

## Απαραίτητες γνώσεις Θεωρίας

### Θεωρία 1.

- α) Τι παριστάνει γραφικά η εξίσωση  $x^2 + y^2 = \rho^2$ ,  $\rho > 0$ ; Αποδείξτε το.  
 β) Τι εννοούμε όταν λέμε να λυθεί ένα σύστημα γραφικά; (γραφική επίλυση συστήματος).  
 γ) Πού πλεονεκτεί και πού μειονεκτεί έναντι της αλγεβρικής επίλυσης, η γραφική επίλυση ενός συστήματος;

### Απάντηση:

- α) Γεωμετρικά η εξίσωση  $x^2 + y^2 = \rho^2$ ,  $\rho > 0$  παριστάνει κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho$  δηλαδή τον κύκλο  $(O,\rho)$ .

#### Απόδειξη:

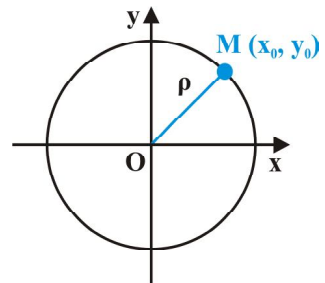
Έστω  $M(x_0, y_0)$  ένα σημείο του επιπέδου που επαληθεύει την εξίσωση  $x^2 + y^2 = \rho^2$ ,  $\rho > 0$

$$\text{Τότε: } x_0^2 + y_0^2 = \rho^2 \Leftrightarrow \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{\rho^2} = \rho \quad (1)$$

Επίσης

$(OM) = \sqrt{(x_0 - 0)^2 + (y_0 - 0)^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \stackrel{(1)}{=} \rho$ . Δηλαδή  $(OM) = \rho$  οπότε το σημείο  $M$  απέχει από το σταθερό σημείο  $O$  σταθερή απόσταση  $\rho$ . Άρα με βάση τον ορισμό του κύκλου το  $M$  βρίσκεται στον κύκλο  $(O,\rho)$ .

- β) Όταν λέμε να λυθεί το σύστημα γραφικά εννοούμε να κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των γραμμών που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος και να βρούμε τα σημεία τομής τους (αν υπάρχουν). Αυτά τα σημεία τομής είναι και οι λύσεις του συστήματος.
- γ) **Πλεονεκτεί** στην περίπτωση που η αλγεβρική επίλυση είναι δύσκολη. Επίσης βρίσκουμε σχετικά γρήγορα τις λύσεις του συστήματος. **Μειονεκτεί** στο ότι οι λύσεις που βρίσκουμε πιθανόν να είναι προσεγγιστικές των πραγματικών λύσεων (λόγο αδυναμίας στα να κατασκευάσουμε τέλειες γραφικές παραστάσεις). Επίσης μειονεκτεί στο ότι δεν είναι πάντα δυνατόν να κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις που παριστάνουν οι εξισώσεις.



## Ερωτήσεις Κατανόησης - Λυμένα παραδείγματα.

**Παράδειγμα 2**  
 Να λυθεί το σύστημα: 
$$\begin{cases} 3(x-1)^2 + y^2 = 1 & (1) \\ 2x + y = 3 & (2) \end{cases}$$

**Λύση:**

$$(2) \Leftrightarrow y = 3 - 2x \quad (3)$$

Αντικαθιστούμε την (3) στην (1) και έχουμε:

$$\begin{aligned} 3(x-1)^2 + (3-2x)^2 &= 1 \Leftrightarrow 3(x^2 - 2x + 1) + (9 - 12x + 4x^2) = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \underline{3x^2} - \underline{6x} + 3 + 9 - \underline{12x} + \underline{4x^2} - 1 &= 0 \Leftrightarrow 7x^2 - 18x + 11 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 1 \quad \text{ή} \quad x_2 = \frac{11}{7}$$

Έτσι έχουμε:

