

## **4ο Κεφάλαιο**

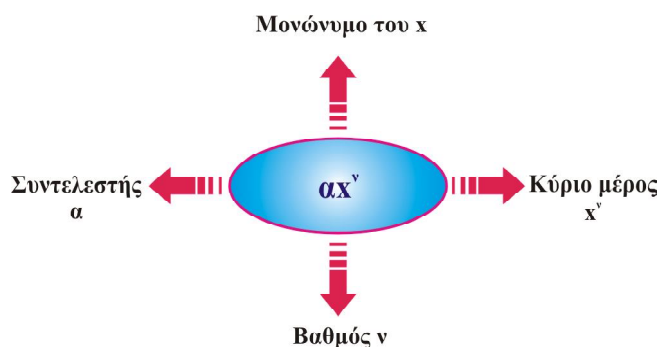


## Α.

## ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

### Ορισμοί

- **Μονώνυμο του  $x$**  ονομάζουμε κάθε παράσταση της μορφής  $ax^v$  όπου  $a \in \mathbb{R}$ ,  $v \in \mathbb{N}^*$  και  $x$  μια μεταβλητή που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το  $\mathbb{R}$ . Μονώνυμο του  $x$  λέμε επίσης και κάθε πραγματικό αριθμό.



### Παράδειγμα

Το  $-\frac{2}{3}x^5$  είναι μονώνυμο με συντελεστή  $-\frac{2}{3}$ , κύριο μέρος  $x^5$  και βαθμό 5.

### Χαρακτηριστικά μονώνυμα

- **Μηδενικό μονώνυμο** λέγεται κάθε μονώνυμο με συντελεστή μηδέν, π.χ.  $0x^3$ ,  $0x^5$ .
- **Μονώνυμο μηδενικού βαθμού** λέγεται κάθε μονώνυμο του οποίου ο βαθμός είναι μηδέν, π.χ.  $7 = 7 \cdot x^0$ ,  $9 = 9 \cdot x^0$ .
- **Πολυώνυμο του  $x$**  ονομάζουμε κάθε παράσταση της μορφής  $a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , όπου  $a_0, a_1, \dots, a_{v-1}, a_v \in \mathbb{R}$ , και  $x$  μια μεταβλητή που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το σύνολο  $\mathbb{R}$ .

Ένα πολυώνυμο του  $x$  το συμβολίζουμε συνήθως με  $P(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  κ.λ.π. .

Γράφουμε λοιπόν:  $P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$

**Για παράδειγμα:**

Η παράσταση  $Q(x) = x^3 - 4x^2 + x + 5$  είναι πολυώνυμο του  $x$ .

• **Χαρακτηριστικά πολυώνυμου**

• **Σταθερά πολυώνυμου**

Λέγονται οι πραγματικοί αριθμοί δηλαδή τα πολυώνυμα της μορφής  $a_0 = a_0 \cdot x^0$ .

• **Μηδενικό πολυώνυμο**

Λέγεται το σταθερό πολυώνυμο 0.

• **Στοιχεία πολυωνύμου**  $P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_v \neq 0$

- **Όροι:** Λέγονται τα μονώνυμα  $a_v x^v, \dots, a_0$

- **Σταθερός όρος:** Είναι ο όρος  $a_0$  που δεν περιέχει  $x$ .

- **Συντελεστές:** Λέγονται οι πραγματικοί αριθμοί  $a_v, a_{v-1}, \dots, a_1, a_0$ .

- **Βαθμός:** Είναι ο εκθέτης  $v$ .

- **Αριθμητική τιμή για  $x = \xi$ :** Λέγεται ο αριθμός  $P(\xi) = a_v \xi^v + \dots + a_1 \xi + a_0$  που προκύπτει αν στο  $P(x)$  αντικαταστήσουμε το  $x$  με τον αριθμό  $\xi$ .

- **Ρίζα:** Ένας αριθμός  $\rho \in \mathbb{R}$  λέγεται ρίζα του  $P(x)$ , αν και μόνο αν,  $P(\rho) = 0$ .

**Σχόλιο**

Βαθμός μηδενικού πολυωνύμου δεν ορίζεται ενώ ο βαθμός κάθε σταθερού μη μηδενικού πολυωνύμου είναι μηδέν.

**Παράδειγμα**

Το πολυώνυμο  $P(x) = 5x^2 + 6x - 1$  είναι 2<sup>ου</sup> βαθμού και έχει συντελεστές: 5, 6, -1.

Ο σταθερός όρος του πολυωνύμου  $P(x)$  είναι -1.

Η αριθμητική τιμή του  $P(x)$  για  $x = 1$  είναι:  $P(1) = 5 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 1 = 10$

• **Ισότητα πολυωνύμων**

Δύο πολυώνυμα του  $x$  λέγονται ίσα, αν και μόνο αν είναι του ίδιου βαθμού και οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων τους είναι ίσοι.

Έτσι αν  $P(x) = a_\mu x^\mu + a_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + a_1 x + a_0$  και

$$Q(x) = \beta_v x^v + \beta_{v-1} x^{v-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$$

είναι δύο πολυώνυμα του  $x$  με  $\mu \geq v$ , έχουμε:

$$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_v = \beta_v \\ \alpha_{v+1} = \alpha_{v+2} = \dots = \alpha_\mu = 0 \end{cases}$$

**Παράδειγμα**

Τα πολυώνυμα  $P(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta$  και  $Q(x) = 2x^2 + 3x + 1$

είναι ίσα, αν και μόνο αν,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 3$ ,  $\delta = 1$ .

