

## Τριγωνομετρικές συναρτήσεις Τριγωνομετρικές εξισώσεις

1.

### ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

#### Περιοδική συνάρτηση

Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει  $T \in \mathbb{R}_+^*$  τέτοιος ώστε για κάθε  $x \in A$  να ισχύουν: **i.**  $x + T \in A$ ,  $x - T \in A$ , **ii.**  $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$   
Ο αριθμός  $T$  λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης  $f$ .

#### Η συνάρτηση ημίτονο

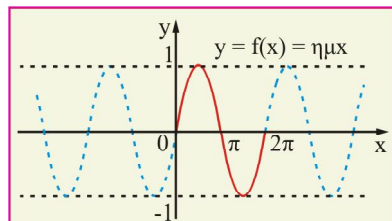
Η συνάρτηση με την οποία κάθε πραγματικός αριθμός  $x$  αντιστοιχίζεται στο  $\eta\mu(x \text{ rad})$  λέγεται **συνάρτηση ημίτονο** και τη συμβολίζουμε με:

$$\eta\mu x = \eta\mu(x \text{ rad})$$

Η συνάρτηση ημίτονο είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$  διότι:

$$\eta\mu(2\pi + x) = \eta\mu x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αυτό σημαίνει ότι η γραφική της παράσταση επαναλαμβάνεται σε κάθε διάστημα πλάτους  $2\pi$ . Η μονotonία της συνάρτησης αυτής στο διάστημα  $[0, 2\pi]$  φαίνεται στον διπλανό πίνακα.



x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
ημx	0	1	0	-1	0
		↙ μέγιστο		↘ ελάχιστο	

#### Η συνάρτηση συνημίτονο

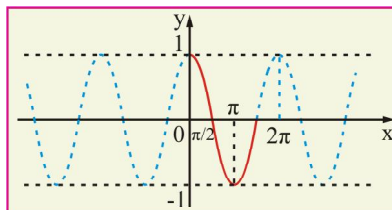
Η συνάρτηση με την οποία κάθε πραγματικός αριθμός  $x$  αντιστοιχίζεται στο  $\sigma\upsilon\nu(x \text{ rad})$  λέγεται **συνάρτηση συνημίτονο** και τη συμβολίζουμε με:

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(x \text{ rad})$$

Η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ , διότι:

$$\sigma\upsilon\nu(2\pi + x) = \sigma\upsilon\nu x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αυτό σημαίνει ότι η γραφική της παράσταση επαναλαμβάνεται σε κάθε διάστημα πλάτους  $2\pi$ . Η μονotonία της συνάρτησης αυτής στο διάστημα  $[0, 2\pi]$  φαίνεται στον διπλανό πίνακα.



x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
συνx	1	0	-1	0	1
		↘ μέγιστο	↙ ελάχιστο	↘ μέγιστο	

**Η συνάρτηση εφαπτομένη**

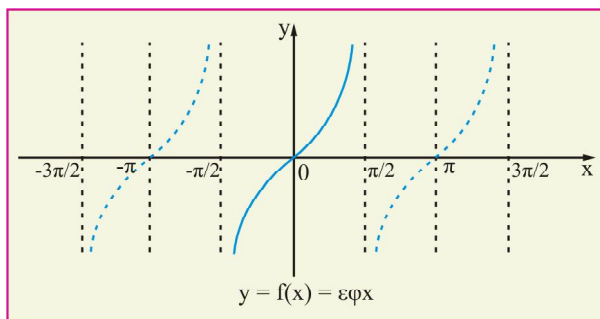
Η συνάρτηση εφαπτομένη ορίζεται ως το πηλίκο του ημιτόνου προς το συνημίτονο.

Είναι:  $f(x) = \epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$  με πεδίο ορισμού το  $A = \{x \in \mathbb{R} : \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$

Η συνάρτηση  $\epsilon\phi x$  είναι περιοδική με περίοδο  $\pi$  διότι:  $\epsilon\phi(\pi + x) = \epsilon\phi x$ , για κάθε  $x \in A$ . Άρα η γραφική της παράσταση επαναλαμβάνεται η ίδια σε κάθε διάστημα πλάτους  $\pi$ .

Όταν το  $x$  πλησιάζει (“τείνει”) στο  $\frac{\pi}{2}$  με  $x < \frac{\pi}{2}$  η  $\epsilon\phi x$  τείνει στο  $+\infty$  γι’ αυτό λέμε ότι η

ευθεία  $x = \frac{\pi}{2}$  είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της  $f$  με  $f(x) = \epsilon\phi x$ .