α) Αν  $x = 1$  τότε:  $(2) \Leftrightarrow y = 3 - 2 \cdot 1 = 1$  Άρα μια λύση του συστήματος είναι  $(x, y) = (1, 1)$

β) Αν  $x = \frac{11}{7}$  τότε:  $(2) \Leftrightarrow y = 3 - 2 \cdot \frac{11}{7} = \frac{21}{7} - \frac{22}{7} = -\frac{1}{7}$

Άρα η άλλη λύση του συστήματος είναι  $(x, y) = \left(\frac{11}{7}, -\frac{1}{7}\right)$

**Παράδειγμα 3**  
 Να λυθεί το σύστημα: 
$$\begin{cases} yx^2 - 5xy = -6y & (1) \\ 2x + y = 5 & (2) \end{cases}$$

**Λύση:**

Η (1) γίνεται:

$$yx^2 - 5xy + 6y = 0 \Leftrightarrow y(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 - 5x + 6 = 0$$

Από τις δύο παραπάνω εξισώσεις και από την (2) έχουμε τα εξής συστήματα:

$$(\Sigma_1) : \begin{cases} y = 0 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \quad (\Sigma_2) : \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

$$\text{Λύση του } (\Sigma_1) : \begin{cases} y = 0 \\ 2x + 0 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases} \quad \text{Άρα} \quad (x, y) = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

**Σχόλιο:**

Όταν η μία εξίσωση του συστήματος είναι 2ου βαθμού και η άλλη 1ου ο συνήθης τρόπος λύσης είναι η αντικατάσταση.

**Σχόλιο:**

Παρατηρούμε στην εξίσωση (1) πως όλοι οι όροι έχουν κοινό το  $y$ . Σε τέτοια περίπτωση τα μεταφέρουμε όλα στο 1ο μέλος και κάνουμε παραγοντοποίηση.

$$\text{Λύση του } (\Sigma_2) : \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

$$\alpha) \text{ Αν } x = 2: 2x + y = 5 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 + y = 5 \Leftrightarrow y = 1 \quad \text{Άρα } (x, y) = (2, 1)$$

$$\beta) \text{ Αν } x = 3: 2x + y = 5 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 + y = 5 \Leftrightarrow y = -1 \quad \text{Άρα } (x, y) = (3, -1)$$

**Παράδειγμα 4**

$$\text{Να λυθεί το σύστημα: } \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & (1) \\ xy = 2 & (2) \end{cases}$$

**Λύση:**

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 2xy = 5 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} (x + y)^2 - 2 \cdot 2 = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 = 9 \Leftrightarrow x + y = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x + y = 3 \quad \text{ή} \quad x + y = -3$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις μαζί με την εξίσωση (2) έχουμε τα εξής δύο συστήματα:

$$(\Sigma_1) : \begin{cases} x + y = 3 \\ x \cdot y = 2 \end{cases} \quad (\Sigma_2) : \begin{cases} x + y = -3 \\ x \cdot y = 2 \end{cases}$$

**Λύση του  $(\Sigma_1)$** 

Οι λύσεις του  $(\Sigma_1)$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$\omega^2 - S\omega + P = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 3\omega + 2 = 0 \Leftrightarrow \omega = 1 \quad \text{ή} \quad \omega = 2$$

$$\text{Άρα: } (x, y) = (1, 2) \quad \text{ή} \quad (x, y) = (2, 1)$$

**Λύση του  $(\Sigma_2)$ .**

Οι λύσεις του  $(\Sigma_2)$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$\omega^2 - S\omega + P = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - (-3)\omega + 2 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 + 3\omega + 2 = 0 \Leftrightarrow \omega = -1 \quad \text{ή} \quad \omega = -2$$

$$\text{Άρα: } (x, y) = (-1, -2) \quad \text{ή} \quad (x, y) = (-2, -1)$$

**Σχόλιο:**

Σε συστήματα που η μια εξίσωση είναι της μορφής  $x^2 + y^2 = a^2$  χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

