



Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α

A.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$		
2α. $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$	2β. $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$	2γ. $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$
3. $\epsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1 - \epsilon\varphi^2\alpha}$	4. $\sigma\varphi 2\alpha = \frac{\sigma\varphi^2\alpha - 1}{2\sigma\varphi\alpha}$	5. $\eta\mu 2\alpha = \frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1 + \epsilon\varphi^2\alpha}$
6. $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1 - \epsilon\varphi^2\alpha}{1 + \epsilon\varphi^2\alpha}$	7. $\epsilon\varphi^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$	8. $\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$
9. $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$	10. $\eta\mu 3\alpha = 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha$	11. $\sigma\upsilon\nu 3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha$

B.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Με χρήση των κατάλληλων τύπων υπολογίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς πολλαπλάσιων και υποπολλαπλάσιων μιας γωνίας

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $22^\circ 30'$.

Λύση

$$\text{Είναι: } \eta\mu^2(22^\circ 30') = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu(2 \cdot 22^\circ 30')}{2} \Leftrightarrow \eta\mu^2(22^\circ 30') = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 45^\circ}{2} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu(22^\circ 30') = \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin(22^\circ 30') = \sqrt{\frac{1 + \sin 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos(22^\circ 30') = \frac{\sin(22^\circ 30')}{\sin(22^\circ 30')} = \frac{\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Για την απόδειξη τριγωνομετρικής ταυτότητας που περιέχει γωνίες οι οποίες είναι διαφορετικά πολλαπλάσια της ίδιας γωνίας, π.χ. α , 2α , συνήθως προσπαθούμε να μετασχηματίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς έτσι ώστε να έχουμε παντού την ίδια γωνία. Θυμίζουμε στη συνέχεια τους τύπους που κυρίως χρησιμεύουν για τέτοιου είδους μετατροπές.

$$2\alpha \rightarrow \alpha \begin{cases} \sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \quad = 2\cos^2\alpha - 1 \\ \quad = 1 - 2\sin^2\alpha \\ \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \end{cases} \quad 2\alpha \rightarrow \alpha \begin{cases} \sin 2\alpha = \frac{2\cos\alpha \sin\alpha}{1 + \cos^2\alpha} \\ \cos 2\alpha = \frac{1 - \sin^2\alpha}{1 + \cos^2\alpha} \end{cases}$$

$$\alpha \rightarrow 2\alpha \begin{cases} \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \\ \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \\ \tan^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \end{cases}$$

Παράδειγμα 2

Να δειχθεί ότι: $\frac{2\cos^2\alpha}{1 + \cos^4\alpha} = \frac{\cos^2 2\alpha}{2 + \cos^2 2\alpha}$

Λύση

Ακολουθώντας τις υποδείξεις της 2ης μεθόδου, ξεκινάμε από το 2ο μέλος και προσπαθούμε να φθάσουμε στο 1ο μέλος, μετατρέποντας τους τριγωνομετρικούς αριθμούς 2α σε τριγωνομετρικούς αριθμούς α .

Είναι:

$$\frac{\varepsilon\varphi^2 2\alpha}{2 + \varepsilon\varphi^2 2\alpha} = \frac{\left(\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}\right)^2}{2 + \left(\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}\right)^2} = \frac{\frac{4\varepsilon\varphi^2\alpha}{(1 - \varepsilon\varphi^2\alpha)^2}}{\frac{2(1 - \varepsilon\varphi^2\alpha)^2 + 4\varepsilon\varphi^2\alpha}{(1 - \varepsilon\varphi^2\alpha)^2}} = \frac{4\varepsilon\varphi^2\alpha}{2(1 - 2\varepsilon\varphi^2\alpha + \varepsilon\varphi^4\alpha) + 4\varepsilon\varphi^2\alpha} =$$

$$\frac{2\varepsilon\varphi^2\alpha}{1 - 2\varepsilon\varphi^2\alpha + \varepsilon\varphi^4\alpha + 2\varepsilon\varphi^2\alpha} = \frac{2\varepsilon\varphi^2\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^4\alpha}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Όταν έχουμε παράσταση της μορφής $\pm 1 \pm \sin 2\alpha$ και θέλουμε μετατροπή $2\alpha \rightarrow \alpha$ συνήθως χρησιμοποιούμε τον πιο κατάλληλο από τους τύπους:

$$\sin 2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2\alpha, \quad \sin 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$$

ώστε να φύγει το 1 από την παράσταση.