**Οι συναρτήσεις  $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x)$ , όπου  $\rho, \omega > 0$  και  $g(x) = \rho \sigma\upsilon\nu(\omega x)$ , όπου  $\rho, \omega > 0$** 

Επειδή  $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$  έχουμε  $-1 \leq \eta\mu x(\omega x) \leq 1$  και επειδή  $\rho > 0$  είναι:

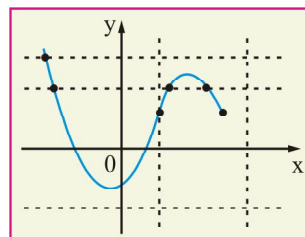
$$-\rho \leq \rho \eta\mu(\omega x) \leq \rho \Leftrightarrow -\rho \leq f(x) \leq \rho$$

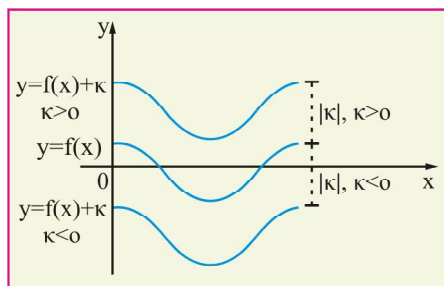
Άρα η μέγιστη τιμή της  $f$  είναι το  $\rho$  και η ελάχιστη τιμή της είναι το  $-\rho$ .

Το  $\omega$  καθορίζει την **περίοδο T** της  $f$  που είναι:  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

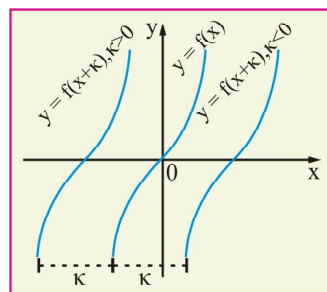
**Παρατηρήσεις**

1. Από τον ορισμό της συνάρτησης προκύπτει ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης τέμνεται το πολύ σε ένα σημείο από κάθε κατακόρυφη ευθεία και σε κανένα, ένα ή περισσότερα (μπορεί και άπειρα) από κάθε οριζόντια ευθεία.
2. Αν γνωρίζουμε τη γραφική παράσταση της  $y = f(x)$  μπορούμε να σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους:  $y = f(x) + k$ ,  $y = f(x + k)$  όπου  $k$  είναι πραγματικός αριθμός.

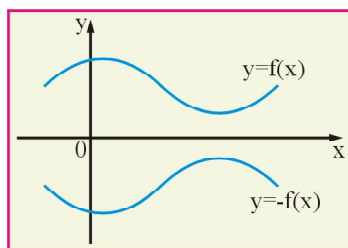




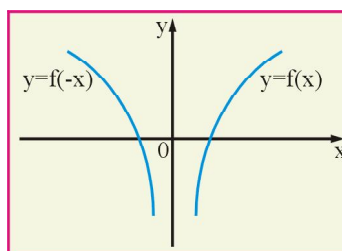
Προκύπτει από την καμπύλη  $y = f(x)$  με μετατόπιση κατά  $k$  προς τα πάνω αν  $k > 0$  ή κατά  $k$  προς τα κάτω αν  $k < 0$ .



Προκύπτει από την καμπύλη  $y = f(x)$  με μετατόπιση κατά  $k$  δεξιά αν  $k < 0$  ή κατά  $k$  προς τα αριστερά αν  $k > 0$ .



Αν γνωρίζουμε την καμπύλη με εξίσωση  $y = f(x)$  μπορούμε να σχεδιάσουμε την καμπύλη  $y = -f(x)$  ως συμμετρική της πρώτης ως προς τον  $x$ .



Η  $y = -f(x)$  έχει γραφική παράσταση συμμετρική της γραφικής παράστασης της  $y = f(x)$  ως προς τον άξονα  $x$  και η  $y = f(-x)$  έχει γραφική παράσταση συμμετρική της γραφικής παράστασης της  $y = f(x)$  ως προς τον άξονα  $y$ .

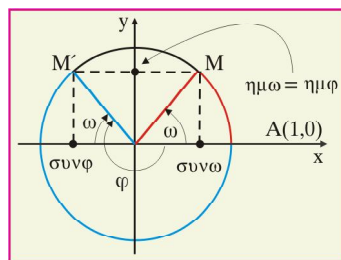
### Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

#### Ισότητα ημιτόνων

Δύο τόξα (ή γωνίες)  $\omega$  και  $\varphi$  έχουν ίσα ημίτονα όταν τα σημεία  $M$  και  $M'$  είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα  $y'y$  ή όταν τα  $M$  και  $M'$  ταυτίζονται.