**Παράδειγμα 5**

Να λυθεί το σύστημα: 
$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 13 & (1) \\ 2x + 3y = 5 & (2) \end{cases}$$

**Λύση:**

$$(1) \Leftrightarrow (2x)^2 + (3y)^2 = 13 \Leftrightarrow (2x + 3y)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y = 13 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 5^2 - 12xy = 13 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -12xy = 13 - 25 \Leftrightarrow -12xy = -12 \Leftrightarrow xy = 1 \quad (3)$$

Από (2) και (3) έχουμε το σύστημα: 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ xy = 1 \end{cases}$$

$$\text{Η (3)} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x} (x \neq 0) \quad (4)$$

$$\text{Η (2)} \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} 2x + 3 \cdot \frac{1}{x} = 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 3 = 5x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = \frac{3}{2}$$

α) Αν  $x = 1$  τότε:  $(4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{1} = 1$  Άρα  $(x, y) = (1, 1)$

β) Αν  $x = \frac{3}{2}$  τότε  $(4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$  Άρα  $(x, y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$

**Παράδειγμα 6**

Να λυθεί το σύστημα: 
$$\begin{cases} 8x^3 + 27y^3 = 35 & (1) \\ 2x + 3y = 5 & (2) \end{cases}$$

**Λύση:**

$$(1) \Leftrightarrow 8x^3 + 27y^3 = 35 \Leftrightarrow (2x)^3 + (3y)^3 = 35$$

$$\Leftrightarrow (2x + 3y)^3 - 3 \cdot 2x \cdot 3y(2x + 3y) = 35$$

$$\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 5^3 - 18xy \cdot 5 = 35 \Leftrightarrow 5^2 - 18xy = 7 \quad (\text{διαίρεσαμε με } 5)$$

$$\Leftrightarrow -18xy = 7 - 25 \Leftrightarrow -18xy = -18 \Leftrightarrow xy = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x} \quad (3)$$

Αντικαθιστούμε την (3) στην (2) και έχουμε:

$$2x + 3 \cdot \frac{1}{x} = 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 3 = 5x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ ή } x = 1$$

Έτσι έχουμε:

α) Αν  $x = \frac{3}{2}$  τότε:  $(3) \Leftrightarrow y = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$  Άρα:  $(x, y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$

**Σχόλιο:**

Σε συστήματα που η μια εξίσωση είναι της μορφής  $x^3 + y^3 = \alpha$  χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= \\ &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \end{aligned}$$

β) Αν  $x = 1$  τότε:  $(3) \Leftrightarrow y = \frac{1}{1} \Leftrightarrow y = 1$  Άρα:  $(x, y) = (1, 1)$

### Παράδειγμα 7

Να λυθεί το σύστημα: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (1) \\ x + y + xy = 3 & (2) \end{cases}$$

**Λύση:**

$$(1) \Leftrightarrow (x + y)^2 - 2xy = 2 \quad (3)$$

Απο (2) και (3) έχουμε το σύστημα: 
$$\begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 2 \\ (x + y) + xy = 3 \end{cases}$$

Θέτουμε:  $x + y = \alpha$  (4) και  $xy = \beta$  (5) οπότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} \alpha^2 - 2\beta = 2 \\ \text{και} \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - 2\beta = 2 \\ \text{και} \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - 2(3 - \alpha) = 2 \\ \text{και} \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - 6 + 2\alpha - 2 = 0 \\ \text{και} \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + 2\alpha - 8 = 0 \\ \text{και} \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \quad \text{ή} \quad \alpha = 2 \\ \text{και} \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ \text{και} \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \alpha = 2 \\ \text{και} \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases}$$

$$1) \text{ Αν: } \begin{cases} \alpha = -4 \\ \text{και} \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ \text{και} \\ \beta = 3 - (-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ \text{και} \\ \beta = 7 \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{(4)} \\ \xrightarrow{(5)} \end{matrix} \begin{cases} x + y = -4 \\ \text{και} \\ xy = 7 \end{cases}$$

