υπολογίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι τρεις ευθείες να διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση:

Για να διέρχονται οι 3 ευθείες από το ίδιο σημείο θα πρέπει οι συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών ε_1 και ε_2 να επαληθεύουν την εξίσωση της τρίτης ευθείας ε_3 .

Λύνουμε το σύστημα των ε_1 και ε_2

$$\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ -3x + 4y = 5 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - (-3)(-2) = 20 - 6 = 14 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 5(-2) = 4 + 10 = 14$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 - (-3) \cdot 1 = 25 + 3 = 28$$

$$\text{Άρα } \begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{14}{14} = 1 \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{28}{14} = 2 \end{cases} \quad \text{Δηλαδή } (x, y) = (1, 2)$$

Άρα το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 είναι το $A(1, 2)$.

• Για να διέρχεται η ε_3 από το $A(1, 2)$ θα πρέπει οι συντεταγμένες του A να επαληθεύουν την ε_3 : Δηλ: $2x + 4y = \lambda + 1 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = \lambda + 1 \Leftrightarrow 10 = \lambda + 1 \Leftrightarrow \lambda = 9$

Παράδειγμα 28

Για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε τα συστήματα (Σ_1) και (Σ_2) να είναι συγχρόνως αδύνατα.

$$(\Sigma_1) \begin{cases} (1-\lambda)x + \mu y = -2 \\ \lambda x + y = 0 \end{cases} \quad (\Sigma_2) \begin{cases} x - \lambda y = -2 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

Λύση:

Για να είναι τα συστήματα αδύνατα θα πρέπει οι ορίζουσες τους D_{Σ_1} και D_{Σ_2} να είναι μηδέν (αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη). Δηλαδή πρέπει $D_{\Sigma_1} = 0$ και $D_{\Sigma_2} = 0$.

Έχουμε:

$$D_{\Sigma_1} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & \mu \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda) \cdot 1 - \lambda\mu = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda - \lambda\mu = 0 \quad (1)$$

$$D_{\Sigma_2} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot 3 - 1(-\lambda) = 0 \Leftrightarrow 3 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3 \quad (2)$$

$$\text{Η } (1) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 1 - (-3) - (-3)\mu = 0 \Leftrightarrow 1 + 3 + 3\mu = 0 \Leftrightarrow 3\mu = -4 \Leftrightarrow \mu = -\frac{4}{3} \quad (3)$$

Δηλαδή βρήκαμε $\lambda = -3$ και $\mu = -\frac{4}{3}$

Για αυτά τα λ, μ που βρήκαμε ισχύουν $D_{\Sigma_1} = D_{\Sigma_2} = 0$. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι τα (Σ_1) και (Σ_2) είναι αδύνατα. Μπορεί π.χ. κάποιο να είναι αόριστο. Για να είναι λοιπόν δεκτά τα λ, μ τα τοποθετούμε στα αρχικά συστήματα και ελέγχουμε αν είναι αδύνατα.

Έτσι έχουμε για $\lambda = -3$, $\mu = -\frac{4}{3}$

$$(\Sigma_1) \begin{cases} [1 - (-3)]x + \left(-\frac{4}{3}\right)y = -2 \\ -3x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+3)x - \frac{4}{3}y = -2 \\ -3x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{4}{3}y = -2 \\ -3x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 4y = -6 \\ -3x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y = -\frac{6}{4} \\ -3x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y = \frac{3}{2} \\ -3x + y = 0 \end{cases} \text{ το οποίο φανερά είναι αδύνατο.}$$

Επίσης για $\lambda = -3$, $\mu = -\frac{4}{3}$ το (Σ_2) γίνεται: $(\Sigma_2) \begin{cases} x - (-3)y = -2 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = -2 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

Το οποίο είναι αδύνατο. Άρα η λύση $(\lambda, \mu) = \left(-3, -\frac{4}{3}\right)$ είναι δεκτή.

Παράδειγμα 29

Δίνονται τα Συστήματα

$$(\Sigma_1) \begin{cases} -x - y = 1 \\ (-\kappa - 1)x + \lambda y = -1 \end{cases} \quad \text{και} \quad (\Sigma_2) \begin{cases} (\kappa + 4)x + y = \kappa^2 - 3\kappa\lambda \\ (3\kappa + 8\lambda)x - (\kappa + \lambda)y = \kappa^3 - \sqrt[5]{\lambda} \end{cases}$$

Δειξτε ότι αν το (Σ_1) είναι αόριστο, τότε το (Σ_2) είναι αδύνατο.