Άρα,  $\omega = \varphi + 2\kappa\pi \Leftrightarrow \omega - \varphi = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

$$\omega = \pi - \varphi + 2\kappa\pi \Leftrightarrow \omega + \varphi = (2\kappa + 1)\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$$

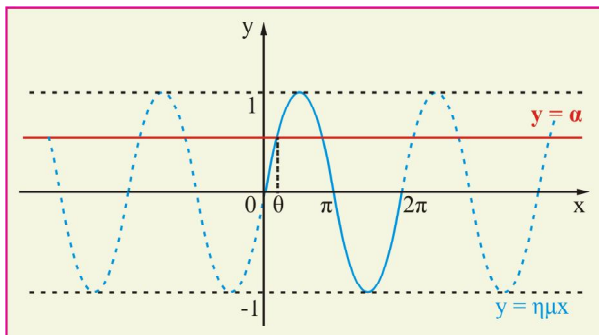


Από τα παραπάνω, έχουμε ότι αν  $\theta$  είναι μια λύση της εξίσωσης:  $\eta\mu x = a$  (1)

δηλαδή  $\eta\mu\theta = a$ , τότε όλες οι λύσεις της (1) είναι:

$$x = 2\kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z} \quad \text{ή} \quad x = (2\kappa + 1)\pi - \theta, \kappa \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

Η εξίσωση  $\eta\mu x = \alpha$ , όπου  $-1 \leq \alpha \leq 1$  έχει άπειρες λύσεις όσες είναι και οι τετμημένες των σημείων τομής της ευθείας  $y = \alpha$  με την καμπύλη της συνάρτησης  $y = \eta\mu x$ .



Οι λύσεις δίνονται από τον τύπο:

$$\eta\mu x = \alpha = \eta\mu \theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \theta \end{cases}, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

όπου  $\theta$  είναι μια λύση της εξίσωσης  $\eta\mu x = \alpha$ .

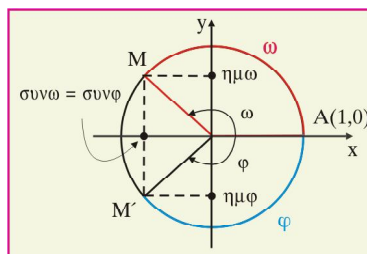
### Ισότητα συνημιτόνων

Δύο γωνίες (ή τόξα)  $\omega$  και  $\varphi$  έχουν ίσα συνημίτονα όταν τα σημεία  $M$  και  $M'$  είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα  $x$  ή όταν τα σημεία  $M$  και  $M'$  ταυτίζονται.

Άρα,  $\omega = \varphi + 2\kappa\pi \Leftrightarrow \omega - \varphi = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$  ή

$$\omega = -\varphi + 2\kappa\pi \Leftrightarrow \omega + \varphi = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$$

(Όταν δηλαδή έχουν διαφορά ή άθροισμα ακέραιο πολλαπλάσιο “πλήρους” κύκλου ( $\kappa \cdot 2\pi$ ))

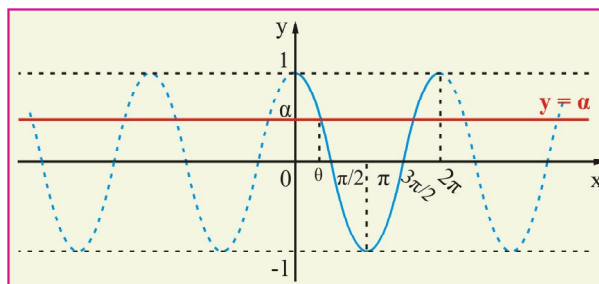


Από τα παραπάνω προκύπτει ότι, αν  $\theta$  είναι μία λύση της εξίσωσης  $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$  (4)

τότε όλες οι λύσεις της (1) δίνονται από τους τύπους:

$$x = 2\kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi - \theta, \kappa \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

Η εξίσωση  $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$ , όπου  $-1 \leq \alpha \leq 1$  έχει άπειρες λύσεις όσες είναι και οι τετμημένες των σημείων τομής της ευθείας  $y = \alpha$  με την καμπύλη της συνάρτησης  $y = \sigma\upsilon\nu x$ .



Οι λύσεις δίνονται από τον τύπο:

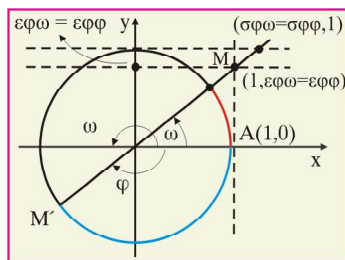
$$\sin x = \alpha = \sin \theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ x = 2\kappa\pi - \theta \end{cases}, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

όπου  $\theta$  είναι μια λύση της εξίσωσης  $\sin x = \alpha$ .