Παράδειγμα 3

Να δειχθεί ότι: $\frac{1 - 2\sin 2\alpha - \sin \alpha}{5 + 2\sin 2\alpha - 7\sin \alpha} = \sigma\varphi^2 \frac{\alpha}{2}$

Λύση

Είναι: $\frac{1 - 2\sin 2\alpha - \sin \alpha}{5 + 2\sin 2\alpha - 7\sin \alpha} = \frac{1 - 2(1 - 2\eta\mu^2\alpha) - \sin \alpha}{5 + 2(1 - 2\eta\mu^2\alpha) - 7\sin \alpha} = \frac{-1 + 4\eta\mu^2\alpha - \sin \alpha}{7 - 4\eta\mu^2\alpha - 7\sin \alpha} =$

$$\frac{-1 + 16\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \left(2\sin^2 \frac{\alpha}{2} - 1\right)}{7 - 16\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 7\left(1 - 2\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2\sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(8\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2} - 1\right)}{2\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2} \left(7 - 8\sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$\sigma\varphi^2 \frac{\alpha}{2} \frac{8\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{7 - 8\left(1 - \eta\mu^2 \frac{\alpha}{2}\right)} = \sigma\varphi^2 \frac{\alpha}{2} \frac{8\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{8\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \sigma\varphi^2 \frac{\alpha}{2}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Οι τριγωνομετρικές εξισώσεις που περιέχουν τριγωνομετρικούς αριθμούς διαφόρων γωνιών επιλύονται συνήθως με τους εξής τρόπους:

- Προσπαθούμε με τύπους διπλασίου τόξου ή αποτετραγωνισμού ή τριπλασιασμού να τις μετασχηματίσουμε ώστε να έχουν τριγωνομετρικούς αριθμούς της ίδιας γωνίας.
- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος και το μετατρέπουμε σε γινόμενο παραγόντων ώστε να καταλήξουμε σε απλούστερες εξισώσεις.

Παράδειγμα 4**Να λύσετε την εξίσωση:** $\sin 2x + 3\eta\mu x = 2$ **Λύση**Είναι $\sin 2x + 3\eta\mu x = 2 \Leftrightarrow 1 - 2\eta\mu^2 x + 3\eta\mu x = 2 \Leftrightarrow -2\eta\mu^2 x + 3\eta\mu x - 1 = 0$ (1)Θέτουμε $\eta\mu x = y$ (2) οπότε η (1) γίνεται: $-2y^2 + 3y - 1 = 0$ άρα $y = \frac{1}{2}$ ή $y = 1$

Από την (2) έχουμε:

$$\bullet \eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Άρα $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

$$\bullet \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2}$$

Άρα $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.**Παράδειγμα 5****Να λύσετε την εξίσωση:** $\sin 4x + 2\eta\mu^2 x = 0$ **Λύση**Είναι $\sin 4x + 2\eta\mu^2 x = 0 \Leftrightarrow (2\sin^2 2x - 1) + (1 - \sin 2x) = 0 \Leftrightarrow$

$$2\sin^2 2x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x (2\sin 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 & (1) \\ \text{ή} \\ \sin 2x = \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

$$\bullet (1) \Leftrightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet (2) \Leftrightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Άρα $x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}$ ή $x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Γ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των τόξων 18° και 72° .

Λύση

Επειδή $54^\circ + 36^\circ = 90^\circ$ ισχύει: $\eta\mu 54^\circ = \sigma\upsilon\nu 36^\circ \Leftrightarrow \eta\mu(3 \cdot 18^\circ) = \sigma\upsilon\nu(2 \cdot 18^\circ) \Leftrightarrow$
 $3\eta\mu 18^\circ - 4\eta\mu^3 18^\circ = 1 - 2\eta\mu^2 18^\circ \Leftrightarrow 4\eta\mu^3 18^\circ - 2\eta\mu^2 18^\circ - 3\eta\mu 18^\circ + 1 = 0$ και αν θέσουμε
 $\eta\mu 18^\circ = x$ έχουμε $4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$ (1).

