

Απαραίτητες γνώσεις Θεωρίας

Θεωρία 1.

Έστω δύο συναρτήσεις f, φ οι οποίες έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και c ένας θετικός αριθμός. Αν γνωρίζουμε τη γραφική παράσταση της φ πώς μπορούμε να κάνουμε τη γραφική παράσταση της f όταν για κάθε $x \in A$ ισχύουν:

α) $f(x) = \varphi(x) + c$

β) $f(x) = \varphi(x) - c$

γ) $f(x) = \varphi(x - c)$

δ) $f(x) = \varphi(x + c)$

ε) $f(x) = \varphi(x - c) + \rho$

στ) $f(x) = \varphi(x - c) - \rho$

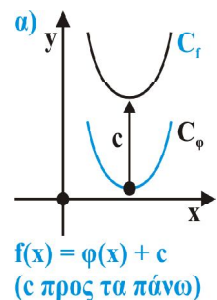
ζ) $f(x) = \varphi(x + c) + \rho$

η) $f(x) = \varphi(x + c) - \rho$

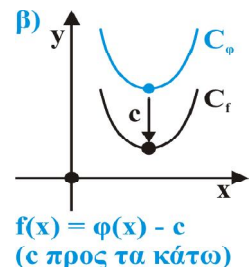
όπου $c > 0, \rho > 0$.

Απάντηση:

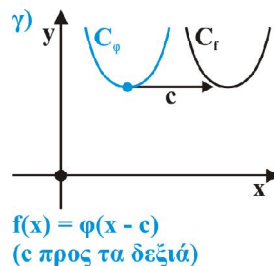
α) Η γραφική παράσταση $f(x) = \varphi(x) + c, c > 0$, προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα πάνω.



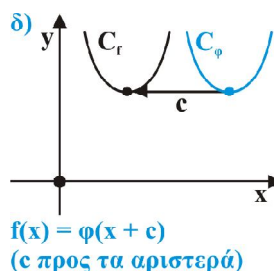
β) Η γραφική παράσταση $f(x) = \varphi(x) - c, c > 0$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα κάτω.



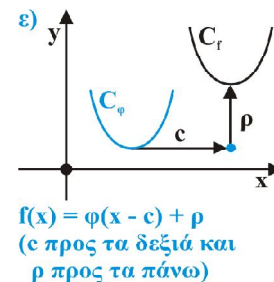
γ) Η γραφική παράσταση $f(x) = \varphi(x - c)$, $c > 0$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα δεξιά.



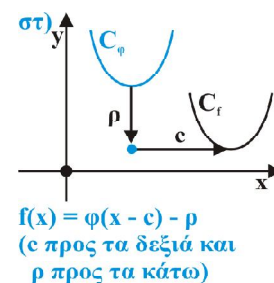
δ) Η γραφική παράσταση $f(x) = \varphi(x + c)$, $c > 0$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα αριστερά.



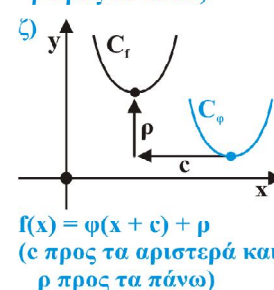
ε) Η γραφική παράσταση της $f(x) = \varphi(x - c) + \rho$, $c > 0$, $\rho > 0$ προκύπτει συγχρόνως από 2 μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ . Μια οριζόντια κατά c μονάδες προς τα δεξιά και μια κατακόρυφη κατά ρ μονάδες προς τα πάνω.



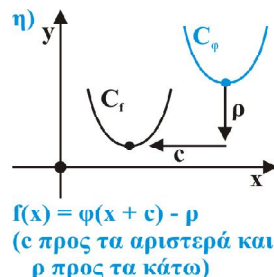
στ) Η γραφική παράσταση της $f(x) = \varphi(x - c) - \rho$, $c > 0$, $\rho > 0$ προκύπτει συγχρόνως από 2 μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ . Μια οριζόντια κατά c μονάδες προς τα δεξιά και μια κατακόρυφη κατά ρ μονάδες προς τα κάτω.



ζ) Η γραφική παράσταση της $f(x) = \varphi(x + c) + \rho$, $c > 0$, $\rho > 0$ προκύπτει συγχρόνως από 2 μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ . Μια οριζόντια κατά c μονάδες προς τα αριστερά και μια κατακόρυφη κατά ρ μονάδες προς τα πάνω.



- η) Η γραφική παράσταση της $f(x) = \varphi(x + c) - \rho$, $c > 0$, $\rho > 0$ προκύπτει συγχρόνως από 2 μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ . Μια οριζόντια κατά c μονάδες προς τα αριστερά και μια κατακόρυφη κατά ρ μονάδες προς τα κάτω.



Θεωρία 2.