### Ισότητα εφαπτομένων - συνεφαπτομένων

Δύο τόξα (ή γωνίες)  $\omega$  και  $\varphi$  έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη όταν τα σημεία  $M$  και  $M'$  είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων  $O$ .

Κάθε γωνία που έχει τελική πλευρά την  $OM$  έχει την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη με γωνία που έχει τελική πλευρά την  $OM'$  (ή τα τόξα (με αρχή το  $A(1,0)$ ) που έχουν πέρασ τα σημεία  $M$  και  $M'$  έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη).



Άρα τα  $\varphi$  και  $\omega$  έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη όταν:

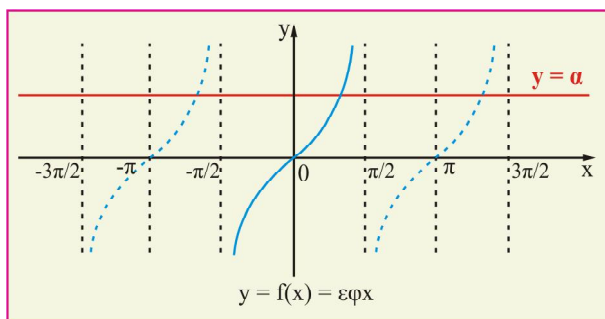
$$\left. \begin{aligned} \omega = \varphi + 2\kappa\pi &\Leftrightarrow \omega - \varphi = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \omega = \varphi + 2\kappa\pi + \pi &\Leftrightarrow \omega - \varphi = (2\kappa + 1)\pi, \kappa \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \omega - \varphi = \lambda \cdot \pi, \lambda \in \mathbb{Z}$$

Οπότε οι λύσεις της εξίσωσης:  $\epsilon\phi x = \alpha \quad (7)$

δίνονται από τον τύπο:  $x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z} \quad (8)$

όπου  $\theta$  μια λύση της (7) δηλαδή  $\epsilon\phi \theta = \alpha$

Η εξίσωση  $\epsilon\phi x = \alpha$ , όπου  $-1 \leq \alpha \leq 1$  έχει άπειρες λύσεις όσες είναι και οι τετμημένες των σημείων τομής της ευθείας  $y = \alpha$  με την καμπύλη της συνάρτησης  $y = \epsilon\phi x$ .



Οι λύσεις δίνονται από τον τύπο:

$$\epsilon\phi x = \alpha = \epsilon\phi \theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{Z} \quad (9)$$

όπου  $\theta$  είναι μια λύση της εξίσωσης  $\epsilon\phi x = \alpha$ .

- **Τριγωνομετρική εξίσωση** με έναν άγνωστο λέγεται κάθε εξίσωση που ο άγνωστος ή η παράσταση του αγνώστου περιέχεται σε ένα τουλάχιστον τριγωνομετρικό αριθμό.

#### Παραδείγματα

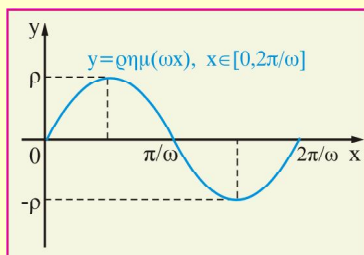
1. Οι εξισώσεις  $2\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ ,  $\epsilon\phi^3 x - 7\epsilon\phi x + 6 = 0$ , είναι τριγωνομετρικές.
  2. Η εξίσωση  $x + \eta\mu\frac{\pi}{2} = 2$  δεν είναι τριγωνομετρική εξίσωση γιατί δεν περιέχει τον άγνωστο  $x$  σε τριγωνομετρικό αριθμό.
- **Λύση** μιας τριγωνομετρικής εξίσωσης είναι το σύνολο των γωνιών (ή τόξων) που την επαληθεύουν.
  - Η διαδικασία εύρεσης της λύσης λέγεται **επίλυση** της τριγωνομετρικής εξίσωσης.

## B.

## ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

### Κατηγορία – Μέθοδος 1

Η συνάρτηση  $f(x) = \rho\eta\mu(\omega x)$  με  $\rho, \omega > 0$  είναι περιοδική με περίοδο  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  και έχει μέγιστο το  $\rho$  και ελάχιστο το  $-\rho$ .



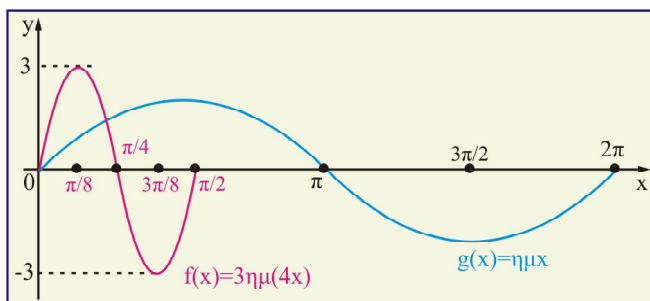
### Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f(x) = 3\eta\mu(4x)$  και να κάνετε την γραφική της παράσταση.

