

Απαραίτητες γνώσεις Θεωρίας

Θεωρία 8.

- α) Τι ονομάζεται γραμμική εξίσωση με 3 αγνώστους;
- β) Τι ονομάζεται γραμμικό σύστημα τριών γραμμικών εξισώσεων με 3 αγνώστους; (γραμμικό σύστημα 3 x 3)
- γ) Πότε ένα σύστημα 3 γραμμικών εξισώσεων με 3 αγνώστους λέγεται κλιμακωτό;
- δ) Τι ονομάζουμε λύση ενός συστήματος 3 γραμμικών εξισώσεων με 3 αγνώστους;

Απάντηση:

α) Γραμμική εξίσωση με 3 αγνώστους ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής:


$$\alpha x + \beta y + \gamma \omega = \delta$$

β) Ονομάζεται κάθε σύστημα της μορφής

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 \omega = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 \omega = \delta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 \omega = \delta_3 \end{cases}$$

γ) Λέγεται κλιμακωτό όταν είναι της μορφής:

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 \omega = \delta_1 \\ \beta_2 y + \gamma_2 \omega = \delta_2 \\ \gamma_3 \omega = \delta_3 \end{cases}$$

Κλίμακα (σκάλα) 

δ) Κάθε διατεταγμένη τριάδα (x,y,ω) που επαληθεύει και τις τρεις εξισώσεις του συστήματος λέγεται λύση του συστήματος

Ερωτήσεις κατανόησης - Λυμένα παραδείγματα.

Παράδειγμα 35
 Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} 2x + 3y - 5\omega = 10 & (1) \\ -3x + 2y - \omega = 0 & (2) \\ 4x - y + 7\omega = -4 & (3) \end{cases}$$

Λύση:

Για να λύσουμε ένα σύστημα 3×3 κάνουμε τα εξής βήματα.

Βήμα πρώτο:

Από την πρώτη και δεύτερη εξίσωση του συστήματος απαλασσόμαστε από έναν άγνωστο (όποιον θέλουμε) π.χ. τον x συνήθως με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

$$\text{Έχουμε: } \begin{cases} 2x + 3y - 5\omega = 10 \\ -3x + 2y - \omega = 0 \end{cases} \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 9y - 15\omega = 30 \\ -6x + 4y - 2\omega = 0 \end{cases}$$

$$\underline{(+)} \quad 13y - 17\omega = 30 \quad (4)$$

Βήμα δεύτερο:

Από την πρώτη και την τρίτη εξίσωση του συστήματος απαλασσόμαστε πάλι από τον ίδιο άγνωστο.

$$\text{Έχουμε: } \begin{cases} 2x + 3y - 5\omega = 10 \\ 4x - y + 7\omega = -4 \end{cases} \begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6y - 10\omega = 20 \\ -4x + y - 7\omega = 4 \end{cases}$$

$$\underline{(+)} \quad 7y - 17\omega = 24 \quad (5)$$

Βήμα τρίτο:

Λύνουμε το σύστημα των (4) και (5) (συνήθως) με τη μέθοδο των οριζουσών.

$$\text{Από (4) και (5) έχουμε } \begin{cases} 13y - 17\omega = 30 \\ 7y - 17\omega = 24 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 13 & -17 \\ 7 & -17 \end{vmatrix} = 13 \cdot (-17) - 7(-17) = -221 + 119 = -102$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 30 & -17 \\ 24 & -17 \end{vmatrix} = 30(-17) - 24(-17) = -510 + 408 = -102$$

$$D_\omega = \begin{vmatrix} 13 & 30 \\ 7 & 24 \end{vmatrix} = 13 \cdot 24 - 30 \cdot 7 = 312 - 210 = 102$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση την:
$$\begin{cases} y = \frac{D_y}{D} = \frac{-102}{-102} = 1 \\ \omega = \frac{D_\omega}{D} = \frac{102}{-102} = -1 \end{cases}$$
 και Δηλαδή $(y, \omega) = (1, -1)$

Βήμα τέταρτο:

Τα $y = 1$ και $\omega = -1$ που βρήκαμε στο τρίτο βήμα τα αντικαθιστούμε στην πρώτη εξίσωση και βρίσκουμε το x .