Λύση:

Εφ'όσον το (Σ_1) είναι αόριστο θα ισχύει:

$D = D_x = D_y = 0$. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet D = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -\kappa - 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-1) \cdot \lambda - (-1)(-\kappa - 1) = 0 \Leftrightarrow -\lambda - (\kappa + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\lambda - \kappa - 1 = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\bullet D_x = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot \lambda - (-1)(-1) = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \bullet D_y = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -\kappa - 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-1)(-1) - 1 \cdot (-\kappa - 1) = 0 \Leftrightarrow 1 + \kappa + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 + \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = -2 \quad (3) \end{aligned}$$

Για $\lambda = 1$ και $\kappa = -2$ επαληθεύεται και η (1) διότι

$-\lambda - \kappa - 1 = 0 \Leftrightarrow -1 - (-2) - 1 = 0 \Leftrightarrow -1 + 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$. Για τις τιμές των κ, λ που βρήκαμε δείχνουμε ότι το (Σ_2) είναι αδύνατο.

Πράγματι για $\kappa = -2$ και $\lambda = 1$ το (Σ_2) γίνεται:

$$(\Sigma_2) \begin{cases} (-2 + 4)x + y = (-2)^2 - 3 \cdot (-2) \cdot 1 \\ [3(-2) + 8 \cdot 1]x - (-2 + 1)y = (-2)^3 - \sqrt[5]{1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 + 6 \\ (-6 + 8)x - (-1)y = -8 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 10 \\ 2x + y = -9 \end{cases} \quad \text{το οποίο είναι προφανώς αδύνατο.}$$

Παράδειγμα 30

Αν σ'ένα σύστημα (Σ) δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύουν:

$$\begin{cases} 2D_x + 3D_y = -D & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4D_x + 7D_y = -11D & (2) \end{cases}$$

και το σύστημα έχει μοναδική λύση να βρεθούν τα x, y (δηλαδή να λυθεί το σύστημα (Σ))

Λύση:

Αφού το σύστημα έχει μοναδική λύση θα ισχύει $D \neq 0$. Άρα $x = \frac{D_x}{D}$ και $y = \frac{D_y}{D}$.
Διαιρούμε λοιπόν τις εξισώσεις (1) και (2) με $D \neq 0$ και έχουμε:

$$\begin{cases} \frac{2D_x}{D} + \frac{3D_y}{D} = \frac{-D}{D} \\ -\frac{4D_x}{D} + \frac{7D_y}{D} = \frac{-11D}{D} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ -4x + 7y = -11 \end{cases} \quad \text{Λύνουμε το σύστημα}$$

$$\bullet D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - (-4) \cdot 3 = 14 + 12 = 26 \neq 0$$

$$\bullet D_x = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -11 & 7 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 7 - (-11) \cdot 3 = -7 + 33 = 26$$

$$\bullet D_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -11 \end{vmatrix} = 2(-11) - (-4)(-1) = -22 - 4 = -26$$

$$\text{Επομένως } \begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{26}{26} = 1 \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{-26}{26} = -1 \end{cases} \quad \text{Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση } (x, y) = (1, -1)$$

Παράδειγμα 31

Για ένα γραμμικό σύστημα 2×2 (δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους) ισχύουν:

$$\begin{cases} D_x^2 = -2D_x D_y - D_y^2 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{και} & \text{Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση να βρεθεί η λύση αυτή.} \\ 2x - y = 3 & (2) \end{cases}$$

Λύση:

Αφού το σύστημα έχει μοναδική λύση θα ισχύει $D \neq 0$. Έχουμε από την (1):

$$D_x^2 + 2D_x D_y + D_y^2 = 0 \Leftrightarrow (D_x + D_y)^2 = 0 \Leftrightarrow D_x + D_y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{D_x}{D} + \frac{D_y}{D} = \frac{0}{D} \quad (\text{διαιρέσαμε με } D \neq 0) \Leftrightarrow x + y = 0 \quad (3)$$

Από (2) και (3) έχουμε το σύστημα $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases}$. Για την λύση του έχουμε:

$$\bullet D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$$

$$\bullet D_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 0(-1) = 3 + 0 = 3$$

$$\bullet D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 = 0 - 3 = -3$$

$$\text{Άρα } \begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{3}{3} = 1 \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{-3}{3} = -1 \end{cases} \quad \text{και το } (\Sigma) \text{ έχει μοναδική λύση την } (x, y) = (1, -1)$$