#### Λύση

η συνάρτηση  $f(x) = 3\eta\mu(4x)$  έχει μέγιστη τιμή το 3, ελάχιστη το  $-3$  και περίοδο  $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ .

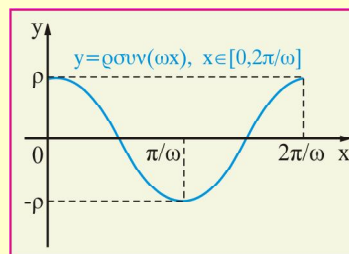
Επομένως, για να παρουσιάσουμε τη γραφική της  $f$  σχεδιάζουμε μια ημιτονοειδή καμπύλη με ελάχιστη τιμή το  $-3$  και μέγιστη το  $3$  σε διάστημα πλάτους  $\frac{\pi}{2}$ .



Στο ίδιο σχήμα σχεδιάσαμε και την  $\eta\mu x$ . Τα ίδια ισχύουν για τη συνάρτηση  $g(x) = \rho\sigma\upsilon\eta(\omega x)$ .

**Κατηγορία – Μέθοδος 2**

Η συνάρτηση  $f(x) = \rho \sin(\omega x)$  με  $\rho, \omega > 0$  είναι περιοδική με περίοδο  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  και έχει μέγιστο το  $\rho$  και ελάχιστο το  $-\rho$ .

**Παράδειγμα 2**

Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f(x) = 3 \sin 2x$  σε πλάτος μιας περιόδου.

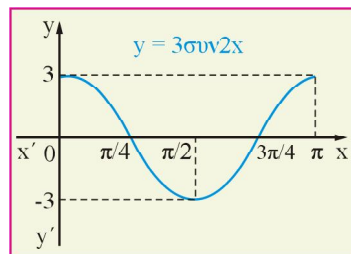
**Λύση**

Η συνάρτηση  $f(x) = 3 \sin 2x$  είναι της μορφής  $f(x) = \rho \sin(\omega x)$  με  $\rho = 3$  και  $\omega = 2$ .

Επομένως:

- Είναι περιοδική με περίοδο  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$  και έχει μέγιστη τιμή το 3 και ελάχιστη το  $-3$ .

Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

**Κατηγορία – Μέθοδος 3**

Η συνάρτηση  $f(x) = \rho \sin(\omega x + \varphi)$  με  $\rho, \omega > 0$  και  $\varphi \in \mathbb{R}$  γράφεται:

$$f(x) = \rho \sin \left[ \omega \left( x + \frac{\varphi}{\omega} \right) \right].$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή προκύπτει από τη συνάρτηση  $g(x) = \rho \sin(\omega x)$  αν

όπου  $x$  θέσουμε το  $x + \frac{\varphi}{\omega}$ . Επομένως:

- Είναι περιοδική με περίοδο  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .
- Έχει μέγιστο το  $\rho$  και ελάχιστο το  $-\rho$ .
- Η γραφική παράσταση προκύπτει από κατάλληλη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g(x) = \rho \sin(\omega x)$ .

**Παράδειγμα 3**

Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή και να παραστήσετε γραφικά τη

συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ .

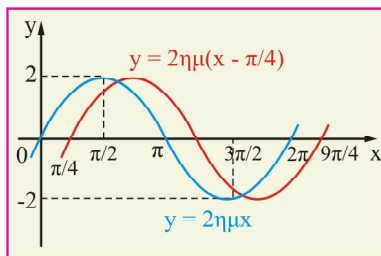
**Λύση**

Η συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  είναι της μορφής  $f(x) = \rho\eta\mu(\omega x + \varphi)$  με  $\rho = 2$  και  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ .

Επομένως:

- Είναι περιοδική με περίοδο  $T = 2\pi$ .
- Έχει μέγιστη τιμή το 2 και ελάχιστη τιμή το  $-2$ .
- Η γραφική παράσταση της  $f$  προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρ-

τησης  $g(x) = 2\eta\mu x$  κατά  $\frac{\pi}{4}$  μονάδες προς τα δεξιά.

**Κατηγορία – Μέθοδος 4**

Η επίλυση μιας τριγωνομετρικής εξίσωσης στηρίζεται στο μετασχηματισμό της σε κάποια από τις βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις.

Αυτό το επιτυγχάνουμε με τη βοήθεια κατάλληλων τριγωνομετρικών τύπων όπως θα δούμε στα λυμένα παραδείγματα και στα σχόλια που ακολουθούν.

