Ολοκληρώματα

136. **α) i.** Για $x \neq 0$ από τη σχέση $f(-x)f'(x) = x$ (1) προκύπτει $f(-x) \neq 0$, άρα $f(x) \neq 0$ και αφού η f είναι συνεχής διατηρεί πρόσημο . Είναι $f(0) = 2$, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Στην (1) αντικαθιστώντας όπου x το $-x$, έχουμε: $f(x)f'(-x) = -x$ (2),

οπότε $h'(x) = \dfrac{-f'(-x)f(x) - f(-x)f'(x)}{f^2(x)} = \dfrac{x-x}{f^2(x)} = 0$.

β) $\dfrac{f(-x)}{f(x)} = c \Leftrightarrow f(-x) = cf(x)$ και για $x = 0$ είναι $\cancel{f(0)} = c\cancel{f(0)} \Leftrightarrow c = 1$, άρα $f(-x) = f(x)$.

$(1) \Rightarrow f(x)f'(x) = x \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = 2x \Rightarrow f^2(x) = x^2 + c \overset{f(0)=2}{\Rightarrow} c = 4$,

άρα $f(x) = x^2 + 4 \overset{f(x)>0}{\Rightarrow} f(x) = \sqrt{x^2+4}$.

Είναι $\left|\dfrac{\eta\mu(x+2)}{\sqrt{x^2+4}}\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}} \leq \dfrac{\eta\mu(x+2)}{\sqrt{x^2+4}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}\right)$ από το Κ.Π είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu(x+2)}{\sqrt{x^2+4}} = 0$.

γ) $F'(x) = f(x) = \sqrt{x^2+4}$, $F''(x) = f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} > 0 \Rightarrow F' \uparrow (0, +\infty)$

Από το Θ.Μ.Τ για την F, υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε:

$F'(\xi) = \dfrac{F(x) - F(0)}{x} \Leftrightarrow xf(\xi) = \int_0^x f(t)dt$.

$0 < \xi < x \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(0) < f(\xi) < f(x) \Leftrightarrow 2 < f(\xi) < f(x) \Leftrightarrow 2x < xf(\xi) < xf(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x < \int_0^x f(t)dt < xf(x)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x) = +\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt = +\infty$.

137. **α)** Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$ έχει ελάχιστο στο $x = 1$ και ισχύει $f(x) \geq f(1) = 0$ για κάθε $x \in [1,2]$. Λόγω του θεωρήματος Μέσης Τιμής για την f στο διάστημα $[x, 2], x \in [1, 2)$, υπάρχει $\xi \in (x, 2)$ τέτοιο ώστε:

$f'(\xi) = \dfrac{f(2) - f(x)}{2 - x} \Leftrightarrow (2-x)f'(\xi) = 3 - f(x)$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[1,2]$ άρα η f' είναι γνησίωςαύξουσα στο διάστημα αυτό.

Είναι: $1 \leq x < \xi < 2$ άρα $f'(x) < f'(\xi) \Leftrightarrow (2-x)f'(x) < (2-x)f'(\xi) \Leftrightarrow (2-x)f'(x) < 3 - f(x)$.

Πολλαπλασιάζοντας με $f(x) \geq 0$, έχουμε:

$(2-x)f'(x)f(x) \leq 3f(x) - f^2(x) \Leftrightarrow (2-x)f'(x)f(x) - 3f(x) + f^2(x) \leq 0$, οπότε και

$$\int_1^2 (2-x)f'(x)f(x)dx - 3\int_1^2 f(x)dx + \int_1^2 f^2(x)dx < 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 (2-x)\left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)' dx - 3\int_1^2 f(x)dx + \int_1^2 f^2(x)dx < 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{1}{2}(2-x)f^2(x)\right]_1^2 - \int_1^2 (2-x)'\frac{1}{2}f^2(x)dx - 3\int_1^2 f(x)dx + \int_1^2 f^2(x)dx < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}f^2(1) + \frac{1}{2}\int_1^2 f^2(x)dx - 3\int_1^2 f(x)dx + \int_1^2 f^2(x)dx < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\int_1^2 f^2(x)dx < 3\int_1^2 f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 f^2(x)dx < 2\int_1^2 f(x)dx.$$

β) Εστω ότι $f''(x) < 1$ για κάθε $x \in (1,2)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$, $x \in [1,2]$.

Είναι $g'(x) = f'(x) - x$, $g''(x) = f''(x) - 1 < 0 \Rightarrow g' \downarrow [1,2]$.

Από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi_1 \in (1,2)$: $f'(\xi_1) = f(2) - f(1) = 3$.

Είναι $1 < \xi_1 < 2 \overset{g'\downarrow}{\Rightarrow} g'(\xi_1) < g'(1) \Leftrightarrow f'(\xi_1) - \xi_1 < f'(1) - 1 \Leftrightarrow 3 - \xi_1 < 2 - 1 \Leftrightarrow \xi_1 > 2$

που είναι άτοπο.

138. α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = 2 - 1 = 1$.

Όμως $\lambda_\varepsilon = 1$, άρα $f'(\xi) = \lambda_\varepsilon$, οπότε υπάρχει εφαπτομένη της C_f, η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία ε.

β) Εστω $g(x) = f(x) - 3 + x$, $x \in [1,2]$. Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι $g(1) = f(1) - 3 + 1 = 1 - 2 = -1 < 0$ και $g(2) = f(2) - 3 + 2 = 2 - 1 = 1 > 0$, δηλαδή $g(1)g(2) < 0$, οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε: $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 3 - x_0$.

γ) Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[1,x_0]$ και $[x_0,2]$ και παραγωγίσιμη στα $(1,x_0)$ και $(x_0,2)$, οπότε λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχουν $\xi_1 \in (1,x_0)$ και $\xi_2 \in (x_0,2)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} = \frac{3 - x_0 - 1}{x_0 - 1} = \frac{2 - x_0}{x_0 - 1} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(x_0)}{2 - x_0} = \frac{2 - 3 + x_0}{2 - x_0} = \frac{x_0 - 1}{2 - x_0}.$$

Άρα $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = \frac{2 - x_0}{x_0 - 1} \cdot \frac{x_0 - 1}{2 - x_0} = 1$.

δ) $\int_1^2 xf''(x)dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^2 x(f'(x))' dx = 0 \Leftrightarrow [xf'(x)]_1^2 - \int_1^2 f'(x)dx = 0 \Leftrightarrow$

$2f'(2) - f'(1) - f(2) + f(1) = 0 \Leftrightarrow 2f'(2) - f'(1) = 1 \quad (1)$.

Είναι $xf''(x) + f'(x) = 1 \Leftrightarrow (xf'(x))' - 1 = 0$ ή $(xf'(x) - x)' = 0$.

Εστω $h(x) = xf'(x) - x$, $x \in [1,2]$.

Η h είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως άθροισμα και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $h'(x)=xf''(x)+f'(x)-1$. Είναι $h(1)=f'(1)-1$ και $h(2)=2f'(2)-2$. Από την σχέση (1), έχουμε: $2f'(2)-f'(1)=1 \Leftrightarrow 2f'(2)=f'(1)+1 \Leftrightarrow$ $2f'(2)-2=f'(1)-1 \Leftrightarrow h(2)=h(1)$. Οπότε λόγω του θεωρήματος Rolle, η εξίσωση $h(x)=0 \Leftrightarrow xf''(x)+f'(x)=1$, έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

139. α) $f(1-x)=\ln\dfrac{e^{1-x}+e}{e^{1-x}+1}=\ln\dfrac{\dfrac{e}{e^x}+e}{\dfrac{e}{e^x}+1}=\ln\dfrac{e\dfrac{1+e^x}{e^x}}{\dfrac{e+e^x}{e^x}}=\ln\left(e\dfrac{1+e^x}{e+e^x}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(1-x)=\ln e+\ln\dfrac{1+e^x}{e+e^x}=1+\ln\left(\dfrac{e+e^x}{1+e^x}\right)^{-1}=1-\ln\dfrac{e+e^x}{1+e^x}=1-f(x)$.

β) Είναι $e^x+e>e^x+1 \Leftrightarrow \dfrac{e^x+e}{e^x+1}>1 \Leftrightarrow \ln\dfrac{e^x+e}{e^x+1}>\ln 1 \Leftrightarrow f(x)>0$

Από τη σχέση $f(1-x)=1-f(x)$, προκύπτει: $\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1 1dx-\int_0^1 f(x)dx \quad (1)$.

Θέτουμε $1-x=u$, τότε $dx=-du$ Για $x=0$ είναι $u=1$, ενώ για $x=1$ είναι $u=0$.

Η σχέση (1) γίνεται: $-\int_1^0 f(u)du=\int_0^1 1dx-\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx=1-\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\int_0^1 f(x)dx=1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx=\dfrac{1}{2}$. Άρα $E=\dfrac{1}{2}$.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e}{e^x+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{e^x+e}{e^x+1}\overset{\frac{e^x+e}{e^x+1}=u}{\underset{u\to 1}{=}}\lim\limits_{u\to 1}\ln u=0$, άρα η ευθεία $y=0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$, είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

140. α) Θέτουμε $\dfrac{x}{2}=u \Leftrightarrow x=2u$ και $dx=2du$. Για $x=0$ είναι $u=0$, ενώ για $x=2$ είναι $u=1$.

Είναι: $\int_0^2 f\left(\dfrac{x}{2}\right)dx=\int_0^1 f(u)2du=0$.

β) Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\dfrac{x}{2},x\right]$, $x\in(0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\dfrac{x}{2},x\right)$, οπότε λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει $\xi\in\left(\dfrac{x}{2},x\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x-\dfrac{x}{2}}=\frac{f(x)-f\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\dfrac{x}{2}}.$$

Όμως $f'(\xi)\geq 2$, οπότε: $\dfrac{f(x)-f\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\dfrac{x}{2}}\geq 2 \Leftrightarrow f(x)-f\left(\dfrac{x}{2}\right)\geq x$ για κάθε $x\in(0,2]$.

Επειδή η σχέση αληθεύει και για $x=0$, ισχύει ότι: $f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\geq x$ για κάθε $x\in[0,2]$.

γ) Είναι $\int_0^2\left(f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx\geq\int_0^2 xdx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx\geq\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=2 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx\geq 2$.

141. **α)** Θέτουμε $xt=u$, τότε $xdt=du$. Για $t=0$ είναι $u=0$ και για $t=1$ είναι $u=x$.

Τότε $f(x)=\lambda x+\int_0^x f(u)du \quad (1)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση $\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

β) Είναι $f'(x)=\left(\lambda x+\int_0^x f(u)du\right)'=\lambda+f(x)\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=\lambda \Leftrightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=\lambda e^{-x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(e^{-x}f(x)\right)'=\left(-\lambda e^{-x}\right)'\Leftrightarrow e^{-x}f(x)=-\lambda e^{-x}+c\Leftrightarrow f(x)=-\lambda+ce^{x}$.

Η (1) για $x=0$ γίνεται $f(0)=\lambda\cdot 0+\int_0^0 f(u)du=0$.

Όμως $f(0)=-\lambda+c$, άρα $-\lambda+c=0\Leftrightarrow c=\lambda$ και $f(x)=-\lambda+\lambda e^{x}=\lambda\left(e^{x}-1\right)$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\lambda\left(e^{x}-1\right)}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\lambda e^{x}}{1}=\lambda$. Άρα $\lambda=1$.

142. **α)** **i.** Επειδή η $h(x)$ είναι συνεχής και $h(x)\neq 0$ τότε η $h(x)$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Στη σχέση (1) $h(x)+h(4-x)=2$ θέτουμε όπου $x=2$ οπότε $2h(2)=2\Leftrightarrow h(2)=1>0$ άρα $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Εστω $A(x)=\int_0^x f(t)dt$ και $B(x)=\int_x^2 f(t)dt$ τότε έχουμε $\int_{B(x)}^{A(x)}h(t)dt>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0,2\}$.

- Αν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}-\{0,2\}$ ώστε $A(x_0)=B(x_0)$ τότε $\int_{B(x_0)}^{A(x_0)}h(t)dt=0$ (άτοπο).
- Αν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}-\{0,2\}$ ώστε $A(x_0)<B(x_0)$ τότε $\int_{B(x_0)}^{A(x_0)}h(t)dt<0$ (άτοπο).

Επομένως $A(x)>B(x)$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}-\{0,2\}$ δηλαδή $\int_0^x f(t)dt>\int_x^2 f(t)dt$.

ii. Οι συναρτήσεις $A(x)=\int_0^x f(t)dt$ και $B(x)=\int_x^2 f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχείς και αφού $A(x)>B(x)$ τότε $\lim\limits_{x\to 0}A(x)\geq\lim\limits_{x\to 0}B(x)$ οπότε

$A(0)\geq B(0)\Leftrightarrow 0\geq\int_0^2 f(t)dt \quad (2)$. Επίσης και $\lim\limits_{x\to 2}A(x)\geq\lim\limits_{x\to 2}B(x)$ δηλαδή

$A(2)\geq B(2)\Leftrightarrow\int_0^2 f(t)dt\geq 0 \quad (3)$.

Από (2), (3) προκύπτει $\int_0^2 f(t)dt=0$

iii. Είναι $A(x)\geq B(x)\Leftrightarrow\int_0^x f(t)dt\geq\int_x^2 f(t)dt\Leftrightarrow\int_0^x f(t)dt+\int_2^x f(t)dt\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θεωρούμε την $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_2^x f(t)dt$. Παρατηρούμε ότι $\varphi(0)=\varphi(2)=0$ οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\varphi(x)\geq\varphi(0)$ και $\varphi(x)\geq\varphi(2)$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\varphi'(x)=2f(x)$ οπότε από Θ. Fermat θα είναι $\varphi'(0)$ και $\varphi'(2)=0$. Άρα $f(0)=f(2)=0$

iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x\cdot B(x)$, $x\in[0,2]$. Είναι $g(0)=g(2)=0$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ με $g'(x)=B(x)+xB'(x)=\int_x^2 f(t)dt-xf(x)$ οπότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi_1\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi_1)=0\Leftrightarrow\int_{\xi_1}^2 f(t)dt-\xi_1 f(\xi_1)=0$.

Άρα η εξίσωση $\int_x^2 f(t)dt=xf(x)$ έχει τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$.