Δηλαδή $(1) \Leftrightarrow 2x + 3y - 5\omega = 10 \Leftrightarrow 2x + 3 \cdot 1 - 5(-1) = 10 \Leftrightarrow 2x + 3 + 5 = 10 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x, y, \omega) = (1, 1, -1)$

Παράδειγμα 36

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 & (1) \\ 2x - y + z = -3 & (2) \\ x - 3y + 2z = 0 & (3) \end{cases}$$

Λύση:

α) Από τις **(1)** και **(2)** απαλασσόμαστε από τον άγνωστο x .

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = -3 \end{cases} \begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y - 2z = 4 \\ -2x + y - z = 3 \end{cases}$$

$$(+)\quad 5y - 3z = 7 \quad (4)$$

β) Από τις **(1)** και **(3)** απαλασσόμαστε πάλι από τον άγνωστο x .

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} -1 \\ +1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2y + z = -2 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$(+)\quad -5y + 3z = -2 \quad (5)$$

γ) Λύνουμε το σύστημα των **(4)** και **(5)** $\begin{cases} 5y - 3z = 7 \\ -5y + 3z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y - 3z = 7 \\ 5y - 3z = 2 \end{cases}$ το οποίο προφανώς είναι αδύνατο. Άρα και το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο.

Παράδειγμα 37

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} -x + 2y - \omega = 0 & (1) \\ -3x + 5y - 2\omega = 0 & (2) \\ 2x - y - \omega = 0 & (3) \end{cases}$$

Λύση:

Το σύστημα είναι ομογενές άρα έχει τη μηδενική λύση $(0, 0, 0)$. Εξετάζουμε αν έχει και άλλες λύσεις εκτός της μηδενικής.

α) Από τις (1) και (2) απαλασσόμαστε από το x .

$$\begin{cases} -x + 2y - \omega = 0 \\ -3x + 5y - 2\omega = 0 \end{cases} \begin{array}{l} -3 \\ +1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6y + 3\omega = 0 \\ -3x + 5y - 2\omega = 0 \end{cases}$$

$$(+)\quad \underline{-y + \omega = 0} \quad (3)$$

β) Από τις (1) και (3) απαλασσόμαστε από το x .

$$\begin{cases} -x + 2y - \omega = 0 \\ 2x - y - \omega = 0 \end{cases} \begin{array}{l} 2 \\ +1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y - 2\omega = 0 \\ 2x - y - \omega = 0 \end{cases}$$

$$(+)\quad \underline{3y - 3\omega = 0 \Leftrightarrow y - \omega = 0 \Leftrightarrow -y + \omega = 0} \quad (4)$$

γ) Λύνουμε το σύστημα των (3) και (4) $\begin{cases} -y + \omega = 0 \\ -y + \omega = 0 \end{cases}$ το οποίο προφανώς είναι αόριστο (διότι οι δύο εξισώσεις είναι ίδιες). Λύνουμε τη μία από τις δύο εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο. Έτσι έχουμε: $-y + \omega = 0 \Leftrightarrow -y = -\omega \Leftrightarrow y = \omega$ (5)

δ) Αντικαθιστούμε στην πρώτη εξίσωση το $y = \omega$ και έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \overset{(5)}{-x + 2y - \omega = 0} \Leftrightarrow \overset{(5)}{-x + 2\omega - \omega = 0} \Leftrightarrow -x + \omega = 0 \Leftrightarrow \omega = x \quad (6)$$

Άρα το αρχικό σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων $(x, y, \omega) = (\omega, \omega, \omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Προβλήματα που λύνονται με τη βοήθεια των συστημάτων

Παράδειγμα 38

Ένας κτηνοτρόφος έχει 53 κατσίκια και κότες μαζί. Ο γιος του που είναι 7 ετών κάνει εξάσκηση στην αριθμητική μετρώντας τα πόδια τους που τα βρήκε 168. Αν υποθέσουμε ότι τα μέτρησε σωστά, πόσα κατσίκια και πόσες κότες έχει ο πατέρας του;

Λύση:

α) Κάνουμε τους συμβολισμούς:

Έστω ότι έχει x κατσίκες και y κότες. Τα x κατσίκια θα έχουν $4 \cdot x$ πόδια. Οι y κότες θα έχουν $2 \cdot y$ πόδια.