Παράδειγμα 32

Αν για ένα γραμμικό σύστημα 2×2 ισχύει: $D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 2D - 6D_x + 4D_y - 14$ (1)
τότε αυτό να λυθεί (δηλαδή να βρεθούν τα x, y)

Λύση:

Από την σχέση (1) έχουμε: $D^2 + D_x^2 + D_y^2 - 2D + 6D_x - 4D_y + 14 = 0 \Leftrightarrow$

$$(D^2 - 2D) + (D_x^2 + 6D_x) + (D_y^2 - 4D_y) + 14 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (D^2 - 2D) + (D_x^2 + 6D_x) + (D_y^2 - 4D_y) + 1 + 9 + 4 = 0$ (διασπάσαμε το 14 σε κατάλληλους αριθμούς που μαζί με τις παρενθέσεις να κάνουν ταυτότητες)

$$\Leftrightarrow (D^2 - 2D + 1) + (D_x^2 + 6D_x + 9) + (D_y^2 - 4D_y + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (D-1)^2 + (D_x+3)^2 + (D_y-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} D-1=0 \\ D_x+3=0 \\ D_y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D=1 \neq 0 \\ D_x=-3 \\ D_y=2 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } \begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{-3}{1} = -3 \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{2}{1} = 2 \end{cases} \quad \text{Δηλαδή το } (\Sigma) \text{ έχει μοναδική λύση την } (x, y) = (-3, 2)$$

Παράδειγμα 33

α) Αν $D^2 + |Dy - 3| = 0$ δείξτε ότι το σύστημα είναι αδύνατο

β) Αν $|D - 5| = 6$ δείξτε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση

γ) Αν $|D - 3| + (Dx - 7)^2 + |Dy + 3| = 0$ δείξτε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και να βρείτε.

Λύση:

α) $D^2 + |Dy - 3| = 0 \Leftrightarrow D = 0$ και $Dy - 3 = 0 \Leftrightarrow D = 0$ και $Dy = 3 \neq 0$

Δηλαδή $D = 0$ και $Dy \neq 0$ άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

β) $|D - 5| = 6 \Leftrightarrow D - 5 = 6$ ή $D - 5 = -6 \Leftrightarrow D = 6 + 5$ ή $D = -6 + 5 \Leftrightarrow D = 11$ ή $D = -1$

Άρα $D \neq 0$, και το σύστημα έχει μοναδική λύση.

γ) $|D - 3| + (Dx - 7)^2 + |Dy + 3| = 0 \Leftrightarrow$

$D - 3 = 0$ και $Dx - 7 = 0$ και $Dy + 3 = 0 \Leftrightarrow D = 3 \neq 0$ και $Dx = 7$ και $Dy = -3$

Επειδή $D \neq 0$, το (Σ) έχει για μοναδική λύση την

$$\begin{cases} x = \frac{Dx}{D} = \frac{7}{3} \\ y = \frac{Dy}{D} = \frac{-3}{3} = -1 \end{cases}$$

Δηλαδή $(x, y) = \left(\frac{7}{3}, -1\right)$

Παράδειγμα 34

α) $\begin{cases} -3\alpha + 5\beta = 7 \\ 5\alpha - 4\beta = -3 \end{cases}$ (αρχικό σύστημα)

β) Με τη βοήθεια της λύσης του παραπάνω (Σ) να λυθούν τα συστήματα:

$$(\Sigma_1): \begin{cases} -3|x - 3| + 5|y + 4| = 7 \\ 5|x - 3| - 4|y + 4| = -3 \end{cases}$$

$$(\Sigma_2): \begin{cases} -3(2 - x)^2 + 5(y + 3)^3 = 7 \\ 5(2 - x)^2 - 4(y + 3)^3 = -3 \end{cases}$$

$$(\Sigma_3): \begin{cases} -3\sqrt[3]{x + 2} + 5|y + 5| = 7 \\ 5\sqrt[3]{x + 2} - 4|y + 5| = -3 \end{cases}$$

$$(\Sigma_4): \begin{cases} \frac{-3}{x - 7} + \frac{5}{y + 3} = 7 \\ \frac{5}{x - 7} - \frac{4}{y + 3} = -3 \end{cases}$$

$$(\Sigma_5): \begin{cases} (-3x + y - 7) \cdot (x - 2) = 0 \\ (5x - 4y + 3)(3 - y) = 0 \end{cases}$$

