

## Α.

## ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

### Η έννοια του λογάριθμου

Έστω η εξίσωση  $a^x = \theta$ ,  $1 \neq a > 0$ ,  $\theta > 0$ . Η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση αφού η εκθετική συνάρτηση  $f(x) = a^x$  είναι γνησίως μονότονη και το  $\theta$  ανήκει στο σύνολο τιμών της.

Την μοναδική αυτή λύση την συμβολίζουμε με  $\log_a \theta$  και την ονομάζουμε **λογάριθμο του  $\theta$**

**ως προς βάση το  $a$ .** Είναι δηλαδή:  $a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta$ ,  $1 \neq a > 0$ ,  $\theta > 0$

Ισοδύναμα αυτό διατυπώνεται ως εξής :

Ο  $\log_a \theta$  είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον  $a$  για να βρούμε το  $\theta$ .

**Παράδειγμα:**  $\log_3 81 = 4$  αφού  $3^4 = 81$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = 5 \text{ αφού } \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$\log_{10} 0,001 = -3 \text{ αφού } 10^{-3} = 0,001$$

• Από τον πιο πάνω ορισμό του λογαρίθμου προκύπτει αμέσως ότι αν  $1 \neq a > 0$  τότε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και για κάθε  $\theta > 0$  ισχύει:  $\log_a a^x = x$  και  $a^{\log_a \theta} = \theta$ .

• Αφού είναι  $a^1 = a$  τότε  $\log_a a = 1$

• Αφού είναι  $a^0 = 1$  τότε  $\log_a 1 = 0$

### Ιδιότητες λογαρίθμων

Αν  $1 \neq a > 0$  τότε για οποιουσδήποτε  $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$  και  $\kappa \in \mathbb{R}$  ισχύουν :

$$1. \log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

$$2. \log_a \left( \frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$$

$$3. \log_a \theta^\kappa = \kappa \cdot \log_a \theta$$

**Παρατήρηση 1**

Επειδή για κάθε  $\theta > 0$  ισχύει  $\sqrt[n]{\theta} = \theta^{\frac{1}{n}}$  έχουμε :  $\log_a \sqrt[n]{\theta} = \log_a \theta^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a \theta$ .

**Παρατήρηση 2**

Η ιδιότητα 1 ισχύει γενικά για  $n$  θετικούς αριθμούς  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ .

Δηλαδή:  $\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2 \cdots \theta_n) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2 + \cdots + \log_a \theta_n$

**Παρατήρηση 3**

Από την ιδιότητα 2 προκύπτει ότι:  $\log_a \frac{1}{\theta} = -\log_a \theta$ .

**Δεκαδικοί λογάριθμοι**

Οι λογάριθμοι με βάση το 10 ονομάζονται δεκαδικοί ή κοινοί λογάριθμοι.

Είναι δηλαδή  $10^x = \theta \Leftrightarrow x = \log \theta, \theta > 0$

Για αυτούς τους λογαρίθμους ισχύουν τα εξής :

1.  $\log 10^x = x$  και  $10^{\log \theta} = \theta$
2.  $\log 10 = 1$  και  $\log 1 = 0$
3.  $\log (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log \theta_1 + \log \theta_2$
4.  $\log \left( \frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log \theta_1 - \log \theta_2$
5.  $\log \theta^k = k \cdot \log \theta$
6.  $\log \sqrt[n]{\theta} = \log \theta^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log \theta$  όπου  $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$  και  $k \in \mathbb{R}$ .

**Φυσικοί λογάριθμοι**

Στα μαθηματικά είναι πολύ χρήσιμοι και οι λογάριθμοι με βάση τον αριθμό  $e$ . Οι λογάριθμοι αυτοί ονομάζονται **φυσικοί ή νεπέρειοι λογάριθμοι**.

Ο νεπέριος λογάριθμος ενός θετικού αριθμού  $\theta$ , συμβολίζεται με  $\ln \theta$  και όχι με  $\log_e \theta$ .

Είναι δηλαδή:  $e^x = \theta \Leftrightarrow x = \ln \theta, \theta > 0$

Για αυτούς τους λογαρίθμους ισχύουν τα εξής:

1.  $\ln e^x = x$  και  $e^{\ln \theta} = \theta$
2.  $\ln e = 1$  και  $\ln 1 = 0$
3.  $\ln (\theta_1 \cdot \theta_2) = \ln \theta_1 + \ln \theta_2$
4.  $\ln \left( \frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \ln \theta_1 - \ln \theta_2$

$$5. \ln \theta^{\kappa} = \kappa \cdot \ln \theta \qquad 6. \ln \sqrt[n]{\theta} = \ln \theta^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \ln \theta \text{ όπου } \theta_1, \theta_2, \theta > 0 \text{ και } \kappa \in \mathbb{R}$$

### Αλλαγή Βάσης

$$\text{Αν } 1 \neq a > 0 \text{ και } 1 \neq b > 0 \text{ τότε για κάθε } \theta > 0 \text{ ισχύει: } \log_b \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a b}$$

### Παρατήρηση 4

$$\text{Είναι } \log \theta = \frac{\ln \theta}{\ln 10} \text{ και } \ln \theta = \frac{\log \theta}{\log e}$$