Τα  $x, y$  είναι ρίζες της εξίσωσης:  $\omega^2 - S\omega + P = 0 \Leftrightarrow \omega^2 + 4\omega + 7 = 0$ , αδύνατη διότι  $\Delta = -12 < 0$

$$2) \text{ Αν: } \begin{cases} \alpha = 2 \\ \text{και} \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \text{και} \\ \beta = 3 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \text{και} \\ \beta = 1 \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{(4)} \\ \xrightarrow{(5)} \end{matrix} \begin{cases} x + y = 2 \\ \text{και} \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{και} \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{Άρα: } (x, y) = (1, 1)$$

**Παράδειγμα 8**

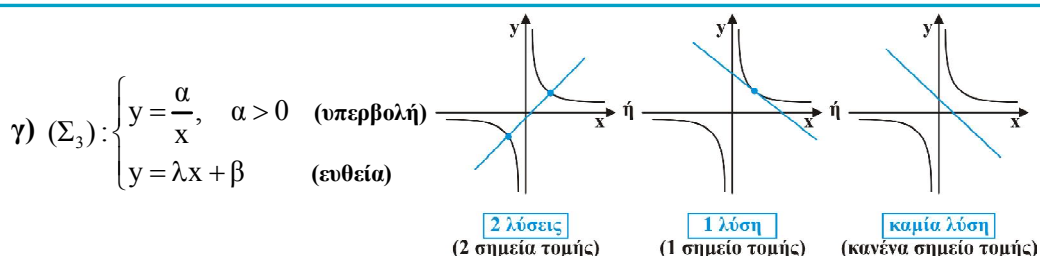
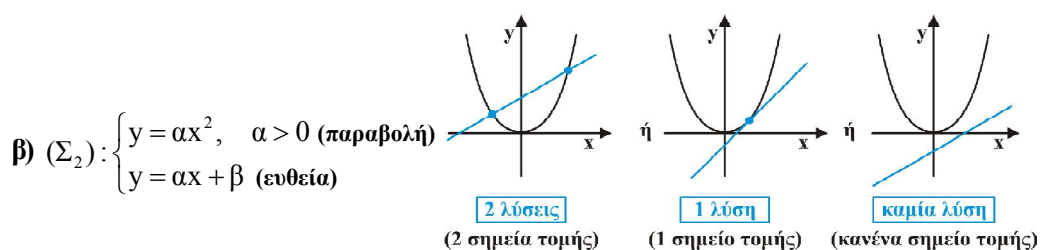
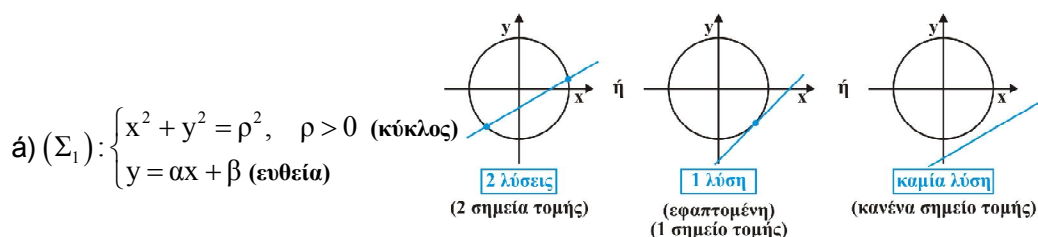
Πόσες διαφορετικές λύσεις μπορεί να έχουν τα συστήματα:

$$\alpha) (\Sigma_1): \begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2, & \rho > 0 \\ y = ax + \beta, & a > 0 \end{cases} \quad \beta) (\Sigma_2): \begin{cases} y = ax^2, & a > 0 \\ y = \lambda x + \beta, & \lambda > 0 \end{cases} \quad \gamma) (\Sigma_3): \begin{cases} y = \frac{a}{x}, & a > 0 \\ y = \lambda x + \beta, & \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