β) Δημιουργούμε τις εξισώσεις του συστήματος και το λύνουμε

$$(\text{κατσίκια και κότες μαζί}) \quad x + y = 53 \quad (1)$$

(τα πόδια για όλες τις κότες και τα κατσίκια μαζί είναι 168)

$$\text{Άρα } 4x + 2y = 168 \Leftrightarrow 2x + y = 84 \quad (2)$$

$$\text{Από (1) και (2) έχουμε το σύστημα: } \begin{cases} x + y = 53 \\ 2x + y = 84 \end{cases} \begin{array}{l} -1 \\ +1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = -53 \\ 2x + y = 84 \end{cases}$$

$$(+)\quad \underline{x = 31} \quad (3)$$

$$\text{H (1)} \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} 31 + y = 53 \Leftrightarrow y = 53 - 31 \Leftrightarrow y = 22 \quad (4)$$

Από (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι ο κτηνοτρόφος έχει 31 κατσίκια και 22 κότες.

Παράδειγμα 39

Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax^2 + \beta}{2x + 1}$. Να υπολογίσετε τα α, β αν $f(2) = 1$, και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(-3, 0)$

Λύση:

Έχουμε $f(x) = \frac{ax^2 + \beta}{2x + 1}$. Πρέπει $2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι το

$$A = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty). \text{ Έχουμε:}$$

$$\bullet f(2) = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha \cdot 2^2 + \beta}{2 \cdot 2 + 1} = 1 \Leftrightarrow \frac{4\alpha + \beta}{5} = 1 \Leftrightarrow 4\alpha + \beta = 5 \quad (1)$$

• Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(-3, 0)$. Άρα οι συντεταγμένες του A επαληθεύουν τον τύπο της f . Δηλαδή:

$$f(-3) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha(-3)^2 + \beta}{2(-3) + 1} = 0 \Leftrightarrow \frac{9\alpha + \beta}{-5} = 0 \Leftrightarrow 9\alpha + \beta = 0 \quad (2)$$

$$\text{Από (1) και (2) έχουμε το σύστημα} \quad \begin{cases} 4\alpha + \beta = 5 \\ 9\alpha + \beta = 0 \end{cases} \begin{array}{l} -1 \\ 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\alpha - \beta = -5 \\ 9\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

$$(+)\quad \overline{5\alpha = -5} \Leftrightarrow \alpha = -1 \quad (3)$$

$$\text{H (1)} \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} 4(-1) + \beta = 5 \Leftrightarrow \beta = 5 + 4 \Leftrightarrow \beta = 9 \quad (4)$$

Από (3) και (4) έχουμε $(\alpha, \beta) = (-1, 9)$ και ο τύπος της συνάρτησης γίνεται για $\alpha = -1$ και $\beta = 9$:

$$f(x) = \frac{(-1)x^2 + 9}{2x + 1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{-x^2 + 9}{2x + 1}$$

Παράδειγμα 40

Σε έναν τριψήφιο αριθμό το πρώτο και δεύτερο ψηφίο είναι ίδια. Αν εναλλάξουμε την θέση του δεύτερου και του τρίτου ψηφίου παίρνουμε έναν άλλο τριψήφιο κατά 9 μεγαλύτερο από τον πρώτο. Αν το άθροισμα των ψηφίων του είναι 25 να βρείτε τον τριψήφιο αριθμό.

Λύση:

α) Κάνουμε τους συμβολισμούς:

$$\text{Καταρχάς γνωρίζουμε ότι π.χ. } 357 = 100 \cdot 3 + 10 \cdot 5 + 7, \quad 180 = 100 \cdot 1 + 10 \cdot 8 + 0$$

Αφού ο τριψήφιος έχει το πρώτο και το δεύτερο ψηφίο ίδια θα είναι της μορφής:

$$xxy = 100x + 10x + y = 110x + y \quad (1)$$

Αν εναλλάξουμε το δεύτερο με το τρίτο ψηφίο θα γίνει της μορφής :

$$xyx = 100x + 10y + x = 101x + 10y \quad (2)$$

β) Δημιουργούμε τις εξισώσεις του συστήματος και το λύνουμε:

- Αφού ο δεύτερος τριψήφιος xyx είναι κατά 9 μεγαλύτερος από τον πρώτο xxy θα

$$\begin{aligned} \text{ισχύει: } xyx &= xxy + 9 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 101x + 10y = 110x + y + 9 \Leftrightarrow 101x + 10y - 110x - y = 9 \Leftrightarrow \\ &\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} -9x + 9y = 9 \Leftrightarrow -x + y = 1 \quad (3) \end{aligned}$$