## B.

## ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

### Κατηγορία – Μέθοδος 1

Στις ασκήσεις όπου ζητείται να υπολογίσουμε ένα λογάριθμο ενός αριθμού ή τη βάση ενός λογαρίθμου χρησιμοποιούμε την ισοδυναμία:

$$a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta$$

### Παράδειγμα 1

**α. Να υπολογίσετε το x από την ισότητα:**  $\log_8 x = -\frac{1}{2}$

**β. Να υπολογίσετε την βάση a με  $1 \neq a > 0$  από την ισότητα:**  $\log_a \frac{16}{25} = 2$

**γ. Να υπολογίσετε τον  $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$**

### Λύση

**α.** Είναι:  $\log_8 x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 8^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{8^{\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{8}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{4}$

**β.** Είναι:  $\log_a \frac{16}{25} = 2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow a^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Leftrightarrow a = \frac{4}{5}$

**γ.** Είναι  $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Leftrightarrow x = 3$

**Κατηγορία – Μέθοδος 2**

Για να υπολογίσουμε παράσταση με λογάριθμους εφαρμόζουμε τις ιδιότητες τους καθώς και τον τύπο αλλαγής βάσης.

**Παράδειγμα 3**

Να δείξετε ότι :  $\frac{1}{2} \log 49 + \frac{1}{3} \log 27 + \frac{1}{4} \log 81 = \log 63$

**Λύση**

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \frac{1}{2} \log 49 + \frac{1}{3} \log 27 + \frac{1}{4} \log 81 &= \log 49^{\frac{1}{2}} + \log 27^{\frac{1}{3}} + \log 81^{\frac{1}{4}} \\ &= \log \sqrt{49} + \log \sqrt[3]{27} + \log \sqrt[4]{81} = \log 7 + \log 3 + \log 3 = \log (7 \cdot 3 \cdot 3) = \log 63 \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 4**

Να δειχθεί ότι:  $\frac{\log_a \theta}{\log_{a\beta} \theta} = 1 + \log_a \beta$

**Λύση**

$$\text{Είναι } \frac{\log_a \theta}{\log_{a\beta} \theta} = \frac{\log_a \theta}{\frac{\log_a \theta}{\log_a (a \cdot \beta)}} = \log_a (a \cdot \beta) = \log_a a + \log_a \beta = 1 + \log_a \beta$$

**Κατηγορία – Μέθοδος 3**

Στις ασκήσεις που μας ζητούν να βρούμε αν έχει έννοια πραγματικού ένας λογάριθμος χρησιμοποιούμε τον ορισμό του λογαρίθμου με τους αντίστοιχους περιορισμούς.

Δηλαδή η παράσταση  $\log_a \theta$  ορίζεται όταν  $1 \neq a > 0$  και  $\theta > 0$

**Παράδειγμα 5**

Για ποιες τιμές του  $x$  έχει νόημα η παράσταση:  $\log_{2x} (2x^2 - 3x + 1)$

**Λύση**

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \\ 2x^2 - 3x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Άρα } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty).$$

Γ.

## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## Άσκηση 1

Να υπολογίσετε τους αριθμούς: α.  $\log 100$ , β.  $\log_2 32$ , γ.  $\log_{\frac{1}{2}} 64$ , δ.  $\ln \frac{1}{\sqrt{e}}$

Λύση

Είναι:

$$\alpha. \log 100 = x \Leftrightarrow 10^x = 100 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\beta. \log_2 32 = x \Leftrightarrow 2^x = 32 \Leftrightarrow 2^x = 2^5 \Leftrightarrow x = 5$$

$$\gamma. \log_{\frac{1}{2}} 64 = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 64 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^6 \Leftrightarrow x = -6$$

$$\delta. \ln \frac{1}{\sqrt{e}} = x \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow e^x = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

## Άσκηση 2

Να υπολογιστούν οι λογάριθμοι:

$$\alpha. \log 0,001$$

$$\beta. \log_{\sqrt{3}} 81$$

$$\gamma. \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{125}$$

$$\delta. \log_{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{32}{243}}$$

Λύση

$$\alpha. \log 0,001 = \log 10^{-3} = -3$$

$$\beta. \log_{\sqrt{3}} 81 = \log_{\sqrt{3}} 3^4 = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^8 = 8$$

$$\gamma. \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{125} = \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5^3} = \log_{\frac{1}{5}} 5^{\frac{3}{2}} = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$$

$$\delta. \log_{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{32}{243}} = \log_{\frac{2}{3}} \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^5} = \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$$

## Άσκηση 3

Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: 
$$A = \frac{\log_2 32 - 2\log_{0,1} 0,01 + 3\log 0,0001}{\log_3 \frac{1}{81} + 3\log_5 \sqrt{5} - 4\log_6 216}$$

## Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } A &= \frac{\log_2 32 - 2\log_{0,1} 0,01 + 3\log 0,0001}{\log_3 \frac{1}{81} + 3\log_5 \sqrt{5} - 4\log_6 216} = \frac{\log_2 2^5 - 2\log_{0,1} (0,1)^2 + 3\log 10^{-4}}{\log_3 3^{-4} + 3\log_5 5^{\frac{1}{2}} - 4\log_6 6^3} = \\ &= \frac{5 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-4)}{-4 + \frac{3}{2} - 4 \cdot 3} = \frac{5 - 4 - 12}{-4 + \frac{3}{2} - 12} = \frac{-11}{\frac{-29}{2}} = \frac{22}{29} \end{aligned}$$

## Άσκηση 4

Να δείχθει ότι:

α.  $\log 3 + \log 20 - \log 6 = 1$

β.  $\ln 3e - \ln 12 + \ln 4 = 1$

γ.  $3 + 2\log_3 2 - \log_3 54 = \frac{1}{2} \log_3 4$

## Λύση

α.  $\log 3 + \log 20 - \log 6 = \log (3 \cdot 20) - \log 6 = \log 60 - \log 6 = \log \frac{60}{6} = \log 10 = 1$

β.  $\ln 3e - \ln 12 + \ln 4 = \ln 3e + \ln 4 - \ln 12 = \ln (3e \cdot 4) - \ln 12 = \ln 12e - \ln 12 = \ln \frac{12e}{12} = \ln e = 1$

$$\begin{aligned} \gamma. \quad 3 + 2\log_3 2 - \log_3 54 &= 3\log_3 3 + \log_3 2^2 - \log_3 54 = \\ &= \log_3 3^3 + \log_3 4 - \log_3 54 = \log_3 27 + \log_3 4 - \log_3 54 = \\ &= \log_3 (27 \cdot 4) - \log_3 54 = \log_3 108 - \log_3 54 = \log_3 \frac{108}{54} = \log_3 2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \log_3 2 = \frac{1}{2} \log_3 2^2 = \frac{1}{2} \log_3 4 \end{aligned}$$

## Άσκηση 5

Αν ισχύει  $\frac{\log x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y}$ , να δείχθει ότι  $x^x \cdot y^y \cdot z^z = 1$  ( $x, y, z > 0$ ,  $x \neq y \neq z \neq x$ ).

## Λύση

Θέτουμε  $\frac{\log x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y} = k$  και έχουμε:

$$\frac{\log x}{y-z} = k \Leftrightarrow \log x = k \cdot (y-z) \Leftrightarrow x \log x = x \cdot k \cdot (y-z) \quad (1)$$

$$\frac{\ell \log y}{z-x} = k \Leftrightarrow \ell \log y = k \cdot (z-x) \Leftrightarrow y \cdot \ell \log y = y \cdot k \cdot (z-x) \quad (2)$$

$$\text{και } \frac{\ell \log z}{x-y} = k \Leftrightarrow \ell \log z = k \cdot (x-y) \Leftrightarrow z \cdot \ell \log z = z \cdot k \cdot (x-y) \quad (3)$$

Προσθέτοντας τις (1), (2), (3) κατά μέλη έχουμε:

$$x \cdot \ell \log x + y \cdot \ell \log y + z \cdot \ell \log z = x \cdot k \cdot (y-z) + y \cdot k \cdot (z-x) + z \cdot k \cdot (x-y) \Leftrightarrow$$

$$\ell \log (x^x \cdot y^y \cdot z^z) = 0 \Leftrightarrow x^x \cdot y^y \cdot z^z = 1$$

### Άσκηση 6

Να απλοποιηθεί η παράσταση:  $\ell \log \frac{2\alpha^4 \cdot \sqrt[5]{\beta^3 \cdot \gamma^2}}{4\beta^3 \sqrt[4]{\alpha^2 \cdot \beta \cdot \gamma^3}}$

### Λύση

$$\begin{aligned} \ell \log \frac{2\alpha^4 \cdot \sqrt[5]{\beta^3 \cdot \gamma^2}}{4\beta^3 \sqrt[4]{\alpha^2 \cdot \beta \cdot \gamma^3}} &= \ell \log \frac{2\alpha^4 \cdot \beta^{\frac{3}{5}} \cdot \gamma^{\frac{2}{5}}}{4\beta^3 \cdot \alpha^{\frac{2}{4}} \cdot \beta^{\frac{1}{4}} \cdot \gamma^{\frac{3}{4}}} = \ell \log \left( \frac{1}{2} \alpha^{4-\frac{2}{4}} \cdot \beta^{\frac{3}{5}-\frac{1}{4}} \cdot \gamma^{\frac{2}{5}-\frac{3}{4}} \right) = \\ &= \ell \log \left( \frac{1}{2} \alpha^{\frac{7}{2}} \cdot \beta^{\frac{7}{20}} \cdot \gamma^{-\frac{7}{20}} \right) = \ell \log \frac{1}{2} + \ell \log \alpha^{\frac{7}{2}} + \ell \log \beta^{\frac{7}{20}} + \ell \log \gamma^{-\frac{7}{20}} = \\ &= \ell \log 1 - \ell \log 2 + \frac{7}{2} \ell \log \alpha + \frac{7}{20} \ell \log \beta - \frac{7}{20} \ell \log \gamma = -\ell \log 2 + \frac{7}{2} \ell \log \alpha + \frac{7}{20} \ell \log \beta - \frac{7}{20} \ell \log \gamma \end{aligned}$$

### Άσκηση 7

Να υπολογιστούν οι αριθμοί:  $\alpha. 10^{2-3\ell \log 2}$   $\beta. e^{2-\ell n 5}$   $\gamma. 3^{\ell \log_{3\sqrt{3}} 8}$