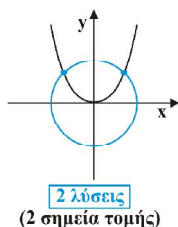
$$\delta) (\Sigma_4): \begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2, & \rho > 0 \\ y = ax^2, & a > 0 \end{cases} \quad \varepsilon) (\Sigma_5): \begin{cases} y = ax^2, & a > 0 \\ y = \frac{\beta}{x}, & \beta > 0 \end{cases} \quad \sigma\tau) (\Sigma_6): \begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2, & \rho > 0 \\ y = \frac{a}{x}, & a > 0 \end{cases}$$

Να δώσετε τις απαντήσεις σας γραφικά.

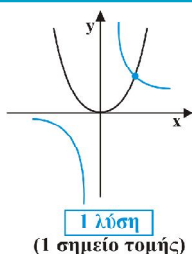
**Λύση:**



$$\delta) (\Sigma_4): \begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2, & \rho > 0 \quad (\text{κύκλος}) \\ y = \alpha x^2, & \alpha > 0 \quad (\text{παραβολή}) \end{cases}$$



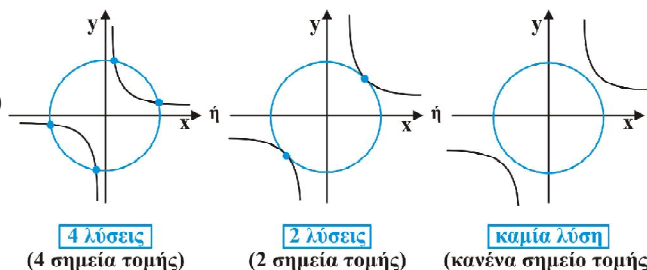
$$\epsilon) (\Sigma_5): \begin{cases} y = \alpha x^2, & \alpha > 0 \quad (\text{παραβολή}) \\ y = \frac{\beta}{x}, & \beta > 0 \quad (\text{υπερβολή}) \end{cases}$$

**Μέθοδος:**

Γνωρίζουμε ότι οι λύσεις του κάθε συστήματος είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος.

Άρα το πόσες λύσεις έχει το κάθε ένα από τα παραπάνω συστήματα εξαρτάται από το πλήθος των σημείων τομής που έχουν οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων του κάθε συστήματος.

$$\sigma\tau) (\Sigma_6): \begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2, & \rho > 0 \\ y = \frac{\alpha}{x}, & \alpha > 0 \end{cases}$$

**Παράδειγμα 9**

Να βρείτε πόσες λύσεις έχει το σύστημα:  $\begin{cases} x^2 + 2y = 4 & (1) \\ y - 2x = \mu + 1 & (2) \end{cases}$

για τις διάφορες τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$

**Λύση:**

$$(2) \Leftrightarrow y = 2x + \mu + 1 \quad (3)$$

$$(1) \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} x^2 + 2(2x + \mu + 1) = 4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2\mu + 2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2\mu - 2 = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2\mu - 2) = 16 - 8\mu + 8 = 24 - 8\mu$$

Έτσι έχουμε:

**α)** Αν  $\Delta > 0 \Leftrightarrow 24 - 8\mu > 0 \Leftrightarrow -8\mu > -24 \Leftrightarrow \mu < 3$  τότε η εξίσωση έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες. Άρα το σύστημα έχει δύο λύσεις διαφορετικές.

β) Αν  $\Delta = 0 \Leftrightarrow 24 - 8\mu = 0 \Leftrightarrow -8\mu = -24 \Leftrightarrow \mu = 3$  τότε η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή οπότε το σύστημα έχει μια λύση.