β) i. Θεωρούμε την $\sigma(x)=f^2(x)+B^2(x)$, $x\in[0,2]$. Είναι $\sigma(0)=f^2(0)+B^2(0)=0$ και $\sigma(2)=0$ άρα $\sigma(0)=\sigma(2)=0$. Επίσης η $\sigma(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ με

$$\sigma'(x)=2f(x)f'(x)+2B(x)B'(x)=2\left[f(x)f'(x)-f(x)\int_x^2 f(t)dt\right].$$

Άρα από Θ. Rolle υπάρχει $\xi_2\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $\sigma'(\xi_2)=0$. Δηλαδή η εξίσωση

$\sigma'(x)=0\Leftrightarrow f(x)f'(x)=f(x)\int_x^2 f(t)dt$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$

ii. Εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για τη $p(x)=x^2f(x)$ στο $[0,2]$. Είναι $p(0)=p(2)=0$ και $p'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$ οπότε υπάρχει $\xi_3\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $p'(\xi_3)=0$

$2\xi_3 f(\xi_3)+\xi_3^2 f'(\xi_3)=0$ αφού $\xi_3\in(0,2)$ τότε $\xi_3\neq 0$ άρα $2f(\xi_3)+\xi_3 f'(\xi_3)=0$.

Άρα η εξίσωση $2f(x)+xf'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0,2)$.

γ) Επειδή $h(x)>0$ τότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_0^4 h(x)dx=\int_0^4[2-h(4-x)]dx=\int_0^4 2dx-\int_0^4 h(4-x)dx=8-\int_0^4 h(4-x)dx$$

Θέτω $y=4-x$ άρα $dy=-dx$ και

x	0	4
y	4	0

Οπότε $E=8-\int_4^0 h(y)(-du)=8-\int_0^4 h(y)dy\Leftrightarrow E=8-E\Leftrightarrow E=4$ τ.μ.

143. **α)** Είναι $f(x)=\sqrt{x-3}\int_3^x\frac{1}{\ln t}dt$. Η συνάρτηση $\frac{1}{\ln t}$ ορίζεται στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$ και επειδή $3\in(1,+\infty)$, η συνάρτηση $h(x)=\int_3^x\frac{1}{\ln t}dt$ ορίζεται στο $(1,+\infty)$. Οπότε για την f πρέπει:

$$\begin{cases}x>1\\x-3\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x\geq 3\end{cases}$$ άρα $x\geq 3$ και $D_f=[3,+\infty)$.

β) Η συνάρτηση $\frac{1}{\ln t}$ είναι συνεχής στο $[3,+\infty)$ οπότε η $h(x)=\int_3^x\frac{1}{\ln t}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[3,+\infty)$ και επειδή η $\sqrt{x-3}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(3,+\infty)$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $(3,+\infty)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-3}}\int_3^x\frac{1}{\ln t}dt+\frac{\sqrt{x-3}}{\ln x}$. Στο $x=3$ είναι

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-3}\int_3^x\frac{1}{\ln t}dt}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\int_3^x\frac{1}{\ln t}dt}{\sqrt{x-3}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 3}\frac{\left(\int_3^x\frac{1}{\ln t}dt\right)'}{\left(\sqrt{x-3}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{2\sqrt{x-3}}}=\lim_{x\to 3}\frac{2\sqrt{x-3}}{\ln x}=0,$$

άρα $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}\displaystyle\int_3^x\frac{1}{\ln t}dt+\frac{\sqrt{x-3}}{\ln x}, & x>3\\ 0, & x=3\end{cases}$

γ) Είναι $h'(x)=\dfrac{1}{\ln x}>0$ για $x>3$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[3,+\infty)$. Για $x>3$ είναι $h(x)>h(3)=0$, άρα $f'(x)>0$ και f γνησίως αύξουσα στο $[3,+\infty)$. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(3)=0$.

δ) $\displaystyle\int_3^e\frac{h(x)}{x^2}dx=-\int_3^e h(x)\left(\frac{1}{x}\right)'dx=-\left[\frac{1}{x}h(x)\right]_3^e+\int_3^e\frac{1}{x}h'(x)dx=-\frac{h(e)}{e}+\int_3^e\frac{1}{x\ln x}dx=$

$$=-\frac{h(e)}{e}+\int_3^e\frac{(\ln x)'}{\ln x}dx=-\frac{h(e)}{e}+\left[\ln(\ln x)\right]_3^e=-\frac{h(e)}{e}-\ln(\ln 3)$$

ε) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(h'(x)\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln x}\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\frac{1}{x\ln x}\right)$

Εστω $\dfrac{1}{x}=u$, τότε για $x\to+\infty$ είναι $u\to 0$ και $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1.$

Επειδή $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\ln x}=0$ είναι $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(h'(x)\eta\mu\frac{1}{x}\right)=1\cdot 0=0$

144. α) Για $x=\kappa$ είναι $f(\kappa)+f(2\kappa-\kappa)=2\Leftrightarrow 2f(\kappa)=2\Leftrightarrow f(\kappa)=1$. Επειδή $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η f' είναι συνεχής, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως μονότονη οπότε και 1–1.
Για $x>\kappa$ είναι $2x>2\kappa\Leftrightarrow x>2\kappa-x$ και αφού $f(x)<f(2\kappa-x)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\kappa,+\infty)$.

β) Εχουμε $f(x)=1\Leftrightarrow f(x)=f(\kappa)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=\kappa$.

γ) Επειδή η συνάρτηση $\dfrac{f(t)}{t}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{f(0)}{x}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ και

$g''(x)=\frac{xf'(x)-f(x)+f(0)}{x^2}$. Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[0,x]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε: $0<\xi<x\Leftrightarrow f'(0)<f'(\xi)<f'(x)$ ή $\frac{f(x)-f(0)}{x}<f'(x)\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)+f(0)>0$ άρα $g''(x)>0$ και g κυρτή στο $(0,+\infty)$.

δ) Είναι $f(x)+f(2\kappa-x)=2$, οπότε

$$\int_0^{2\kappa}f(x)dx+\int_0^{2\kappa}f(2\kappa-x)dx=\int_0^{2\kappa}2dx\Leftrightarrow\int_0^{2\kappa}f(x)dx+\int_0^{2\kappa}f(2\kappa-x)dx=4\kappa.$$

Εστω $2x-\kappa=u$, τότε $dx=-du$ και για $x=0$ είναι $u=2\kappa$ ενώ για $x=2\kappa$ είναι $u=0$. Οπότε $\int_0^{2\kappa}f(x)dx-\int_{2\kappa}^{0}f(u)du=4\kappa\Leftrightarrow\int_0^{2\kappa}f(x)dx+\int_0^{2\kappa}f(x)dx=4\kappa\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^{2\kappa}f(x)dx=4\kappa\Leftrightarrow\int_0^{2\kappa}f(x)dx=2\kappa.$$

145. α) $|f(x)|\le e^{-x}\Leftrightarrow -e^{-x}\le f(x)\le e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-e^{-x})=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. Επειδή η f είναι συνεχής και $\downarrow$ στο $[0,+\infty)$, έχουμε: $f([0,+\infty))=(0,1]$

β) $e^xf'(x)+1=0\Leftrightarrow f'(x)+e^{-x}=0$. Επειδή $f(x)\le e^{-x}$ έχουμε: $f(x)-e^{-x}\le 0$.

Εστω $g(x)=f(x)-e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $g(x)\le g(0)$, δηλαδή η g έχει μέγιστο στο $x_0=0$. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f'(x)+e^{-x}$, από το Θ. Fermat, ισχύει ότι: $g'(0)=0\Leftrightarrow f'(0)+e^{-0}=0\Leftrightarrow f'(0)=-1$. Άρα η εξίσωση $f'(x)+e^{-x}=0$ έχει ρίζα το 0, οπότε έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

γ) Επειδή $f(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$, είναι $E=\int_0^1f(x)dx$. Επειδή $-e^{-x}\le f(x)\le e^{-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι: $\int_0^1f(x)dx\le\int_0^1e^{-x}dx=\frac{e-1}{e}$.

δ) Εστω $F(u)=\int_0^uf(t)dt$, $u\in[x,x+1]$, $x\ge 0$. Προφανώς για την F ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ., οπότε υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi)=F(x+1)-F(x)\Leftrightarrow f(\xi)=\int_x^{x+1}f(t)dt$

Είναι $x<\xi<x+1\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(x+1)<f(\xi)<f(x)\Leftrightarrow f(x+1)<\int_x^{x+1}f(t)dt<f(x)$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x+1)\overset{x+1=u}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}f(u)=0$, άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}f(t)dt=0$.

ε) i. Αν $\alpha=\beta$ προφανώς ισχύει η ισότητα. Αν $\alpha\ne\beta$ και έστω $\alpha<\beta$, τότε: Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f'(x)=-e^{-x}$. Σύμφωνα με το ΘΜΤ, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow -e^{-\xi}=\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow e^{-\xi}=\frac{e^{\alpha}-e^{\beta}}{\beta-\alpha}$.

Είναι $\alpha<\xi<\beta\Leftrightarrow-\alpha>-\xi>-\beta\Leftrightarrow e^{-\beta}<e^{-\xi}<e^{-\alpha}\Leftrightarrow e^{-\beta}<\frac{e^{\alpha}-e^{-\beta}}{\beta-\alpha}<e^{-\alpha}\Leftrightarrow$

$e^{-\beta}(\beta-\alpha)<e^{-\alpha}-e^{-\beta}<e^{-\alpha}(\beta-\alpha)$. Αν $\alpha>\beta$ όμοια.

ii. Εστω $f(x)=e^{-x}+x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $f'(x)=-e^{-x}+1\geq 0 \Leftrightarrow e^{-x}\leq 1 \Leftrightarrow -x\leq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow[0,+\infty)$

Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow(-\infty,0]$

Η f έχει ελάχιστο στο $x=0$, άρα $f(x)\geq f(0)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $f(\eta\mu^2x)\geq 0 \Leftrightarrow e^{-\eta\mu^2x}+\eta\mu^2x-1\geq 0$

146. **α)** Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, οι συναρτήσεις $\int_1^x f(t)dt$ και $\int_0^x g(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, οπότε:

$$\left(\int_1^x f(t)dt\right)'=\left[x\left(\int_0^x g(t)dt-1\right)\right]' \Leftrightarrow f(x)=\int_0^x g(t)dt-1+xg(x).$$

Είναι $f(0)=\int_0^0 g(t)dt-1+0g(0)=-1$

και $$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\int_0^x g(t)dt-1+xg(x)+1}{x}=\frac{\int_0^x g(t)dt}{x}+g(x).$$

Παρατηρούμε ότι για να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x g(t)dt}{x}$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x g(t)dt}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{1}=g(0)$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\int_0^x g(t)dt}{x}+g(x)\right)=g(0)+g(0)=2g(0)$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=2g(0)$.

β) Επειδή η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Για $x=1$ είναι $\int_1^1 f(t)dt=1\left(\int_0^1 g(t)dt-1\right)\Leftrightarrow \int_0^1 g(t)dt=1>0$. Αν ήταν $g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε $\int_0^1 g(t)dt<0$ που δεν ισχύει, άρα $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Εστω $h(x)=\left(\int_0^x g(t)dt\right)^2+2f(x)-1+4x$, $x\in[0,1]$.

$h(0)=2f(0)-1=2\int_0^0 g(t)dt-1-1=-2<0$,

$h(1)=\left(\int_0^1 g(t)dt\right)^2+2f(1)-1+4=1+2\left(\int_0^1 g(t)dt-1+g(1)\right)+3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h(1)=4+2(1-1+g(1))=3+2g(1)>0$ και επειδή η h είναι συνεχής, από το Θ.Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε: $h(x_0)=0 \Leftrightarrow \left(\int_0^{x_0} g(t)dt\right)^2+2f(x_0)=1-4x_0$.

147. **α)** Για $x=0$ είναι $0+1\leq f(0)\leq e^0=1 \Leftrightarrow f(0)=1$.

Άρα $x+1\leq f(x)\leq e^x \Leftrightarrow x\leq f(x)-f(0)\leq e^x-1$.

Αν $x>0$, τότε: $1\leq \frac{f(x)-f(0)}{x}\leq \frac{e^x-1}{x}$. Επειδή $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{1}=1$, λόγω του κριτηρίου παρεμβολής είναι και $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1$. Όμοια και $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1$, άρα $f'(0)=1$.

β) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt-e^x+1}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-e^x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1+1-e^x}{x}=$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-1}{x}-\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{1}{2}(1-1)=0.$$

γ) Εστω $g(x)=\int_0^x f(t)dt-\sigma\upsilon\nu x$, $x\in[0,1]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, η συνάρτηση $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, οπότε η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε είναι και συνεχής στο διάστημα αυτό. Είναι $g(0)=\int_0^0 f(t)dt-\sigma\upsilon\nu 0=-1<0$ και $g(1)=\int_0^1 f(t)dt-\sigma\upsilon\nu 1$.

Επειδή $x+1\leq f(x)\leq e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$$\int_0^1 (x+1)dx\leq \int_0^1 f(x)dx\leq \int_0^1 e^x dx \Leftrightarrow \left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]_0^1\leq \int_0^1 f(x)dx\leq \left[e^x\right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$2-\frac{1}{2}\leq \int_0^1 f(x)dx\leq e-1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\leq \int_0^1 f(x)dx\leq e-1$, και επειδή $\sigma\upsilon\nu 1<1 \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu 1>-1$, έχουμε: $\int_0^1 f(x)dx-\sigma\upsilon\nu 1>\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}>0$, δηλαδή $g(1)>0$ και $g(0)g(1)<0$, άρα λόγω του θεωρήματος Bolzano η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow \int_0^x f(t)dt=\sigma\upsilon\nu x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

148. α) Θεωρούμε την $h(x)=\int_2^x tf(t)dt-x$, $x\in[2,3]$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[2,3]$ αφού η συνάρτηση $tf(t)$ είναι συνεχής στο $[2,3]$ και $h'(x)=xf(x)-1$. Επίσης $h(2)=-2$ και $h(3)=\int_2^3 tf(t)dt-3=1-3=-2$ οπότε $h(2)=h(3)$ άρα από Θ. Rolle υπάρχει $\rho\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $h'(p)=0 \Leftrightarrow pf(p)-1=0 \Leftrightarrow pf(p)=1$ (1).