### Λύση

$$\alpha. 10^{2-3\ell \log 2} = 10^2 \cdot 10^{-3\ell \log 2} = 100 \cdot 10^{\ell \log 2^{-3}} = 100 \cdot 2^{-3} = \frac{100}{8} = \frac{25}{2} = 12,5$$

$$\beta. e^{2-\ell n 5} = e^2 \cdot e^{-\ell n 5} = e^2 \cdot e^{\ell n 5^{-1}} = e^2 \cdot 5^{-1} = \frac{e^2}{5}$$

$$\gamma. 3^{\ell \log_{3\sqrt{3}} 8} = \left( (3\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} \right)^{\ell \log_{3\sqrt{3}} 8} = (3\sqrt{3})^{\ell \log_{3\sqrt{3}} 8^{\frac{2}{3}}} = 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4$$

### Άσκηση 8

Αν  $\ell \log 2 = k$  να υπολογίσετε τους αριθμούς:  $\alpha. \ell \log_2 10$  και  $\beta. \ell \log_{16} 40$

**Λύση**

$$\alpha. \log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} = \frac{1}{k}$$

$$\beta. \log_{16} 40 = \frac{\log 40}{\log 16} = \frac{\log 4 + \log 10}{\log 2^4} = \frac{2\log 2 + 1}{4\log 2} = \frac{2k+1}{4k}$$

**Άσκηση 9**

Αν  $\alpha, \beta > 0$  και  $\alpha^2 + \beta^2 = 7\alpha\beta$  να δείχθεί ότι:  $\ln \alpha + \ln \beta = 2\ln\left(\frac{\alpha+\beta}{3}\right)$

**Λύση**

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } \alpha^2 + \beta^2 = 7\alpha\beta &\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = 9\alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 = 9\alpha\beta \Leftrightarrow \frac{(\alpha + \beta)^2}{9} = \alpha\beta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha + \beta}{3}\right)^2 = \alpha\beta \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha + \beta}{3}\right)^2 = \ln(\alpha\beta) \Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{\alpha + \beta}{3}\right) = \ln \alpha + \ln \beta \end{aligned}$$

**Άσκηση 10**

Να λυθούν οι εξισώσεις:  $\alpha. 2^x = 5$   $\beta. 3^{2-5x} = 7$

**Λύση**

$$\alpha. 2^x = 5 \Leftrightarrow \ln 2^x = \ln 5 \Leftrightarrow x \ln 2 = \ln 5 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 5}{\ln 2} \quad (\text{ή } 2^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_2 5)$$

$$\begin{aligned} \beta. 3^{2-5x} = 7 &\Leftrightarrow \log 3^{2-5x} = \log 7 \Leftrightarrow (2-5x)\log 3 = \log 7 \Leftrightarrow 2\log 3 - 5x\log 3 = \log 7 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5x\log 3 = 2\log 3 - \log 7 \Leftrightarrow 5x\log 3 = \log 9 - \log 7 \Leftrightarrow 5x\log 3 = \log \frac{9}{7} \Leftrightarrow x = \frac{\log \frac{9}{7}}{5\log 3} \end{aligned}$$

**Άσκηση 11**

Να δείξετε ότι:  $\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln 2, k \in \mathbb{N}^*$

**Λύση**

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \\ = \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \ln\left(\frac{5}{4}\right) + \dots + \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) &= \ln\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{k+1}{k}\right) = \\ = \ln\left(\frac{k+1}{2}\right) &= \ln(k+1) - \ln 2 \end{aligned}$$



**Άσκηση 12**

Να αποδειχθεί ότι για κάθε  $\alpha, \beta, \gamma, x > 0$  με  $\alpha, \beta, \gamma, x \neq 1$  ισχύει :

$$\log_{\alpha} x \cdot \log_{\beta} x + \log_{\beta} x \cdot \log_{\gamma} x + \log_{\gamma} x \cdot \log_{\alpha} x = \frac{\log_{\alpha} x \cdot \log_{\beta} x \cdot \log_{\gamma} x}{\log_{\alpha\beta\gamma} x}$$

**Λύση**

$$\begin{aligned} \text{Είναι } & \log_{\alpha} x \cdot \log_{\beta} x + \log_{\beta} x \cdot \log_{\gamma} x + \log_{\gamma} x \cdot \log_{\alpha} x = \\ & \log_{\alpha} x \cdot \frac{\log_{\alpha} x}{\log_{\alpha} \beta} + \frac{\log_{\alpha} x}{\log_{\alpha} \beta} \cdot \frac{\log_{\alpha} x}{\log_{\alpha} \gamma} + \frac{\log_{\alpha} x}{\log_{\alpha} \gamma} \cdot \log_{\alpha} x = \\ & (\log_{\alpha} x)^2 \cdot \left( \frac{1}{\log_{\alpha} \beta} + \frac{1}{\log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\alpha} \gamma} + \frac{1}{\log_{\alpha} \gamma} \right) = \\ & (\log_{\alpha} x)^2 \left( \frac{\log_{\alpha} \gamma + \log_{\alpha} \alpha + \log_{\alpha} \beta}{\log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\alpha} \gamma} \right) = (\log_{\alpha} x)^2 \cdot \frac{\log_{\alpha} (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)}{\log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\alpha} \gamma} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } & \frac{\log_{\alpha} x \cdot \log_{\beta} x \cdot \log_{\gamma} x}{\log_{\alpha\beta\gamma} x} = \frac{\log_{\alpha} x \cdot \frac{\log_{\alpha} x}{\log_{\alpha} \beta} \cdot \frac{\log_{\alpha} x}{\log_{\alpha} \gamma}}{\frac{\log_{\alpha} x}{\log_{\alpha} (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)}} = \\ & \frac{(\log_{\alpha} x)^3 \cdot \log_{\alpha} (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)}{\log_{\alpha} x \cdot \log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\alpha} \gamma} = (\log_{\alpha} x)^2 \cdot \frac{\log_{\alpha} (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)}{\log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\alpha} \gamma} \quad (2) \end{aligned}$$

Από την (1) και την (2) ισχύει το ζητούμενο.