- Αφού το άθροισμα των ψηφίων του xxy είναι 25 θα έχουμε

$$x + x + y = 25 \Leftrightarrow 2x + y = 25 \quad (4)$$

Από (3) και (4) έχουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -x + y = 1 \\ 2x + y = 25 \end{cases} & \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x - y = -1 \\ 2x + y = 25 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + y = 25 \end{cases} \\ (+) & \quad 3x = 24 \Leftrightarrow x = \frac{24}{3} \Leftrightarrow x = 8 \quad (5) \end{aligned}$$

Η (5) $\stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} -x + y = 1 \Leftrightarrow -8 + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 + 8 \Leftrightarrow y = 9$ Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι ο $xxy = 889$.

Παράδειγμα 41

Σήμερα οι ηλικίες μιας μητέρας και του γιου της έχουν άθροισμα 50. Πριν από 3 χρόνια η ηλικία της μητέρας ήταν τριπλάσια από την ηλικία του γιου της. Ποια είναι σήμερα η ηλικία της μητέρας και ποια του γιου της;

Λύση:

α) Κάνουμε τους συμβολισμούς

Έστω ότι σήμερα είναι x η ηλικία της μητέρας και y του γιου της. Πριν από τρία χρόνια η ηλικία της μητέρας ήταν $x - 3$ και του γιου της $y - 3$.

β) Δημιουργούμε τις εξισώσεις του συστήματος και το λύνουμε.

Οι ηλικίες έχουν άθροισμα 50. Άρα: $x + y = 50 \quad (1)$

Πριν από τρία χρόνια η ηλικία της μητέρας ($x - 3$) ήταν τριπλάσια από την ηλικία του γιου της:

$$(y - 3). \text{ Άρα } x - 3 = 3(y - 3) \Leftrightarrow x - 3 = 3y - 9 \Leftrightarrow x - 3y = -9 + 3 \Leftrightarrow x - 3y = -6 \quad (2)$$

Απο (1) και (2) έχουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 50 \\ x - 3y = -6 \end{cases} & \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 50 \\ -x + 3y = 6 \end{cases} \\ (+) & \quad 4y = 56 \Leftrightarrow y = \frac{56}{4} \Leftrightarrow y = 14 \end{aligned}$$

$$\text{Η (1)} \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} x + 14 = 50 \Leftrightarrow x = 50 - 14 \Leftrightarrow x = 36.$$

Άρα η μητέρα είναι 36 χρονών και ο γιος της είναι 14 χρονών.

Παράδειγμα 42

Έχουμε δύο τετράγωνα που έχουν άθροισμα περιμέτρων 44m και διαφορά εμβαδών 11m^2 . Να βρείτε τις διαστάσεις των πλευρών τους.

Λύση:**α) Κάνουμε τους συμβολισμούς:**

Έστω x η πλευρά του μεγάλου τετραγώνου και y η πλευρά του μικρού τετραγώνου. Τότε η περίμετρος του μεγάλου τετραγώνου θα είναι $4x$ και του μικρού τετραγώνου $4y$. Το εμβαδόν του μεγάλου θα είναι x^2 και του μικρού y^2 .

β) Δημιουργούμε τις εξισώσεις του συστήματος και το λύνουμε.

• Το άθροισμα των περιμέτρων είναι 44m άρα: $4x + 4y = 44 \Leftrightarrow x + y = 11$ (1)

• Τα εμβαδά διαφέρουν κατά 11m^2 . Άρα: $x^2 - y^2 = 11$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ x^2 - y^2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 11 \\ (x - y)(x + y) = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 11 \\ (x - y) \cdot 11 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 12 \\ 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \end{cases}$$

Άρα το μεγάλο τετράγωνο έχει πλευρά $x = 6\text{m}$ και το μικρό τετράγωνο έχει πλευρά $y = 5\text{m}$.

Παράδειγμα 43

Αν ένας οδηγός αυξήσει την ταχύτητά του αυτοκινήτου του κατά 8km/h θα φτάσει στον προορισμό του 1 ώρα νωρίτερα. Αν μειώσει την ταχύτητά του κατά 12km/h θα φτάσει στον προορισμό του 2 ώρες αργότερα.