β) Η συνάρτηση $g(x)=\int_2^x f(t)dt+\int_3^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[2,3]$ με $g'(x)=2f(x)$. Όμως $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[2,3]$ και αφού η f είναι συνεχής τότε η f διατηρεί πρόσημο και από την (1) αφού $\rho\in(2,3)$ δηλαδή $\rho>0$ πρέπει και $f(\rho)>0$ άρα $f(x)>0$ οπότε $g'(x)=2f(x)>0$ άρα η g↑ στο $[2,3]$.

γ) Η g αφού είναι παραγωγίσιμη στο $[2,3]$ θα είναι και συνεχής.

Επιπλέον $g(2)=\int_3^2 f(t)dt=-\int_2^3 f(t)dt<0$ αφού $f(t)>0$ και $g(3)=\int_2^3 f(t)dt>0$ άρα από

Θ. Bolzano υπάρχει $\xi \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$ και αφού η $g\uparrow$ τότε το ξ μοναδικό.

Δηλαδή υπάρχει μοναδικό ξ τέτοιο ώστε $\int_2^{\xi} f(t)dt + \int_3^{\xi} f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_2^{\xi} f(t)dt = \int_{\xi}^{3} f(t)dt$.

δ) Αφού $f(t)>0$ για κάθε $x\in[2,3]$ τότε $E=\int_2^3 f(t)dt = 3$ οπότε

$$I=\int_2^3 g(t)dt = \int_2^3 (t)' g(t)dt = \left[tg(t)\right]_2^3 - \int_2^3 tg'(t)dt = 3g(3)-2g(2)-\int_2^3 2tf(t)dt =$$

$$=3\int_2^3 f(t)dt - 2\int_3^2 f(t)dt - 2\int_2^3 tf(t)dt = 5\int_2^3 f(t)dt - 2\cdot 1 = 5\cdot 3 - 2 = 13.$$

149. α) Είναι $F(x)=\int_1^x \frac{1}{t} f\left(\frac{x}{t}\right)dt$, $x>0$. Θέτω $u=\frac{x}{t} \Leftrightarrow t=\frac{x}{u}$ και $dt=-\frac{xdu}{u^2}$.

άρα $F(x)=\int_x^1 f(u)\left(-\frac{1}{u}\right)du \Leftrightarrow F(x)=\int_1^x \frac{f(u)}{u}du$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής οπότε και η συνάρτηση $\frac{f(u)}{u}$ είναι συνεχής άρα και η $F(x)=\int_1^x \frac{f(u)}{u}du$ θα είναι παραγωγίσιμη με $F'(x)=\frac{f(x)}{x}$.

β) $\int_\alpha^\beta F''(x)dx = 0 \Leftrightarrow \left[F'(x)\right]_\alpha^\beta = 0 \Leftrightarrow F'(\beta)-F'(\alpha)=0 \Leftrightarrow F'(\beta)=F'(\alpha)$ και αφού $F'(x)=\frac{f(x)}{x}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων τότε για την F' εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta): F''(\xi)=0$.

γ) i. Είναι $\int_1^e f'(x)\ln x dx = \int_e^1 F'(x)dx \Leftrightarrow \left[f(x)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx = \left[F(x)\right]_e^1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(e)-F(e)=F(1)-F(e) \Leftrightarrow f(e)=0$

ii. Αφού η F κυρτή τότε $F'(x)=f(x)$

- Αν $0<x<e$ τότε $f(x)<f(e) \Leftrightarrow f(x)<0 \Leftrightarrow F'(x)<0$ άρα $F\downarrow$ στο $(0,e]$
- Αν $x>e$ τότε $f(x)>f(e) \Leftrightarrow f(x)>f(e) \Leftrightarrow f(x)>0 \Leftrightarrow F'(x)>0$ άρα $f\uparrow$ στο $[e,+\infty)$

Για κάθε $x>0$ θα είναι $F(x)\geq F(e)$.

150. α) Είναι $f^2(x)+x^2=2x \Leftrightarrow f^2(x)=2x-x^2$ (1) οπότε η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0$ γίνεται $2x-x^2=0 \Leftrightarrow x(2-x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$.

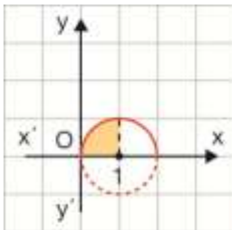
β) Εστω ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,2)$ τότε αφού η f είναι συνεχής και θα υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,2)$ τέτοια ώρα $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$ από Θ. Bolzano θα υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$. Οπότε η (1) για $x=x_0$ γίνεται $2x_0-x_0^2=0 \Leftrightarrow x_0(2-x_0)=0 \Leftrightarrow x_0=0$ ή $x_0=2$ (άτοπο) γιατί $x_0(0,2)$.

γ) Οπότε αφού $f(x)\neq 0$ για $x\in(0,2)$ και η f συνεχής στο $(0,2)$. Επειδή $f(1)=1>0$ τότε $f(x)>0$ για $x\in(0,2)$ άρα η (1) θα είναι $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$.

δ) Επειδή $f(x)>0$ τότε το ζητούμενο εμβαδό είναι $E(\Omega)=\int_0^1\sqrt{2x-x^2}dx$.

Εστω $\sqrt{2x-x^2}=y \Leftrightarrow 2x-x^2-y^2 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2=0 \Leftrightarrow$

$x^2+2x+1+y^2=1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1.$



Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου του κυκλικού δίσκου με κέντρο $K(1,0)$ και $\rho=1$.

$E=\frac{\pi\rho^2}{4}=\frac{\pi\cdot 1^2}{4}=\frac{\pi}{4}$ οπότε $E(\Omega)=\frac{\pi}{4}$

ε) Η $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ γίνεται $f(x)=\sqrt{1-1+2x-x^2} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{1-(1-x)^2}$.

Εστω $x_1,x_2 \in (0,1)$ με $x_1<x_2 \Leftrightarrow 1-x_1>1-x_2>0 \Leftrightarrow (1-x_1)^2>(1-x_2)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-(1-x_1^2)}<\sqrt{1-(1-x_2^2)} \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ οπότε η $f\uparrow$ στο $[0,1]$ άρα και $1-1$ συνεπώς αντιστρέφεται.

Εστω $f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{1-(1-x)^2}=y^2 \Leftrightarrow 1-(1-x)^2=y^2 \Leftrightarrow (1-x)^2=1-y^2 \Leftrightarrow 1-x=\pm\sqrt{1-y^2}$

αφού $x\le 1$ τότε $1-x>0$ άρα $1-x=\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow x=1-\sqrt{1-y^2}$ με $\left.\begin{array}{r} y\ge 0 \\ 1-y^2\ge 0\end{array}\right\} y\in[0,1].$

Άρα $f^{-1}(x)=1-\sqrt{1-x^2}$, $x\in[0,1]$.

151. **α)** Αφού G παράγουσα της f στο $[0,1]$ τότε για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει $G'(x)=f(x)$.

Εχουμε $\int_x^1 f(t)dt \ge \frac{1-x^2}{2} \Leftrightarrow [G(t)]_x^1 \ge \frac{1-x^2}{2} \Leftrightarrow G(1)-G(x)-\frac{1-x^2}{2}\ge 0$ οπότε

$$\int_0^1\left[G(1)-G(x)-\frac{1-x^2}{2}\right]dx\ge 0 \Leftrightarrow \int_0^1 G(1)dx-\int_0^1 G(x)dx-\int_0^1\frac{1-x^2}{2}dx\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$G(1)(1-0)\ge \int_0^1 G(x)dx+\frac{1}{2}[x]_0^1-\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \Leftrightarrow G(1)\ge\int_0^1 G(x)dx+\frac{1}{2}-\frac{1}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G(1)\ge \frac{1}{3}+\int_0^1 G(x)dx \quad (1).$$

β) Ισχύει $[xG(x)]'=(x)'G(x)+xG'(x) \Leftrightarrow [xG(x)]'=G(x)+xf(x)$ οπότε

$$\int_0^1[xG(x)]'dx=\int_0^1 G(x)dx+\int_0^1 xf(x)dx \quad (2).$$

γ) $(2) \Leftrightarrow [xG(x)]_0^1=\int_0^1 G(x)dx+\int_0^1 xf(x)dx \Leftrightarrow G(1)=\int_0^1 G(x)dx+\int_0^1 xf(x)dx \quad (3)$.

Οπότε η (1) με βάση την (3) γίνεται

$$\int_0^1 G(x)dx+\int_0^1 xf(x)dx\ge\frac{1}{3}+\int_0^1 G(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 xf(x)dx\ge\frac{1}{3}.$$

δ) Είναι $f^2(x)\geq 2xf(x)-x^2 \Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2\geq 0 \Leftrightarrow (f(x)-x)^2\geq 0$ που ισχύει.

ε) $f^2(x)-2xf(x)+x^2\geq 0$ τότε $\int_0^1 (f^2(x)-2xf(x)+x^2)dx\geq 0$

$$\int_0^1 f^2(x)dx\geq \int_0^1 2xf(x)dx-\int_0^1 x^2dx=2\int_0^1 xf(x)dx-\frac{1}{3}\overset{(3)}{\geq} 2\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x)dx\geq \frac{1}{3}.$$

152. **α)** Είναι $f^5(x)+4f(x)=5x \quad (1)$, $x\in[0,1]$.

Εστω $x_1,x_2\in[0,1]$ με $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow f^5(x_1)=f^5(x_2)$ και $4f(x_1)=4f(x_2)$ οπότε με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $f^5(x_1)+4f(x_1)=f^5(x_2)+4f(x_2)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} 5x_1=5x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ οπότε η f είναι 1−1 άρα αντιστρέφεται. Αν $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$, η (1) γίνεται $y^5+4y=5f^{-1}(y)$ άρα $f^{-1}(x)=\frac{1}{5}(x^5+4x)$.

β) Στην (1) για $x=0$ έχουμε $f^5(0)+4f(0)=0\Leftrightarrow f(0)(f^4(0)+4)=0\Leftrightarrow f(0)=0$ αφού $f^4(0)+4>0$. Επίσης στην (1) για $x=1$ προκύπτει

$f^5(1)+4f(1)=5\Leftrightarrow f^5(1)+4f(1)-5=0 \quad (2)$.

Θεωρούμε την $g(x)=x^5+4x-5$, $x\in\mathbb{R}$ για την οποία παρατηρούμε ότι $g(1)=0$ και $g'(x)=5x^4+4>0$ οπότε η g είναι $\uparrow$ άρα το $x=1$ μοναδική ρίζα της εξίσωσης $x^5+4x-5=0$ οπότε από τη (2) θα είναι και $f(1)=1$.

γ) $I=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f^{-1}(x)dx$. Θέτω $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ οπότε $dx=f'(u)du$ και για $x=0$: $f(u)=0=f(0)\Leftrightarrow u_1=0$ ενώ για $x=1$: $f(u)=1=f(1)\Leftrightarrow u_2=1$ οπότε

$$I=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 uf'(u)du=\int_0^1 f(x)dx+[uf(u)]_0^1-\int_0^1 f(u)du=f(1)=1.$$

δ) Εστω ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)\leq x_0$ τότε

$$\left.\begin{array}{l} f^5(x_0)\leq x_0^5 \\ 4f(x_0)\leq 4x_0 \end{array}\right\}\overset{+}{\Rightarrow} f^5(x_0)+4f(x_0)\leq x_0^5+4x_0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}5x_0\leq x_0^5+4x_0\Leftrightarrow x_0^5-x_0\geq 0\Leftrightarrow$$

$x_0(x_0^4-1)\geq 0\Leftrightarrow x_0(x_0-1)(x_0+1)(x_0^2+1)\geq 0$, άρα $x_0\in[-1,0]\cup[1,+\infty)$ άτοπο αφού $x_0\in(0,1)$. Άρα για κάθε $x\in(0,1)$ θα είναι $f(x)>x$.

ε) Αφού $f(x)>x\Leftrightarrow f(x)-x>0$ τότε

$$\int_0^1 (f(x)-x)dx>0\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx>\int_0^1 xdx\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx>\frac{1}{2}.$$

153. **α)** Είναι $f'(x)=\frac{g'(x)-g(x)}{e^x}$ (1) οπότε

$$f'(x)=\frac{e^xg'(x)-e^xg(x)}{e^{2x}}\Leftrightarrow f'(x)=\left(\frac{g(x)}{e^x}\right)'\Leftrightarrow f(x)=\frac{g(x)}{e^x}+c$$ για $x=1$ προκύπτει $c=0$

άρα $f(x)=\frac{g(x)}{e^x}\Leftrightarrow f(x)=g(x)e^{-x}$, $x\geq 0$.

β) Αφού η C_f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2x-1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=-1$.

Οπότε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{xg(x)-2x^2e^x}\overset{(\alpha)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^xf(x)}{xe^xf(x)-2x^2e^x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^xf(x)}{e^x\cdot x\left(f(x)-2x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{f(x)-2x}\right]=2\frac{1}{(-1)}=-2.$$

γ) Αν $g(x)>g'(x)\Leftrightarrow g'(x)-g(x)<0$ τότε από (1): $f'(x)<0$ οπότε η $f\downarrow$

άρα $x\ge0\Leftrightarrow f(x)\le f(0)\Leftrightarrow f(x)-f(0)\le0\Leftrightarrow\int_0^1(f(x)-f(0))dx\le0\Leftrightarrow$

$\int_0^1f(x)dx\le\int_0^1f(0)dx\Leftrightarrow\int_0^1f(x)dx\le f(0)$.

154. **α)** Είναι $xf(x)+1+\int_{\frac{1}{x}}^{1}\dfrac{xf(xt)}{t}dt=0$ (1), $x,t>0$. Θέτουμε $u=xt\Leftrightarrow t=\dfrac{u}{x}$ οπότε $dt=\dfrac{1}{x}du$.

Άρα η (1) γίνεται: $xf(x)+1+\int_1^x\dfrac{f(u)}{\frac{u}{x}}du=0\Leftrightarrow xf(x)+1+x\int_1^x\dfrac{f(u)}{u}du=0$.

Για $x>0$ είναι $f(x)+\dfrac{1}{x}+\int_1^x\dfrac{f(u)}{u}du=0\Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{1}{x}-\int_1^x\dfrac{f(u)}{u}du$ (2).