γ) Αν  $\Delta < 0 \Leftrightarrow 24 - 8\mu < 0 \Leftrightarrow -8\mu < -24 \Leftrightarrow \mu > 3$  τότε η εξίσωση είναι αδύνατη οπότε το σύστημα είναι αδύνατο δηλαδή δεν έχει λύση.

### Παράδειγμα 10

Δίνεται ο κύκλος  $x^2 + y^2 = 2\mu$  (1) και η ευθεία  $y = 3x + \mu$  (2). Να βρείτε το  $\mu$  ώστε η ευθεία να εφάπτεται στον κύκλο.

#### Λύση:

Λύνουμε το σύστημα:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + (3x + \mu)^2 = 2\mu \Leftrightarrow x^2 + 9x^2 + 6\mu x + \mu^2 - 2\mu = 0 \Leftrightarrow 10x^2 + 6\mu x + \mu^2 - 2\mu = 0$$

Για να έχει το σύστημα μια λύση θα πρέπει η εξίσωση να έχει μια ρίζα διπλή. Άρα θα πρέπει:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (6\mu)^2 - 4 \cdot 10(\mu^2 - 2\mu) = 0 \Leftrightarrow 36\mu^2 - 40\mu^2 + 80\mu = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\mu^2 + 80\mu = 0 \Leftrightarrow -4\mu(\mu - 20) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ \text{ή} \\ \mu - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ \text{ή} \\ \mu = 20 \end{cases}$$

#### Σχόλιο:

Για να εφάπτεται η ευθεία στον κύκλο θα πρέπει η ευθεία και ο κύκλος να έχουν ένα μόνο σημείο τομής. Άρα θα πρέπει το σύστημα να έχει μια μόνο λύση.

### Παράδειγμα 11

Αποφάσισε ένα super - market να μοιράσει 630 κιβώτια γάλα εξίσου σε κάποιες φτωχές οικογένειες. Όμως 15 οικογένειες δεν μπορούσαν να προσέλθουν για να παραλάβουν το γάλα. Έτσι οι υπόλοιπες οικογένειες που προσήλθαν πήραν 1 κιβώτιο παραπάνω. Πόσες ήταν οι οικογένειες που έπρεπε να προσέλθουν και πόσα κιβώτια γάλα πήρε τελικά κάθε οικογένεια που προσήλθε;

#### Λύση:

- Έστω  $x$  οι οικογένειες που έπρεπε να προσέλθουν, και  $y$  τα κιβώτια γάλα που έπρεπε να πάρει η κάθε μια. Τότε:  $x \cdot y = 630$  (1) (με  $x > 0, y > 0$ )
- Προσήλθαν 15 οικογένειες λιγότερες δηλαδή,  $x - 15$  οικογένειες. Η κάθε μια πήρε 1 κιβώτιο παραπάνω δηλαδή,  $y + 1$  κιβώτια. Άρα:  $(x - 15)(y + 1) = 630$  (2)

$$\text{Από (1) και (2) έχουμε το σύστημα: } \begin{cases} xy = 630 \\ (x - 15)(y + 1) = 630 \end{cases} \Leftrightarrow (x - 15)(y + 1) = xy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{xy} + x - 15y - 15 = \underline{xy} \Leftrightarrow x - 15y - 15 = 0 \Leftrightarrow x = 15y + 15 \quad (3)$$



$$\text{Η (1)} \Leftrightarrow xy = 630 \Leftrightarrow (15y + 15)y = 630 \Leftrightarrow 15y^2 + 15y - 630 = 0 \\ \Leftrightarrow y^2 + y - 42 = 0 \text{ (διαιρέσαμε με 15)}$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1(-42) = 1 + 168 = 169$$

$$\text{Άρα: } y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{-1+13}{2} = \frac{12}{2} = 6 \\ y_2 = \frac{-1-13}{2} = \frac{-14}{2} = -7 \text{ (απορρίπτεται)} \end{cases}$$

$$\text{Άρα } y = 6 \text{ (4)}. \text{ Η (3)} \Leftrightarrow x = 15 \cdot 6 + 15 \Leftrightarrow x = 90 + 15 \Leftrightarrow x = 105$$

Άρα οι αρχικές οικογένειες ήταν 105 και η κάθε οικογένεια που προσήλθε πήρε  $y+1=6+1=7$  κιβώτια.