**Άσκηση 13**

Να υπολογιστεί ο αριθμός:  $\kappa = 27^{\frac{1}{6 \log_2 3}}$

**Λύση**

$$\text{Είναι: } \kappa = 27^{\frac{1}{6 \log_2 3}} = 27^{\frac{\log_2 2}{6 \log_2 3}} = 27^{\frac{1}{6} \log_3 2} = 3^{\frac{3}{6} \log_3 2} = 3^{\frac{1}{2} \log_3 2} = 3^{\log_3 2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

**Άσκηση 14**

Σε μια αριθμητική πρόοδο με  $\alpha_1 = \ell n 2$  και  $\alpha_2 = \ell n 16$  να δειχθεί ότι το άθροισμα των  $n$

$$\text{πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο: } S_n = \frac{n(3n-1)}{2} \cdot \ell n 2$$

**Λύση**

Η διαφορά  $\omega$  της προόδου είναι:  $\omega = \ell n 16 - \ell n 2 = \ell n 2^4 - \ell n 2 = 4\ell n 2 - \ell n 2 = 3\ell n 2$

Οπότε έχουμε:  $S_v = \left[ 2 \cdot \alpha_1 + (v-1) \cdot \omega \right] \cdot \frac{v}{2} = \left[ 2 \cdot \ell n 2 + (v-1) \cdot 3\ell n 2 \right] \cdot \frac{v}{2} =$

$$(2 \cdot \ell n 2 + 3v \cdot \ell n 2 - 3 \cdot \ell n 2) \cdot \frac{v}{2} = (3v \cdot \ell n 2 - \ell n 2) \cdot \frac{v}{2} =$$

$$= (3v-1) \cdot \ell n 2 \cdot \frac{v}{2} = \frac{v(3v-1)}{2} \cdot \ell n 2$$

**Άσκηση 15**

Αν  $\ell n I_0 = -\frac{R \cdot t}{L} + \ell n I$  να δειχθεί ότι:  $I_0 = I \cdot e^{\frac{R \cdot t}{L}}$

**Λύση**

$$\text{Είναι } \ell n I_0 = -\frac{R \cdot t}{L} + \ell n I \Leftrightarrow \ell n I_0 - \ell n I = -\frac{R \cdot t}{L} \Leftrightarrow \ell n \frac{I_0}{I} = -\frac{R \cdot t}{L} \Leftrightarrow \frac{I_0}{I} = e^{-\frac{R \cdot t}{L}} \Leftrightarrow$$

$$I_0 = I \cdot e^{\frac{R \cdot t}{L}}$$

**Άσκηση 16**

Το ραδιενεργό ιώδιο έχει χρόνο υποδιπλασιασμού περίπου 7 ημέρες. Αν είναι  $Q_0$  η αρχική ποσότητα του ραδιενεργού ιωδίου, τότε η ποσότητα που έχει απομείνει μετά από  $t$  ημέρες δίνεται από την σχέση:  $Q(t) = Q_0 e^{-k \cdot t}$ .

α. Να βρεθεί η σταθερά  $k$ . (Δίνεται ότι:  $\frac{\ell n 2}{7} \approx 0,1$ )

β. Για  $Q_0 = 1000 \text{ gr}$ , να βρείτε σε πόσες ημέρες θα έχουν μείνει 5gr ραδιενεργού ιωδίου.

**Λύση**

α. Μετά από 7 ημέρες θα έχει απομείνει η μισή ποσότητα του ραδιενεργού ιωδίου.

Επομένως για  $t = 7$  και για  $Q(7) = \frac{Q_0}{2}$  η σχέση  $Q(t) = Q_0 e^{-k \cdot t}$  γίνεται:

$$Q(7) = Q_0 e^{-k \cdot 7} \Leftrightarrow \frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{-7k} \Leftrightarrow e^{-7k} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ell n e^{-7k} = \ell n \frac{1}{2} \Leftrightarrow -7k = \ell n 1 - \ell n 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -7k = -\ell n 2 \Leftrightarrow k = \frac{\ell n 2}{7} \Leftrightarrow k \approx 0,1$$

β. Για  $Q(t) = 5$ ,  $Q_0 = 1000$  και  $k = 0,1$  η σχέση  $Q(t) = Q_0 e^{-k \cdot t}$  γίνεται:

$$5 = 1000 e^{-0,1t} \Leftrightarrow e^{-0,1t} = \frac{1}{200} \Leftrightarrow \ell n e^{-0,1t} = \ell n \frac{1}{200} \Leftrightarrow -0,1t = -\ell n 200 \Leftrightarrow t = \frac{\ell n 200}{0,1}$$

**Άσκηση 17**

Όταν το φως του ήλιου περνάει μέσα από ένα γυαλί ενός παραθύρου, η έντασή του μειώνεται

σύμφωνα με τη σχέση  $E(x) = E_0 e^{-\frac{x}{50}}$ , όπου  $E_0$  η ένταση που έχει το ηλιακό φως όταν πέφτει στο γυαλί και  $x$  το πάχος του γυαλιού σε mm.