Αφού $\dfrac{f(u)}{u}$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών τότε η συνάρτηση $\int_1^x\dfrac{f(u)}{u}du$ είναι παραγωγίσιμη και αφού και $-\dfrac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ τότε από (2) η $f(x)$ θα είναι παραγωγίσιμη.

β) Παραγωγίζοντας στην (2) έχουμε

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=\frac{1}{x}\Leftrightarrow\left(xf(x)\right)'=(\ln x)'\Leftrightarrow xf(x)=\ln x+c\quad(3).$$

Στην (2) για $x=1$ προκύπτει $f(1)=-1$ άρα στην (3) για $x=1$ έχουμε

$f(1)=\ln1+c\Leftrightarrow c=-1$ οπότε $xf(x)=\ln x-1\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{\ln x-1}{x}$, $x>0$.

γ) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{1}{x}(\ln x-1)\right]=-\infty$ άρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x-1}{x^2}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x-1}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$ οπότε η $y=0$ δηλαδή ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη.

δ) Είναι $f(x)>0 \Leftrightarrow \frac{\ln x-1}{x}>0 \Leftrightarrow \ln x-1>0 \Leftrightarrow x>e$ οπότε στο $[\lambda,1]$ με $0<\lambda<1$ είναι $f(x)<0$ και το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\lambda)=-\int_\lambda^1 f(x)dx=-\int_\lambda^1\frac{\ln x-1}{x}dx=\int_\lambda^1\frac{1}{x}dx-\int_\lambda^1(\ln x)'\ln x dx=$$

$$=\left[\ln|x|\right]_\lambda^1-\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_\lambda^1=-\ln\lambda+\frac{\ln^2\lambda}{2}\Leftrightarrow E(\lambda)=\frac{\ln^2\lambda}{2}-\ln\lambda.$$

ε) $\lim\limits_{\lambda\to 0}\left[\lambda^2 E(\lambda)\right]=\lim\limits_{\lambda\to 0}\left[\frac{\lambda^2\ln^2\lambda}{2}-\lambda^2\ln\lambda\right]=0$

γιατί $\lim\limits_{\lambda\to 0}\lambda^2\ln^2\lambda=\lim\limits_{\lambda\to 0}\frac{\ln^2\lambda}{\frac{1}{\lambda^2}}=\lim\limits_{\lambda\to 0}\frac{2\ln\lambda\frac{1}{\lambda}}{-\frac{2}{\lambda^3}}=\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(-\frac{\ln\lambda}{\frac{1}{\lambda^2}}\right)\overset{\left(\frac{-\infty}{+\alpha}\right)}{=}\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(-\frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{2}{\lambda^3}}\right)=\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right)=0$

και $\lim\limits_{\lambda\to 0}\lambda^2\ln\lambda=\lim\limits_{\lambda\to 0}\frac{\ln\lambda}{\frac{1}{\lambda^2}}=\lim\limits_{\lambda\to 0}\frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{2}{\lambda^3}}=\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right)=0$

155. **α)** Αφού $f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε και η συνάρτηση $\frac{3t^2}{3f^2(t)+1}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

οπότε η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x\frac{3t^2}{3f^2(t)+1}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x)=\frac{3x^2}{3f^2(x)+1}$ (1)

β) Αφού $f'(x)>0$ τότε η f είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ και $f(0)=0$.

Για $x<0$ είναι $f(x)<f(0)\Leftrightarrow f(x)<0$ ενώ για $x>0$ είναι $f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$

γ) Από $(1)\Rightarrow 3f^2(x)f'(x)+f'(x)=3x^2\Leftrightarrow\left(f^3(x)+f(x)\right)'=\left(x^3\right)'\Leftrightarrow f^3(x)+f(x)=x^3+c$.

Για $x=0$ προκύπτει ότι $c=0$ άρα $f^3(x)+f(x)=x^3$ (2)

δ) Αφού $f'(x)>0$ τότε η f είναι $\uparrow$ άρα και 1–1 οπότε η f αντιστρέφεται.

Αν $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ οπότε η (2) γίνεται $y^3+y=\left(f^{-1}(y)\right)^3\Leftrightarrow\left[f^{-1}(y)\right]^3=y\left(y^2+1\right)$

Αν $y<0$ $f^{-1}(y)=-\sqrt[3]{-y\left(y^2+1\right)}$ ενώ

αν $y\geq 0$ $f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y\left(y^2+1\right)}$ άρα $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt[3]{-x^3-x}, & x<0\\ \sqrt[3]{x^3+x}, & x\geq 0\end{cases}$

ε) Αφού η f είναι $\uparrow$ η εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$ είναι ισοδύναμη με την $f(x)=x$ οπότε $f^3(x)=x^3$ και από την (2) έχουμε $x^3+x=x^3\Leftrightarrow x=0$ οπότε οι $C_f, C_{f^{-1}}$ τέμνονται στο $(0,0)$.

156. α) Αφού η f είναι συνεχής τότε και η συνάρτηση $\frac{f(t)}{t}$ είναι συνεχής οπότε η συνάρτηση $g(x)=\int_e^x \frac{f(t)}{t}dt$ είναι παραγωγίσιμη οπότε και η συνάρτηση $f(x)=e^{-g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

β) Είναι (1) $f(x)=e^{-\int_e^x \frac{f(t)}{t}dt} \Leftrightarrow \ln f(x)=-\int_e^x \frac{f(t)}{t}dt$ και παραγωγίζοντας έχουμε

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x)=-f^2(x),\ x>1.$$

γ) $xf'(x)=-f^2(x) \Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)'=(\ln x)' \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}=\ln x+c \quad (2)$.

Στην (1) για $x=e$ είναι $f(e)=e^0=1$ οπότε από τη (2) για $x=e$ θα είναι $c=0$.

Άρα $f(x)=\frac{1}{\ln x},\ x>1$.

δ) Η εφαπτομένη στο $M(x_0,f(x_0))$ είναι

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y=f'(x_0)x+f(x_0)-x_0f'(x_0).$$

Αυτή τέμνει τους άξονες στα σημεία $A\left(-\frac{f(x_0)-x_0f'(x_0)}{f'(x_0)},0\right)$ και $B(0,\ f(x_0)-x_0f'(x_0))$.

$$E_{OAB}=\frac{1}{2}\left|f(x_0)-x_0f'(x_0)\right|\left|-\frac{f(x_0)-x_0f'(x_0)}{f'(x_0)}\right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{15}{2}=\frac{1}{2}\frac{\left(f(x_0)-x_0f'(x_0)\right)^2}{\left|f'(x_0)\right|} \underset{x_0>e}{\overset{f'(x_0)<0}{\Rightarrow}} -15f'(x_0)=\left(f(x_0)-x_0f'(x_0)\right)^2$$

Αρκεί να δείξουμε ότι συνάρτηση $h(x)=\left(f(x)-xf'(x)\right)^2+15f'(x)$ έχει ρίζα στο (e,e^2).

Είναι $f(e)=1,\ f'(e)=-\frac{1}{e},\ f(e^2)=\frac{1}{2}$ και $f'(e^2)=-\frac{1}{4e^2}$. Οπότε $h(e)=4-\frac{15}{e}=\frac{4e-15}{e}<0$ και $h(e^2)=\frac{9}{16}-\frac{15}{4e^2}=\frac{9e^2-60}{16e^2}>0$ γιατί $3e>8 \Leftrightarrow 9e^2>64 \Leftrightarrow 9e^2-60>0$, οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(e,e^2)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$.

ε) Εστω $F(x)=\int_1^x f(t)dt$ μία αρχική της συνεχούς συνάρτησης $f(t)$, τότε $F'(x)=f(x)$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ για την F στο $[x,x+1]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi)=\frac{F(x+1)-F(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow f(\xi)=\int_1^{x+1}f(t)dt-\int_1^x f(t)dt \Leftrightarrow \frac{1}{\ln\xi}=\int_x^{x+1}f(t)dt \quad (3).$$

Όμως $x<\xi<x+1 \Leftrightarrow \ln x<\ln\xi<\ln(x+1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\ln x}>\frac{1}{\ln\xi}>\frac{1}{\ln(x+1)} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\ln x}>\int_x^{x+1}f(t)dt>\frac{1}{\ln(x+1)}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(x+1)}=0$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}f(t)dt=0$.

157. α) Είναι $f'(x)=1-\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, οπότε είναι και 1-1 και αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, για το σύνολο τιμών της έχουμε:

$f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[f(0),f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]$. Άρα $A_{f^{-1}}=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]$.

β) Είναι $f^{-1}(f(x))=x$, οπότε $\left(f^{-1}(f(x))\right)'=(x)'$ ή

$\left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x)=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(x+\sigma\upsilon\nu x)\cdot(1-\eta\mu x)=1.$

Για $x=\frac{\pi}{4}$ είναι $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{\pi+2\sqrt{2}}{4}\right)\cdot\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)=1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{\pi+2\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{2}{2-\sqrt{2}}=\frac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}=2+\sqrt{2}.$$

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύει:

$f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow x+\sigma\upsilon\nu x=x\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=0$ άρα $x=\frac{\pi}{2}$.

Κοινό σημείο των C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι το $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

δ) Είναι $f(x)=x+\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow f(x)-x=\sigma\upsilon\nu x\geq 0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, άρα $f(x)\geq x$. Δηλαδή η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=x$, οπότε η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται κάτω από την $y=x$ και ισχύει $f(x)\geq f^{-1}(x)$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_1^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x)-f^{-1}(x)\right)dx=\int_1^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx-\int_1^{\frac{\pi}{2}}f^{-1}(x)dx.$$

Θέτουμε $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$. Για $x=1$ είναι

$f(u)=1\Leftrightarrow f(u)=f(0)\Leftrightarrow u=0$, ενώ για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $f(u)=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow f(u)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow u=\frac{\pi}{2}$.

Οπότε: $E=\int_1^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}uf'(u)du\Leftrightarrow E=\int_1^{\frac{\pi}{2}}(x+\sigma\upsilon\nu x)dx-\left[uf(u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(u)du\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow E=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{\frac{\pi}{2}}+\left[\eta\mu x\right]_1^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\sigma\upsilon\nu x)dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow E=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{8}+1=\frac{3}{2}$$

158. α) Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε και η συνάρτηση $\frac{\text{συν}t}{3f^2(t)-2f(t)+1}$ είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ οπότε η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x \frac{\text{συν}t}{3f^2(t)-2f(t)+1}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με:

$(1)\quad f'(x)=\frac{\text{συν}x}{3f^2(x)-2f(x)+1}$. Επειδή $3f^2(x)-2f(x)+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού αν τη θεωρήσουμε τριώνυμο ως προς $f(x)$ έχει $\Delta<0$. Άρα $f'(x)>0$ για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ οπότε η $f\uparrow$ στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με ελάχιστο το $f(0)=0$ και μέγιστο το $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Από την $(1)\Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x)-2f(x)f'(x)+f'(x)=\text{συν}x\Rightarrow\left(f^3(x)-f^2(x)+f(x)\right)'=(\text{ημ}x)'$ άρα $f^3(x)-f^2(x)+f(x)=\text{ημ}x+c$ για $x=0$ έχουμε $c=0$. Άρα $f^3(x)-f^2(x)+f(x)=\text{ημ}x$.

Αν θέσουμε $x=\frac{\pi}{2}$ τότε $f^3\left(\frac{\pi}{2}\right)-f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\Leftrightarrow f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)-1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right]\left[f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+1\right]=0\Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. Άρα το μέγιστο της f στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ είναι το 1

β) Αφού η $f\uparrow$ στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ τότε το σύνολο τιμών της f είναι $f(A)=\left[f(0),f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=[0,1]$

γ) Θεωρούμε την $g(x)=f(x)-\frac{2}{\pi}x$ η οποία είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $g'(x)=f'(x)-\frac{2}{\pi}$, επίσης $g(0)=0$ και $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}=1-1=0$ άρα $g(0)=g(1)$.

Οπότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{2}{\pi}$

δ) Είναι $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}xf''(x)dx=\left[xf'(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)dx=\frac{\pi}{2}f'\left(\frac{\pi}{2}\right)-0-\left[f(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f(0)=-1.$

159. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με: $f'(x)=\frac{(\ln x+1)'x-(\ln x+1)}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x-1}{x^2}=-\frac{\ln x}{x^2}$.

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow-\frac{\ln x}{x^2}\geq 0\Leftrightarrow \ln x\leq 0\Leftrightarrow x\leq 1.$

Όταν $x\in(0,1)$, είναι $f'(x)>0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$.

Όταν $x\in(1,+\infty)$ είναι $f'(x)<0$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

x	0	1	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	↗		↘

β) Εστω $y=\lambda x$ η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Επειδή τέμνει την C_f στα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$, ισχύει: $\begin{cases} f(\alpha)=\lambda\alpha \\ f(\beta)=\lambda\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha} \\ \lambda=\dfrac{f(\beta)}{\beta} \end{cases}$,

άρα $\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=\dfrac{f(\beta)}{\beta} \Leftrightarrow \dfrac{\ln\alpha+1}{\alpha^2}=\dfrac{\ln\beta+1}{\beta^2} \Leftrightarrow \beta^2\ln\alpha+\beta^2=\alpha^2\ln\beta+\alpha^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \beta^2\ln\alpha-\alpha^2\ln\beta=\alpha^2-\beta^2 \Leftrightarrow \ln\alpha^{\beta^2}-\ln\beta^{\alpha^2}=\alpha^2-\beta^2 \Leftrightarrow \ln\dfrac{\alpha^{\beta^2}}{\beta^{\alpha^2}}=\alpha^2-\beta^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\alpha^{\beta^2}}{\beta^{\alpha^2}}=e^{\alpha^2-\beta^2} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha^{\beta^2}}{\beta^{\alpha^2}}=\dfrac{e^{\alpha^2}}{e^{\beta^2}} \Leftrightarrow e^{\beta^2}\alpha^{\beta^2}=e^{\alpha^2}\beta^{\alpha^2} \Leftrightarrow (e\alpha)^{\beta^2}=(e\beta)^{\alpha^2}$.