1) Να υπολογίσετε την ταχύτητα (v) του οδηγού και τον χρόνο (t) που διήρκεσε το ταξίδι.

2) Να υπολογίσετε την απόσταση (S) που διάνυσε ο οδηγός. (Δίνεται ότι $S = vt$).

Λύση:**1) α) Κάνουμε τους συμβολισμούς:**

Έστω v η ταχύτητα, t ο χρόνος και S η απόσταση, τότε $S = vt$ (1)

Όταν αυξήσει την ταχύτητα κατά 8km/h αυτή θα γίνει $v + 8$, ο χρόνος όμως ελαττώνεται κατά μία ώρα και τότε γίνεται $t - 1$. Άρα: $S = (v + 8)(t - 1)$ (2)

Αν μειώσει την ταχύτητα κατά 12km/h αυτή γίνεται $v - 12$ ο χρόνος όμως αυξάνεται κατά 2 ώρες οπότε γίνεται $t + 2$. Άρα: $S = (v - 12)(t + 2)$ (3)

β) Δημιουργούμε τις εξισώσεις του συστήματος και το λύνουμε.

Αυτές έχουν ήδη δημιουργηθεί από (2) και (3).

$$\text{Έχουμε λοιπόν: } \begin{cases} S = (v + 8)(t - 1) \\ S = (v - 12)(t + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = vt - v + 8t - 8 \\ S = vt + 2v - 12t - 24 \end{cases} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} S = S - v + 8t - 8 \\ S = S + 2v - 12t - 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v - 8t = S - 8 - S \\ -2v + 12t = S - 24 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v - 8t = -8 \\ -2v + 12t = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v - 8t = -8 \\ -v + 6t = -12 \end{cases} \begin{matrix} (4) \\ (5) \end{matrix}$$

Προσθέτουμε τις (4) και (5) και έχουμε:

$$-2t = -20 \Leftrightarrow t = 10 \quad (6)$$

$$H \quad (4) \stackrel{(6)}{\Leftrightarrow} v - 8 \cdot 10 = -8 \Leftrightarrow v = -8 + 80 \Leftrightarrow v = 72$$

Άρα ο χρόνος που ταξίδεψε είναι $t = 10h$ με μέση ταχύτητα $v = 72km/h$

2) Για $t = 10h$ και $v = 72km/h$ η απόσταση που διάνυσε είναι: $S = vt = 72 \cdot 10 = 720 \text{ km/h}$.

Παράδειγμα 44

Ένας μαθητής είναι υποχρεωμένος να απαντήσει και στις 50 ερωτήσεις τύπου σωστό – λάθος. Για κάθε σωστή απάντηση θα παίρνει 2 βαθμούς και για κάθε λανθασμένη απάντηση θα χάνει 1 βαθμό. Τελικά η βαθμολογία του ήταν 40.

α) Σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά και σε πόσες λάθος;

β) Ποιά ήταν η βαθμολογία του στην εικοσαβάθμια κλίμακα;

Λύση:

α) Κάνουμε τους συμβολισμούς.

Έστω ότι ο μαθητής έδωσε x σωστές απαντήσεις και y λανθασμένες. Αφού η κάθε σωστή απάντηση παίρνει 2 βαθμούς, πήρε $2x$ βαθμούς. Όμως σε κάθε λανθασμένη απάντηση χάνει 1 βαθμό, άρα στις y λανθασμένες χάνει $1y$ βαθμούς.

Δημιουργούμε τις εξισώσεις του συστήματος (Σ) και το λύνουμε.

Οι ερωτήσεις συνολικά είναι 50. Άρα $x + y = 50 \quad (1)$

Συγκέντρωσε 40 βαθμούς άρα $2x - 1y = 40 \quad (2)$

Από (1) και (2) έχουμε το σύστημα :

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x - y = 40 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις και έχουμε: $3x = 90 \Leftrightarrow x = \frac{90}{3} \Leftrightarrow x = 30 \quad (3)$

$(1) \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} 30 + y = 50 \Leftrightarrow y = 20$. Άρα έδωσε 30 σωστές και 20 λανθασμένες απαντήσεις.