Με την εφαρμογή των τύπων των λύσεων των εξισώσεων, από μια βασική τριγωνομετρική εξίσωση, καταλήγουμε σε αλγεβρική εξίσωση που την επιλύουμε κατά τα γνωστά ως προς το άγνωστο τόξο.

**Παράδειγμα 4**

Να λύσετε την εξίσωση:  $\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

**Λύση**

Είναι βασική τριγωνομετρική εξίσωση της μορφής  $\eta\mu f(x) = \eta\mu g(x)$  οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ 2x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ 2x + x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{12} \\ \quad \text{ή} \\ 3x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Άρα } x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{12} \text{ ή } x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{5\pi}{36}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

**Κατηγορία – Μέθοδος 5**

Για να επιλύσουμε εξισώσεις, όπως οι:

$$\eta\mu f(x) = \lambda, \quad -1 \leq \lambda \leq 1 \quad (1) \qquad \sigma\upsilon\nu f(x) = \lambda, \quad -1 \leq \lambda \leq 1 \quad (2)$$

$$\epsilon\phi f(x) = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (3) \qquad \sigma\phi f(x) = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (4)$$

εργαζόμαστε ως εξής:

Βρίσκουμε γωνία  $\theta$  ώστε  $\eta\mu\theta = \lambda$  έτσι η (1) γίνεται  $\eta\mu f(x) = \eta\mu\theta$ , δηλαδή βασική εξίσωση. Ανάλογα εργαζόμαστε και για τις περιπτώσεις (2), (3), (4).

**Παράδειγμα 5**

Να λυθεί η εξίσωση  $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Λύση**

Επειδή  $\eta\mu \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  μια λύση της εξίσωσης είναι το  $\frac{\pi}{3}$ . Επομένως όλες οι λύσεις της παραπάνω

εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:  $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3}$ ,  $x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{3}$ , όπου  $\kappa \in \mathbb{Z}$

Με ανάλογες σκέψεις βρίσκουμε:

$$\sigma\upsilon\nu x = \alpha = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \theta \text{ ή } x = 2\kappa\pi - \theta, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \quad \alpha \in [-1, 1]$$

$$\text{και } \epsilon\phi x = \alpha = \epsilon\phi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{Z} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\sigma\phi x = \alpha = \sigma\phi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{Z} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

**Παράδειγμα 6**

Να λύσετε την εξίσωση:  $\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

**Λύση**

Επειδή  $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$  έχουμε:  $\sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ \quad \text{ή} \\ x + \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \\ \quad \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Άρα  $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$  ή  $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$ .

**Κατηγορία – Μέθοδος 6**

Οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις, μετασχηματίζονται σε βασικές εξισώσεις με τους τύπους των αντιθέτων - παραπληρωματικών γωνιών:

1.  $\eta\mu f(x) = -\eta\mu g(x) \Leftrightarrow \eta\mu f(x) = \eta\mu[-g(x)]$
2.  $\sigma\upsilon\nu f(x) = -\sigma\upsilon\nu g(x) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu f(x) = \sigma\upsilon\nu[\pi - g(x)]$
3.  $\epsilon\varphi f(x) = -\epsilon\varphi g(x) \Leftrightarrow \epsilon\varphi f(x) = \epsilon\varphi[-g(x)]$
4.  $\sigma\varphi f(x) = -\sigma\varphi g(x) \Leftrightarrow \sigma\varphi f(x) = \sigma\varphi[-g(x)]$ , όπου  $f(x)$ ,  $g(x)$  είναι παραστάσεις του  $x$ .

**Παράδειγμα 7**

**Να λύσετε την εξίσωση:**  $\sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = -\sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right)$

**Λύση**

Επειδή  $\sin \left[ \pi - \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \right] = -\sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right)$  έχουμε:

$$\sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = -\sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left[ \pi - \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \right] \Leftrightarrow$$

$$\sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left( \frac{2\pi}{3} - x \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \left( \frac{2\pi}{3} - x \right) \\ \quad \text{ή} \\ 2x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi - \left( \frac{2\pi}{3} - x \right) \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{12} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{11\pi}{12} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Άρα  $x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{5\pi}{36}$  ή  $x = 2\kappa\pi - \frac{11\pi}{12}$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$ .