α. Πόση θα είναι η ένταση του φωτός όταν περάσει από ένα γυαλί που έχει πάχος 5 mm ;

β. Ποιο το πάχος ενός γυαλιού ώστε η ένταση του φωτός που το περνά να είναι ίση με το 60% της αρχικής τιμής;

(Δίνεται:  $\ln 3 = 1,01$ ,  $\ln 5 = 1,60$ )

**Λύση**

Είναι:

α. Η  $E(x) = E_0 e^{-\frac{x}{50}}$  για  $x = 5$  γίνεται:  $E(5) = E_0 e^{-\frac{5}{50}} \Leftrightarrow E(5) = E_0 e^{-0,1}$

β. Έχουμε ότι  $E(x) = 0,6E_0$ . Άρα:

$$0,6E_0 = E_0 e^{-\frac{x}{50}} \Leftrightarrow 0,6 = e^{-\frac{x}{50}} \Leftrightarrow \ln 0,6 = \ln e^{-\frac{x}{50}} \Leftrightarrow -\frac{x}{50} = \ln \frac{6}{10} \Leftrightarrow -\frac{x}{50} = \ln \frac{3}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x}{50} = \ln 3 - \ln 5 \Leftrightarrow -\frac{x}{50} = 1,01 - 1,60 \Leftrightarrow -\frac{x}{50} = -0,59 \Leftrightarrow x = 29,5 \text{ mm}$$

**Α.****ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ**

1. Να υπολογιστούν οι λογάριθμοι:

i.  $\log_{\frac{1}{3}} 27$

ii.  $\log_{\sqrt{2}} 64$

iii.  $\log_{25} \frac{1}{5}$

(Απ.: i. -3, ii. 10, iii. -1/2)

2. Να υπολογιστεί ο  $x$  στις παρακάτω ισότητες:

i.  $\log_3 x = -\frac{1}{2}$

ii.  $\log_2 (x+2) = 3$

iii.  $\log(2x-5) = 2$

iv.  $\ln 3x = 5$

(Απ.: i.  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , ii.  $x = \frac{17}{8}$ , iii.  $x = 52,5$ , iv.  $x = \frac{e^5}{3}$ )

3. Να υπολογιστεί ο  $x$  στις παρακάτω παραστάσεις:

i.  $\log_x 8 = \frac{2}{3}$

ii.  $\log_x \frac{1}{9} = -2$

iii.  $\log_x 0,01 = -\frac{1}{2}$

(Απ.: i.  $x = 16\sqrt{2}$ , ii.  $x = 3$ , iii.  $x = 10.000$ )

4. Να υπολογιστεί ο  $x$  στις παρακάτω παραστάσεις:

i.  $\log_3 \sqrt{x^2} = -1$       ii.  $\log_{x^{-3}} 64 = -2$

(Απ.: i.  $x = \pm \frac{1}{3}$ , ii.  $x = 2$ )

5. Να υπολογιστούν οι λογάριθμοι:

i.  $\log_3 \sqrt[3]{0,0001}$       ii.  $\ln \frac{1}{e^2 \cdot \sqrt{e^3}}$

(Απ.: i.  $-\frac{4}{3}$ , ii.  $-\frac{7}{2}$ )

6. Να υπολογιστούν οι λογάριθμοι:

i.  $\log_4 \sin \frac{\pi}{3}$       ii.  $\log_{\pi} \eta \mu \frac{\pi}{2}$       iii.  $\log_{\sqrt{3}} \varepsilon \varphi \frac{\pi}{6}$

(Απ.: i.  $-\frac{1}{2}$ , ii. 0, iii. -1)

7. Να υπολογιστεί ο  $x$  στις παρακάτω παραστάσεις:

i.  $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \eta \mu x = 2$       ii.  $\log_{\sqrt{3}} \varepsilon \varphi 2x = -1$

(Απ.: i.  $\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$ , ii.  $x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, \kappa \in \mathbb{Z}$ )

8. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

i.  $\frac{1}{2} \log 81 + \frac{1}{3} \log 125 - \frac{1}{5} \log 243$       ii.  $2 + 3 \ln 2 - 2 \ln 3 + \ln 9$

(Απ.: i.  $1 + \log 5$ , ii.  $2 + \ln 8$ )

9. Να αποδειχθούν οι ισότητες:

i.  $2 \log 4 + \log 3 - \log 12 = 2 \log 2$

ii.  $\frac{1}{2} \ln 16 + \frac{1}{3} \ln 27 + \frac{1}{5} \ln 32 - \frac{1}{4} \ln 64 = \frac{3}{2} \ln 2 + \ln 3$

(Υπ.: Εφαρμόστε τις ιδιότητες των λογαρίθμων)

10. Να δειχθεί ότι:  $\log_2 3 \cdot \log_5 7 = \log_5 3 \cdot \log_2 7$

(Υπ.: Εφαρμόστε τον τύπο αλλαγής βάσης)