### Παράδειγμα 12

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η περίμετρος του είναι 60m και το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι 12m. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου.

#### Λύση:

Έστω  $\alpha$  η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου και  $\beta, \gamma$  οι δύο κάθετες πλευρές του.

- Επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο θα ισχύει από το Π. θεώρημα

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \quad (1)$$

- Επειδή έχει περίμετρο 60m θα ισχύει:  $\alpha + \beta + \gamma = 60 \quad (2)$

- Το εμβαδόν του τριγώνου είναι:  $E = \frac{\beta \cdot \gamma}{2}$ . Επίσης:

$$E = \frac{\alpha \cdot u}{2} \Leftrightarrow E = \frac{\alpha \cdot 12}{2}. \text{ Άρα: } \frac{\beta \gamma}{2} = \frac{12\alpha}{2} \Leftrightarrow \beta \cdot \gamma = 12\alpha \quad (3)$$

Έχουμε να λύσουμε το σύστημα των (1), (2), (3).

- Από (1)  $\Leftrightarrow \alpha^2 = (\beta + \gamma)^2 - 2\beta\gamma \xrightarrow{(2)} \alpha^2 = (60 - \alpha)^2 - 2 \cdot 12\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 = 3600 - 120\alpha + \alpha^2 - 24\alpha = 0 \Leftrightarrow$

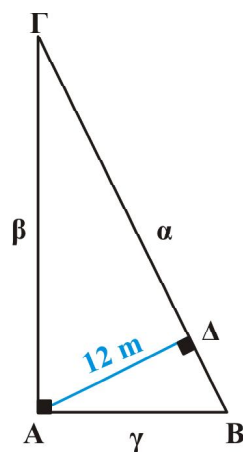
$$\Leftrightarrow 120\alpha + 24\alpha = 3600 \Leftrightarrow 144\alpha = 3600 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3600}{144} \Leftrightarrow \alpha = 25 \quad (4)$$

- Η (2)  $\Leftrightarrow 25 + \beta + \gamma = 60 \Leftrightarrow \beta + \gamma = 35$

- Η (3)  $\Leftrightarrow \beta\gamma = 12 \cdot 25 \Leftrightarrow \beta\gamma = 300$

Άρα τα  $\beta, \gamma$  είναι ρίζες της εξίσωσης:  $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 35x + 300 = 0$  που από τη λύση της βρίσκουμε:  $x_1 = 20, x_2 = 15$ , άρα:  $(\beta, \gamma) = (20, 15)$  ή  $(\beta, \gamma) = (15, 20)$ .

Άρα το τρίγωνο έχει πλευρές **15m, 20m, 25m**.



**Παράδειγμα 13**

**Να λυθεί το σύστημα:**  $|x^2 + y^2 - 2| + (x - 2y + 1)^{100} = 0$

**Λύση:**

Από τη μορφή της εξίσωσης έχουμε:

$$\begin{cases} |x^2 + y^2 - 2| = 0 \\ \text{και} \\ (x - 2y + 1)^{100} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ \text{και} \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{x^2 + y^2 = 2} \quad (1) \quad \text{και} \quad \mathbf{x = 2y - 1} \quad (2)$$

$$\text{Η (1)} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} (2y - 1)^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow 4y^2 - 4y + 1 + y^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 5y^2 - 4y - 1 = 0$$

