

2ο Κεφάλαιο

Απαραίτητες γνώσεις Θεωρίας

Α. Άρτιες, περιττές συναρτήσεις

Θεωρία 1.

Πότε μια συνάρτηση λέγεται άρτια;

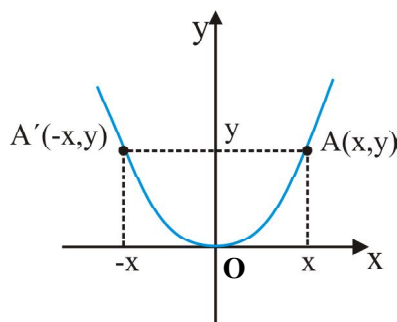
Απάντηση:

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται **άρτια** αν ισχύουν:

- Για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$
- $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$

Σημείωση:

Αν ένα σημείο $A(x,y)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης τότε και το σημείο $A'(-x,y)$ θα είναι επίσης σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης. Οπότε: Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y .



Θεωρία 2.

Πότε μια συνάρτηση λέγεται περιττή;

Απάντηση:

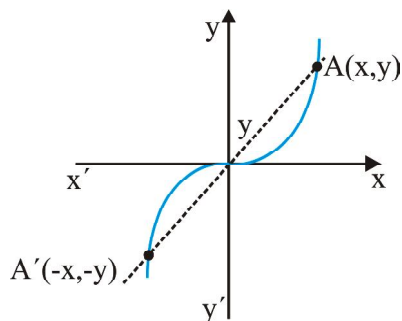
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **περιττή** αν ισχύουν:

- Για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$
- $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in A$

Σημείωση:

Αν ένα σημείο $A(x,y)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης μιας περιττής συνάρτησης τότε το σημείο $A'(-x,-y)$ θα είναι επίσης σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

Οπότε: Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

**Θεωρία 3.**

Πώς μας βοηθάει, στην χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης, η πληροφορία ότι η συνάρτηση αυτή είναι άρτια ή περιττή;

Απάντηση:

Χαράσσουμε μόνο το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης αυτό που αντιστοιχεί για $x \geq 0$ ή για $x \leq 0$ (δεξιά του $y'y$ ή αριστερά του $y'y$ αντίστοιχα)

- Εάν η συνάρτηση είναι άρτια κατασκευάζουμε το υπόλοιπο τμήμα της συμμετρικό ως προς τον άξονα $y'y$.
- Εάν η συνάρτηση είναι περιττή κατασκευάζουμε το υπόλοιπο τμήμα της συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων.

Μέθοδος

Για να ελέγξουμε μια συνάρτηση αν είναι άρτια ή περιττή,

A. Όταν μας δίνεται ο τύπος της συνάρτησης

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και ελέγχουμε αν για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$.

Δηλαδή για κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού υπάρχει και το αντίθετο που ανήκει στο πεδίο ορισμού.

- Βρίσκουμε το $f(-x)$ (Θέτουμε στον τύπο της συνάρτησης όπου x το $-x$)

Εάν $f(-x) = f(x)$ τότε η συνάρτηση είναι άρτια

Εάν $f(-x) = -f(x)$ τότε η συνάρτηση είναι περιττή.

B. Όταν μας δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

- Εάν είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ είναι άρτια, ενώ
- Εάν είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων είναι περιττή.

Ερωτήσεις κατανόησης - Λυμένα Παραδείγματα

Παράδειγμα 1 (Σωστό - Λάθος)

Είναι σωστός ή λάθος ο παρακάτω ισχυρισμός:

“Αν μια συνάρτηση είναι περιττή και το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της τότε $f(0) = 0$ ”

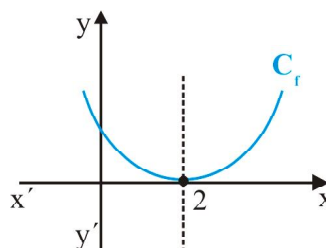
Απάντηση:

Σωστό

Αφού η f είναι περιττή, $f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$

Παράδειγμα 2 (Σωστό - Λάθος)

Η συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα είναι άρτια.



Απάντηση:

Λάθος

Η f δεν είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ αλλά ως προς την ευθεία με εξίσωση $x = 2$.

Παράδειγμα 3 (Πολλαπλής επιλογής)

Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + a\beta + 1$ γίνεται περιττή όταν:

A. $a = -2, \beta = 1$

B. $a = -1, \beta = 0$

Γ. $a = 1, \beta = -1$

Απάντηση:

Σωστό το (Γ)

Το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbb{R} , δηλαδή αν $x \in \mathbb{R}$ τότε $-x \in \mathbb{R}$

Για να είναι η f περιττή θα πρέπει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow (-x)^3 + (a-1)(-x)^2 + a\beta + 1 = -[x^3 + (a-1)x^2 + a\beta + 1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^3 + (a-1)x^2 + a\beta + 1 = -x^3 - (a-1)x^2 - a\beta - 1 \Leftrightarrow 2(a-1)x^2 + 2a\beta + 2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Η (1) ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ οπότε: } 2(a-1) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \quad (2)$$

$$\text{και } 2a\beta + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 \cdot \beta + 2 = 0 \Leftrightarrow \beta = -1$$

Παράδειγμα 4

Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι παρακάτω συναρτήσεις:

i) $f(x) = x^2 + |x|$ ii) $g(x) = \frac{x^2 + 2}{x}$

Λύση:

i) Το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbb{R} .

Έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = (-x)^2 + |-x| = x^2 + |x| = f(x)$

Άρα η f είναι άρτια.

ii) Το πεδίο ορισμού της g είναι το $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

Έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, $-x \in \mathbb{R}^*$ και $f(-x) = \frac{(-x)^2 + 2}{-x} = -\frac{x^2 + 2}{x} = -f(x)$

Άρα η f είναι περιττή.

Παράδειγμα 5

Ομοίως για τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = x^2 + 1$ με $A_f = (-1, 3]$ ii) $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

Λύση:

i) Η f δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή αφού δεν ισχύει ότι για κάθε $x \in A_f$, $-x \in A_f$
π.χ. $3 \in A_f$, $-3 \notin A_f$

ii) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της g . Είναι:

$$x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 4 \Leftrightarrow |x| \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 2 \text{ ή } x \leq -2 \text{ Οπότε: } A_g = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

Έχουμε ότι: για κάθε $x \in A_g$, $-x \in A_g$ και $g(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 4} = \sqrt{x^2 - 4} = g(x)$

Άρα η g είναι άρτια.

Παράδειγμα 6

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x \leq 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$ είναι άρτια ή περιττή.

Λύση:

Η f έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ και

- Αν $x \geq 0$ τότε $-x \leq 0$ άρα: $f(-x) = -(-x) + 1 = x + 1 = f(x)$
- Αν $x \leq 0$ τότε $-x \geq 0$ άρα: $f(-x) = (-x) + 1 = -x + 1 = f(x)$

Δηλαδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$.

Επομένως η f είναι άρτια.

Παράδειγμα 7

Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} είναι συγχρόνως άρτια και περιττή να δείξετε ότι $f(x) = 0$

Απόδειξη:

Αφού f άρτια θα ισχύει: $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (1)

Επίσης f περιττή οπότε: $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (2)

Από (1), (2) έχουμε: $f(x) = -f(x) \Leftrightarrow 2f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

B. Μονοτονία συνάρτησης

Θεωρία 4.

Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σ'ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

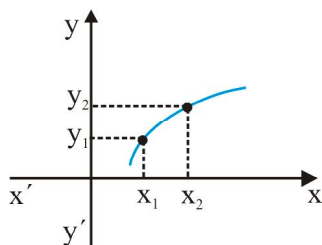
Απάντηση:

- Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σ'ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει ότι: αν $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) < f(x_2)$

Δηλαδή: “Όταν το x αυξάνει, αυξάνει το $f(x)$ ”.

Συμβολίζουμε: $f \uparrow$ στο Δ .

Γραφική ερμηνεία:



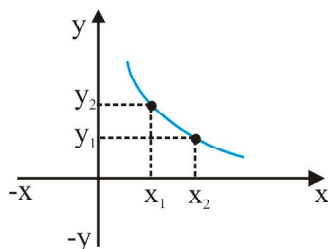
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης “**ανέρχεται**” από τα αριστερά προς τα δεξιά.

- Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σ'ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει ότι: αν $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) > f(x_2)$

Δηλαδή: “Όταν το x αυξάνει μειώνεται το $f(x)$ ”.

Συμβολίζουμε: $f \downarrow$ στο Δ .

Γραφική ερμηνεία:



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης “**κατέρχεται**” από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Παρατηρήσεις

- Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της λέγεται: **Γνησίως μονότονη**.
- Αν στους ορισμούς έχουμε και ισότητα μεταξύ των τιμών της f , τότε η f θα είναι **αύξουσα** ή **φθίνουσα**. Δηλαδή:
 - αν: $x_1 < x_2$ τότε: $f(x_1) \leq f(x_2)$
 - αν: $x_1 < x_2$ τότε: $f(x_1) \geq f(x_2)$**αντίστοιχα.**

Μέθοδος (για την μονοτονία μιας συνάρτησης)

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A , και δύο τυχαία $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ (1)

Για να βρούμε την μονοτονία προσπαθούμε:

A. Με τον ορισμό: Δηλαδή αρχίζουμε απ' την σχέση (1) και προσπαθούμε να "χτίσουμε" την συνάρτηση καταλήγοντας σε μια απ' τις σχέσεις:

$f(x_1) < f(x_2)$ άρα f γνησίως αύξουσα ή $f(x_1) > f(x_2)$ άρα f γνησίως φθίνουσα στο A .
(παράδειγμα A)