11. Να εφαρμοστούν όλες οι δυνατές ιδιότητες των λογαρίθμων στις παρακάτω παραστάσεις:

$$\begin{array}{lll} \text{i. } \ln \left( \frac{x^2 \sqrt{y}}{e^2 y^4 \sqrt[4]{xy}} \right) & \text{ii. } \log \left( \frac{3x^2 \sqrt[5]{y^3 z^2}}{4y^2 \sqrt[3]{x^3 z^2}} \right) & \text{iii. } \ln \left( 2x \cdot \frac{\sqrt{x^2 y^3 z}}{\sqrt[3]{x \cdot z}} \right) \\ (\text{Απ.: i. } \frac{7}{4} \ln x - \frac{3}{4} \ln y - 2, & \text{ii. } \log x - \frac{7}{5} \log y - \frac{4}{15} \log 2 + \log 3 - \log 4, & \text{iii. } \frac{5}{3} \log x + \frac{3}{2} \log y + \frac{1}{6} \log 2 + \log 2 ) \end{array}$$

12. Αν  $\log x = \alpha$  και  $\log y = \beta$  να υπολογιστεί η παράσταση:  $A = \log \sqrt[3]{x \sqrt{x^3 y}}$

$$(\text{Απ.: } A = \frac{5}{6} \alpha + \frac{1}{6} \beta)$$

13. Αν  $\ln x = \kappa$  και  $\ln y = \lambda$  να υπολογιστεί η παράσταση:  $A = \ln \frac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[5]{x^3 y}}$

$$(\text{Απ.: } A = -\frac{4}{15} \kappa + \frac{7}{15} \lambda)$$

14. Να υπολογιστεί η παράσταση:  $A = \ln \frac{\sqrt[3]{e^2 \sqrt{e}} \cdot \sqrt[7]{e}}{\sqrt[9]{e^5}}$

$$(\text{Απ.: } A = \frac{211}{252})$$

15. Να υπολογιστεί η παράσταση:  $A = \log \frac{\sqrt[5]{x \sqrt[3]{x^2 \sqrt{x}}}}{\sqrt[6]{x \sqrt{x^3 \sqrt{x}}}}$  αν  $\log x = 3$ .

$$(\text{Απ.: } A = -\frac{11}{40})$$

16. Να υπολογιστούν οι αριθμοί:

$$\text{i. } e^{3-2\ln 2} \quad \text{ii. } 10^{5-\frac{1}{2}\log 16} \quad \text{iii. } 5^{2-\log_5 7}$$

$$(\text{Απ.: i. } \frac{e^3}{4}, \text{ ii. } \frac{10^5}{4}, \text{ iii. } \frac{25}{7})$$

17. Να υπολογιστούν οι αριθμοί:  $\alpha = 9^{\log_{\sqrt{5}} 2}$  και  $\beta = \left( \frac{1}{25} \right)^{\log_{\sqrt{5}} 3}$

$$(\text{Απ.: } \alpha = 16, \beta = \frac{1}{81})$$

18. Να υπολογιστεί ο αριθμός:  $\alpha = 5^{3+\frac{2}{\log 5}}$

(Απ.:  $\alpha = 12.500$ )

19. Για ποιες τιμές του  $x$  ορίζονται οι αριθμοί:

i.  $\ln\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)$       ii.  $\log(x^2 - x - 2)$       iii.  $\log_{x+1}\left(\frac{2x}{x^2-4}\right)$

(Απ.: i.  $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ , ii.  $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ , iii.  $x \in (-1, 0) \cup (2, +\infty)$ )

20. Για ποιες τιμές του  $x$  έχουν νόημα οι παραστάσεις:

i.  $\log[x(x^2 - 2)]$       ii.  $\ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}\right)$

(Απ.: i.  $x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ , ii.  $x \in (-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$ )

21. Για ποιες τιμές του  $x$  έχουν νόημα οι παραστάσεις:

i.  $A = \ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x}$       ii.  $B = \ln(x^2 - 3x + 2) - \ln(x^2 - x)$

Για ποιες τιμές του  $x$  είναι  $A = B$ ;

(Απ.: i.  $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ , ii.  $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ )

22. Για ποιες τιμές του  $a$  έχει νόημα η παράσταση:  $A = \log_{2a^2-3a+1} x$

(Απ.:  $a \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ )

23. Σε μια γεωμετρική πρόοδο ο πρώτος της όρος είναι:  $a_1 = \log 2$  και ο δεύτερος είναι

$a_2 = \log 8$ . Ναδειχθεί ότι το άθροισμα των  $n$  πρώτων της όρων δίνεται από τον τύπο:

$$S_n = \frac{3^n - 1}{2} \cdot \log 2$$

(Υπ.:  $\lambda = \frac{\log 8}{\log 2} = 3$ )

24. Αν  $\beta = \frac{1}{2}(10^x - 10^{-x})$  ναδειχθεί ότι:  $x = \log(\beta + \sqrt{\beta^2 + 1})$

(Υπ.: Να θέσετε  $10^x = y$  και μετά να βρείτε το  $y$  και να λογαριθμίσετε)

25. Δίνεται η  $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$ . Να υπολογιστούν οι τιμές:  $f(-\ln 2)$  και  $f(\ln 2)$

$$(A\pi.: f(-\ln 2) = -\frac{5}{3}, f(\ln 2) = \frac{5}{3})$$

26. Αν  $\alpha, \beta > 0$  και  $12(\alpha^3 - \beta^3) = \alpha\beta(36\alpha - 36\beta + 1)$  ναδειχθεί ότι:

$$\log(\alpha - \beta) + \log \sqrt[3]{12} = \frac{1}{3}(\log \alpha + \log \beta)$$

$$(Y\pi.: \text{Να δείξετε ότι } 12(\alpha - \beta)^3 = \alpha \cdot \beta)$$

27. Ναδειχθεί ότι:  $\log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\gamma} \delta = \log_{\gamma} \beta \cdot \log_{\alpha} \delta$ ,  $\beta, \delta > 0$  και  $1 \neq \alpha, \gamma > 0$