**Θεώρημα 1 (Ταυτότητα της διαίρεσης)**

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων  $\Delta(x)$  και  $\delta(x)$  με  $\delta(x) \neq 0$  υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα  $\pi(x)$  και  $\upsilon(x)$  τέτοια ώστε:  $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$

όπου το  $\upsilon(x)$  είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του  $\delta(x)$ .

$$\begin{array}{c} \Delta(x) \\ \upsilon(x) \end{array} \left| \begin{array}{c} \delta(x) \\ \pi(x) \end{array} \right. \quad \text{Ισχύει} \quad \Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$$

- $\Delta(x)$  διαιρετέος
- $\delta(x)$  διαιρέτης
- $\pi(x)$  πηλίκο
- $\upsilon(x)$  υπόλοιπο και είναι βαθμού μικρότερου από το βαθμό του  $\delta(x)$ , ή  $\upsilon(x) = 0$ .

**Σημείωση**

Η διαίρεση  $\Delta(x) : \delta(x)$  λέγεται **τέλεια** αν  $\upsilon(x) = 0$ .

Τότε η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται:  $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x)$  και το  $\delta(x)$  λέγεται **παράγοντας** του  $\Delta(x)$ .

Οι εκφράσεις:

- το  $\delta(x)$  είναι παράγοντας του  $\Delta(x)$ , το  $\delta(x)$  διαιρεί το  $\Delta(x)$ , η διαίρεση  $\Delta(x) : \delta(x)$  είναι τέλεια, υπάρχει  $\pi(x)$  ώστε:  $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x)$  είναι ισοδύναμες

**Θεώρημα 2**

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x - \rho$  είναι ο αριθμός  $P(\rho)$ .

$$\begin{array}{c} P(x) \\ \upsilon = P(\rho) \end{array} \left| \begin{array}{c} x - \rho \\ \pi(x) \end{array} \right.$$

είναι:  $P(x) = (x - \rho)\pi(x) + P(\rho)$

**Θεώρημα 3**

Ένα πολυώνυμο  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x - \rho$ , αν και μόνο αν, το  $\rho$  είναι ρίζα του  $P(x)$ .

Δηλαδή:  $P(x) = (x - \rho)\pi(x) \Leftrightarrow P(\rho) = 0$

**Θεώρημα 4 (της ακέραιας ρίζας)**

Αν το  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  έχει ρίζα τον ακέραιο  $\rho$ ,  $\rho \neq 0$  τότε αυτός διαιρεί τον  $a_0$ .

**Σημείωση**

Τις ακέραιες ρίζες τις αναζητούμε μέσα στο σύνολο των διαιρετών του  $a_0$ .

**B.****ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ****Κατηγορία – Μέθοδος 1**

Πρόσθεση - πολλαπλασιασμός

Για την πρόσθεση (αφαίρεση) και πολλαπλασιασμό πολυωνύμων ισχύουν οι ίδιες ιδιότητες που ισχύουν και στις αντίστοιχες πράξεις μεταξύ πραγματικών αριθμών.

Προσοχή όμως στην πρόσθεση (αφαίρεση) πολυωνύμων γιατί προσθέτουμε μεταξύ τους μόνο τα όμοια μονώνυμα που είναι όροι των πολυωνύμων αυτών.

Για παράδειγμα τα μονώνυμα  $2x^3$ ,  $5x^2$  δεν είναι δυνατό να προστεθούν αφού δεν είναι όμοια, ενώ τα μονώνυμα  $2x^3$ ,  $5x^3$  προστίθενται και το άθροισμα τους είναι:

$$2x^3 + 5x^3 = 7x^3.$$

Στον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων  $P(x) \cdot Q(x) = \Phi(x)$  το  $\Phi(x)$  θα έχει βαθμό το άθροισμα των βαθμών  $P(x)$ ,  $Q(x)$ .

**Παράδειγμα 1**

Δίνεται το πολυώνυμο:  $P(x) = ax^3 + (a-1)x^2 + (2a^2-1)x + 3$

Βρείτε το  $a \in \mathbb{R}$  ώστε  $P(2) = -3$  και στη συνέχεια το βαθμό του  $P(x)$  για κάθε τιμή του  $a$  που βρήκατε.

**Λύση**

Έχουμε διαδοχικά:  $P(2) = -3 \Leftrightarrow a2^3 + (a-1)2^2 + (2a^2-1)2 + 3 = -3 \Leftrightarrow$

$$8a + 4(a-1) + 4a^2 - 2 + 3 = -3 \Leftrightarrow 4a^2 + 12a = 0 \Leftrightarrow 4a(a+3) = 0$$

Άρα  $a = 0$  ή  $a = -3$

• Για  $a = 0$  το πολυώνυμο γίνεται:  $P(x) = -x^2 - x + 3$  και είναι 2<sup>ου</sup> βαθμού

• Για  $a = -3$  το πολυώνυμο γίνεται:  $P(x) = -3x^3 - 4x^2 + 17x + 3$  και είναι 3<sup>ου</sup> βαθμού

**Παράδειγμα 2**

**Βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου:**  $P(x) = (\alpha - 1)(\alpha^2 - 9)x^3 + (\alpha^2 - 4\alpha + 3)x^2 + 3\alpha - 9$  για τις διάφορες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Λύση**

Για να βρούμε το βαθμό του  $P(x)$  πρέπει να γνωρίζουμε αν ο συντελεστής  $(\alpha - 1)(\alpha^2 - 9)$  του μεγιστοβάθμιου (από πρώτη άποψη) όρου είναι μηδέν ή όχι. Γι' αυτό διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

**1η Περίπτωση**

Αν  $(\alpha - 1)(\alpha^2 - 9) \neq 0$  δηλαδή αν  $\alpha \neq 1$ ,  $\alpha \neq \pm 3$  τότε το  $P(x)$  είναι **3ου βαθμού**.