B. Με την διαφορά: Υπολογίζουμε την διαφορά $\Delta = f(x_2) - f(x_1)$

- Αν $\Delta > 0$ τότε: $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ή $f(x_1) < f(x_2)$ και λόγω της (1) έχουμε ότι f γνησίως αύξουσα στο A .
- Αν $\Delta < 0$ τότε: $f(x_2) - f(x_1) < 0$ δηλαδή $f(x_1) > f(x_2)$ και λόγω της (1) έχουμε ότι f γνησίως φθίνουσα στο A .
- Αν $\Delta = 0$ τότε: $f(x_2) - f(x_1) = 0$ ή $f(x_2) = f(x_1)$ οπότε f είναι σταθερή στο A .
(παράδειγμα B)

Γ. Με το λόγο: Υπολογίζουμε τον λόγο: $\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, $x_1 \neq x_2$

- Αν $\lambda > 0$, προκύπτει ότι: $f(x_2) - f(x_1)$ και $x_2 - x_1$ είναι ομόσημοι αριθμοί.
Δηλαδή αν $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_2 - x_1 > 0$ τότε και $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
Όμοια εαν $x_1 > x_2$ τότε $f(x_1) > f(x_2)$. Επομένως f είναι γνησίως αύξουσα στο A .
- Αν $\lambda < 0$, όμοια όπως πριν βγάζουμε το συμπέρασμα ότι f είναι γνησίως φθίνουσα στο A .
- Αν $\lambda = 0$, τότε: $f(x_1) = f(x_2)$ δηλαδή f είναι σταθερή στο A . (παράδειγμα Γ)

Παράδειγμα A

Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = x^3$

Λύση:

Το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbb{R} .

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Παράδειγμα B

Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + 1$

Λύση:

Το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbb{R} . Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ (1)

Παίρνουμε την διαφορά και έχουμε:

$$\Delta = f(x_2) - f(x_1) = 2x_2^3 + 1 - (2x_1^3 + 1) = 2x_2^3 - 2x_1^3 = 2(x_2 - x_1) \cdot (x_2^2 + x_1 \cdot x_2 + x_1^2)$$

Όμως (1) $\Leftrightarrow x_2 - x_1 > 0$ Επίσης: $x_2^2 + x_1 \cdot x_2 + x_1^2 > 0$ (διότι στο προηγούμενο κεφάλαιο δείξαμε ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$ με $\alpha \neq \beta$)

Άρα $\Delta > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Παράδειγμα Γ

Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$

Λύση :

Το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbb{R} .

• Έστω $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, με $x_1 \neq x_2$

$$\bullet \text{ Τότε } \lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 + 1 - (x_1^2 + 1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 > 0$$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

$$\bullet \text{ Έστω } x_1, x_2 \in (-\infty, 0] \text{ με } x_1 \neq x_2 \text{ τότε } \lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dots = x_2 + x_1 < 0$$

Άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

Θεωρία 5.

Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση f με $f(x) = ax + \beta$

Απάντηση:

Το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbb{R} . Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$.

$$\text{Έχουμε: } \lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + \beta) - (ax_1 + \beta)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + \beta - ax_1 - \beta}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

- Εάν $a > 0$ τότε και $\lambda > 0$ άρα f γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .
- Εάν $a < 0$ τότε και $\lambda < 0$ άρα f γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .
- Εάν $a = 0$ τότε και $\lambda = 0$ άρα f σταθερή στο \mathbb{R} .

Ερωτήσεις κατανόησης - Λυμένα Παραδείγματα

Παράδειγμα 8 (Σωστό - Λάθος)

Είναι σωστό ή λάθος ότι:

“Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης τέμνει στον άξονα $x'x$ σε ένα το πολύ σημείο.”

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση:

Σωστό

Έστω ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ σε δύο σημεία, έστω x_1, x_2 με $x_1 < x_2$,

τότε $f(x_1) = f(x_2) = 0$ **(1)**

Όμως f γνησίως μονότονη, δηλαδή:

Αν $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) < f(x_2)$ ή $f(x_1) > f(x_2)$

Επομένως για $x_1 < x_2$ έχουμε $f(x_1) \neq f(x_2)$

Οπότε δεν μπορεί να ισχύει η **(1)**, δηλαδή η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης δεν μπορεί να τέμνει τον $x'x$ σε περισσότερα από ένα σημείο.

(Τα συμπεράσματα είναι τα ίδια αν $x_1 > x_2$)

Παράδειγμα 9 (Σωστό - Λάθος)

Είναι σωστό ή λάθος ότι:

“Αν μια συνάρτηση άρτια με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$ με $0 < a < \beta$ τότε είναι γνησίως αύξουσα και στο $[-\beta, -a]$.” Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση:

Λάθος

Έχουμε $-\beta < -a \Leftrightarrow \beta > a$ και αφού f γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$ ισχύει $f(\beta) > f(a)$ **(1)**.

Όμως f άρτια στο \mathbb{R} . Άρα $f(-\beta) = f(\beta)$ και $f(-a) = f(a)$ Άρα η **(1)** γίνεται: $f(-\beta) > f(-a)$

Δηλαδή για: $-\beta < -a$ ισχύει $f(-\beta) > f(-a)$ οπότε f γνησίως φθίνουσα στο $[-\beta, -a]$.