γ) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[x,x+1]$, $x>0$ και παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$ με:

$g'(x)=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{\ln x+1}{x}=f(x)$, άρα λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχει

$\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε: $g'(\xi)=\dfrac{g(x+1)-g(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow g'(\xi)=g(x+1)-g(x)$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$, η g' είναι γνησίως φθίνουσα. Είναι $x<\xi<x+1$ και

$g'(x+1)<g'(\xi)<g'(x) \Leftrightarrow \dfrac{\ln(x+1)+1}{x+1}<g(x+1)-g(x)<\dfrac{\ln x+1}{x}$.

δ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$, ισχύει:

$1\le x\le e \Leftrightarrow f(1)\ge f(x)\ge f(e) \Leftrightarrow \dfrac{2}{e}\le f(x)\le 1$. Δηλαδή $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,e]$.

Το εμβαδόν είναι: $E=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e \dfrac{\ln x+1}{x}dx=\int_1^e \dfrac{\ln x}{x}dx+\int_1^e \dfrac{1}{x}dx \Leftrightarrow$

$E=\int_1^e \ln x(\ln x)'dx+[\ln x]_1^e=\left[\dfrac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e+1=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$.

160. **α)** $f(x)<xf'(x) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}<f'(x)$, $x>0$. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,x)$, οπότε λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)}{x}$. Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, η f' είναι γνησίως αύξουσα και $0<\xi<x$, άρα $f'(\xi)<f'(x) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}<f'(x) \Leftrightarrow f(x)<xf'(x)$, $x>0$.

β) Επειδή η συνάρτηση $\dfrac{f(t)}{t}$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, η F είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό με: $F'(x)=\left(\int_1^x \dfrac{f(t)}{t}dt\right)'=\dfrac{f(x)}{x}$ και $F''(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$. Όμως $xf'(x)>f(x)$, άρα $F''(x)>0$, οπότε η F είναι κυρτή στο $(0,x)$.

γ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι, η εξίσωση $g(x)=h(x)\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}-x=e^{-x}-x\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}-e^{-x}=0$, έχει το πολύ μια ρίζα στο $(0,+\infty)$. Εστω $t(x)=\frac{f(x)}{x}-e^{-x}$, $x\in(0,+\infty)$.

Είναι $t(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}+e^{-x}>0$, άρα η t είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε η εξίσωση $t(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα αυτό.

161. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^{\alpha x+\beta}+\alpha xe^{\alpha x+\beta}=e^{\alpha x+\beta}(1+\alpha x)$. Επειδή η C_f διέρχεται από το σημείο A, ισχύει: $f(-1)=-e^2\Leftrightarrow -e^{-\alpha+\beta}=-e^2\Leftrightarrow -\alpha+\beta=2\ \ (1)$.

Επειδή η εφαπτομένη της C_f στο A είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2e^2x-e$, ισχύει:

$f'(-1)=\lambda=2e^2\Leftrightarrow e^{-\alpha+\beta}(1-\alpha)=2e^2\Leftrightarrow e^2(1-\alpha)=2e^2\Leftrightarrow 1-\alpha=2\Leftrightarrow \alpha=-1$.

Τότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι: $1+\beta=2\Leftrightarrow \beta=1$.

β) Για $\alpha=-1$ και $\beta=1$ είναι $f(x)=xe^{1-x}$ και $f'(x)=e^{1-x}(1-x)$.

Για κάθε $x<1$ είναι $f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$.

Για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
e^{1-x}	$+$		$+$
$1-x$	$+$	0	$-$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{1-x}=-\infty\ \ \left((-\infty)\cdot(+\infty)\right)$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{1-x}\overset{\infty\cdot 0}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=0$

και $f(1)=1$. Για το σύνολο τιμών του διαστήματος $\Delta_1=(-\infty,1]$, έχουμε:

$f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(1)\right]=(-\infty,1]$. Για το σύνολο τιμών του διαστήματος $\Delta_2=[1,+\infty)$, έχουμε: $f(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(1)\right]=(0,1]$. Άρα $f(A)=(-\infty,1]\cup(0,1]=(-\infty,1]$.

γ) Αρκεί να βρούμε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=k$.

- Αν $k>1$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη, γιατί λόγω του συνόλου τιμών της f ισχύει: $f(x)\le 1$.
- Αν $k=1$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x=1\ \ (f(1)=1)$.
- Αν $0<k<1$, τότε η εξίσωση έχει ακριβώς 2 ρίζες, μία στο $(-\infty,1)$ και μία στο $(1,+\infty)$.
- Αν $k<0$, τότε η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα που βρίσκεται στο διάστημα $(-\infty,1)$.

δ) Για κάθε $0\le x\le 1$, είναι $f(0)\le f(x)\le f(1)\Leftrightarrow 0\le f(x)\le 1$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E=\int_0^1 xe^{1-x}dx=-\int_0^1 x\left(e^{1-x}\right)'dx=-\left[xe^{1-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{1-x}dx=-1-\left[e^{1-x}\right]_0^1=e-2$.

162. **α)** Η συνάρτηση $\dfrac{6t^2+1}{3f^2(t)+2}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{6x^2+1}{3f^2(x)+2} \Leftrightarrow 3f'(x)f^2(x)+2f'(x)=6x^2+1 \quad (1)$

$\Leftrightarrow \left(f^3(x)+2f(x)\right)'=\left(2x^3+x\right)' \Leftrightarrow f^3(x)+2f(x)=2x^3+x+c$, $c\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ είναι $f(0)=\int_0^0 \dfrac{6t^2+1}{3f^2(t)+2}dt=0$ και $f^3(0)+2f(0)=2\cdot 0^3+0+c \Leftrightarrow c=0$ και

$f^3(x)+2f(x)=2x^3+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Η σχέση (1) για $x=0$ γίνεται: $3f'(0)f^2(0)+2f'(0)=6\cdot 0^2+1 \Leftrightarrow 2f'(0)=1 \Leftrightarrow f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο Α έχει εξίσωση: $y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}x$.

γ) Για $x=1$ είναι $f(1)=\int_0^1 \dfrac{6t^2+1}{3f^2(t)+2}dt$, όμως $f^3(1)+2f(1)=2\cdot 1^3+1 \Leftrightarrow f^3(1)+2f(1)-3=0 \Leftrightarrow$

$\left(f(1)-1\right)\left(f^2(1)+f(1)+3\right)=0 \Leftrightarrow f(1)=1$ ή $f^2(1)+f(1)+3=0$ που είναι αδύνατο.

Άρα $\int_0^1 \dfrac{6t^2+1}{3f^2(t)+2}dt=f(1)=1$.

δ) Είναι $f'(x)=(x+1)e^{x-1} \Leftrightarrow f'(x)-\left(xe^{x-1}+e^{x-1}\right)=0 \Leftrightarrow \left(f(x)-xe^{x-1}\right)'=0$. Εστω $g(x)=f(x)-xe^{x-1}$, $x\in[0,1]$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $g'(x)=\left(f(x)-xe^{x-1}\right)'=f'(x)-\left(xe^{x-1}+e^{x-1}\right)$.

Είναι $g(0)=f(0)=0$ και $g(1)=f(1)-1=0$, δηλαδή $g(0)=g(1)$, άρα λόγω του θεωρήματος Rolle υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=(\xi+1)e^{\xi-1}$.

ε) Είναι $f'(x)=\dfrac{6x^2+1}{3f^2(x)+2}>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

στ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ είναι και 1–1 οπότε αντιστρέφεται.
Επειδή τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$ βρίσκονται επί της ευθείας $y=x$ έχουμε:

$f(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x)=x$, οπότε η σχέση $f^3(x)+2f(x)=2x^3+x$, γίνεται:

$x^3+2x=2x^3+x \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\pm 1$.

Άρα τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι τα $(0,0),(1,1)$ και $(-1,-1)$.

163. **α)** Επειδή η f είναι συνεχής και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f(0)=1+\int_0^0 \dfrac{t}{f(t)}dt=1>0$, άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση $\dfrac{t}{f(t)}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση $\int_0^x \dfrac{t}{f(t)}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x)=\left(1+\int_0^x \frac{t}{f(t)}dt\right)'=\frac{x}{f(x)}\Leftrightarrow f'(x)f(x)=x\Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=2x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(f^2(x)\right)'=\left(x^2\right)'\Leftrightarrow f^2(x)=x^2+c\,,\ c\in\mathbb{R}\,.$$

Για $x=0$ είναι $f^2(0)=c\Leftrightarrow c=1$ και $f^2(x)=x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$. Επειδή η f είναι συνεχής και διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, ισχύει ότι: $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ ή $f(x)=-\sqrt{x^2+1}$. Επειδή επιπλέον $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $f(x)=\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$.

γ) Είναι $h(x)=\dfrac{f^2(x)}{x^2}=\dfrac{x^2+1}{x^2}=1+\dfrac{1}{x^2}\,,\ x\neq 0$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $h'(x)=-\dfrac{2}{x^3}$.

Για $x<0$ είναι $h'(x)>0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$.

Για $x>0$ είναι $h'(x)<0$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h'	$+$	‖	$-$
h	↗	‖	↘

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=1,\ \lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=1,$

$\lim\limits_{x\to0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=+\infty$, οπότε:

Για το διάστημα $\Delta_1=(-\infty,0)$, έχουμε: $h(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}h(x),\lim\limits_{x\to0^-}h(x)\right)=(1,+\infty)$.

Για το διάστημα $\Delta_2=(0,+\infty)$, έχουμε: $h(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}h(x),\lim\limits_{x\to0^+}h(x)\right)=(1,+\infty)$.

Το σύνολο τιμών της h είναι $h(A)=h(\Delta_1)\cup h(\Delta_2)=(1,+\infty)$.

δ) Εστω $g(u)=\int_1^u h(t)dt\,,\ u\in[x,x+1],\ x>0$. Επειδή η h είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, η g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό. Άρα η g είναι συνεχής στο $[x,x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$ με $g'(u)=\left(\int_1^u h(t)dt\right)'=h(u)$.

Λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε:

$$g'(\xi)=\frac{g(x+1)-g(x)}{x+1-x}=\int_1^{x+1}h(t)dt-\int_1^x h(t)dt=\int_1^{x+1}h(t)dt+\int_x^1 h(t)dt=\int_x^{x+1}h(t)dt\,.$$

Είναι $x<\xi<x+1$ και η $g'(x)=h(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$, άρα

$$g'(x)>g'(\xi)>g'(x+1)\Leftrightarrow h(x+1)<h(\xi)<h(x)\Leftrightarrow 1+\frac{1}{(x+1)^2}<\int_x^{x+1}h(t)dt<1+\frac{1}{x^2}\,.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]=1,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=1$, άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}h(t)dt=1.$

164. α) $\int_1^x xf(t)dt \le x^2 - 2\eta\mu x \Leftrightarrow x\int_1^x f(t)dt - x^2 + 2\eta\mu x \le 0$.

Εστω $g(x) = x\int_1^x f(t)dt - x^2 + 2\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $g(0) = 0$. Η ανίσωση γίνεται: $g(x) \le g(0)$, $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή η g παρουσιάζει μέγιστο στο εσωτερικό σημείο $x = 0$ του πεδίου ορισμού της. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση $\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$g'(x) = \left(x\int_1^x f(t)dt - x^2 + 2\eta\mu x\right)' = \int_1^x f(t)dt + xf(x) - 2x + 2\sigma\upsilon\nu x$, από το θεώρημα Fermat προκύπτει ότι $g'(0) = 0 \Leftrightarrow \int_1^0 f(t)dt + 2 = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)dt = 2$

β) Αρκεί η εξίσωση $f(x) = 2$, να έχει τουλάχιστον μία ρίζα. Έστω $h(x) = \int_0^x f(t)dt - 2x$.

Παρατηρούμε ότι $h(0) = 0$ και $h(1) = \int_0^1 f(t)dt - 2 = 0$, δηλαδή $h(0) = h(1)$. Επειδή η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $h'(x) = f(x) - 2$, λόγω του θεωρήματος Rolle η εξίσωση $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

γ) Εστω $t(x) = \int_2^x f(t)dt$, $x \in [2,3]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[2,3]$, η t είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό, οπότε είναι συνεχής στο $[2,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,3)$ με $t'(x) = f(x)$. Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (2,3)$ τέτοιο ώστε

$t'(\xi) = \dfrac{t(3) - t(2)}{3 - 2} \Leftrightarrow f(\xi) = \int_2^3 f(t)dt < 0$. Είναι $f(2)f(\xi) < 0$ και η f είναι συνεχής στο διάστημα $[2,\xi]$, οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

165. α) Είναι $e^x f(x) + f'(x) + \eta\mu x = -e^x f'(x) \Leftrightarrow e^x f(x) + e^x f'(x) + f'(x) = -\eta\mu x$ ή

$\left[e^x f(x) + f(x)\right]' = (\sigma\upsilon\nu x)' \Leftrightarrow e^x f(x) + f(x) = \sigma\upsilon\nu x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Για $x = 0$ είναι $e^0 f(0) + f(0) = \sigma\upsilon\nu 0 + c \Leftrightarrow 2f(0) = 1 + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$.

Άρα $e^x f(x) + f(x) = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow (e^x + 1)f(x) = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) $f(x) + f(-x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x + 1} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu(-x)}{e^{-x} + 1} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x + 1} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\frac{1}{e^x} + 1} \Leftrightarrow$

$f(x) + f(-x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x + 1} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\frac{1 + e^x}{e^x}} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x + 1} + \dfrac{e^x \sigma\upsilon\nu x}{e^x + 1} \Leftrightarrow f(x) + f(-x) = \dfrac{(e^x + 1)\sigma\upsilon\nu x}{e^x + 1} = \sigma\upsilon\nu x$.

γ) Είναι $|f(x)| = \left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x + 1}\right| = \dfrac{|\sigma\upsilon\nu x|}{e^x + 1} \le \dfrac{1}{e^x + 1} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{e^x + 1} \le f(x) \le \dfrac{1}{e^x + 1}$.

Επειδή $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x + 1} = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(-\dfrac{1}{e^x + 1}\right)$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

δ) Επειδή $f(x)+f(-x)=συνx$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} συνx dx \quad (1).$$

Θέτουμε $-x=u$, τότε $dx=-du$. Για $x=-\frac{\pi}{2}$ είναι $u=\frac{\pi}{2}$, ενώ για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $u=-\frac{\pi}{2}$.