$$(\Sigma_6): \begin{cases} -3|x| + 5y = 7 \\ 5x - 4|y| = -3 \end{cases}$$

$$(\Sigma_7): \begin{cases} -3x + 5y = 7 \\ 5x - 4y = 3 \end{cases}$$

$$(\Sigma_8): |-3x + 5y - 7| + |5x - 4y + 3| = 0$$

α) Λύση του συστήματος $\begin{cases} -3\alpha + 5\beta = 7 \\ 5\alpha - 4\beta = -3 \end{cases}$ (αρχικό σύστημα)

$$\bullet D = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = (-3)(-4) - 5 \cdot 5 = 12 - 25 = -13 \neq 0$$

$$\bullet D_\alpha = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 7 - (-3) \cdot 5 = -28 + 15 = -13$$

$$\bullet D_\beta = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = (-3)(-3) - 5 \cdot 7 = 9 - 35 = -26$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση, την: $\begin{cases} \alpha = \frac{D_\alpha}{D} = \frac{-13}{-13} = 1 \\ \beta = \frac{D_\beta}{D} = \frac{-26}{-13} = 2 \end{cases}$ δηλαδή $(\alpha, \beta) = (1, 2)$

β) Λύση του (Σ_1) : $\begin{cases} -3|x-3| + 5|y+4| = 7 \\ 5|x-3| - 4|y+4| = -3 \end{cases}$

Κάνουμε την αντικατάσταση

$$\begin{cases} |x-3| = \alpha \\ |y+4| = \beta \end{cases} \quad (1)$$

Το (Σ_1) γίνεται με τη βοήθεια της (1)

$$\begin{cases} -3\alpha + 5\beta = 7 \\ 5\alpha - 4\beta = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \text{και} \\ \beta = 2 \end{cases} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} |x-3| = 1 \\ \text{και} \\ |y+4| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 1 \quad \text{ή} \quad x-3 = -1 \\ \text{και} \\ y+4 = 2 \quad \text{ή} \quad y+4 = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \quad \text{ή} \quad x=2 \\ \text{και} \\ y=-2 \quad \text{ή} \quad y=-6 \end{cases} \quad \text{Άρα το } (\Sigma_1) \text{ έχει τις εξής 4 λύσεις:}$$

$$(x, y) = (4, -2), (x, y) = (4, -6), (x, y) = (2, -2), (x, y) = (2, -6)$$

Λύση του (Σ_2) : $\begin{cases} -3(2-x)^2 + 5(y+3)^3 = 7 \\ 5(2-x)^2 - 4(y+3)^3 = -3 \end{cases}$

Κάνουμε την αντικατάσταση

$$\begin{cases} (2-x)^2 = \alpha \\ (y+3)^3 = \beta \end{cases} \quad (2) \quad \text{Το } (\Sigma_2) \text{ γίνεται με την βοήθεια της (2):}$$

$$\begin{cases} -3\alpha + 5\beta = 7 \\ 5\alpha - 4\beta = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \text{και} \\ \beta = 2 \end{cases} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (2-x)^2 = 1 \\ \text{και} \\ (y+3)^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x=1 \quad \text{ή} \quad 2-x=-1 \\ \text{και} \\ y+3 = \sqrt[3]{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \quad \text{ή} \quad x=3 \\ \text{και} \\ y = \sqrt[3]{2} - 3 \end{cases}$$

Άρα το (Σ_2) έχει δύο λύσεις τις: $(x,y) = (1, \sqrt[3]{2} - 3), \quad (x,y) = (3, \sqrt[3]{2} - 3)$

$$\text{Λύση του } (\Sigma_3): \begin{cases} -3\sqrt[3]{x+2} + 5|y+5| = 7 \\ 5\sqrt[3]{x+2} - 4|y+5| = -3 \end{cases} \quad (3)$$

Επειδή έχουμε $\sqrt[3]{x+2}$ θα πρέπει $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$ (4)

Κάνουμε την αντικατάσταση $\sqrt[3]{x+2} = \alpha$ και $|y+5| = \beta$ (5)