Παράδειγμα 10

Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι συναρτήσεις:

$$f(x) = 2x + 2002,$$

$$g(x) = -3x + 1821$$

$$h(x) = 13$$

Λύση :

Το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων είναι το \mathbb{R} .

Η μονοτονία κάθε συνάρτησης της μορφής $f(x) = ax + b$ εξαρτάται απ' το a .

- Επειδή $a = 2 > 0$ η f γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}
- Επειδή $a = -3 < 0$ η f γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .
- Επειδή $a = 0$ η f σταθερή στο \mathbb{R} .

Παράδειγμα 11

Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = (\lambda^2 - 1)x + 3$

Λύση:

Η f ορίζεται στο \mathbb{R} .

- f γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} όταν: $\lambda^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2} > \sqrt{1} \Leftrightarrow |\lambda| > 1 \Leftrightarrow \lambda > 1 \text{ ή } \lambda < -1$
- f γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} όταν: $\lambda^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 < 1 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2} < \sqrt{1} \Leftrightarrow |\lambda| < 1 \Leftrightarrow -1 < \lambda < 1$
- f σταθερή στο \mathbb{R} , όταν: $\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$ και με τύπο: $f(x) = 3$

Παράδειγμα 12

Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση: $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$

Λύση :

Το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbb{R} .

Απαλλαγόμαστε από τα απόλυτα με την βοήθεια του παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x-1$	-	○	+	+
$x-2$	-	-	○	+

- Αν $x \leq 1$ τότε : $f(x) = -x + 1 - x + 2 = -2x + 3$

- Αν $1 < x \leq 2$ τότε: $f(x) = x - 1 - x + 2 = 1$
- Αν $x > 2$ τότε: $f(x) = x - 1 + x - 2 = 2x - 3$

$$\text{οπότε: } f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \leq 2 \\ 2x - 3, & x > 2 \end{cases}$$

Επομένως: f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ αφού $\alpha = -2 < 0$

f σταθερή στο $[1, 2]$ αφού $\alpha = 0$

f γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$ αφού $\alpha = 2 > 0$.

Παράδειγμα 13

Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

Λύση:

Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f :

$$\text{Πρέπει: } 9 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{9} \Leftrightarrow |x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

$$x_1 < x_2 \leq 0$$

$$x_1^2 > x_2^2$$

$$-x_1^2 < -x_2^2$$

$$0 \leq 9 - x_1^2 < 9 - x_2^2$$

$$\sqrt{9 - x_1^2} < \sqrt{9 - x_2^2}$$

$$f(x_1) < f(x_2). \text{ Άρα } f \text{ γνησίως αύξουσα στο } [-3, 0]$$

α) Έστω $x_1, x_2 \in [-3, 0]$ με $x_1 < x_2$ τότε έχουμε:

β) Έστω $x_1, x_2 \in [0, 3]$ με $x_1 < x_2$ τότε έχουμε:

$$0 \leq x_1 < x_2$$

$$x_1^2 < x_2^2$$

$$-x_1^2 > -x_2^2$$

$$9 - x_1^2 > 9 - x_2^2$$

$$\sqrt{9 - x_1^2} > \sqrt{9 - x_2^2}$$

$$f(x_1) > f(x_2). \text{ Άρα } f \text{ γνησίως φθίνουσα στο } [0, 3]$$

Παράδειγμα 14

Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση: $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$

Λύση :

Το πεδίο ορισμού της παραπάνω συνάρτησης είναι το \mathbb{R} .

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x_1 < x_2 \leq 1$ τότε έχουμε :

$$x_1 - 1 < x_2 - 1 \leq 0$$

$$(x_1 - 1)^2 > (x_2 - 1)^2 \geq 0$$

$$2(x_1 - 1)^2 > 2(x_2 - 1)^2$$

$$2(x_1 - 1)^2 + 3 > 2(x_2 - 1)^2 + 3$$

$$f(x_1) > f(x_2). \text{ Οπότε η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } (-\infty, 1]$$

- Αν $1 \leq x_1 < x_2$ τότε έχουμε :

$$0 \leq x_1 - 1 < x_2 - 1$$

$$0 \leq (x_1 - 1)^2 < (x_2 - 1)^2$$

$$2(x_1 - 1)^2 < 2(x_2 - 1)^2$$

$$2(x_1 - 1)^2 + 3 < 2(x_2 - 1)^2 + 3$$

$$f(x_1) < f(x_2). \text{ Οπότε η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [1, +\infty)$$

Μέθοδος

Όταν η συνάρτηση είναι της μορφής:

$$f(x) = A(x - a)^2 + B$$

εξετάζουμε την μονοτονία σε καθένα απ'τα διαστήματα

$(-\infty, a], [a, +\infty)$, εφόσον η συνάρτηση ορίζεται σ'αυτά.