Τότε: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(u)du=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=I$.

Η (1) γίνεται: $I+I=\left[ημx\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow 2I=ημ\frac{\pi}{2}-ημ\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\Leftrightarrow I=1.$

ε) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με

$f'(x)=\dfrac{-ημx\left(e^x+1\right)-e^xσυνx}{\left(e^x+1\right)^2}=-\dfrac{ημx\left(e^x+1\right)+e^xσυνx}{\left(e^x+1\right)^2}<0$, άρα η f είναι γνησίως

φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Για κάθε $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ είναι $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\le f(x)\le f(0)\Leftrightarrow 0\le f(x)\le\frac{1}{2}$,

άρα και $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}dx\Leftrightarrow 0\le\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\le\frac{\pi}{4}$.

στ) Εστω $h(x)=2\int_0^x\frac{συνt}{e^t+1}dt-x=2\int_0^x f(t)dt-x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Είναι $h'(x)=2f(x)-1<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, άρα $h\downarrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$$0\le x\le\frac{\pi}{2}\overset{h\downarrow}{\Rightarrow} h(x)\le h(0)=0\Leftrightarrow 2\int_0^x\frac{συνt}{e^t+1}dt\le x.$$

ζ) $1000συνx_0=e^{x_0}+1\Leftrightarrow\dfrac{συνx_0}{e^{x_0}+1}=\dfrac{1}{1000}\Leftrightarrow f(x_0)=0{,}001.$

Επειδή ο αριθμός 0,001 ανήκει στο σύνολο τιμών της f, υπάρχει $x_0\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0{,}001\Leftrightarrow 1000συνx_0=e^{x_0}+1$.

166. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1}{x}-\lambda$. Είναι $f(1)=-\lambda-2$, $f'(1)=1-\lambda$ και η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι η ευθεία $\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=(1-\lambda)x-3$.

β) Είναι $f'(x)=\frac{1}{x}-\lambda=\frac{1-\lambda x}{x}$. $f'(x)\ge 0\Leftrightarrow 1-\lambda x\ge 0\Leftrightarrow x\le\frac{1}{\lambda}$.

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{\lambda}\right)$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f

είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{1}{\lambda}\right]$.

Για κάθε $x\in\left(\frac{1}{\lambda},+\infty\right)$ είναι $f'(x)<0$ άρα η f

είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{\lambda},+\infty\right)$.

x	$-\infty$	$1/\lambda$	$+\infty$
f′	+	0	−
f	↗	Ο.Μ.	↘

Η f έχει μέγιστο το $f\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\ln\frac{1}{\lambda}-\lambda\frac{1}{\lambda}-2=-\ln\lambda-3<0$,

άρα $f(x)\le f\left(\frac{1}{\lambda}\right)<0$ για κάθε $x>0$.

γ) Είναι $f''(x)=\left(\frac{1}{x}-\lambda\right)'=-\frac{1}{x^2}<0$, οπότε η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$.

δ) Επειδή η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$ βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό. Άρα η f βρίσκεται κάτω και από την ευθεία ε του α) ερωτήματος, δηλαδή $f(x)\le(1-\lambda)x-3$ για κάθε $x>0$.

ε) i. Είναι $f(x)\le(1-\lambda)x-3 \Leftrightarrow (1-\lambda)x-3-f(x)\ge 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)x-3-\ln x+\lambda x+2\ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-1-\ln x\ge 0$ για κάθε $x>0$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\lambda)=\int_1^{\lambda}\left[(1-\lambda)x-3-f(x)\right]dx=\int_1^{\lambda}(x-1-\ln x)dx \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda)=\int_1^{\lambda}xdx-\int_1^{\lambda}dx-\int_1^{\lambda}\ln x(x)'dx \Leftrightarrow E(\lambda)=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{\lambda}-\lambda+1-\left[x\ln x\right]_1^{\lambda}+\int_1^{\lambda}x\frac{1}{x}dx \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda)=\frac{\lambda^2-1}{2}-\lambda+1-\lambda\ln\lambda+\lambda-1 \Leftrightarrow E(\lambda)=\frac{1}{2}\left(\lambda^2-1-2\lambda\ln\lambda\right).$$

ii. $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\lambda^2-1-2\lambda\ln\lambda\right)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2}\lambda^2\left(1-\frac{1}{\lambda^2}-2\frac{\ln\lambda}{\lambda}\right)=+\infty$

γιατί $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\ln\lambda}{\lambda}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\frac{1}{\lambda}}{1}=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}=0$.

167. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$f'(x)=2\frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x-2)+2\sqrt{x}\frac{1}{x}=\frac{\ln x-2}{\sqrt{x}}+2\frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} \Leftrightarrow f'(x)=\frac{\ln x-2}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x\right)=-\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$.

β) $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow \ln x\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$.

Όταν $x>1$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Όταν $0<x<1$ είναι $f'(x)<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘	Ο.Ε.	↗	

Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=2\sqrt{1}(\ln 1-2)=2(-2)=-4$.

γ) Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$f''(x)=\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x}-\ln x\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}.\quad f''(x)\ge 0 \Leftrightarrow 2-\ln x\ge 0 \Leftrightarrow \ln x\le 2 \Leftrightarrow x\le e^2.$$

Όταν $0<x<e^2$ είναι $f''(x)>0$, άρα η f είναι κυρτή στο $\left(0,e^2\right]$. Όταν $x>e^2$ είναι $f''(x)<0$, άρα η f είναι κοίλη στο $\left[e^2,+\infty\right)$.

Η f έχει σημείο καμπής το $\left(e^2,f\left(e^2\right)\right)\equiv\left(e^2,0\right)$.

x	0		e^2		$+\infty$
f''		+	0	−	
f			Σ.Κ.		

δ) Είναι $x_1=1,\ x_2=e^2$ και $f(x)<0$ για κάθε $x\in\left(1,e^2\right)$, άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=-\int_1^{e^2}f(x)dx=-2\int_1^{e^2}\sqrt{x}(\ln x-2)dx\Leftrightarrow E(\Omega)=-2\int_1^{e^2}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)'(\ln x-2)dx\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=-\frac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}(\ln x-2)\right]_1^{e^2}+\frac{4}{3}\int_1^{e^2}x^{\frac{3}{2}}\frac{1}{x}dx=-\frac{4}{3}\left[e^3(2-2)-(-2)\right]+\frac{4}{3}\int_1^{e^2}x^{\frac{1}{2}}dx\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=-\frac{8}{3}+\frac{4}{3}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^{e^2}=-\frac{8}{3}+\frac{8}{9}\left(e^3-1\right)=\frac{8\left(e^3-2\right)}{9}.$$

168. α) Επειδή οι f,g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, ισχύει: $\left(f^2(x)+g^2(x)\right)'=(4)'$ ή $2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)=0$. Επειδή $f'(x)=g^2(x)$, είναι

$$2f(x)g^2(x)+2g(x)g'(x)=0\Leftrightarrow 2g(x)g'(x)=-2f(x)g^2(x)\Leftrightarrow g'(x)=\frac{\cancel{2}f(x)g^{\cancel{2}}(x)}{\cancel{2}\,\cancel{g(x)}}\Leftrightarrow$$

$g'(x)=-f(x)g(x)$.

β) Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής και αφού $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Είναι $g(0)=2>0$, άρα $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Είναι $f'(x)=g^2(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f^2(0)+g^2(0)=4\overset{g(0)=2}{\Leftrightarrow}f^2(0)+4=4\Leftrightarrow f^2(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$.

Για $x<0$ είναι $f(x)<f(0)=0\overset{g(x)>0}{\Leftrightarrow}f(x)g(x)<0\Leftrightarrow -f(x)g(x)>0\Leftrightarrow g'(x)>0$ και g γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$.

Για $x>0$ είναι $f(x)>f(0)=0\overset{g(x)>0}{\Leftrightarrow}f(x)g(x)>0\Leftrightarrow -f(x)g(x)<0\Leftrightarrow g'(x)<0$ και g γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $g(0)=2$.

γ) Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η f' είναι παραγωγίσιμη με:

$f''(x)=\left(g^2(x)\right)'=2g(x)g'(x)$.

Για $x<0$ είναι $g'(x)>0$ και αφού $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f''(x)>0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$.

Για $x>0$ είναι $g'(x)<0$, οπότε $f''(x)<0$ και f κοίλη στο $[0,+\infty)$.

Η f έχει σημείο καμπής το $(0,f(0))\equiv(0,0)$.

δ) Η εφαπτομένη της C_f στο O είναι η ευθεία $\varepsilon: y - f(0) = f'(0)(x-0)$.

Όμως $f'(0) = g^2(0) = 4$, άρα ε: $y = 4x$.

ε) Επειδή η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$ βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό. Δηλαδή $f(x) \le 4x$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_0^1 |f(x) - 4x| dx = \int_0^1 (4x - f(x)) dx = \int_0^1 4x dx + \int_0^1 \frac{g'(x)}{g(x)} dx \Leftrightarrow$$

$$E = 2\left[x^2\right]_0^1 + \left[\ln g(x)\right]_0^1 = 2 + (\ln g(1) - \ln g(0)) = 2 - \ln 2.$$

169. α) $\int_0^x (t^2+1) f''(t) dt + 2\int_0^x t f'(t) dt + \int_0^2 x t f(x) dt = 0 \Leftrightarrow$

$$\int_0^x (t^2+1) f''(t) dt + 2\int_0^x t f'(t) dt + x f(x) \int_0^2 t dt = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x (t^2+1) f''(t) dt + 2\int_0^x t f'(t) dt + x f(x) \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x (t^2+1) f''(t) dt + 2\int_0^x t f'(t) dt + 2x f(x) = 0.$$

Παραγωγίζοντας κατά μέλη την προηγούμενη σχέση έχουμε:

$$\left(\int_0^x (t^2+1) f''(t) dt + 2\int_0^x t f'(t) dt + 2x f(x)\right)' = 0 \text{ ή}$$

$$(x^2+1) f''(x) + 2x f'(x) + 2f(x) + 2x f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[(x^2+1) f'(x)\right]' + \left[2x f(x)\right]' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[(x^2+1) f'(x) + 2x f(x)\right]' = 0 \Leftrightarrow (x^2+1) f'(x) + 2x f(x) = c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Για $x = 0$ είναι $f'(0) = c \Leftrightarrow c = 2$ και $(x^2+1) f'(x) + 2x f(x) = 2 \Leftrightarrow$

$$(x^2+1) f'(x) + (x^2+1)' f(x) = (2x)' \Leftrightarrow \left[(x^2+1) f(x)\right]' = (2x)' \Leftrightarrow$$

$$(x^2+1) f(x) = 2x + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}.$$

Για $x = 0$ είναι $f(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$ και $(x^2+1) f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$.

β) Είναι $|h(x) + x - 3| \le |f(x)| \Leftrightarrow -|f(x)| \le h(x) + x - 3 \le |f(x)|$.

Όμως $\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = \lim_{x\to+\infty} \left|\frac{2x}{x^2+1}\right| = 0 = \lim_{x\to+\infty} (-|f(x)|)$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x\to+\infty} (h(x) + x - 3) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} (h(x) - (-x+3)) = 0$. Άρα η ευθεία $y = -x + 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$.

γ) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E = \int_0^3 |h(x) - (-x+3)| dx$.

Είναι $|h(x) + x - 3| \le |f(x)| \Leftrightarrow |h(x) + x - 3| - |f(x)| \le 0$, άρα και

$\int_0^3 \left[|h(x) + x - 3| - |f(x)|\right] \le 0 \Leftrightarrow \int_0^3 |h(x) + x - 3| dx \le \int_0^3 |f(x)| dx$. Όμως $f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \ge 0$ για κάθε $x \in [0,3]$, άρα $\int_0^3 |h(x) + x - 3| dx \le \int_0^3 \frac{2x}{x^2+1} dx = \left[\ln(x^2+1)\right]_0^3 = \ln 10$.

170. **α)** Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,\lambda]$ και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[1,\lambda]$, ισχύει:

$$E(\lambda)=\int_1^{\lambda}f(x)dx=\int_1^{\lambda}\left(\frac{x^3}{3}\right)'\ln x dx \Leftrightarrow E(\lambda)=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^{\lambda}-\int_1^{\lambda}\frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx=\frac{\lambda^3}{3}\ln\lambda-\frac{1}{3}\int_1^{\lambda}x^2dx \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda)=\frac{\lambda^3}{3}\ln\lambda-\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^{\lambda}=\frac{\lambda^3}{3}\ln\lambda-\frac{\lambda^3-1}{9}=\frac{1}{9}\left(3\lambda^3\ln\lambda-\lambda^3+1\right).$$

β) Η συνάρτηση $E(\lambda)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$E'(\lambda)=\frac{1}{9}\left(9\lambda^2\ln\lambda+3\lambda^3\frac{1}{\lambda}-3\lambda^2\right)=\lambda^2\ln\lambda>0$ για κάθε $\lambda\in(1,+\infty)$, άρα η $E(\lambda)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$. Είναι $\lim\limits_{\lambda\to1^+}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to1^+}\frac{1}{9}\left(3\lambda^3\ln\lambda-\lambda^3+1\right)=0$ και

$$\lim_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{9}\left(3\lambda^3\ln\lambda-\lambda^3+1\right)\Leftrightarrow\lim_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left[\frac{1}{9}\lambda^3\left(3\ln\lambda-1+\frac{1}{\lambda^3}\right)\right]=+\infty.$$

Για το σύνολο τιμών της E ισχύει: $E((1,+\infty))=\left(\lim\limits_{\lambda\to1^+}E(\lambda),\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)\right)=(0,+\infty)$.

Αν $\alpha\leq0$, τότε η εξίσωση $E(\lambda)=\alpha$ είναι προφανώς αδύνατη.

Αν $\alpha>0$, τότε επειδή το α ανήκει στο σύνολο τιμών της E και η E είναι γνησίως αύξουσα, η εξίσωση $E(\lambda)=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα.

γ) Αρκεί $x^{x^2}\geq e^{-\frac{1}{2e}}\Leftrightarrow \ln x^{x^2}\geq \ln e^{-\frac{1}{2e}}\Leftrightarrow x^2\ln x\geq-\frac{1}{2e}\Leftrightarrow f(x)\geq-\frac{1}{2e}$.