Το Σ_3 γίνεται με τη βοήθεια της (5):

$$\begin{aligned} (\Sigma_3) &\stackrel{(5)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -3\alpha + 5\beta = 7 \\ 5\alpha - 4\beta = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \text{και} \\ \beta = 2 \end{cases} \stackrel{(5)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \sqrt[3]{x+2} = 1 \\ \text{και} \\ |y+5| = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 1^3 \\ \text{και} \\ y+5 = 2 \quad y+5 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \quad (\text{δεκτή από (4)}) \\ \text{και} \\ y = -3 \quad \text{ή} \quad y = -7 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα το (Σ_3) έχει δύο λύσεις τις: $(x,y) = (-1,-3), \quad (x,y) = (-1,-7).$

$$\text{Λύση του } (\Sigma_4): \begin{cases} \frac{-3}{x-7} + \frac{5}{y+3} = 7 \\ \frac{5}{x-7} - \frac{4}{y+3} = -3 \end{cases}$$

Για τους παρονομαστές έχουμε τους περιορισμούς:

$x-7 \neq 0$ και $y+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 7$ και $y \neq -3$ (6)

$$\text{Το } (\Sigma_4) \text{ γράφεται ως εξής: } \begin{cases} -3 \cdot \frac{1}{x-7} + 5 \frac{1}{y+3} = 7 \\ 5 \frac{1}{x-7} - 4 \frac{1}{y+3} = -3 \end{cases}$$

και κάνουμε την αντικατάσταση: $\frac{1}{x-7} = \alpha$ και $\frac{1}{y+3} = \beta$ (7)

Το (Σ_4) γίνεται με την βοήθεια της (7):

$$\begin{aligned}
 (\Sigma_4) &\stackrel{(7)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -3\alpha + 5\beta = 7 \\ 5\alpha - 4\beta = -3 \end{cases} \begin{matrix} \text{αρχικό(}\Sigma\text{)} \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} \alpha = 1 \\ \text{και} \\ \beta = 2 \end{cases} \stackrel{(6)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{x-7} = 1 \\ \text{και} \\ \frac{1}{y+3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot (x-7) = 1 \\ \text{και} \\ 2(y+3) = 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x-7=1 \\ \text{και} \\ 2y+6=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ \text{και} \\ 2y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ \text{και} \\ y=-\frac{5}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Άρα το (Σ_4) έχει μία λύση την: $(x, y) = \left(8, -\frac{5}{2}\right)$ (δεκτή από (6))

Λύση του (Σ_5) : $\begin{cases} (-3x + y - 7) \cdot (x - 2) = 0 \\ (5x - 4y + 3) \cdot (3 - y) = 0 \end{cases}$ (8)

Από (8) έχουμε: $\begin{cases} -3x + y - 7 = 0 & \text{ή} & x - 2 = 0 \\ & \text{και} & \\ 5x - 4y + 3 = 0 & \text{ή} & 3 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y = 7 & \text{ή} & x = 2 \\ & \text{και} & \\ 5x - 4y = -3 & \text{ή} & y = 3 \end{cases} \text{ και}$

έτσι έχουμε τα εξής τέσσερα συστήματα:

$(\sigma_1) \begin{cases} -3x + y = 7 \\ 5x - 4y = -3 \end{cases} \stackrel{\text{αρχικό}(\Sigma)}{\Leftrightarrow} (x, y) = (1, 2)$

$(\sigma_2) \begin{cases} -3x + y = 7 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3 = 7 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(-\frac{4}{3}, 3\right)$

$(\sigma_3) \begin{cases} x = 2 \\ 5x - 4y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 5 \cdot 2 - 4y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 10 - 4y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ -4y = -13 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{13}{4} \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(2, \frac{13}{4}\right)$

$$(\sigma_4) \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (2, 3) \text{ Άρα το } (\Sigma_5) \text{ έχει τέσσερις λύσεις}$$

$$(x, y) = (1, 2), (x, y) = \left(-\frac{4}{3}, 3\right), (x, y) = \left(2, \frac{13}{4}\right), (x, y) = (2, 3)$$

$$\text{Λύση του } (\Sigma_6): \begin{cases} -3|x| + 5y = 7 \\ 5x - 4|y| = -3 \end{cases}$$

Εδώ δεν μπορούμε να κάνουμε καμία αντικατάσταση γι' αυτό απαλλασσόμεθα από τα απόλυτα διακρίνοντας τις τέσσερις περιπτώσεις

$$(x \geq 0, y \geq 0), (x \geq 0, y < 0), (x < 0, y \geq 0), (x < 0, y < 0)$$

1^η περίπτωση

αν $\{x \geq 0 \text{ και } y \geq 0\}$ τότε το (Σ_6) γίνεται $\begin{cases} -3x + 5y = 7 \\ 5x - 4y = -3 \end{cases}$ το οποίο λύνεται εύκολα και έχει λύση την $(x, y) = (1, 2)$