Παράδειγμα 15

Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση: $f(x) = x^2 - 4x + 5$

Λύση:

Έχουμε:

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1$$

Εφαρμόζοντας ακριβώς την ίδια διαδικασία όπως στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε:

- f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$
- f γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$

Μέθοδος

Ένας τρόπος εύρεσης της μονοτονίας σε συναρτήσεις με τύπο:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0 \text{ είναι να τις φέρνουμε στη μορφή:}$$

$$f(x) = k(x - \lambda)^2 + \mu. \text{ Στη συνέχεια ακολουθούμε τη διαδικασία του προηγούμενου παραδείγματος.}$$

Εναλλακτικά μπορούμε να εξετάσουμε τη μονοτονία κατευθείαν στα διαστήματα:

$$\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right] \text{ και } \left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$$

Γ. Ακρότατα συνάρτησης

Θεωρία 6.

Ποτε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει:

α) μέγιστο στο x_0

β) ελάχιστο στο x_0

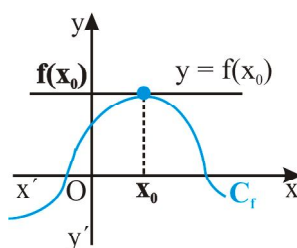
Απάντηση:

α) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 \in A$ όταν:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A.$$

Η τιμή $f(x_0)$ ονομάζεται **μέγιστο** της συνάρτησης f .

Γραφική ερμηνεία



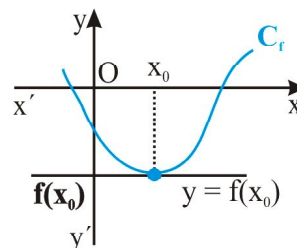
Η C_f βρίσκεται κάτω απ' την ευθεία με εξίσωση $y = f(x_0)$

β) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει **ελάχιστο** στο $x_0 \in A$ όταν:

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A.$$

Η τιμή $f(x_0)$ λέγεται **ελάχιστο** της συνάρτησης f .

Γραφική ερμηνεία



Η C_f βρίσκεται πάνω απ' την ευθεία με εξίσωση $y = f(x_0)$

Σημείωση:

Το μέγιστο και το ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται **ακρότατα** της f .

Μέθοδος (για την εύρεση των ακροτάτων)

Αρχικά βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f και προσπαθούμε να βρούμε τα ακρότατα:

A. Με τον ορισμό:

Προσπαθούμε να δείξουμε ότι $f(x) \leq f(x_0)$ (μέγιστο), ή $f(x) \geq f(x_0)$ (ελάχιστο), για κάθε x του πεδίου ορισμού της συνάρτησης, στηριζόμενοι στις ανισοτικές σχέσεις που προκύπτουν απ' τον τύπο της συνάρτησης (**παράδειγμα A**).

B. Με την μονοτονία:

I) Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

α) Αν f γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$ και f γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$ τότε η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 το $f(x_0)$

β) Αν f γνησίως φθίνουσα στο $(\alpha, x_0]$ και f γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$ τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0)$ (**παράδειγμα B**).

II) Έστω ότι η f είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$

α) Αν f γνησίως αύξουσα τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1 = \alpha$ το $f(\alpha)$ και μέγιστο στο $x_2 = \beta$ το $f(\beta)$ (**παράδειγμα Γ**).

β) Αν f γνησίως φθίνουσα τότε η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_1 = \alpha$ το $f(\alpha)$ και ελάχιστο στο $x_2 = \beta$ το $f(\beta)$

III) Έστω ότι η f είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ ή $(\alpha, \beta]$

α) Αν f γνησίως αύξουσα τότε η f παρουσιάζει μόνο ελάχιστο στο $x_0 = \alpha$ το $f(\alpha)$ ή μόνο μέγιστο στο $x_0 = \beta$ το $f(\beta)$

β) Αν f γνησίως φθίνουσα τότε η f παρουσιάζει μόνο μέγιστο στο $x_0 = \alpha$ το $f(\alpha)$ ή μόνο ελάχιστο στο $x_0 = \beta$ το $f(\beta)$.

IV) Έστω ότι η f είναι ορισμένη στο (α, β) και f γνησίως αύξουσα ή f γνησίως φθίνουσα τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατα (**παράδειγμα Γ**).

Παράδειγμα A

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = 2|x + 1| + 3$

Λύση:

Το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbb{R} .

Έχουμε: $2|x + 1| \geq 0 \Leftrightarrow 2|x + 1| + 3 \geq 3 \Leftrightarrow f(x) \geq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Βρίσκουμε για ποια τιμή του x το $f(x)$ είναι ίσο με το 3.

Έχουμε: $f(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2|x_0 + 1| + 3 = 3 \Leftrightarrow 2|x_0 + 1| = 0 \Leftrightarrow |x_0 + 1| = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1$

Άρα ισχύει $f(x) \geq f(-1)$

Οπότε η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = -1$ το $f(-1) = 3$.

Παράδειγμα Γ

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = 2x + 3$ με πεδίο ορισμού το $[2, 4]$. Να βρεθούν τα ακρότατα της f .