Είναι $f'(x)=x(2\ln x+1)\geq0\Leftrightarrow x\geq e^{-\frac{1}{2}}$.

Για κάθε $x>e^{-\frac{1}{2}}$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow\left[e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right)$ και

για κάθε $0<x<e^{-\frac{1}{2}}$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow\left(0,e^{-\frac{1}{2}}\right]$.

Η f έχει ελάχιστο το $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{2e}$, άρα $f(x)\geq-\frac{1}{2e}\Leftrightarrow x^2\ln x\geq-\frac{1}{2e}\Leftrightarrow x^{x^2}\geq e^{-\frac{1}{2e}}$ και

επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x=e^{-\frac{1}{2}}$, είναι και: $\int_1^e x^{x^2}dx>\int_1^e e^{-\frac{1}{2e}}dx$.

171. **α)** Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0=f(0)$,

άρα η f είναι συνεχής στο 0.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\ln x+1$.

Είναι $f'(x)\geq0\Leftrightarrow\ln x+1\geq0\Leftrightarrow\ln x\geq-1\Leftrightarrow x\geq e^{-1}=\frac{1}{e}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln x=+\infty$ και $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}$.

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ είναι $f'(x) < 0$,

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{1}{e}\right]$.

x	0		$1/e$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Οπότε $f\left(\left(0, \frac{1}{e}\right]\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(0)\right) = \left[-\frac{1}{e}, 0\right)$.

Για κάθε $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ είναι $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

Οπότε $f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

Το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f(A) = f\left(\left(0, \frac{1}{e}\right]\right) \cup f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)\right) = \left[-\frac{1}{e}, 0\right) \cup \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

γ) $x = e^{\frac{\alpha}{x}} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x = \ln e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x\ln x = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha \quad (1)$.

- Αν $\alpha < -\frac{1}{e}$, τότε $\alpha \notin f(A)$ και η (1) είναι αδύνατη.
- Αν $\alpha = -\frac{1}{e}$, τότε επειδή $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ και $f(x) > -\frac{1}{e}$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$, η (1)

  έχει μοναδική ρίζα την $x = \frac{1}{e}$.
- Αν $\alpha \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$ τότε:

  – Υπάρχει $x_1 \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = \alpha$ και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό, το x_1 είναι μοναδικό.

  – Υπάρχει $x_2 \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = \alpha$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, το x_2 είναι μοναδικό. Άρα η (1) έχει ακριβώς δύο ρίζες στη περίπτωση αυτή.
- Αν $\alpha \in (0, +\infty)$, τότε υπάρχει $x_1 \in (1, +\infty)$ ($f(1) = 0$) τέτοιο, ώστε $f(x_1) = \alpha$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, το x_1 είναι μοναδικό.

Άρα η (1) έχει ακριβώς μία ρίζα στη περίπτωση αυτή.

δ) Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x, x+1]$, $x > 0$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$, οπότε λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$, τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x).$$

Είναι $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Είναι $x < \xi < x+1$, οπότε $f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$.

ε) Εστω ευθεία $x=\lambda$, $\lambda\in(0,1)$. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον $x'x$, την $x=\lambda$ και την $x=1$ είναι:

$$E(\lambda)=\int_\lambda^1|f(x)|dx=-\int_\lambda^1 x^2\ln x dx=-\int_\lambda^1\left(\frac{x^3}{3}\right)'\ln x dx=-\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_\lambda^1+\int_\lambda^1\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx\Leftrightarrow$$

$$E(\lambda)=\frac{\lambda^3}{3}\ln\lambda+\left[\frac{x^3}{9}\right]_\lambda^1=\frac{\lambda^3}{3}\ln\lambda+\frac{1-\lambda^3}{9}=\frac{3\lambda^3\ln\lambda+1-\lambda^3}{9}=\frac{1}{9}\lambda^3(\ln\lambda-1)+\frac{1}{9}.$$

Το ζητούμενο εμβαδό είναι το $E(\Omega)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\left[\frac{1}{9}\lambda^3(\ln\lambda-1)+\frac{1}{9}\right]$.

Επειδή $\lim\limits_{\lambda\to0^+}\lambda^3(\ln\lambda-1)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\dfrac{\ln\lambda-1}{\frac{1}{\lambda^3}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{\lambda\to0^+}\dfrac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{3}{\lambda^4}}=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\left(-\dfrac{\lambda^3}{3}\right)=0$,

είναι $E(\Omega)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}E(\lambda)=\dfrac{1}{9}$.

172. **α)** $e^x(f(x)-2)+f'(x)(e^x+1)=0\Leftrightarrow e^xf(x)-2e^x+f'(x)(e^x+1)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(e^x+1)'f(x)+f'(x)(e^x+1)=2e^x\Leftrightarrow\left[(e^x+1)f(x)\right]'=(2e^x)'\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(e^x+1)f(x)=2e^x+c\Leftrightarrow f(x)=\frac{2e^x+c}{e^x+1}.$$

Είναι $f(0)=1\Leftrightarrow\dfrac{2+c}{2}=1\Leftrightarrow c=0$, άρα $f(x)=\dfrac{2e^x}{1+e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

β) $e^x(2-\alpha)-\alpha=0\Leftrightarrow2e^x-\alpha e^x-\alpha=0\Leftrightarrow2e^x-\alpha(e^x+1)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow2e^x=\alpha(e^x+1)\Leftrightarrow\frac{2e^x}{e^x+1}=\alpha\Leftrightarrow f(x)=\alpha.$$

Θα βρούμε το σύνολο τιμών της f για να διαπιστώσουμε αν υπάρχουν $x\in A$ ώστε $f(x)=\alpha$. Είναι $f'(x)=\dfrac{2e^x(1+e^x)-2e^xe^x}{(1+e^x)^2}=\dfrac{2e^x(1+e^x-e^x)}{(1+e^x)^2}=\dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x}{e^x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\frac{1}{e^x}+1}=2$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^x}{1+e^x}=\dfrac{0}{1+0}=0$. Είναι $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,2)$.

- Αν $\alpha\in(0,2)$, τότε υπάρχει μοναδικός $x_0\in A=\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\alpha$.
- Αν $\alpha\le0$ ή $\alpha\ge2$ η εξίσωση $f(x)=\alpha$ είναι αδύνατη.

γ) Είναι $f'(0)=\dfrac{2e^0}{(1+e^0)^2}=\dfrac{1}{2}$. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει εξίσωση:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+1.$$

Είναι

$$f''(x)=\frac{2e^x\left(1+e^x\right)^2-2e^x2\left(1+e^x\right)e^x}{\left(1+e^x\right)^2}\Leftrightarrow f''(x)=\frac{2e^x\left(1+e^x\right)\left[\left(1+e^x\right)-2e^x\right]}{\left(1+e^x\right)^4}=\frac{2e^x\left(1-e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^3}.$$

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f''(x)>0$ άρα η f είναι κυρτή στο $[0,1]$, επομένως βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό. Δηλαδή $f(x)\geq\frac{1}{2}x+1$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E(\Omega)=\int_0^1\left[f(x)-\frac{1}{2}x-1\right]dx=\int_0^1\frac{2e^x}{1+e^x}dx-\frac{1}{2}\int_0^1xdx-\int_0^1dx\Leftrightarrow$

$$E(\Omega)=2\int_0^1\frac{\left(1+e^x\right)'}{1+e^x}dx-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-1=2\left[\ln\left(1+e^x\right)\right]_0^1-\frac{1}{4}-1\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=2\left(\ln(1+e)-\ln2\right)-\frac{5}{4}=2\ln\frac{1+e}{2}-\frac{5}{4}.$$

173. α) $\int_0^x e^{-f(t)}dt-f(x)=\frac{1}{2}f^2(x)\Leftrightarrow 2\int_0^x e^{-f(t)}dt-2f(x)=f^2(x)\Leftrightarrow f^2(x)+2f(x)=2\int_0^x e^{-f(t)}dt\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^2(x)+2f(x)+1=2\int_0^x e^{-f(t)}dt+1\Leftrightarrow\left(f(x)+1\right)^2=2\int_0^x e^{-f(t)}dt+1.$

Είναι $e^{-f(t)}>0$, οπότε για κάθε $x\geq0$ είναι και $\int_0^x e^{-f(t)}dt\geq0\Leftrightarrow\int_0^x e^{-f(t)}dt+1\geq1>0$, άρα και $\left(f(x)+1\right)^2>0$, οπότε $f(x)+1\neq0$. Επειδή η συνάρτηση $f(x)+1$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, και $f(x)+1\neq0$ για κάθε $x\geq0$, η $f(x)+1$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0,+\infty)$. Επειδή $f(0)+1=1>0$ είναι και $f(x)+1>0$ για κάθε $x\geq0$.

β) Είναι $\left(2\int_0^x e^{-f(t)}dt-2f(x)\right)'=\left(f^2(x)\right)'$,

άρα $2e^{-f(x)}-2f'(x)=2f(x)f'(x)\Leftrightarrow f(x)f'(x)e^{f(x)}+f'(x)e^{f(x)}=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)\left(e^{f(x)}\right)'+f'(x)e^{f(x)}=1\Leftrightarrow\left(f(x)e^{f(x)}\right)'=1\Leftrightarrow f(x)e^{f(x)}=x+c,\ c\in\mathbb{R}.$

Για $x=0$ είναι $f(0)e^{f(0)}=c\Leftrightarrow c=0$, οπότε $f(x)e^{f(x)}=x\Leftrightarrow f(x)=xe^{-f(x)}$ για κάθε $x\geq0$.

γ) Για $x=0$ είναι $f(0)=0\cdot e^{-f(0)}=0$.

$f'(x)=\left(xe^{-f(x)}\right)'=e^{-f(x)}-xf'(x)e^{-f(x)}\Leftrightarrow f'(x)+xf'(x)e^{-f(x)}=e^{-f(x)}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x)\left(1+xe^{-f(x)}\right)=e^{-f(x)}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{e^{-f(x)}}{1+xe^{-f(x)}}=\frac{e^{-f(x)}}{1+\frac{x}{e^{f(x)}}}=\frac{1}{e^{f(x)}+x}.$$

Για $x=0$ είναι $f'(0)=\frac{1}{e^{f(0)}+0}=1$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0=0$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x$

δ) Είναι $f''(x)=\left(\dfrac{1}{e^{f(x)}+x}\right)'=-\dfrac{\left(e^{f(x)}+x\right)'}{\left(e^{f(x)}+x\right)^2}=-\dfrac{f'(x)e^{f(x)}+1}{\left(e^{f(x)}+x\right)^2}<0$, οπότε η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$. Επειδή η f είναι κοίλη, βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της, άρα βρίσκεται κάτω και από την ε, οπότε ισχύει: $f(x)\le x$ για κάθε $x\ge 0$.

ε) Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{e^{f(x)}+x}>0$ για κάθε $x\ge 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε είναι και 1–1 και αντιστρέφεται.

στ) Θέτουμε $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$, τότε $dx=f'(u)du$.

Για $x=0$ είναι $f(u)=0=f(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}u=0$ και για $x=1$ είναι $f(u)=1\Leftrightarrow 1\cdot e^1=u\Leftrightarrow u=e$.

Άρα $\Pi=\int_0^e f(x)dx+\int_0^1 f^{-1}(x)dx=\int_0^e f(x)dx+\int_0^e uf'(u)du\Leftrightarrow$

$\Pi=\int_0^e f(x)dx+\left[uf(u)\right]_0^e-\int_0^e f(u)du=ef(e)$ ή $\Pi=e\cdot 1=e$.

ζ) Επειδή $f(x)\le x$ για κάθε $x\ge 0$, είναι $E(\lambda)=\int_0^{\lambda e^\lambda}\left(x-f(x)\right)dx=\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^{\lambda e^\lambda}-\int_0^{\lambda e^\lambda}f(x)dx$.

Επειδή $x=f^{-1}(y)$ και $f(x)e^{f(x)}=x$, για κάθε $x\ge 0$ έχουμε: $ye^y=f^{-1}(y)$. Θέτουμε $x=f^{-1}(y)=ye^y$, τότε $dx=\left(e^y+ye^y\right)dy$. Για $x=0$ είναι $y=0$ και για $x=\lambda e^\lambda$ είναι $y=\lambda$.

Τότε $E(\lambda)=\dfrac{\lambda^2e^{2\lambda}}{2}-\int_0^\lambda y\left(e^y+ye^y\right)dy=\dfrac{\lambda^2e^{2\lambda}}{2}-\int_0^\lambda e^y\left(y+y^2\right)dy\Leftrightarrow$

$E(\lambda)=\dfrac{\lambda^2e^{2\lambda}}{2}-\int_0^\lambda\left(y+y^2\right)\left(e^y\right)'dy\Leftrightarrow E(\lambda)=\dfrac{\lambda^2e^{2\lambda}}{2}-\left[\left(y+y^2\right)e^y\right]_0^\lambda+\int_0^\lambda(1+2y)e^ydy\Leftrightarrow$

$E(\lambda)=\dfrac{\lambda^2e^{2\lambda}}{2}-\left(\lambda+\lambda^2\right)e^\lambda+\int_0^\lambda(1+2y)\left(e^y\right)'dy\Leftrightarrow$

$E(\lambda)=\dfrac{\lambda^2e^{2\lambda}}{2}-\left(\lambda+\lambda^2\right)e^\lambda+\left[(1+2y)e^y\right]_0^\lambda-\int_0^\lambda 2e^ydy\Leftrightarrow$

$E(\lambda)=\dfrac{\lambda^2e^{2\lambda}}{2}-\left(\lambda+\lambda^2\right)e^\lambda+(1+2\lambda)e^\lambda-1-2\left[e^y\right]_0^\lambda\Leftrightarrow$

$E(\lambda)=\dfrac{\lambda^2e^{2\lambda}}{2}-\left(\lambda+\lambda^2\right)e^\lambda+(1+2\lambda)e^\lambda-1-2e^\lambda+2\Leftrightarrow$

$E(\lambda)=\dfrac{\lambda^2e^{2\lambda}}{2}-\left(\lambda^2-\lambda+1\right)e^\lambda+1$

η) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[\dfrac{\lambda^2e^{2\lambda}}{2}-\left(\lambda^2-\lambda+1\right)e^\lambda+1\right]\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[\lambda^2e^{2\lambda}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{e^\lambda}+\dfrac{1}{\lambda e^\lambda}-\dfrac{1}{\lambda^2e^\lambda}+\dfrac{1}{\lambda^2e^{2\lambda}}\right)\right]=+\infty$.