### Κατηγορία – Μέθοδος 7

Οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις, μετασχηματίζονται σε βασικές εξισώσεις με τους τύπους των συμπληρωματικών γωνιών:

1.  $\eta\mu f(x) = \sigma\upsilon\nu g(x) \Leftrightarrow \eta\mu f(x) = \eta\mu \left[ \frac{\pi}{2} - g(x) \right]$
2.  $\sigma\upsilon\nu f(x) = \eta\mu g(x) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu f(x) = \sigma\upsilon\nu \left[ \frac{\pi}{2} - g(x) \right]$
3.  $\epsilon\varphi f(x) = \sigma\varphi g(x) \Leftrightarrow \epsilon\varphi f(x) = \epsilon\varphi \left[ \frac{\pi}{2} - g(x) \right]$
4.  $\sigma\varphi f(x) = \epsilon\varphi g(x) \Leftrightarrow \sigma\varphi f(x) = \sigma\varphi \left[ \frac{\pi}{2} - g(x) \right]$

### Παράδειγμα 8

Να λύσετε την εξίσωση:  $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu \left( \frac{\pi}{4} - x \right)$

**Λύση**

Επειδή  $\eta\mu \left[ \frac{\pi}{2} - \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \right] = \sigma\upsilon\nu \left( \frac{\pi}{4} - x \right)$  έχουμε:

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \left[ \frac{\pi}{2} - \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \right] \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \left( \frac{\pi}{4} + x \right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \left( \frac{\pi}{4} + x \right) \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \left( \frac{\pi}{4} + x \right) \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \text{ αδύνατη} \\ \text{ή} \\ 2x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Άρα } x = \kappa\pi + \frac{3\pi}{8}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

### Κατηγορία – Μέθοδος 8

Όταν ζητείται να λύσουμε τριγωνομετρική εξίσωση σε διάστημα  $(\alpha, \beta)$  τότε:

Βρίσκουμε αρχικά τις άπειρες λύσεις της και στη συνέχεια από την ανισότητα  $\alpha < x < \beta$

βρίσκουμε τις τιμές του  $\kappa \in \mathbb{Z}$  για τις οποίες οι λύσεις ανήκουν στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$ .

### Παράδειγμα 9

Να λύσετε την εξίσωση  $\varepsilon\varphi\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$  στο διάστημα  $(0, 2\pi)$ .

### Λύση

Αρχικά πρέπει  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$  (1). Επειδή  $\varepsilon\varphi \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ , η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$\varepsilon\varphi\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{12}, \kappa \in \mathbb{Z}, \text{ που είναι δεκτές, αφού ικανοποιούν τον περιορισμό (1).}$$

Θα βρούμε ποιες από τις άπειρες λύσεις που δίνονται από τον τύπο  $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{12}$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$  ανήκουν στο διάστημα  $(0, 2\pi)$ . Πρέπει  $x \in (0, 2\pi)$  δηλαδή:

$$0 < x < 2\pi \Leftrightarrow 0 < \kappa\pi + \frac{\pi}{12} < 2\pi, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{12} < \kappa\pi < 2\pi - \frac{\pi}{12}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\pi}{12} < \kappa\pi < \frac{23\pi}{12}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} < \kappa < \frac{23}{12}, \kappa \in \mathbb{Z}. \text{ Επειδή } \kappa \in \mathbb{Z} \text{ είναι: } \kappa = 0, \kappa = 1.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης  $\varepsilon\varphi\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$  στο  $(0, 2\pi)$  είναι:

$$\text{για } \kappa = 0 : x = \frac{\pi}{12} \quad \text{και} \quad \text{για } \kappa = 1 : x = \pi + \frac{\pi}{12} = \frac{13\pi}{12}$$

Γ.

## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## Άσκηση 1

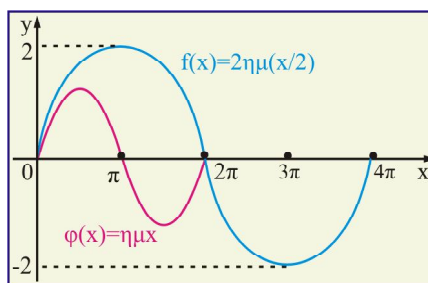
Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu \frac{x}{2}$

## Λύση

Σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι μια ημιτονοειδής καμπύλη και έχει μέγιστη τιμή το 2, ελάχιστη τιμή το -2 και είναι περιοδική με περίοδο

$$T = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$$

Σχεδιάζουμε την ημιτονοειδή καμπύλη σε διάστημα πλάτους  $4\pi$ . Για σύγκριση σχεδιάσαμε και τη συνάρτηση  $\varphi(x) = \eta\mu x$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .



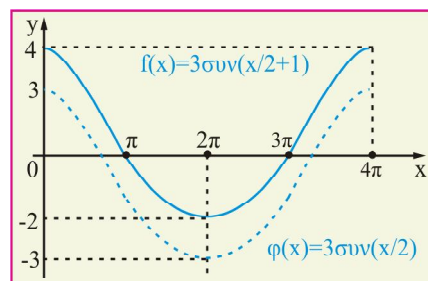
## Άσκηση 2

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} + 1$

## Λύση

Η  $f$  είναι περιοδική περίοδο  $T = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$ . Σχεδιά-

ζουμε μια συνημιτονοειδή καμπύλη στο διάστημα  $[0, 4\pi]$  με μέγιστη τιμή το 3 και ελάχιστη το -3 και τη μεταφέρουμε προς τα πάνω κατά μία μονάδα.



## Άσκηση 3

Να λυθεί η εξίσωση:  $\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

## Λύση

Επειδή  $\sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ , έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \\ x - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi - \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{13\pi}{12}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{7\pi}{12}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

**Άσκηση 4**

**Να λυθεί η εξίσωση:**  $2\eta\mu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

**Λύση**

$$\text{Είναι } 2\eta\mu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ 3x - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

**Άσκηση 5**

**Να λυθεί η εξίσωση:**  $\eta\mu x + \epsilon\phi x = \epsilon\phi x \cdot \eta\mu x + 1$  **στο διάστημα**  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Λύση**

$$\text{Πρέπει } \sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\eta\mu x + \epsilon\phi x = \epsilon\phi x \cdot \eta\mu x + 1 \Leftrightarrow \eta\mu x + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \eta\mu x + 1$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu^2 x + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x \cdot (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) - (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\eta\mu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu x - 1 = 0 \\ \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu x = 1 & (1) \\ \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \eta\mu x = 1 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \quad (\text{απορρίπτονται λόγω περιορισμών})$$

$$(2) \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ 0x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \text{ (αδύνατη)} \end{cases}$$

Προσδιορισμός του  $\kappa$ :

$$\text{Είναι } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \kappa\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} < \kappa\pi < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} < \kappa < \frac{1}{4}$$

και επειδή  $\kappa \in \mathbb{Z}$  θα είναι  $\kappa = 0$ .

Άρα από τις άπειρες λύσεις  $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$  μόνο μία λύση (αυτή που προκύπτει για  $\kappa = 0$ ) ανήκει

στο  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  και είναι η  $x = 0 \cdot \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

### Άσκηση 6

**Να λυθεί η εξίσωση:**  $2\eta\mu^2 x + 3\eta\mu x - 2 = 0$ .

**Λύση**

Θέτουμε  $t = \eta\mu x$ , οπότε προκύπτει η δευτεροβάθμια ως προς  $t$  εξίσωση:  $2t^2 + 3t - 2 = 0$  (1)

Η (1) έχει διακρίνουσα  $\Delta = 9 - 4 \cdot (-2) \cdot 2 = 25$  και ρίζες  $t_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$ ,  $t_2 = \frac{-3-5}{4} = -2$

Έτσι έχουμε να επιλύσουμε τις εξισώσεις

$\eta\mu x = \frac{1}{2}$  και  $\eta\mu x = -2$  (που είναι αδύνατη)

$$\text{Είναι: } \eta\mu x = \frac{1}{2} = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

**Α.**

### ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των  $f(x) = 2\eta\mu 3x$  και  $g(x) = 1 + 3\eta\mu \frac{x}{2}$  στο διάστημα της αντίστοιχης περιόδου.

2. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις συναρτήσεις:

$$f(x) = \varepsilon\varphi 2x, \quad g(x) = 1 + \varepsilon\varphi x, \quad h(x) = \varepsilon\varphi x$$

3. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f(x) = \sigma\phi x$ .

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i.  $(1 - \sigma\upsilon\nu x)(2\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3}) = 0$

ii.  $\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = \sqrt{3}$

iii.  $\epsilon\phi 2x = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right)$

iv.  $2\sigma\upsilon\nu^2\omega + \sigma\upsilon\nu\omega - 1 = 0$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις

i.  $4 + 2\epsilon\phi x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

ii.  $\eta\mu x = 1 + \sigma\upsilon\nu x$  στο  $(2\pi, 4\pi)$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i.  $3(1 - \eta\mu x) = \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\phi x$

ii.  $2\eta\mu\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 1$ , στο  $(4\pi, 5\pi)$

7. Να λυθεί η εξίσωση:  $2\eta\mu^2 x - (\sqrt{2} + 2)\eta\mu x + \sqrt{2} = 0$

8. Να λυθεί η εξίσωση:  $\epsilon\phi^2 x - 3\epsilon\phi x + 2 = 0$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i.  $\epsilon\phi\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 0$

ii.  $\eta\mu^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

## E

### “ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ”

Να λυθεί η εξίσωση:  $\eta\mu^3 x - 2\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu^3 x = 0$

(Υπ.: Παρατηρήστε ότι  $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$  και διαιρέστε με  $\sigma\upsilon\nu x$ )