**2η Περίπτωση**

Αν  $(\alpha - 1)(\alpha^2 - 9) = 0$  δηλαδή  $\alpha = 1$  ή  $\alpha = 3$  ή  $\alpha = -3$ , τότε:

- i. Για  $\alpha = 1$  είναι  $P(x) = -6$ , δηλαδή σταθερό μη μηδενικό πολυώνυμο οπότε είναι **μηδενικού βαθμού**.
- ii. Για  $\alpha = 3$  είναι  $P(x) = 0$ , δηλαδή μηδενικό πολυώνυμο οπότε **δεν ορίζεται βαθμός**.
- iii. Για  $\alpha = -3$  είναι  $P(x) = 24x^2 - 18$ , δηλαδή είναι πολυώνυμο **2ου βαθμού**.

**Κατηγορία – Μέθοδος 2**

Όταν ζητείται πολυώνυμο  $P(x)$  που ικανοποιεί δοθείσα σχέση:

1<sup>ο</sup> Προσπαθούμε να προσδιορίσουμε (αν δεν δίνεται) το βαθμό του.

2<sup>ο</sup> Αν διαπιστώσουμε ότι είναι π.χ. νιοστού βαθμού, υποθέτουμε ότι είναι της μορφής:

$$P(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

3<sup>ο</sup> Αντικαθιστούμε στη δοθείσα σχέση και μετά τις πράξεις καταλήγουμε σε ισότητα πολυωνύμων από την οποία με τη βοήθεια του ορισμού της ισότητας πολυωνύμων προσδιορίζουμε τα  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  δηλαδή το  $P(x)$ . (“μέθοδος προσδιοριστέων συντελεστών”)

**Παράδειγμα 3**

**Βρείτε πολυώνυμο  $P(x)$ , 1ου βαθμού, ώστε να ισχύει:**  $P[P^2(x)] = 8x^2 + 24x + 21$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Λύση**

Έστω ότι  $P(x) = \alpha x + \beta$  με  $\alpha \neq 0$ .

Με αντικατάσταση στη δοθείσα σχέση έχουμε διαδοχικά:

$$P[P^2(x)] = 8x^2 + 24x + 21 \Leftrightarrow \alpha P^2(x) + \beta = 8x^2 + 24x + 21 \Leftrightarrow$$

$$\alpha(\alpha x + \beta)^2 + \beta = 8x^2 + 24x + 21 \Leftrightarrow \alpha(\alpha^2 x^2 + 2\alpha x\beta + \beta^2) + \beta = 8x^2 + 24x + 21 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^3 x^2 + 2\alpha^2 \beta x + \alpha\beta^2 + \beta = 8x^2 + 24x + 21$$

Η παραπάνω ισότητα ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , σύμφωνα με τον ορισμό της ισότητας πολυωνύμων, αν και μόνο αν,

$$\begin{cases} \alpha^3 = 8 \\ 2\alpha^2\beta = 24 \\ \alpha\beta^2 + \beta = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

Άρα το ζητούμενο πολυώνυμο είναι το  $P(x) = 2x + 3$ ,

#### Παράδειγμα 4

Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης  $\Delta(x) : \delta(x)$  όπου:

$$\Delta(x) = 10x^3 - 9x^2 + 4x - 1 \quad \text{και} \quad \delta(x) = 5x^2 - 2x + 1$$

χωρίς να εκτελέσετε τη διαίρεση.

#### Λύση

Αφού το  $\Delta(x)$  είναι 3<sup>ου</sup> βαθμού και το  $\delta(x)$  2<sup>ου</sup>, θα πρέπει το πηλίκο  $\Pi(x)$  να είναι 1<sup>ου</sup> βαθμού και το υπόλοιπο  $\upsilon(x)$  το πολύ 1<sup>ου</sup> βαθμού.

Έστω λοιπόν:  $\Pi(x) = \alpha x + \beta$  και  $\upsilon(x) = \kappa x + \lambda$

Από την ταυτότητα της διαίρεσης  $\Delta(x) : \delta(x)$  έχουμε:

$$\Delta(x) = \delta(x)\Pi(x) + \upsilon(x) \Leftrightarrow 10x^3 - 9x^2 + 4x - 1 = (5x^2 - 2x + 1)(\alpha x + \beta) + \kappa x + \lambda \Leftrightarrow$$

$$10x^3 - 9x^2 + 4x - 1 = 5\alpha x^3 + 5\beta x^2 - 2\alpha x^2 - 2\beta x + \alpha x + \beta + \kappa x + \lambda \Leftrightarrow$$

$$10x^3 - 9x^2 + 4x - 1 = 5\alpha x^3 + (5\beta - 2\alpha)x^2 + (\alpha + \kappa - 2\beta)x + \beta + \lambda$$