Λύση:

Επειδή $a = 2 > 0$ η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, 4]$

Άρα η f θα παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1 = 2$ το $f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$, μέγιστο στο $x_2 = 4$ το $f(4) = 2 \cdot 4 + 3 = 11$

Ερωτήσεις κατανόησης - Λυμένα Παραδείγματα

Παράδειγμα 16

Να βρεθούν τα ακρότατα της f με: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 12$

Λύση:

Το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbb{R} .

$$\text{Έχουμε: } f(x) = (x^4 - 8x^2 + 16) - 4 = (x^2 - 4)^2 - 4$$

$$\text{οπότε } f(x) + 4 = (x^2 - 4)^2 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) + 4 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq -4$$

$$f(x) = -4 \text{ όταν } (x^2 - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2$$

Άρα f παρουσιάζει ελάχιστο το -4 στο $x = 2$ ή $x = -2$.

Παράδειγμα 17

Να βρεθούν τα ακρότατα της f με: $f(x) = 3x^4 + 2x^2 + 1$

Λύση:

Το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbb{R} .

$$\text{Έχουμε: } f(x) = 3x^4 + 2x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 = 3x^4 + 2x^2 \quad (1)$$

$$\text{Επειδή } 3x^4 + 2x^2 \geq 0, \quad (1) \Leftrightarrow f(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 1$$

$$f(x) = 1 \text{ όταν } 3x^4 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(3x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (3x^2 + 2 \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R})$$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο το 1 στο $x = 0$.

Παράδειγμα 18

Να εξεταστεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 4x + 7$ σε καθένα απ'τα διαστήματα: $(-\infty, 2]$, $[2, +\infty)$.

Κατόπιν να δείξετε ότι: $f(-3^{2002}) \cdot f(3^{2002}) > 9$

Λύση:

Το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbb{R} .

Σχηματίζουμε την διαφορά:

$$\Delta = f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - 4x_2 + 7 - (x_1^2 - 4x_1 + 7) = x_2^2 - 4x_2 + 7 - x_1^2 + 4x_1 - 7 =$$



$$(x_2 - x_1) \cdot (x_2 + x_1) - 4(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1) \cdot (x_2 + x_1 - 4) \quad (1)$$

• Έστω $x_1 < x_2 \leq 2$ τότε $x_2 - x_1 > 0$ και $\begin{cases} x_1 < 2 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$ ή $x_1 + x_2 < 4$ ή $x_1 + x_2 - 4 < 0$

οπότε $(1) \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1) \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$, άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$

• Έστω $2 \leq x_1 < x_2$ τότε $x_2 - x_1 > 0$ και $\begin{cases} 2 \leq x_1 \\ 2 < x_2 \end{cases}$ ή $4 < x_1 + x_2$ ή $x_1 + x_2 - 4 > 0$

οπότε $(1) \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, άρα η f γνησίως αυξουσα στο $[2, +\infty)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f			

Απ'τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι στο $x_0 = 2$ η f παρουσιάζει ελάχιστο το

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 7 = 3$$

Επειδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 2$

έχουμε: $f(-3^{2002}) > f(2) \Leftrightarrow f(-3^{2002}) > 3$

$$f(3^{2002}) > f(2) \Leftrightarrow f(3^{2002}) > 3$$

άρα $f(-3^{2002}) \cdot f(3^{2002}) > 9$.

Ερωτήσεις κατανόησης - Ασκήσεις για Λύση

• Άρτιες - περιττές

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

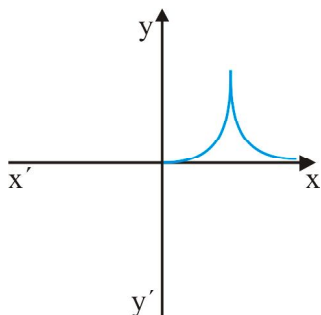
- i) Για μία συνάρτηση άρτια όλα τα x του πεδίου ορισμού της αντιστοιχούν σε διαφορετικά y του συνόλου τιμών της. ()
- ii) Μία συνάρτηση δεν μπορεί να είναι περιττή αν έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{N} . ()
- iii) Αν μία συνάρτηση f είναι άρτια και $f(\sqrt{3})=1$ τότε και $f(-\sqrt{3})=1$ ()
- iv) Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ με πεδίο ορισμού $A=(-1,0) \cup (0,2)$ είναι περιττή. ()
- v) Μία συνάρτηση άρτια έχει γραφική παράσταση συμμετρική ως προς την ευθεία με εξίσωση $x=0$. ()
- vi) Μία σταθερή συνάρτηση είναι κατ' ανάγκη άρτια. ()
- vii) Αν η γραφική παράσταση μίας περιττής συνάρτησης διέρχεται από το σημείο $(-1,3)$ τότε θα διέρχεται και από το σημείο $(1,-3)$. ()
- viii) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^{2004}+x^{1908}$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ ()

2. Να επιλέξετε το γράμμα της σωστής απάντησης σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις.