2^η περίπτωση

$$\text{αν } \{x \geq 0 \text{ και } y < 0\}$$

τότε το (Σ_6) γίνεται $\begin{cases} -3x + 5y = 7 \\ 5x - 4(-y) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 5y = 7 \\ 5x + 4y = -3 \end{cases}$ το οποίο λύνεται εύκολα και

έχει λύση την $(x, y) = \left(-\frac{43}{37}, \frac{26}{37}\right)$ η οποία απορρίπτεται

3^η περίπτωση

$$\text{αν } \{x < 0, y \geq 0\}$$

τότε το (Σ_6) γίνεται $\begin{cases} -3(-x) + 5y = 7 \\ 5x - 4y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 5x - 4y = -3 \end{cases}$ το οποίο λύνεται

εύκολα και έχει λύση την $(x, y) = \left(\frac{13}{37}, \frac{44}{37}\right)$ η οποία απορρίπτεται.

4^η περίπτωση

$$\text{Αν } \{x < 0, y < 0\}$$

τότε το (Σ_6) γίνεται $\begin{cases} -3(-x) + 5y = 7 \\ 5x - 4(-y) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 5x + 4y = -3 \end{cases}$

το οποίο λύνεται εύκολα και έχει λύση την $(x, y) = \left(\frac{43}{13}, \frac{44}{13}\right)$ η οποία απορρίπτεται

Άρα το (Σ_6) έχει μια μόνο λύση την $(x, y) = (1, 2)$

$$\text{Λύση του } (\Sigma_7) : \begin{cases} -3x + 5y = 7 \\ |5x - 4y| = 3 \end{cases}$$

Απαλλασσόμεθα από το απόλυτο και έχουμε $\begin{cases} -3x + 5y = 7 \\ 5x - 4y = 3 \quad \text{ή} \quad 5x - 4y = -3 \end{cases}$

και έχουμε τελικά δύο συστήματα: το $(\sigma_1) \begin{cases} -3x + 5y = 7 \\ 5x - 4y = 3 \end{cases}$ το οποίο λύνεται εύκολα και έχει

λύση την $(x, y) = \left(\frac{43}{13}, \frac{44}{13}\right)$ και το (σ_2) γίνεται $\begin{cases} -3x + 5y = 7 \\ 5x - 4y = -3 \end{cases}$

το οποίο λύνεται εύκολα και έχει λύση την $(x, y) = (1, 2)$

Άρα το (Σ_7) έχει δύο λύσεις τις: $(x, y) = \left(\frac{43}{13}, \frac{44}{13}\right)$, $(x, y) = (1, 2)$

$$\text{Λύση του } (\Sigma_8) : |-3x + 5y - 7| + |5x - 4y + 3| = 0$$

$$\text{Έχουμε: } |-3x + 5y - 7| + |5x - 4y + 3| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |-3x + 5y - 7| = 0 \\ |5x - 4y + 3| = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 5y - 7 = 0 \\ 5x - 4y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 5y = 7 \\ 5x - 4y = -3 \end{cases} \stackrel{\text{αρχικό } (\Sigma)}{\Leftrightarrow} (x, y) = (1, 2)$$

Ερωτήσεις κατανόησης - Ασκήσεις για Λύση

10. Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

- α) Πώς ονομάζεται το σύστημα και ποια είναι η προφανής λύση του;
β) Έχει άλλη λύση; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

11. Αν το σύστημα:
$$\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$
 είναι αδύνατο τότε:

- α) $\lambda = 2$ β) $\lambda = -3$ γ) $\lambda = -2$ Αιτιολογήστε την επιλογή σας.

12. Αν το σύστημα
$$\begin{cases} 3x + 2y = \mu + 3 \\ -6x - 4y = 5 \end{cases}$$
 έχει άπειρες λύσεις τότε:

α) $\mu = \frac{11}{2}$ β) $\mu = -\frac{1}{2}$ γ) $\mu = -\frac{11}{2}$ δ) $\mu = 2$

Αιτιολογήστε την επιλογή σας.

13. Αν $\begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ -3 & \lambda \end{vmatrix} = 1$, τότε: α) $\lambda = 3$ β) $\lambda = -2$ γ) $\lambda = 2$

Αιτιολογήστε την επιλογή σας.