Η τελευταία είναι ισότητα πολυωνύμων πρέπει και αρκεί να ισχύουν:

$$\begin{cases} 5\alpha = 10 \\ 5\beta - 2\alpha = -9 \\ \alpha + \kappa - 2\beta = 4 \\ \beta + \lambda = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \\ \kappa = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases} \quad \text{Άρα } \Pi(x) = 2x - 1, \quad \upsilon = 0.$$

#### Κατηγορία – Μέθοδος 3

- Για να διαιρέσουμε πολυώνυμα με την ίδια μεταβλητή ακολουθούμε τη γνωστή διαδικασία της διαίρεσης.
- Για να διαιρέσουμε πολυώνυμα με περισσότερες της μιας μεταβλητές, θεωρούμε αυτά ως πολυώνυμα της μιας μεταβλητής (όποια θέλουμε) ενώ τις υπόλοιπες τις θεωρούμε σταθερές και κάνουμε τη διαίρεση κανονικά κατά τα γνωστά.
- Όταν στο διαιρετέο λείπει κάποιος όρος π.χ. ο  $x^k$ , τότε ή αφήνουμε τη θέση κενή ή γράφουμε  $0x^k$ .

#### Παράδειγμα 5

Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης:  $(x^2 - x + x^4 - 2) : (x^2 - x - 1)$



**Λύση**

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 + 0x^3 + x^2 - x - 2 & x^2 - x - 1 \\
 (+) - x^4 + x^3 + x^2 & x^2 + x + 3 \\
 \hline
 x^3 + 2x^2 - x - 2 & \\
 (+) -x^3 + x^2 + x & \\
 \hline
 3x^2 + 0x - 2 & \\
 (+) -3x^2 + 3x + 3 & \\
 \hline
 3x + 1 & 
 \end{array}$$

Η διαδικασία της διαίρεσης σταματά γιατί το  $3x + 1$  είναι βαθμού μικρότερου του  $2^{\text{ου}}$  που είναι ο βαθμός του διαιρέτη  $x^2 - x - 1$ .

Άρα έχουμε: Πηλίκο:  $\Pi(x) = x^2 + x + 3$  και

Υπόλοιπο:  $\upsilon(x) = 3x + 1$

**Παράδειγμα 6**

Να βρεθούν το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης:  $(5x^2 - 3ax - 2a^2) : (x - a)$

**Λύση****1ος τρόπος**

(Θεωρούμε τα πολυώνυμα με μεταβλητή το  $x$ )

$$\begin{array}{r|l}
 5x^2 - 3ax - 2a^2 & x - a \\
 (+) - 5x^2 + 5ax & 5x + 2a \\
 \hline
 2ax - 2a^2 & \\
 (+) - 2ax + 2a^2 & \\
 \hline
 0 & 
 \end{array}$$

**2ος τρόπος**

(Θεωρούμε τα πολυώνυμα με μεταβλητή το  $a$ )

$$\begin{array}{r|l}
 -2a^2 - 3xa + 5x^2 & -a + x \\
 (+) + 2a^2 - 2xa & 2a + 5x \\
 \hline
 -5xa + 5x^2 & \\
 (+) + 5xa - 5x^2 & \\
 \hline
 0 & 
 \end{array}$$

Άρα έχουμε: Πηλίκο:  $2a + 5x$  και

Υπόλοιπο:  $0$

**Κατηγορία – Μέθοδος 4**

Το σχήμα Horner είναι μια μέθοδος με την οποία μπορούμε να βρούμε:

- Το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης  $P(x) : (x - \rho)$  χωρίς να εκτελέσουμε την διαίρεση.  
Δηλαδή αντικαθιστά την διαίρεση πολυωνύμων μόνο όμως στην περίπτωση που ο διαιρέτης είναι της μορφής  $x - \rho$ .
- Την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου  $P(x)$  για  $x = \rho$ , δηλαδή το  $P(\rho)$ .  
Όταν ο διαιρετέος είναι ελλειπές πολυώνυμο (λείπουν κάποιοι όροι), τότε πρέπει στις αντίστοιχες θέσεις τους στον πίνακα Horner να τοποθετούνται μηδενικά.

**Παράδειγμα 7**

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρεθούν το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης:

$$(2x^3 - x^2 + 7x + 5) : (x + 1)$$

**Λύση**

2	-1	7	5	-1
	-2	3	-10	
	(+)	(+)	(+)	
2	-3	10	-5	

Άρα  $\Pi(x) = 2x^2 - 3x + 10$  και  $v = -5$

**Κατηγορία – Μέθοδος 5**

Αν γνωρίζουμε δύο πολυώνυμα  $\Delta(x)$  και  $\delta(x)$  τότε είναι δυνατό να βρούμε το πηλίκο  $\Pi(x)$  και το υπόλοιπο  $v(x)$  της διαίρεσης  $\Delta(x) : \delta(x)$  με τους εξής τρόπους:

1<sup>ο</sup> Κάνουμε τη διαίρεση όπως έχουμε περιγράψει.

2<sup>ο</sup> Στηρίζομαστε στην ταυτότητα της διαίρεσης  $\Delta(x) = \delta(x)\Pi(x) + v(x)$ .

Υπολογίζουμε αρχικά τους βαθμούς των  $\Pi(x)$  και  $v(x)$  και στη συνέχεια εργαζόμαστε με τη μέθοδο της “προσδιοριστέων συντελεστών”.