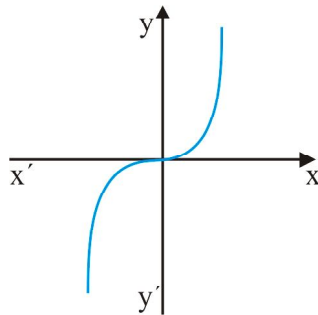
- i) Σε μία περιττή συνάρτηση:
 - α. Αντίθετα x αντιστοιχούν σε αντίθετα y .
 - β. Αντίθετα x αντιστοιχούν σε ίσα y .
 - γ. Η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική στον $y'y$.
 - δ. Κανένα από τα παραπάνω.
- ii) Για μία άρτια συνάρτηση f είναι $f(-1)+f(2)=3$. Τότε η παράσταση $A = 2f(-2) + 2f(1)$ είναι ίση με:
 - α. 2
 - β. 1
 - γ. 6
 - δ. -6
- iii) Η τιμή του a για την οποία το διάστημα $[2a-1, 4-a]$ είναι το πεδίο ορισμού μιας άρτιας συνάρτησης είναι:
 - α. 3
 - β. -3
 - γ. 2
 - δ. 1
- iv) Έστω ότι ισχύει: $g(x)=2f(x)+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια τότε:
 - α. Η g είναι περιττή
 - β. Η g είναι άρτια
 - γ. Άλλοτε άρτια και άλλοτε περιττή
 - δ. Ούτε άρτια ούτε περιττή.

ν) Ποιό από τα παρακάτω σχήματα είναι γραφική παράσταση άρτιας συνάρτησης;

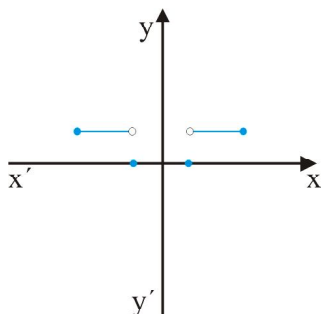
α)



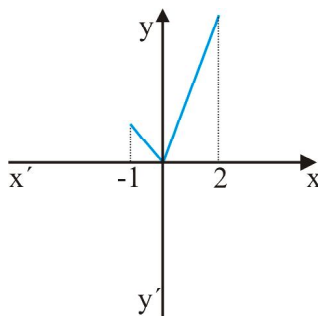
β)



γ)



δ)



vi) Ποιό από τα παρακάτω ζεύγη σημείων μπορεί να ανήκει στην γραφική παράσταση μίας περιττής συνάρτησης.

α. $A(-1,2)$, $B(1,2)$

β. $\Gamma(1,2)$, $\Delta(-1,-2)$

γ. $E(-1,2)$, $Z(-1,-2)$

δ. Κανένα από τα παραπάνω.

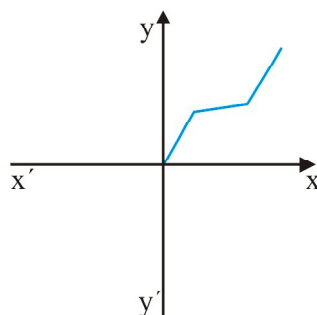
3. Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα τιμών αν η συνάρτηση $y=f(x)$ είναι περιττή.

x	-2	-1	0	1	2
y	-4			3	

4. Να συμπληρώσετε την γραμμή του διπλανού σχήματος ώστε να προκύψει γραφική παράσταση:

i) μίας άρτιας συνάρτησης

ii) μίας περιττής συνάρτησης



5. Να εξετάσετε ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιές περιττές:

$$\text{i) } f(x)=3x^3+x \quad \text{ii) } f(x)=x^6+4x^2+1 \quad \text{iii) } f(x)=2|x|+1 \quad \text{iv) } f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$$

6. Το ίδιο για τις συναρτήσεις:

$$\begin{array}{lll} \text{i) } f(x) = -x^3|x| & \text{ii) } f(x) = \frac{3x}{x^2+1} & \text{iii) } f: (-2,3] \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = x^2+1 \\ \text{iv) } f(x) = \sqrt{4-x^2} & \text{v) } f(x) = \sqrt{x+2} \end{array}$$

7. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } f(x)=|x-1|+|x+1| & \text{ii) } f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2} \\ \text{iii) } f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-x+2}{x^2+x+1}, & x \in (-\infty,0] \\ \frac{x^2+x+2}{x^2-x+1}, & x \in [0,+\infty) \end{cases} \end{array}$$

8. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι: i) $f(0)=0$

ii) Η f είναι περιττή.

9. Αν $x^2 f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f περιττή να βρεθεί ο τύπος της.