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)$. Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της $f(x) = \varphi(x + c)$, $c > 0$, προκύπτει από την μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\varphi(x)$ κατά c μονάδες προς τα αριστερά και της $g(x) = \varphi(x - c)$ κατά c μονάδες προς τα δεξιά. Πως το εξηγείτε αυτό;

Απάντηση:

- α) Έστω η $f(x) = \varphi(x + c)$, $c > 0$. Βάζοντας στην θέση του x το $x - c$ έχουμε:

$f(x - c) = \varphi((x - c) + c) \Leftrightarrow f(x - c) = \varphi(x)$. Δηλαδή όποια τιμή έχει η συνάρτηση φ στην θέση x την ίδια τιμή έχει και η συνάρτηση f στην θέση $x - c$, δηλαδή c μονάδες αριστερά. Επομένως η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα αριστερά.

- β) Όμοια για την $g(x) = \varphi(x - c)$, $c > 0$ για $x + c$ έχουμε:

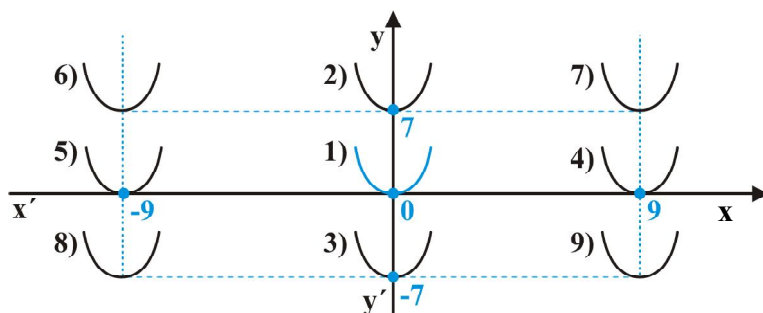
$$g(x + c) = \varphi((x + c) - c) \Leftrightarrow g(x + c) = \varphi(x)$$

Δηλαδή η τιμή της g στην θέση $x + c$ είναι η ίδια με την τιμή της φ στην θέση x . Άρα κάθε σημείο της g προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση κάθε σημείου της φ κατά c μονάδες προς τα δεξιά.

Ερωτήσεις κατανόησης - Λυμένα Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Η γραμμή (1) είναι η γραφική παράσταση της $y = 3x^2$. Να βρείτε τις συναρτήσεις που παριστάνουν οι υπόλοιπες γραμμές.



Λύση:

(1) $\rightarrow y = 3x^2$,

(2) $\rightarrow y = 3x^2 + 7$,

(3) $\rightarrow y = 3x^2 - 7$,

(4) $\rightarrow y = 3(x - 9)^2$,

(5) $\rightarrow y = 3(x + 9)^2$,

(6) $\rightarrow y = 3(x + 9)^2 + 7$,

(7) $\rightarrow y = 3(x - 9)^2 + 7$,

(8) $\rightarrow y = 3(x + 9)^2 - 7$,

(9) $\rightarrow y = 3(x - 9)^2 - 7$,

Παράδειγμα 2

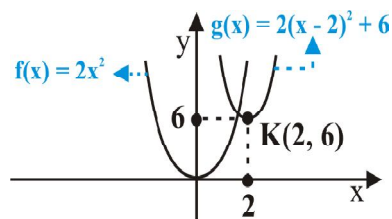
Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της: $f(x) = 2x^2$, να γίνει η γραφική παράσταση της: $g(x) = 2x^2 - 8x + 14$.

Λύση:

$$g(x) = 2(x^2 - 4x + 7) = 2(x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2 + 7) =$$

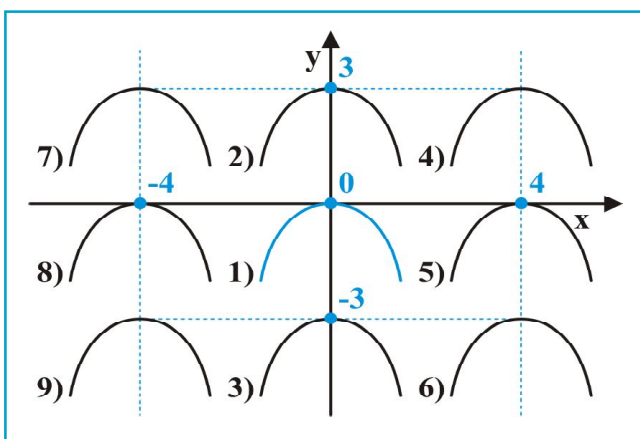
$$= 2[(x - 2)^2 + 3] = 2(x - 2)^2 + 6 = f(x - 2) + 6$$

Άρα η γραφική παράσταση της $g(x)$ είναι η μετατόπιση της f κατά 2 μονάδες δεξιά και συγχρόνως 6 μονάδες προς τα πάνω.



Ερωτήσεις κατανόησης - Ασκήσεις για λύση

1. Η γραμμή (1) είναι η γραφική παράσταση της $y = -2x^2$. Να βρείτε τις συναρτήσεις που παριστάνουν οι υπόλοιπες γραμμές.



2. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = \left|x + \frac{3}{2}\right| \quad \text{και} \quad h(x) = \left|x - \frac{3}{2}\right|.$$

3. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

$$f(x) = -|x|, \quad g(x) = -|x - 2| + 1 \quad \text{και} \quad h(x) = -|x + 1| - 3.$$