Άρα το $\eta\mu 18^\circ$ είναι μία ρίζα της εξισώσεως (1) οι ρίζες της (1) είναι $1, \frac{-1-\sqrt{5}}{4}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Επειδή $0 < \eta\mu 18^\circ \neq 1$ έπεται ότι: $\eta\mu 18^\circ = \sigma\upsilon\nu 72^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Είναι: $\eta\mu 72^\circ = \sigma\upsilon\nu 18^\circ = \sqrt{1 - \eta\mu^2 18^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Σχόλιο

Με την βοήθεια των τριγωνομετρικών αριθμών των 18° και 72° μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 36° και 54° .

Άσκηση 2

Χωρίς να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των τόξων να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$A = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{15} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{15} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{15} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{15} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{15} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{6\pi}{15} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{15}$$

Λύση

Επειδή είναι $\sigma\upsilon\nu \alpha = \frac{\eta\mu 2\alpha}{2\eta\mu \alpha}$, η παράσταση A γράφεται:

$$A = \frac{\eta\mu \frac{2\pi}{15} \cdot \eta\mu \frac{4\pi}{15} \cdot \eta\mu \frac{6\pi}{15} \cdot \eta\mu \frac{8\pi}{15} \cdot \eta\mu \frac{10\pi}{15} \cdot \eta\mu \frac{12\pi}{15} \cdot \eta\mu \frac{14\pi}{15}}{2\eta\mu \frac{\pi}{15} \cdot 2\eta\mu \frac{2\pi}{15} \cdot 2\eta\mu \frac{3\pi}{15} \cdot 2\eta\mu \frac{4\pi}{15} \cdot 2\eta\mu \frac{5\pi}{15} \cdot 2\eta\mu \frac{6\pi}{15} \cdot 2\eta\mu \frac{7\pi}{15}} = \frac{1}{2^7}$$

διότι: $\eta\mu \frac{14\pi}{15} = \eta\mu \frac{\pi}{15}$, $\eta\mu \frac{10\pi}{15} = \eta\mu \frac{5\pi}{15}$, $\eta\mu \frac{12\pi}{15} = \eta\mu \frac{3\pi}{15}$, $\eta\mu \frac{8\pi}{15} = \eta\mu \frac{7\pi}{15}$

Δ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Ν' αποδειχθούν: **α.** $\varepsilon\varphi 3\alpha = \frac{3\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi^3\alpha}{1 - 3\varepsilon\varphi^2\alpha}$

β. $\sigma\varphi 3\alpha = \frac{3\sigma\varphi\alpha - \sigma\varphi^3\alpha}{1 - 3\sigma\varphi^2\alpha}$

2. Ν' αποδειχθεί ότι αν B, Γ και α, β, γ , είναι οι οξείες γωνίες και οι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου αντίστοιχα, τότε ισχύουν οι σχέσεις:

α. $\varepsilon\varphi 2B = \frac{2\beta\gamma}{\gamma^2 - \beta^2}$

β. $\sigma\upsilon\nu(B - \Gamma) = \frac{2\beta\gamma}{\alpha^2}$

γ. $\varepsilon\varphi \frac{B}{2} = \frac{\beta}{\alpha + \gamma}$

3. Ν' αποδειχθεί ότι αν B, Γ και α, β, γ και οι οξείες γωνίες και οι πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου, τότε ισχύουν οι σχέσεις:

α. $\sigma\upsilon\nu 2B = \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\alpha^2}$

β. $\sigma\upsilon\nu(2B - \Gamma) = \frac{\beta}{\alpha^3} \cdot (3\alpha^2 - 4\beta^2)$

γ. $\frac{\varepsilon\varphi(2\Gamma + B)}{\varepsilon\varphi(\Gamma + 2B)} = \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2 - \beta^2}$

4. Ν' αποδειχθεί ότι αν $2\sigma\upsilon\nu\theta = x + \frac{1}{x}$, τότε $2\sigma\upsilon\nu 3\theta = x^3 + \frac{1}{x^3}$.

5. Αφού πρώτα αποδείξετε τις σχέσεις: $\varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2} = \frac{\eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$ να χρησιμοποιήσετε αυτές για τον υπολογισμό της εφαπτομένης και συνεφαπτομένης των $15^\circ, 75^\circ, 22^\circ$.