β) Αν απαντούσε και στις 50 ερωτήσεις σωστά θα έπαιρνε $2 \cdot 50 = 100$ βαθμούς. Πήρε όμως

μόνο 40. Δηλαδή $\frac{40}{100} \cdot 20 = 0,4 \cdot 20 = 8$ (οκτώ).

Συστήματα που λύνονται με τεχνάσματα

Είναι μερικά συστήματα τα οποία, εκτός από τους παραδοσιακούς τρόπους λύσης (αντικατάσταση, αντίθετος συντελεστής, ορίζουσες κ.τ.λ.), μπορούν να λυθούν ευκολότερα και γρηγορότερα αν εφαρμόσουμε κάποιο τεχνάσμα. Επειδή τα συστήματα που δέχονται κάποιο τεχνάσμα είναι ανεξάντλητα, δεν υπάρχει ενιαία μεθοδολογία για τη λύση τους. Τι τεχνάσμα λοιπόν και σε ποιο σύστημα θα το εφαρμόσουμε, είναι θέμα ευχέρειας, δεξιοτεχνίας και μαθηματικής ικανότητας του καθενός μελετητή. Εμείς εδώ θα δείξουμε μερικά παραδείγματα στα οποία μπορεί να εφαρμοστεί κάποιο τεχνάσμα.

Παράδειγμα 45

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = 2 & (1) \\ y + z + \omega = 5 & (2) \\ z + \omega + x = -3 & (3) \\ \omega + x + y = 8 & (4) \end{cases}$$

Λύση:

Προσθέτουμε τις 4 εξισώσεις κατά μέλη και έχουμε:

$$(x+y+z) + (y+z+\omega) + (z+\omega+x) + (\omega+x+y) = 2+5+(-3)+8$$

$$\Leftrightarrow 3x + 3y + 3z + 3\omega = 12 \Leftrightarrow 3(x+y+z+\omega) = 12 \Leftrightarrow$$

$$x+y+z+\omega=4 \quad (5)$$

Από την (5) αφαιρούμε κατά σειρά τις (1), (2), (3), (4) κατά μέλη και έχουμε:

$$(5)-(1) \Leftrightarrow (x+y+z+\omega) - (x+y+z) = 4-2 \Leftrightarrow \omega = 2$$

$$(5)-(2) \Leftrightarrow (x+y+z+\omega) - (y+z+\omega) = 4-5 \Leftrightarrow x = -1$$

$$(5)-(3) \Leftrightarrow (x+y+z+\omega) - (z+\omega+x) = 4-(-3) \Leftrightarrow y = 7$$

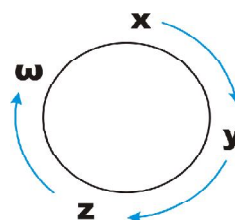
$$(5)-(4) \Leftrightarrow (x+y+z+\omega) - (\omega+x+y) = 4-8 \Leftrightarrow z = -4$$

Άρα τελικά το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$(x,y,z,\omega) = (-1,7,-4,2)$$

Σχόλιο:

Παρατηρούμε ότι το σύστημα έχει 4 εξισώσεις με 4 αγνώστους, x,y,z,ω . Δηλαδή είναι τύπου 4×4 . Παρατηρούμε επίσης ότι οι αγνώστοι ακολουθούν όπως λέμε κυκλική τροχιά. Αν πάμε να το λύσουμε όπως λύνουμε ένα 3×3 σύστημα, τελικά θα έχουμε να λύσουμε 3 συστήματα 3×3 για τα οποία χρειάζεται πάρα πολύς χρόνος..



Παράδειγμα 46

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{\omega-1}{3} & (1) \\ -3x + 2y - 5\omega = 7 & (2) \end{cases}$$

Λύση:

Όταν έχουμε αναλογία $\frac{x}{a} = \frac{y}{\beta} = \frac{\omega}{\gamma}$ θέτουμε τους ίσους λόγους λ.