(Yπ.: Εφαρμόστε τον τύπο αλλαγής βάσης)

28. Ναδειχθεί ότι:  $3\log(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - 4\log(5 + 2\sqrt{6}) = 5\log(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

$$(Y\pi.: \text{Είναι } 5 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2)$$

29. Αν  $y = 10^{\frac{1}{1-\log x}}$  και  $z = 10^{\frac{1}{1-\log y}}$  ναδειχθεί ότι:  $x = 10^{\frac{1}{1-\log z}}$  όπου  $10 \neq x, y, z > 0$ .

$$(Y\pi.: \text{Είναι } \frac{1}{1-\log x} = \log y, \frac{1}{1-\log y} = \log z)$$

30. Ναδειχθεί ότι:  $\log_{\alpha_1} \alpha_2 \cdot \log_{\alpha_2} \alpha_3 \cdots \log_{\alpha_n} \alpha_1 = 1$

(Yπ.: Εφαρμόστε τον τύπο αλλαγής βάσης)

31. Αν  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$  και  $x = \log_{\alpha} \beta$ ,  $y = 2\log_{\beta} \gamma$ ,  $z = 3\log_{\gamma} \alpha$ .

$$\text{Ναδειχθεί ότι: } \alpha^{x-3}\beta^{y-1}\gamma^{z-2} = 1$$

$$(Y\pi.: \text{Είναι } \alpha^x = \beta, \beta^y = \gamma^2, \gamma^z = \alpha^3)$$

32. Να υπολογιστεί η παράσταση:  $A = \ln \left( \ln \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \right)$

$$(A\pi.: A = \ln 7 - \ln 8 + \ln(\ln 2))$$

33. Αν  $\log 2 = \alpha$  και  $\log 3 = \beta$  να υπολογιστούν συναρτήσει των  $\alpha, \beta$  ο λογάριθμος:  $\log_{36} \sqrt{48}$

$$(A\pi.: \frac{\beta + 8\alpha}{2(\alpha + \beta)})$$

34. Να υπολογιστεί η παράσταση :  $A = \log_{\epsilon} 1^0 + \log_{\epsilon} 2^0 + \dots + \log_{\epsilon} 89^0$

(Απ.:  $A = 0$ )

35. Αν  $\log_{\beta} \alpha = \log_{\alpha} \beta$ ,  $0 < \alpha, \beta \neq 1$ ,  $\alpha \neq \beta$  ναδειχθεί ότι :  $\alpha \cdot \beta = 1$

(Υπ.: Εφαρμόστε τον τύπο αλλαγής βάσης)

36. Αν  $0 < x, \alpha, \beta, \gamma \neq 1$  ναδειχθεί ότι:

$$\left( \frac{1}{\log_{\alpha} x} \right)^3 + \left( \frac{1}{\log_{\beta} x} \right)^3 + \left( \frac{1}{\log_{\gamma} x} \right)^3 = \frac{3}{\log_{\alpha} x \cdot \log_{\beta} x \cdot \log_{\gamma} x} \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1 \quad \text{ή} \quad \alpha = \beta = \gamma$$

37. Ναδειχθεί ότι :  $\log_{\alpha^k} \beta = \frac{1}{k} \log_{\alpha} \beta$ ,  $k \neq 0$ ,  $0 < \alpha \neq 1$ ,  $\beta > 0$ . Στη συνέχεια να υπολογιστεί η παράσταση  $(y^{\alpha})^{-\beta \log_{\gamma} \mu^{\rho}}$ ,  $\mu^{\rho} > 0$ ,  $0 < y^{\nu} \neq 1$ .

(Υπ.: Εφαρμόστε τον τύπο αλλαγής βάσης)

38. Αν  $0 < \alpha, \beta, \gamma \neq 1$  και  $x = \log_{\alpha} (\beta \gamma)$ ,  $y = \log_{\beta} (\gamma \alpha)$ ,  $z = \log_{\gamma} (\alpha \beta)$  ναδειχθεί ότι:

$$\alpha^{x-2} \cdot \beta^{y-2} \cdot \gamma^{z-2} = 1$$

(Υπ.: Είναι  $\alpha^x = \gamma$ ,  $\beta^y = \gamma \alpha$ ,  $\gamma^z = \alpha \cdot \beta$ )

39. Ναδειχθεί ότι:  $\ell n x + 2 \ell n x^2 + 3 \ell n x^3 + \dots + k \ell n x^k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \ell n x$

(Υπ.: Είναι  $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + v^v = \frac{v(v+1)(2v+1)}{6}$ )

40. Ναδειχθεί ότι:  $\alpha^{\frac{\log(\log \alpha)}{\log \alpha}} = \log \alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 1$

(Υπ.:  $\alpha^{\frac{\log(\log \alpha)}{\log \alpha}} = \alpha^{a \log(\log \alpha) \log_{\alpha} 10}$ )

## E

### “ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ”

Να βρείτε την τιμή του  $x$  που αληθεύει την  $\log_{3-x} (x^2 + 6x + 9) + \log_{3+x} (x^2 - 6x + 9) = 4$

(Απ.:  $x = 0$ )