3<sup>ο</sup> Αν  $\delta(x) = x - \rho$  χρησιμοποιούμε σχήμα Horner.

**Παράδειγμα 8**

Να βρεθεί το πολυώνυμο  $\delta(x)$  το οποίο διαιρεί το  $\Delta(x) = 3x^2 + 7x^2 + x - 2$  και δίνει πηλίκο  $\Pi(x) = x + 2$ .

**Λύση**

Αφού το  $\Delta(x)$  είναι 3<sup>ου</sup> βαθμού και το  $\Pi(x)$  1<sup>ου</sup>, το  $\delta(x)$  θα είναι 2<sup>ου</sup> βαθμού.

Έστω λοιπόν ότι:  $\delta(x) = ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$

Σύμφωνα με την υπόθεση η διαίρεση  $\Delta(x) : \delta(x)$  είναι τέλεια οπότε η ταυτότητά της είναι:

$$\Delta(x) = \delta(x)\Pi(x) \Leftrightarrow 3x^2 + 7x^2 + x - 2 = (ax^2 + bx + \gamma)(x + 2) \Leftrightarrow$$

$$3x^2 + 7x^2 + x - 2 = ax^3 + 2ax^2 + bx^2 + 2bx + \gamma x + 2\gamma \Leftrightarrow$$

$$3x^2 + 7x^2 + x - 2 = ax^3 + (2a + b)x^2 + (2b + \gamma)x + 2\gamma$$

Από τον ορισμό της ισότητας πολυωνύμων παίρνουμε:

$$\begin{cases} \alpha = 3 \\ 2\alpha + \beta = 7 \\ 2\beta + \gamma = 1 \\ 2\gamma = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

Άρα  $\delta(x) = 3x^2 + x - 1$ .

### Κατηγορία – Μέθοδος 6

Για να δείξουμε ότι ένα πολυώνυμο  $P(x)$  διαιρείται με γινόμενο της μορφής  $(x - \alpha)(x - \beta)$

αρκεί να δείξουμε ότι:  $P(\alpha) = 0$  και  $P(\beta) = 0$

Σε ασκήσεις που ζητούν και το πηλίκο της διαίρεσης ακολουθούμε τα παρακάτω:

Το  $x - \alpha$  διαιρεί το  $P(x)$  οπότε:  $P(x) = (x - \alpha)\Pi_1(x)$  (1) και

το  $x - \beta$  διαιρεί το  $\Pi_1(x)$  οπότε:  $\Pi_1(x) = (x - \beta)\Pi_2(x)$  (2)

Από (1) και (2) παίρνουμε:  $P(x) = (x - \alpha)(x - \beta)\Pi_2(x)$  δηλαδή το ζητούμενο.

Την ίδια διαδικασία ακολουθούμε και όταν ο διαιρέτης είναι της μορφής  $(x - \alpha)^n$ .

### Παράδειγμα 9

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 9x - 18$$

διαιρείται με το γινόμενο  $(x - 2)(x + 3)$  και να βρείτε το πηλίκο.

### Λύση

Κάνουμε σχήμα Horner για τη διαίρεση  $P(x) : (x - 2)$

2	5	-9	-18	2
	4	18	18	
2	9	9	0	

Δηλαδή έχουμε  $P(x) = (x - 2)(2x^2 + 9x + 9)$  (1)

όπου  $\Pi_1(x) = 2x^2 + 9x + 9$

Κάνουμε σχήμα Horner για την διαίρεση  $\Pi_1(x) : (x + 3)$

2	9	9	-3
	-6	-9	
2	3	0	

Δηλαδή έχουμε  $\Pi_1(x) = (x+3)(2x+3)$  (2)

H(1) δίνει λόγω της (2):  $P(x) = (x-2)(x+3)(2x+3)$ , που σημαίνει ότι το  $P(x)$  διαιρείται με το γινόμενο  $(x-2)(x+3)$  και το πηλίκο είναι το πολυώνυμο:  $\Pi_2(x) = 2x+3$

### Παράδειγμα 10

**Να βρείτε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε το πολυώνυμο  $P(x) = x^{v+1} + \alpha x + \beta$  να έχει παράγοντα το  $(x-1)^2$ .**

**Λύση**

Αρχικά πρέπει το  $P(x)$  να έχει παράγοντα το  $x-1$  δηλαδή  $P(1) = 0$ .

Κάνουμε σχήμα Horner για το  $P(x)$  και το 1.

1	0	0	...	0	$\alpha$	$\beta$	1
	1	1	...	1	1	$\alpha+1$	
1	1	1	...	1	$\alpha+1$	$\alpha+\beta+1$	

Άρα πρέπει  $P(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + 1 = 0$  δηλαδή  $\alpha + \beta = -1$  (1)

Έχουμε  $P(x) = (x-1)(x^v + x^{v-1} + \dots + x + \alpha + 1)$

Έστω  $\Pi(x) = x^v + x^{v-1} + \dots + x + \alpha + 1$ . Θα πρέπει το  $\Pi(x)$  να έχει παράγοντα το  $x-1$ .

Άρα πρέπει:  $\Pi(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + 1 + \dots + 1 + \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow v + \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1 - v$

και από (1)  $-1 - v + \beta = -1$  ή  $\beta = v$ .

Άρα πρέπει  $\alpha = -1 - v$  και  $\beta = v$ .