Δηλαδή $\frac{x}{a} = \frac{y}{\beta} = \frac{\omega}{\gamma} = \lambda$. Έτσι λοιπόν στην αναλογία της πρώτης εξίσωσης έχουμε:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{\omega-1}{3} = \lambda \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{2} = \lambda \\ \frac{y+3}{4} = \lambda \\ \frac{\omega-1}{3} = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 2\lambda \\ y+3 = 4\lambda \\ \omega-1 = 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\lambda - 1 \\ y = 4\lambda - 3 \\ \omega = 3\lambda + 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Η (2)} \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} -3(2\lambda - 1) + 2(4\lambda - 3) - 5(3\lambda + 1) = 7 \Leftrightarrow -6\lambda + 3 + 8\lambda - 6 - 15\lambda - 5 = 7 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -6\lambda + 8\lambda - 15\lambda = 7 - 3 + 6 + 5 \Leftrightarrow -13\lambda = 15 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{15}{13} \quad (4)$$

$$(3) \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 2(-\frac{15}{13}) - 1 = -\frac{30}{13} - 1 = -\frac{30}{13} - \frac{13}{13} = -\frac{43}{13} \\ y = 4(-\frac{15}{13}) - 3 = -\frac{60}{13} - 3 = -\frac{60}{13} - \frac{39}{13} = -\frac{99}{13} \\ \omega = 3(-\frac{15}{13}) + 1 = -\frac{45}{13} + 1 = -\frac{45}{13} + \frac{13}{13} = -\frac{32}{13} \end{cases}$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση: $(x, y, \omega) = (-\frac{43}{13}, -\frac{99}{13}, -\frac{32}{13})$

Παράδειγμα 47

$$\text{Να λυθούν τα συστήματα α) } (\Sigma_1): \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{\omega} = 3 \\ \frac{1}{\omega} + \frac{1}{x} = 15 \end{cases}, \quad \beta) (\Sigma_2): \begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{1}{2} \\ \frac{y\omega}{y+\omega} = \frac{1}{3} \\ \frac{x\omega}{x+\omega} = \frac{1}{15} \end{cases}$$

Λύση:

α) Λόγω των παρονομαστών έχουμε τους περιορισμούς $x \neq 0, y \neq 0, \omega \neq 0$ Θέτουμε:

$$\frac{1}{x} = \alpha, \quad \frac{1}{y} = \beta, \quad \frac{1}{\omega} = \gamma \quad (1) \quad \text{Το σύστημα γίνεται με τη βοήθεια της (1):} \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \beta + \gamma = 3 \\ \gamma + \alpha = 15 \end{cases} \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις της (2) και έχουμε:

$$(\alpha + \beta) + (\beta + \gamma) + (\gamma + \alpha) = 2 + 3 + 15 \Leftrightarrow 2(\alpha + \beta + \gamma) = 20 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 10 \quad (3)$$

Αφαιρούμε κατά μέλη από την (3) κάθε μία από τις εξισώσεις της (2) και έχουμε:

$$\begin{aligned}
 (5) - (2) &\Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma) - (\alpha + \beta) = 10 - 2 \Leftrightarrow \boxed{\gamma = 3} \\
 (5) - (2) &\Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma) - (\beta + \gamma) = 10 - 3 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2} \quad (4) \\
 (5) - (2) &\Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma) - (\gamma + \alpha) = 10 - 15 \Leftrightarrow \boxed{\beta = -5}
 \end{aligned}$$

Η (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{x} = 3, \frac{1}{y} = 2, \frac{1}{\omega} = -5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{2}, \omega = -\frac{1}{5}$ (δεκτά από τους περιορισμούς)

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y, \omega) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{5}\right)$

β) Λύση του (Σ_2) :

Καταρχάς έχουμε τους περιορισμούς: $\begin{cases} x + y \neq 0 \\ y + \omega \neq 0 \\ x + \omega \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -y \\ y \neq -\omega \\ \omega \neq -x \end{cases} \quad (1)$

Αντιστρέφουμε τα κλάσματα και έχουμε:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{x+y}{xy} &= \frac{2}{1} \\ \frac{y+\omega}{y\omega} &= \frac{3}{1} \\ \frac{x+\omega}{x\omega} &= \frac{15}{1} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{xy} + \frac{y}{xy} &= 2 \\ \frac{y}{y\omega} + \frac{\omega}{y\omega} &= 3 \\ \frac{x}{x\omega} + \frac{\omega}{x\omega} &= 15 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{y} + \frac{1}{x} &= 2 \\ \frac{1}{\omega} + \frac{1}{y} &= 3 \\ \frac{1}{\omega} + \frac{1}{x} &= 15 \end{aligned} \right\} \quad \text{με } x \cdot y \cdot \omega \neq 0$$

Το οποίο είναι το σύστημα που λύσαμε στο α) ερώτημα.