10. Έστω μία συνάρτηση f με $f(x)=(\lambda-1)x+3\lambda-1$. Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η f είναι:

i) Άρτια

ii) Περιττή

• Μονοτονία - Ακρότατα

11. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

- i) Αν το 1 και 2 ανήκουν στο πεδίο ορισμού μίας γνησίως φθίνουσας συνάρτησης f τότε $f(1)-f(2)>0$ ()
- ii) Έστω f μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $f(\lambda)>f(\lambda+1)$ ()
- iii) Αν η συνάρτηση f είναι άρτια στο \mathbb{R} τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} (αιτιολογήστε την απάντησή σας). ()
- iv) Έστω μία συνάρτηση f που είναι άρτια στο \mathbb{R} και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα και στο $(-\infty, 0)$ (αιτιολογήστε την απάντησή σας). ()
- v) Μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $A=[-1, 2]$ τότε η f έχει ελάχιστο στο $x = 2$ και μέγιστο στο $x = -1$. ()
- vi) Αν μία περιττή συνάρτηση f έχει μέγιστο στο σημείο $A(-1, 2)$ τότε έχει ελάχιστο στο $B(1, -2)$. ()
- vii) Μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και $f(1)=0$, τότε:
- α. $f(0) \cdot f(3) < 0$ ()
- β. $f(-4) - f(3) > 0$ ()
- γ. Αν $f(2) > 1$, τότε: $f(f(2)) > 0$ ()

12. Να επιλέξετε το γράμμα της σωστής απάντησης.

- i) Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ έχει στο σημείο $x_0 = 1$.
- α. Ελάχιστο β. Μέγιστο γ. Δεν έχει ακρότατα
- ii) Αν μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $[1, 5]$ τότε η f έχει:
- α. Ελάχιστο το $f(1)$, μέγιστο το $f(5)$ β. Μέγιστο το $f(1)$, ελάχιστο το $f(5)$
- γ. Μόνο μέγιστο το $f(5)$ δ. Δεν έχει ακρότατα
- iii) Αν η συνάρτηση f με $f(x)=(\lambda^2-2)x$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} τότε:
- α. $\lambda < 0$ β. $\lambda > 2$ γ. $\lambda < -2$ ή $\lambda > 2$ δ. $-2 < \lambda < 2$
- iv) Η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{1}{\lambda^2+1} \cdot x^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι:
- α. Γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.
- β. Σταθερή στο \mathbb{R} .
- γ. Γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .
- δ. Γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

- ν) Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τις τιμές του x .

x	-3	-2	-1	1	2	3
-----	----	----	----	---	---	---

Οι αντίστοιχες τιμές της f είναι:

α. 5 4 1 2 1 3

β. 4 3 2 2 5 6

γ. 1 3 4 4 3 1

δ. 3 2 1 2 3 2

- vi) Αν για μία συνάρτηση f ισχύει: $f(x_1) - f(x_2) > 0$ για $x_2 - x_1 > 0$ τότε η f είναι:
 α. γνησίως αύξουσα
 β. γνησίως φθίνουσα
 γ. Άλλοτε γνησίως αύξουσα και άλλοτε γνησίως φθίνουσα

- vii) Αν για μία συνάρτηση f ισχύει: $(f(3) - f(1)) \cdot (f(3) - f(4)) > 0$ τότε η f :
 α. Είναι γνησίως αύξουσα
 β. Είναι γνησίως φθίνουσα
 γ. Είναι σταθερή
 δ. Δεν είναι γνησίως μονότονη.

13. Για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = (a+1)x+3$ είναι:

i) γνησίως αύξουσα

ii) γνησίως φθίνουσα

14. Να εξεταστούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις f με:

α) $f(x) = 3x + 1$

β) $f(x) = x^3 + 2x - 1$

15. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα οι συναρτήσεις:

i) $f(x) = -2x^2$ με $x \in [-2, 3]$

ii) $g(x) = \frac{3}{2}x^2$ με $x \in [1, 2]$

16. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{x}$

17. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \frac{\lambda^2 - 4}{x}$, $x \neq 0$

18. Ομοίως η συνάρτηση $f(x) = (\lambda^2 - 1) \cdot x^2$

19. Ομοίως οι συναρτήσεις

i) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ με $x \leq 2$

ii) $g(x) = -3x^2 + 6x + 1$ με $x \leq 1$.

20. Ομοίως για την συνάρτηση $f(x) = |x-1| + |x-2|$

- 21.** Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού a ώστε η συνάρτηση f με $f(x)=a|x-2|+|β|1-x|-β|x-3|+|1+x|$ να είναι γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$
- 22.** Να εξεταστούν ως προς τα ακρότατα οι συναρτήσεις:
i) $f(x)=3x^2+1$ ii) $g(x)=3|x-1|+2$
iii) $h(x)=2-\sqrt{x-1}$ iv) $k(x)=-2(x+1)^2+3$
- 23.** Ομοίως των συναρτήσεων.
i) $f(x)=3x^2-6x+6$ ii) $g(x)=x^2-2x+8$ iii) $h(x)=-2x^2+4x+1$
- 24.** Να βρεθούν η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=x^2-6x+3$ με πεδίο ορισμού το $A=[0,2]$
- 25.** Έστω μία άρτια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} η οποία παρουσιάζει στο $x=2$ μέγιστο το $f(2)=3$. Δείξτε ότι η f παρουσιάζει τον ίδιο μέγιστο και για άλλη τιμή του x την οποία και να βρείτε.
- 26.** Έστω μία περιττή συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} η οποία παρουσιάζει στο $x=3$ ελάχιστο το $f(3)=-5$. Δείξτε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο το οποίο να προσδιορίσετε.