### Κατηγορία - Μέθοδος 7

Εφαρμογή του θεωρήματος 4 (της Ακέραιας ρίζας)

### Παράδειγμα 11

**Να δείξετε ότι το  $P(x) = x^{2v+1} - x^{2v} + 1$  δεν έχει ακέραιη ρίζα.**

**Λύση**

Έστω ότι έχει ακέραιη ρίζα τότε αυτή θα διαιρεί το 1 άρα θα είναι 1 ή -1.

$P(1) = 1$  άτοπο,  $P(-1) = -1$  επίσης άτοπο

### Παράδειγμα 12

**Αν το  $P(x) = 2x^5 + \beta^2 x^3 + 37x^2 + 1$  έχει μια ακέραιη ρίζα, να βρείτε τις τιμές του  $\beta$ .**

**Λύση**

Το  $P(x)$  αφού έχει ακέραιη ρίζα αυτή θα διαιρεί το 1 άρα θα είναι 1 ή -1. Αποκλείεται όμως η -1 αφού οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι **όλοι** θετικοί.

$$\begin{aligned}\text{Συνεπώς: } P(-1) = 0 &\Leftrightarrow 2(-1)^5 + \beta^2(-1)^3 + 37(-1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow -2 - \beta^2 + 37 + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\beta^2 = 36 \Leftrightarrow \beta = \pm 6\end{aligned}$$

Γ.

## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## Άσκηση 1

Έστω τα πολυώνυμα  $P(x) = (2\alpha - \beta + 1)x^2 + (2\beta - \gamma + 1)x + 2\gamma - \alpha - 2$  και

$$Q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

όπου  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  με  $(\alpha - 1)^3 + (\beta - 2)^3 + (\gamma - 3)^3 = 3(\alpha - 1)(\beta - 2)(\gamma - 3)$  και  $\alpha + \beta + \gamma \neq 6$ .

Να δείχθεί ότι  $P(x) = Q(x)$ .

Λύση

Από τη σχέση  $(\alpha - 1)^3 + (\beta - 2)^3 + (\gamma - 3)^3 = 3(\alpha - 1)(\beta - 2)(\gamma - 3)$  συμπεραίνουμε ότι:

$$\left\{ \begin{array}{c} (\alpha - 1) + (\beta - 2) + (\gamma - 3) = 0 \\ \text{ή} \\ \alpha - 1 = \beta - 2 = \gamma - 3 \end{array} \right\} \text{ δηλαδή } \left\{ \begin{array}{c} \alpha + \beta + \gamma = 6 \text{ απορρίπτεται} \\ \text{ή} \\ \alpha - 1 = \beta - 2 = \gamma - 3 \end{array} \right\} \quad (1)$$

$$\text{Από (1) έχουμε: } \left\{ \begin{array}{l} \alpha - 1 = \beta - 2 \Leftrightarrow \beta = \alpha + 1 \\ \beta - 2 = \gamma - 3 \Leftrightarrow \beta = \gamma + 1 \\ \alpha - 1 = \gamma - 3 \Leftrightarrow \alpha = \gamma - 2 \end{array} \right. \quad (2)$$

Οι συντελεστές του πολυωνύμου  $P(x)$  είναι εξαιτίας της σχέσης (2):

$$2\alpha - \beta + 1 = 2\alpha - (\alpha + 1) + 1 = \alpha, \quad 2\beta - \gamma + 1 = 2\beta - (\beta + 1) + 1 = \beta,$$

$$2\gamma - \alpha - 2 = 2\gamma - (\gamma - 2) - 2 = \gamma$$

Δηλαδή τα  $P(x)$ ,  $Q(x)$  έχουν όλους τους συντελεστές των ομοβάθμιων όρων τους ίσους.

Άρα  $P(x) = Q(x)$ .

## Άσκηση 2

Βρείτε πολυώνυμο  $P(x)$ , 3ου βαθμού, αν για κάθε  $x \neq 0$  ισχύει:

$$2[P(3x) + 3P(-2x)] - 3x^3 P\left(\frac{1}{x}\right) = 13$$

Λύση

Έστω ότι  $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$  με  $\alpha \neq 0$ .

Έχουμε διαδοχικά:

$$2[P(3x) + 3P(-2x)] - 3x^3 P\left(\frac{1}{x}\right) = 13$$

$$2\left[(\alpha(3x)^3 + \beta(3x)^2 + \gamma(3x) + \delta) + 3(\alpha(-2x)^3 + \beta(-2x)^2 + \gamma(-2x) + \delta)\right] - 3x^3 \left[\alpha\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \beta\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \gamma\left(\frac{1}{x}\right) + \delta\right] = 13$$

$$2[(27\alpha x^3 + 9\beta x^2 + 3\gamma x + \delta) + 3(-8\alpha x^3 + 4\beta x^2 - 2\gamma x + \delta)] - 3x^3 \left[\frac{\alpha}{x^3} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x} + \delta\right] = 13$$

$$2(3\alpha x^3 + 21\beta x^2 - 3\gamma x + 4\delta) - 3\alpha - 3\beta x - 3\gamma x^2 - 3\delta x^3 = 13$$

$$(6\alpha - 3\delta)x^3 + (42\beta - 3\gamma)x^2 - (6\gamma + 3\beta)x + 8\delta - 3\alpha = 13$$