Άρα έχει μοναδική λύση $(x, y, \omega) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{5}\right)$ (δεκτή από τους περιορισμούς της (1))

Παράδειγμα 48

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} xy = 2 & (1) \\ y\omega = 1 & (2) \\ \omega x = 8 & (3) \end{cases}$

Λύση:

Πολλαπλασιάζουμε τις (1), (2), (3) κατά μέλη και έχουμε:

$$(xy) \cdot (y\omega) \cdot (\omega x) = 2 \cdot 1 \cdot 8 \Leftrightarrow x^2 y^2 \omega^2 = 16 \Leftrightarrow (xy\omega)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} xy\omega = 4 \\ \text{ή} \\ xy\omega = -4 \end{cases}$$

Έχουμε τις 2 περιπτώσεις:

1^η περίπτωση: αν $xy\omega = 4$ (4)

$$\frac{(4)}{(1)} \Leftrightarrow \frac{xy\omega}{xy} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow \omega = 2$$

$$\frac{(4)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{xy\omega}{y\omega} = \frac{4}{1} \Leftrightarrow x = 4$$

$$\frac{(4)}{(3)} \Leftrightarrow \frac{xy\omega}{\omega x} = \frac{4}{8} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα: } (x, y, \omega) = \left(4, \frac{1}{2}, 2\right)$$

2^η περίπτωση: αν $xy\omega = -4$ (5)

$$\frac{(5)}{(1)} \Leftrightarrow \frac{xy\omega}{xy} = \frac{-4}{2} \Leftrightarrow \omega = -2$$

$$\frac{(5)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{xy\omega}{y\omega} = \frac{-4}{1} \Leftrightarrow x = -4$$

$$\frac{(5)}{(3)} \Leftrightarrow \frac{xy\omega}{\omega x} = \frac{-4}{8} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα: } (x, y, \omega) = \left(-4, -\frac{1}{2}, -2\right)$$

Ασκήσεις για λύση

42. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 3x + 4y - 2\omega = 0 \\ 6x - y - \omega = 0 \\ x - 2y + 3\omega = 23 \end{cases}$$

43. Να λυθεί το σύστημα :
$$\begin{cases} 2x - 7y + 7\omega = 4 \\ x + 3y - 2\omega = 5 \\ 4x - y + 3\omega = 7 \end{cases}$$

44. Να λυθεί το σύστημα :
$$\begin{cases} x + y - \omega = 2 \\ x - 3y - 5\omega = 2 \\ 3x - y - 7\omega = 6 \end{cases}$$

45. Να λυθεί το ομογενές σύστημα :
$$\begin{cases} 2\alpha - 3\beta - \gamma = 0 \\ 6\alpha - 13\beta - 6\gamma = 0 \\ 4\alpha - 2\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

46. Αν η παραβολή $y = ax^2 + bx + c$ διέρχεται από τα σημεία (1,1), (2,0), (4,-3), να βρείτε την εξίσωσή της.

Συστήματα που λύνονται με τεχνάσματα

53. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} y\omega + x\omega + xy = 12xy\omega \\ 3y\omega - 4x\omega + 5xy = 18xy\omega \\ 5y\omega - 3x\omega + 2xy = 13xy\omega \end{cases}$$

54. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y + \omega = 8 \\ \omega + \varphi = 9 \\ \varphi + \tau = 11 \\ \tau + x = 9 \end{cases}$$

55. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{12}{5} \\ \frac{y\omega}{y+\omega} = \frac{18}{5} \\ \frac{\omega x}{\omega+x} = \frac{36}{13} \end{cases}$$

56. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{3}{x+y+1} - \frac{2}{2x-3y+5} = \frac{7}{20} \\ \frac{4}{x+y+1} + \frac{1}{2x-3y+5} = \frac{37}{40} \end{cases}$$

57. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{\omega-1}{5} \\ 5x + 3y - 2\omega = 51 \end{cases}$$

58. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ \beta + \gamma + \delta = 3 \\ \gamma + \delta + \alpha = 4 \\ \delta + \alpha + \beta = 9 \end{cases}$$

59. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} xy\omega = 2 \\ y\omega z = 1 \\ \omega z x = 8 \\ zxy = 4 \end{cases}$$