6. Ν' αποδειχθεί ότι:

α. $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\sigma\varphi^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{\sigma\varphi^2 \frac{\alpha}{2} + 1}$

β. $\frac{\sigma\upsilon\nu^3\alpha + \eta\mu^3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha} = 1 - \frac{1}{2}\eta\mu\alpha 2\alpha$

γ. $\sigma\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\alpha = 2\sigma\varphi 2\alpha$

δ. $\varepsilon\varphi(45^\circ + \alpha) - \varepsilon\varphi(45^\circ - \alpha) = 2\varepsilon\varphi 2\alpha$

7. Ν' αποδειχθεί ότι:

α. $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\theta}{2}\right) \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{2\sigma\upsilon\nu\theta - 1}{2\sigma\upsilon\nu\theta + 1}$

β. $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1 + \eta\mu\alpha}{1 - \eta\mu\alpha} \quad (\sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0)$

8. Ν' αποδειχθεί ότι:

$$\alpha. \eta\mu 2\alpha = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{1 + \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}$$

$$\beta. \varepsilon\varphi 2\alpha - \varepsilon\varphi\alpha = \frac{2\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha}$$

$$\gamma. \eta\mu 2\alpha = \frac{2}{\sigma\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\alpha}$$

$$\delta. \eta\mu 3\alpha \cdot \eta\mu^3\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^3\alpha = \sigma\upsilon\nu^3 2\alpha$$

$$\varepsilon. \frac{2\varepsilon\varphi^2 x}{1 + \varepsilon\varphi^4 x} = \frac{\varepsilon\varphi^2 2x}{2 + \varepsilon\varphi^2 2x}$$

$$\sigma\tau. \frac{\varepsilon\varphi^2 2\alpha - \varepsilon\varphi^2 \alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2 2\alpha \cdot \varepsilon\varphi^2 \alpha} = \varepsilon\varphi 3\alpha \cdot \varepsilon\varphi\alpha$$

9. Να δειχθεί ότι: $\text{i. } \eta\mu^4 \frac{\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{3\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{5\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$

$$\text{ii. } \eta\mu^4 \frac{\pi}{16} + \eta\mu^4 \frac{3\pi}{16} + \eta\mu^4 \frac{5\pi}{16} + \eta\mu^4 \frac{7\pi}{16} = \frac{3}{2}$$

10. Αν $\eta\mu\alpha = \eta\mu^2\beta$ να δειχθεί ότι: $4(\sigma\upsilon\nu 2\alpha - \sigma\upsilon\nu 2\beta) = 1 - \sigma\upsilon\nu 4\beta$

11. Αν ισχύει ότι $\varepsilon\varphi^2\alpha - 3 = 4\varepsilon\varphi^2\beta$ να αποδείξετε ότι: $4\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 3 = \sigma\upsilon\nu 2\beta$

12. Να λυθούν οι εξισώσεις

$$\text{i. } \sigma\upsilon\nu 2x - 4\sigma\upsilon\nu x - 5 = 0$$

$$\text{ii. } \varepsilon\varphi 2x = 3\varepsilon\varphi x$$

$$\text{iii. } \varepsilon\varphi x \cdot \varepsilon\varphi 2x = 1$$

$$\text{iv. } \varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 3\sigma\varphi\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

13. Να αποδειχθούν:

$$\text{i. } \frac{\eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$$

$$\text{ii. } \varepsilon\varphi(\alpha + 30^\circ)^2 - \varepsilon\varphi(\alpha - 30^\circ) = \frac{1 - 2\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + 2\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$$

14. Να αποδειχθούν:

$$\text{i. } \varepsilon\varphi\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \eta\mu\alpha}{1 - \eta\mu\alpha}}$$

$$\text{ii. } (\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta)^2 + (\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta)^2 = 4\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Ε**“ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ”****Να αποδειχθεί ότι:**

$$(2\sigma\upsilon\nu\theta - 1) \cdot (2\sigma\upsilon\nu 2\theta - 1) \cdot (2\sigma\upsilon\nu 4\theta - 1) \cdot \dots \cdot (2\sigma\upsilon\nu 2^{n-1}\theta - 1) = \frac{2\sigma\upsilon\nu 2^n\theta + 1}{2\sigma\upsilon\nu^n\theta + 1}$$

$$(Υπ.: (2\sigma\upsilon\nu\theta + 1) \cdot (2\sigma\upsilon\nu 2\theta + 1) = 2\sigma\upsilon\nu 2\theta + 1)$$