Η τελευταία ισότητα με βάση τον ορισμό της ισότητας πολυωνύμων, δίνει:

$$\begin{cases} 6\alpha - 3\delta = 0 \\ 42\beta - 3\gamma = 0 \\ 6\gamma + 3\beta = 0 \\ 8\delta - 3\alpha = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = 2\alpha \\ \gamma = 14\beta \\ \beta = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = 2 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Άρα το ζητούμενο πολυώνυμο είναι:  $P(x) = x^3 + 2$

### Άσκηση 3

Βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  για τις οποίες, για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \{2, 3\}$  ισχύει:

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x-3}$$

### Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις και στα δύο μέλη της σχέσης.

$$\text{Είναι: } \frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x-3} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{\alpha(x-3) + \beta(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$2x+1 = \alpha(x-3) + \beta(x-2) \Leftrightarrow 2x+1 = \alpha x - 3\alpha + \beta x - 2\beta \Leftrightarrow 2x+1 = (\alpha + \beta)x - 3\alpha - 2\beta$$

Η τελευταία επειδή πρέπει να ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \{2, 3\}$  είναι ισότητα πολυωνύμων του  $x$ .

Με βάση λοιπόν τον ορισμό της ισότητας πολυωνύμων έχουμε:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ -3\alpha - 2\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 - \beta \\ -3(2 - \beta) - 2\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 - \beta \\ \beta = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -5 \\ \beta = 7 \end{cases}$$

### Άσκηση 4

Έστω πολυώνυμο  $P(x)$  τέτοιο ώστε:  $P(2x+1) = 2P(x) + 3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $P(0) = 0$ .

Να υπολογιστεί το  $P(15)$ .

**Λύση**

$$\text{Η δοθείσα σχέση } P(2x+1) = 2P(x) + 3 \quad (1)$$

$$\text{για } x = 7 \text{ δίνει: } P(15) = 2P(7) + 3 \quad (2)$$

Συνεπώς για να βρούμε το  $P(15)$  αρκεί να βρούμε το  $P(7)$ . Εφαρμόζουμε λοιπόν την (1) για  $x = 3$  και παίρνουμε  $P(7) = 2P(3) + 3 \quad (3)$

Αναζητούμε έτσι το  $P(3)$ .

$$\text{Η (1) για } x = 1 \text{ δίνει: } P(3) = 2P(1) + 3 \quad (4)$$

$$\text{Το } P(1) \text{ βρίσκουμε από την (1) για } x = 0: P(1) = 2P(0) + 3$$

$$\text{και επειδή } P(0) = 0 \text{ είναι: } P(1) = 3 \quad (5)$$

Από (4), (5) παίρνουμε ότι  $P(3) = 9$  οπότε από την (3) προκύπτει ότι  $P(7) = 21$ .

$$\text{Έτσι η σχέση (2) δίνει: } P(15) = 45$$

**Άσκηση 5**

**Βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης:  $x^5 : (x-1)^2$**

**Λύση**

$$\text{Είναι } (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

Οπότε:

$$\begin{array}{r|l}
 x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 & x^2 - 2x + 1 \\
 (+) - x^5 + 2x^4 - x^3 & \hline
 2x^4 - x^3 + 0x^2 + 0x + 0 & \\
 (+) -2x^4 + 4x^3 - 2x^2 & \hline
 3x^3 - 2x^2 + 0x + 0 & \\
 (+) -3x^3 + 6x^2 - 3x & \hline
 4x^2 - 3x + 0 & \\
 (+) -4x^2 + 8x - 4 & \hline
 5x - 4 & 
 \end{array}$$

Άρα έχουμε:

$$\text{Πηλίκο: } \Pi(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$$

$$\text{Υπόλοιπο: } \upsilon(x) = 5x - 4$$

**Άσκηση 6**

**Πολυώνυμο  $P(x)$  διαιρούμενο με το  $x-1$  δίνει υπόλοιπο 3 και διαιρούμενο με το  $x+2$  δίνει υπόλοιπο 9. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $(x-1)(x+2)$ .**

**Λύση**

Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $(x-1)(x+2)$  γράφεται:

$$P(x) = (x-1)(x+2)\Pi(x) + v(x)$$

Επειδή ο διαιρέτης είναι 2ου βαθμού το υπόλοιπο θα είναι το πολύ 1ου βαθμού.

Έστω  $v(x) = ax + \beta$ . Τότε η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται:

$$P(x) = (x-1)(x+2)\Pi(x) + ax + \beta$$

Από την τελευταία ισότητα παίρνουμε:

$$\text{για } x = 1: \quad P(1) = a + \beta$$

$$\text{για } x = -2: \quad P(-2) = -2a + \beta$$

Επειδή από την υπόθεση είναι  $P(1) = 3$  και  $P(-2) = 9$  έχουμε: 
$$\begin{cases} a + \beta = 3 \\ -2a + \beta = 9 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος δίνει:  $a = -2$  και  $\beta = 5$  δηλαδή  $v(x) = -2x + 5$