14. Αν η γραμμική εξίσωση $\lambda^2 x = (\lambda^2 - 3\lambda)y$ δεν παριστάνει ευθεία, τότε:

α) $\lambda = 3$ β) $\lambda = -3$ γ) $\lambda = 1$ δ) $\lambda = 0$

Αιτιολογήστε την επιλογή σας.

15. Δίνεται η εξίσωση $2x - 3y = 7$. Να γράψετε μία δεύτερη εξίσωση ώστε το σύστημα που θα προκύψει:

- α) να έχει μοναδική λύση β) να είναι αδύνατο γ) να είναι αόριστο

Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση που γράψατε ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες α), β), γ)

16. Δίνεται η εξίσωση $7x - 3y = 4$. Να γράψετε μια δεύτερη εξίσωση, ώστε το σύστημα που θα προκύψει:

- α) να έχει λύση πάνω στη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας
β) να έχει λύση το ζεύγος (1,1)
γ) να έχει λύση ένα ζεύγος αντίθετων αριθμών

Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση που γράψατε ικανοποιεί τις ζητούμενες συνθήκες α), β), γ)

17. α) Αν $D^4 + (Dx - 3)^2 = 0$ τότε το σύστημα:

1) Είναι αόριστο 2) Είναι αδύνατο 3) Έχει μοναδική λύση

β) Αν $\frac{3}{D} \in \mathbb{R}$ τότε το σύστημα:

1) Είναι αόριστο 2) Είναι αδύνατο 3) Έχει μοναδική λύση

γ) Αν $D = 0$ και $|Dx| + |Dy| = 0$ τότε το σύστημα:

1) Είναι αόριστο

2) Είναι αδύνατο

3) Έχει μοναδική λύση

4) Είναι αδύνατο ή αόριστο

δ) Αν $|D - 1| + |Dy - 4| + |Dx + 7| = 0$ τότε το σύστημα:

1) Είναι αόριστο

2) Είναι αδύνατο

3) Έχει μοναδική λύση την $(x, y) = (4, 7)$

4) Έχει μοναδική λύση την $(x, y) = (-7, 4)$

18. Αν ισχύει $\begin{vmatrix} \alpha\gamma & -4\beta\sqrt{x} \\ \frac{1}{4\gamma\sqrt{x}} & \frac{1}{\gamma^2} \end{vmatrix} = -1$ με $\gamma \neq 0$, $x > 0$ να δείξετε ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$

19. Αποδείξτε ότι $\begin{vmatrix} \frac{2\alpha^2}{\alpha - \beta} & -\beta^2 \\ \frac{3\alpha - \beta}{\alpha - \beta} & \frac{\alpha - 3\beta}{2} \end{vmatrix} = (\alpha - \beta)^2$

20. Να λυθεί με ορίζουσες το σύστημα: $\begin{vmatrix} x & 5 \\ y & 3 \end{vmatrix} = -2$ και $\begin{vmatrix} -7 & y \\ -2 & x \end{vmatrix} = -5$

21. Να λυθεί με ορίζουσες το σύστημα: $\begin{cases} 2(x-3) - 4(y+1) = 3x-1 \\ \frac{x-1}{3} = 2 - \frac{2+y}{4} \end{cases}$

22. Να λυθεί με ορίζουσες το σύστημα: $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ -4x + 6y = -14 \end{cases}$

23. Να λυθεί με ορίζουσες το σύστημα: $\begin{cases} -3x + 7y = 1 \\ 6x - 14y = -3 \end{cases}$

24. Να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων των συστημάτων με τη βοήθεια των οριζουσών χωρίς να τα λύσετε:

$$(\Sigma_1) \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$$(\Sigma_2) \begin{cases} x - 3y = 1 \\ -2x + 6y = -2 \end{cases}$$

$$(\Sigma_3) \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases}$$

25. Για ποιες τιμές του λ το σύστημα $\begin{cases} \lambda^3 x + 2y = 5 \\ 8x + \frac{1}{\lambda} y = 0 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση;

26. Για ποιες τιμές του λ το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + 7y = \lambda + 1 \\ \lambda x + \lambda y = 5 \end{cases}$ είναι αδύνατο;

27. Για ποιες τιμές του λ το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + 7y = \lambda^3 \\ \lambda x + \lambda y = \lambda \end{cases}$ είναι αόριστο;

28. Να λυθεί και να διερευνηθεί το σύστημα $\begin{cases} \lambda^2 x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

29. Να λυθεί και διερευνηθεί το σύστημα για τις διάφορες τιμές του λ :

$$\begin{cases} (2\lambda + 1)x + y = 5 + \lambda \\ (\lambda + 1)x + \lambda y = \lambda + 3 \end{cases}$$