Λύνουμε την εξίσωση και βρίσκουμε:  $y_1 = 1$  ή  $y = -\frac{1}{5}$

**α) Αν  $y = 1$ , από (2)  $\Leftrightarrow x = 2 \cdot 1 - 1 = 1$  Άρα:  $(x, y) = (1, 1)$**

**β)  $y = -\frac{1}{5}$ , από (2)  $\Leftrightarrow x = 2\left(-\frac{1}{5}\right) - 1 = -\frac{2}{5} - 1 = -\frac{7}{5}$**

$$\text{Άρα: } (x, y) = \left(-\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right)$$

**Σχόλιο:**

**Αν:**

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha \geq 0 \\ \beta \geq 0 \end{cases}$$

**τότε  $\alpha = 0$  και  $\beta = 0$**

## Ερωτήσεις κατανόησης - Ασκήσεις για λύση

1. Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση:

α) ο κύκλος  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $a > 0$  και η ευθεία  $y = ax + \beta$  έχουν:

- 1) κανένα κοινό σημείο                      2) ένα κοινό σημείο  
3) δύο κοινά σημεία                      4) κανένα ή ένα ή δύο κοινά σημεία

β) Η παραβολή  $y = ax^2$ ,  $a \neq 0$  και ο κύκλος  $x^2 + y^2 = \rho^2$ ,  $\rho > 0$  έχουν:

- 1) κανένα κοινό σημείο                      2) ένα κοινό σημείο  
3) δύο κοινά σημεία                      4) κανένα ή ένα ή δύο κοινά σημεία

γ) Η παραβολή  $y = ax^2$ ,  $a \neq 0$  και η υπερβολή  $y = \frac{\beta}{x}$ ,  $\beta \neq 0$  έχουν:

- 1) ένα κοινό σημείο                      2) δύο κοινά σημεία  
3) τρία κοινά σημεία                      4) κανένα κοινό σημείο

δ) Ο κύκλος  $x^2 + y^2 = \rho^2$ ,  $\rho > 0$  και η υπερβολή  $y = \frac{\beta}{x}$ ,  $\beta \neq 0$  έχουν:

- 1) δύο κοινά σημεία                      2) τέσσερα κοινά σημεία  
3) κανένα κοινό σημείο                      4) κανένα ή δύο ή τέσσερα κοινά σημεία

2. Να λυθεί το σύστημα: 
$$\begin{cases} x^2 + xy = 2 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

5. Να λυθεί το σύστημα: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ xy = -1 \end{cases}$$

3. Να λυθεί το σύστημα: 
$$\begin{cases} 2yx^2 + xy = y \\ 3x + 7y = 3 \end{cases}$$

6. Να λυθεί το σύστημα: 
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

4. Να λυθεί το σύστημα: 
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

7. Να λυθεί το σύστημα: 
$$\begin{cases} x + y + \frac{3x}{y} = 5 \\ (x + y) \frac{3x}{y} = 6 \end{cases}$$

8. Για τις διάφορες τιμές του  $\mu$  να βρείτε ποσες λύσεις έχει το σύστημα: 
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -\mu x + 2\mu^2 \end{cases}$$
  
Να εξηγήσετε κάθε φορά γραφικά τα συμπεράσματά σας.

9. Να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε η υπερβολή  $y = \frac{1}{x}$  και η ευθεία  $y = -x + \lambda$  να μην τέμνονται.

10. Να βρεθούν οι πλευρές δύο τετραγώνων αν αυτές διαφέρουν κατά  $2m$  και τα εμβαδά τους διαφέρουν κατά  $12m^2$ .

11. Ο λόγος δύο πλευρών ενός ορθογωνίου είναι  $\pi$ . ( $\pi \approx 3,14$ ). Αν ένας κύκλος έχει εμβαδό ίσο με το εμβαδό του ορθογωνίου ν' αποδείξετε ότι η ακτίνα του ισούται με την μικρότερη πλευρά του ορθογωνίου.