**Άσκηση 7**

**i. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $ax + \beta$ ,  $a \neq 0$**

$$\text{είναι: } v = P\left(-\frac{\beta}{a}\right).$$

**ii. Να βρείτε  $\mu \in \mathbb{R}$  ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου**

$$P(x) = 8\mu x^3 + (\mu - 1)x + 3 \text{ με το } 2x + 1 \text{ να είναι } 5.$$

**Λύση**

**i.** Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $ax + \beta$  γράφεται:

$$P(x) = (ax + \beta)\Pi(x) + v(x) \quad (1)$$

Επειδή ο διαιρέτης είναι 1ου βαθμού, το υπόλοιπο θα είναι σταθερό πολυώνυμο, άρα η (1)

$$\text{γράφεται: } P(x) = (ax + \beta)\Pi(x) + v$$

$$\text{Για } x = -\frac{\beta}{a} \text{ έχουμε } P\left(-\frac{\beta}{a}\right) = \left(a \cdot \frac{-\beta}{a} + \beta\right)\Pi\left(-\frac{\beta}{a}\right) + v \text{ δηλαδή } P\left(-\frac{\beta}{a}\right) = v.$$

**ii.** Για να είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $2x + 1$  ίσο με 5 πρέπει από το ερώ-

$$\text{τημα i. να ισχύει: } P\left(-\frac{1}{2}\right) = 5 \text{ ή } 8\mu\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + (\mu - 1)\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 5 \text{ ή}$$

$$8\mu \frac{-1}{8} - \frac{\mu}{2} + \frac{1}{2} + 3 = 5 \text{ ή } -\mu - \frac{\mu}{2} + \frac{1}{2} = 2 \text{ ή } -2\mu - \mu + 1 = 4$$

Δηλαδή  $-3\mu = 3$

$$\boxed{\mu = -1}$$



**Άσκηση 8**

Αν το πολυώνυμο  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x + 2$ , να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο  $P(5x - 7)$  έχει παράγοντα το  $x - 1$ .

**Λύση**

Αφού το  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x + 2 = x - (-2)$  θα ισχύει  $P(-2) = 0$  (1).

Βρίσκουμε την αριθμητική τιμή του  $P(5x - 7)$  για  $x = 1$ .

Έχουμε:  $P(5 \cdot 1 - 7) = P(-2) \stackrel{(1)}{=} 0$ .

Άρα το 1 είναι ρίζα του  $P(5x - 7)$ , επομένως το  $P(5x - 7)$  έχει παράγοντα το  $x - 1$ .

**Δ.****ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ**

1. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης:  
 $(3x^5 + 12x^3 - 20 + 50) : (x - 2)$
2. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης:  
 $(\alpha x^5 + \beta x^4 + 1) : (x - 1)$
3. Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^{13} - 10x^{12} + 10x^{11} - 10x^{10} + \dots + 10x - 1$ . Να βρείτε το  $P(9)$  και το  $P(11)$ .
4. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο  
 $P(x) = x^4 - 6x^3 + 12x - 11x + 6$  διαιρείται με το  $x^2 - 5x + 6$  και να βρείτε το πηλίκο του.
5. Να βρείτε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε το πολυώνυμο  $P(x) = 3x^4 - \alpha x^3 + 5x^2 - 9x + \beta$  να διαιρείται με το  $x^2 - 1$ .
6. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο  $P(x) = x^v - v3^{v-1}x + (v-1)3^v$ ,  $v \in \mathbb{N}$  έχει παράγοντα το  $(x - 3)^2$ .
7. Να βρεθούν τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  συναρτήσει του  $v$  ώστε το πολυώνυμο  $P(x) = \alpha x^v - \beta x^{v-1} + 2$  να έχει παράγοντα το πολυώνυμο  $Q(x) = x^2 - 2x + 1$ .
8. Ναδειχθεί ότι το πολυώνυμο  $Q(x) = x^2 - x$  είναι παράγοντας του πολυωνύμου  
 $P(x) = (2x - 1)^{2v+1} + x^{2v-1} - 3x + 1$  με  $v \in \mathbb{N}$ .
9. Πολυώνυμο  $P(x)$  διαιρούμενο με το  $x - 3$  δίνει υπόλοιπο 1. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης  $P(2x + 1) : (x - 1)$ .

10. Πολυώνυμο  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x - 4$  και είναι τέτοιο ώστε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να ισχύει:  $P(x+2) = P(5x-1)$ . Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης  $P(x) : (x-9)$ .
11. Πολυώνυμο  $P(x)$  διαιρούμενο με το  $x+1$  δίνει το υπόλοιπο 5 και διαιρούμενο με το  $x-3$  δίνει υπόλοιπο  $-7$ . Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης  $P(x) : (x^2 - 2x - 3)$ .
12. Πολυώνυμο  $P(x)$  διαιρούμενο με το  $x-1$  δίνει υπόλοιπο 4, διαιρούμενο με το  $x+2$  δίνει υπόλοιπο 26. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης  $P(x)$  με το  $(x-1)(x+2)(x-3)$ .
13. Να βρείτε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^5 - x^2 + \alpha x + \beta$  διαιρούμενο με το  $x^2 - 4$  δίνει υπόλοιπο  $35x - 5$ .

**Ε****“ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ”**

1. Έστω πολυώνυμο  $P(x)$  τέτοιο ώστε 
$$\begin{cases} P[(x+1)^3] = [P(7x-6)]^2 - 2x \\ P(1) = 0 \end{cases}.$$

Να βρεθεί το  $P(27)$ .

2. Να προσδιοριστούν οι  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 - 6x^3 + (2\alpha + \beta)x^2 - (\alpha + 1)x + \alpha - 4\beta$$

να είναι τέλειο τετράγωνο άλλου πολυωνύμου.