30. Να λυθεί το σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x + \mu^2 y = 2 \\ x + y = 2\mu \end{cases}$

31. 1) Για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \kappa x + (\kappa + 2)y = 2 \\ x + \kappa y = 1 \end{cases}$

2) Για τη μοναδική λύση (x, y) που θα βρείτε να λυθεί η ανίσωση $(\kappa + 1)x + |y| \geq 2$

32. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ το σύστημα $(\Sigma) \begin{cases} (\alpha + 1)x + 2\beta y = 2 \\ (3 - \alpha)x + (3\beta - 1)y = -3 \end{cases}$ είναι αόριστο;

33. Για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ οι 3 ευθείες:

$$\varepsilon_1 : 2x - y = 3, \quad \varepsilon_2 : -3x + y = -5, \quad \varepsilon_3 : \kappa^2 x - 2(\kappa + 1)y = 2$$

διέρχονται από το ίδιο σημείο;

34. Να βρεθούν τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε τα συστήματα

$$(\Sigma_1) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ \mu x + \lambda y = 1 \end{cases} \text{ και } (\Sigma_2) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ -\mu x + (\lambda + 1)y = 2 \end{cases} \text{ να είναι συγχρόνως αδύνατα.}$$

35. Δίνονται τα συστήματα $(\Sigma_1) \begin{cases} x-y=1 \\ 3x+\lambda y=2 \end{cases}$ και $(\Sigma_2) \begin{cases} 2x-\lambda y=8 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$

Αν το (Σ_1) είναι αδύνατο δείξτε ότι το (Σ_2) είναι αδύνατο.

36. Δίνεται ένα γραμμικό σύστημα 2×2 , μ'έναν τουλάχιστον συντελεστή του αγνώστου διαφορετικό από το μηδέν. Αν ισχύει $D = D_x^4 + D_y^6$

α) Δείξτε ότι το σύστημα δεν μπορεί να είναι αδύνατο.

β) Αν επιπλέον έχει μοναδική λύση δείξτε ότι $x \cdot D_x^3 + y D_y^5 = 1$

37. Έστω ένα γραμμικό ομογενές σύστημα 2×2

α) Αν $D^2 = 9\sqrt{D_x} + 7\sqrt{D_y^2}$ να δείξετε ότι είναι αδύνατο.

β) Αν $D - 5 = 3D_x^3 - 7D_y^4$ να δείξετε ότι έχει μοναδική λύση την οποία και να βρείτε.

38. Έστω ένα γραμμικό σύστημα 2×2 :

α) Αν $|D - 5| + |D_x + 1| = 0$ δείξτε ότι έχει μοναδική λύση

β) Αν $D^2 + D_x^2 + D_y^2 - 2D - 4D_x + 2D_y = -6$ δείξτε ότι έχει μοναδική λύση την $(x, y) = (2, -1)$

γ) Αν $|D| + |D_x - 3| = 0$ δείξτε ότι είναι αδύνατο.

δ) Αν $D = D_x + D_y$ και $x - y = 1$ και έχει μοναδική λύση τότε να βρεθεί η μοναδική λύση.

39. Με τη βοήθεια της λύσης του συστήματος $(\Sigma) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ και κάνοντας κατάλληλη αντικατάσταση (όπου χρειάζεται) να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $(\Sigma_1) \begin{cases} 2|x-5| - |y+4| = 1 \\ 3|x-5| + 2|y+4| = 5 \end{cases}$

β) $(\Sigma_2) \begin{cases} \frac{2}{x-3} - \frac{1}{y+1} = 1 \\ \frac{3}{x-3} + \frac{2}{y+1} = 5 \end{cases}$

γ) $(\Sigma_3) \begin{cases} 2\sqrt[5]{x+3} - |y+4| = 1 \\ 3\sqrt[5]{x+3} + 2|y+4| = 5 \end{cases}$

δ) $(\Sigma_4): |2x - y - 1| + |3x + 2y - 5| = 0$

ε) $(\Sigma_5): \begin{cases} (2x - y - 1)x = 0 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

40. Να υπολογίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 9x + \alpha y = \beta \end{cases}$

α) να έχει μοναδική λύση β) να είναι αδύνατο γ) να είναι αδύνατο

41. Αν η εξίσωση $x^2 - (3\mu - 4)x - 2\nu = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και -5 να βρείτε τα ν, μ .