174. α) Για $x\neq 0$ έχουμε $f(x)=\int_0^1 e^{tx^2}dt=\left[\dfrac{e^{tx^2}}{x^2}\right]_0^1=\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}$.

β) Είναι $f(0)=\int_0^1 e^0dt=1$.

γ) Άρα $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^{x^2}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{x^2}=1=f(0)$ οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^{x^2}-2x}{3x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{x^2}-2}{3x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x2e^{x^2}}{3}=0$, οπότε $f'(0)=0$.

ε) Για $x\geq 0$ είναι $f'(x)=\dfrac{2x\left(x^2e^{x^2}-e^{x^2}+1\right)}{x^4}=\dfrac{2\left(x^2e^{x^2}-e^{x^2}+1\right)}{x^3}$

Εστω $g(x)=x^2e^{x^2}-e^{x^2}+1,\ x\geq 0$. Είναι $g'(x)=2x^3e^{x^2}>0$ άρα η $g\uparrow$ στο $[0,+\infty)$.

Για $x>0$: $g(x)>g(0)\Leftrightarrow g(x)>0$ άρα $f'(x)>0$ οπότε $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$.

στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^3}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2xe^{x^2}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x^2}}{3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4xe^{x^2}}{3}=+\infty$.

175. α) Θεωρώ $g(x)=e^{-x}f(x)-x,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $g'(x)=e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)-1=e^{-x}\left(f'(x)-f(x)-e^{x}\right)>0$ άρα η $g\uparrow$ οπότε για $x>0$ είναι $g(x)>g(0)\Leftrightarrow e^{-x}f(x)-x>0\Leftrightarrow e^{-x}f(x)>x\Leftrightarrow f(x)>xe^{x}\quad(1)$.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-2e^{x-1}$ έχει μοναδική λύση στο $[0,1]$. Είναι $h(0)=f(0)-2e^{-1}=-\dfrac{2}{e}<0$ και $h(1)=f(1)-2>0$ γιατί αν στην (1) θέσουμε όπου $x=1$ είναι $f(1)>e>2\Leftrightarrow f(1)-2>0$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=f'(x)-2e^{x-1}>f(x)+e^{x}-2e^{x-1}>xe^{x}+e^{x}-2e^{x-1}>0$ γιατί αν θέσουμε $\varphi(x)=xe^{x}+e^{x}-2e^{x-1}$ είναι $\varphi'(x)=e^{x}+xe^{x}-e^{x}-2e^{x-1}=2\left(e^{x}-e^{x-1}\right)+xe^{x}>0$ όπου $x\in[0,1]$ αφού $e^{x}>e^{x-1}$. Άρα η $\varphi\uparrow$ οπότε για $x>0$ είναι $\varphi(x)>\varphi(0)=1-\dfrac{2}{e}=\dfrac{e-2}{e}>0$.

Οπότε $h(0)\cdot h(1)<0$ και από Θ. Bolzano υπάρχει λύση η οποία αφού η h είναι $\uparrow$ τότε είναι μοναδική.

γ) Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την f στο $[0,1]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1}\Leftrightarrow f'(\xi)=f(1)$. Από την (1) για $x=1$ είναι $f(1)>e$. Άρα $f'(\xi)>e$

δ) Αφού $f(x)>xe^{x}$ τότε για $x>0$ είναι $f(x)>xe^{x}>0\Leftrightarrow f(x)>0$ οπότε $E(\lambda)=\int_0^{\lambda}f(x)dx$.

Από τη σχέση $f(x)>xe^{x}$ προκύπτει ότι

$\int_0^{\lambda}f(x)dx>\int_0^{\lambda}xe^{x}dx\Leftrightarrow E(\lambda)>\left[xe^{x}\right]_0^{\lambda}-\int_0^{\lambda}e^{x}dx\Leftrightarrow E(\lambda)>\lambda e^{\lambda}-e^{\lambda}+1$ και

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\lambda e^{\lambda}-e^{\lambda}+1\right)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[(\lambda-1)e^{\lambda}+1\right]=+\infty$ άρα και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=+\infty$.

176. α) Επειδή η συνάρτηση $tg(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη με

$f'(x)=\left(\int_2^x e^{tg(t)}dt\right)'=e^{xg(x)}$. Είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $f(2)=\int_2^2 e^{tg(t)}dt=0$, άρα για κάθε $x<2$ είναι

$f(x)<f(2)\Leftrightarrow f(x)<0$, ενώ για κάθε $x>2$ είναι $f(x)>f(2)=0$.

β) Επειδή $f'(x)=e^{xg(x)}$, έχουμε: $f(x)+xe^{xg(x)}=0\Leftrightarrow f(x)+xf'(x)=0$ ή $\left(xf(x)\right)'=0$.

Εστω $h(x)=xf(x)$, $x\in[0,2]$. Η h είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $h'(x)=\left(xf(x)\right)'=f(x)+xf'(x)$.

Είναι $h(0)=0f(0)=0$, $h(2)=2f(2)=0$, δηλαδή $h(0)=h(2)$, άρα λόγω του θεωρήματος Rolle, η εξίσωση $h'(x)=0\Leftrightarrow f(x)+xf'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,2)$.

γ) $\int_0^x\left(\int_2^u e^{tg(t)}dt\right)du\geq\int_{-x}^0\left(\int_2^u e^{tg(t)}dt\right)du\Leftrightarrow\int_0^x f(u)du\geq\int_{-x}^0 f(u)du\Leftrightarrow$

$\int_0^x f(u)du-\int_{-x}^0 f(u)du\geq 0\Leftrightarrow\int_0^x f(u)du+\int_0^{-x} f(u)du\geq 0$.

Εστω $F(x)=\int_0^x f(u)du+\int_0^{-x} f(u)du$, $x\in\mathbb{R}$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής και επειδή η $-x$ είναι παραγωγίσιμη, οι συναρτήσεις $\int_0^x f(u)du$ και $\int_0^{-x} f(u)du$, είναι παραγωγίσιμες, οπότε και η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $F'(x)=f(x)-f(-x)$.

Είναι $F'(x)\geq 0\Leftrightarrow f(x)-f(-x)\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq f(-x)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}x\geq -x\Leftrightarrow 2x\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$.

Για κάθε $x<0$ είναι $F'(x)<0$,

άρα F γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Για κάθε $x>0$ είναι $F'(x)>0$,

άρα F γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Η F έχει ελάχιστο το $F(0)=0$,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
F'	$-$	0	$+$
F	$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$

άρα $F(x)\geq F(0)\Leftrightarrow\int_0^x f(u)du+\int_0^{-x} f(u)du\geq 0\Leftrightarrow\int_0^x f(u)du\geq\int_{-x}^0 f(u)du$.

177. α) Είναι $f^3(x)+2f(x)=x$ (1) και θέτω στην (1) όπου $x=x_0$ οπότε $f^3(x_0)+2f(x_0)=x_0$ (2).

Αφαιρώντας (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:

$f^3(x)-f^3(x_0)+2f(x)-2f(x_0)=x-x_0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(f(x)-f(x_0)\right)\left(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\right)+2\left(f(x)-f(x_0)\right)=x-x_0$

$\Leftrightarrow\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2\right]=x-x_0$ (3)

όμως $f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2>0\Leftrightarrow\left(f(x)+\dfrac{f(x_0)}{2}\right)^2+\dfrac{3f^2(x_0)}{4}+2>0$.

Οπότε $(3)\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)=\dfrac{x-x_0}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}\quad(4)$

άρα $|f(x)-f(x_0)|=\dfrac{|x-x_0|}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}\le\dfrac{|x-x_0|}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{|x-x_0|}{2}\le f(x)-f(x_0)\le\dfrac{|x-x_0|}{2}$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-\dfrac{|x-x_0|}{2}\right)=0=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{|x-x_0|}{2}$

οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$, οπότε η f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ οπότε $f^3(x_1)=f^3(x_2)$ και $2f(x_1)=2f(x_2)$

άρα $f^3(x_1)+2f(x_1)=f^3(x_2)+2f(x_2)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}x_1=x_2$ οπότε η f είναι 1–1 και αντιστρέφεται.

Αν $f(x)=y$, τότε $f^{-1}(y)=x$ και η (1) γίνεται $y^3+2y=f^{-1}(y)$, άρα $f^{-1}(x)=x^3+2x$.

γ) Από την $(1)\Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+2\right)=x\overset{f^2(x)+2>0}{\Leftrightarrow}f(x)=\dfrac{x}{f^2(x)+2}$ οπότε για $x<0$ είναι $f(x)<0$

ενώ για $x>0$ είναι $f(x)>0$. Επίσης $f(0)=0$.

δ) Για $x\ne x_0$ από την $(4)\Rightarrow\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{1}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}$ οπότε

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}$, άρα $f'(x_0)=\dfrac{1}{3f^2(x_0)+2}$, αφού η f

είναι συνεχής στο x_0. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{1}{3f^2(x)+2}\quad(5)$.

ε) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε και η συνάρτηση $\dfrac{1}{3f^2(x)+2}$ είναι παραγωγίσιμη,

άρα από τη σχέση (5) η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x)=\dfrac{-6f(x)f'(x)}{\left(3f^2(x)+2\right)^2}$.

Από τη σχέση (5) έχουμε $f'(x)>0$. Για $x<0$ είναι $f(x)<0\Leftrightarrow-6f(x)>0$ άρα $f''(x)>0$,

ενώ για $x>0$ είναι $f(x)>0\Leftrightarrow-6f(x)<0$ άρα $f''(x)<0$ και $f''(0)=0$.

Οπότε η γραφική παράσταση της f έχει μοναδικό σημείο καμπής το $(0,0)$.

στ) Εστω $F(x)=\int_1^x f(t)dt$ μια παράγουσα της συνεχούς συνάρτησης f, τότε $F'(x)=f(x)$ και

$F''(x)=f'(x)>0$ οπότε η $F'\uparrow$ στο $\mathbb{R}$. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ για την F στα διαστήματα

$[x-1,x]$ και $[x,x+1]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(x-1,x)$ και $\xi_2\in(x,x+1)$ τέτοια ώστε

$F'(\xi_1)=\dfrac{F(x)-F(x-1)}{x-(x-1)}\Leftrightarrow F'(\xi_1)=\int_1^x f(t)dt-\int_1^{x-1}f(t)dt\Leftrightarrow F'(\xi_1)=\int_{x-1}^x f(t)dt$ και

$F'(\xi_2)=\dfrac{F(x+1)-F(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow F'(\xi_2)=\int_1^{x+1}f(t)dt-\int_1^x f(t)dt\Leftrightarrow F'(\xi_2)=\int_x^{x+1}f(t)dt$.

Επειδή $\xi_1<\xi_2$ και η F' είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ τότε $F'(\xi_1)<F'(\xi_2)$

δηλαδή $\int_{x-1}^x f(t)dt<\int_x^{x+1}f(t)dt$.

ζ) Έστω $g(u)=\int_0^u f(t)dt,\ u\in[0,x],\ x>0$.

Από το Θ.Μ.Τ. για τη g, υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi)=\frac{g(x)-g(0)}{x}=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

Είναι $g'(u)=f(u)$ και $g''(u)=f'(u)>0\Rightarrow g'\uparrow[0,x]$.

$$0<\xi<x\overset{g'\uparrow}{\Rightarrow}g'(0)<g'(\xi)<g'(x)\Leftrightarrow 0<\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt<f(x)\Leftrightarrow 0<\int_0^x f(t)dt<xf(x)\ (1)$$

Επειδή $f(x)=\dfrac{x}{f^2(x)+2}>0$ για κάθε $x>0$, υπάρχει $k>0$ τέτοιος, ώστε $f(x)>k$, οπότε και $f(t)>k$, $t>0$. Άρα $\int_0^x f(t)dt>\int_0^x kdt=kx$ και από την (1), έχουμε:

$kx<\int_0^x f(t)dt<xf(x)$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}kx=+\infty$, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt=+\infty$.

178. α) Εστω $\dfrac{f(x)}{x}=h(x)$, $x>0$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\alpha$.

Τότε $f(x)=xh(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}xh(x)=+\infty$

Είναι: $\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$.

β) Εστω $g(x)=(x-1)f(x)$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $g'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$ και $g(0)=g(1)=0$, οπότε σύμφωνα με το Θ. Rolle, υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)+(\xi-1)f'(\xi)=0$.

γ) i. Για $x=0$ ισχύει η ισότητα. Για $x>0$: Ισχύει για την f το ΘΜΤ στο $[0,x]$, οπότε υπάρχει $\xi_1\in(0,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)}{x}$. Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα,

οπότε: $0<\xi_1<x\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}f'(0)<f'(\xi_1)<f'(x)\Leftrightarrow 1<\dfrac{f(x)}{x}<f'(x)\Leftrightarrow x<f(x)<xf'(x)$.

ii. Είναι $t\le f(t)\le tf'(t)$ για κάθε $t\ge 0$, οπότε και

$$\int_0^x tdt\le\int_0^x f(t)dt\le\int_0^x tf'(t)dt\Leftrightarrow\frac{x^2}{2}\le\int_0^x f(t)dt\le\left[tf(t)\right]_0^x-\int_0^x f(t)dt.$$

Είναι $\int_0^x f(t)dt\le xf(x)-\int_0^x f(t)dt\Leftrightarrow 2\int_0^x f(t)dt\le xf(x)\Leftrightarrow\int_0^x f(t)dt\le\dfrac{xf(x)}{2}$,

άρα $\dfrac{x^2}{2}\le\int_0^x f(t)dt\le\dfrac{xf(x)}{2}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2}=+\infty$, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt=+\infty$.

179. α) Εστω η συνάρτηση $h(x)=\int_1^x\left(\int_2^4 f(t)dt\right)du-1-\ln x+x^2$. Παρατηρούμε ότι $h(1)=0-1-0+1=0$ άρα $h(x)\le h(1)$. Επίσης αφού η f είναι συνεχής τότε η συνάρτηση $\int_2^u f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη οπότε και συνεχής άρα και η συνάρτηση $\int_1^x\left(\int_2^u f(t)dt\right)du$ θα είναι παραγωγίσιμη. Άρα η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=\int_2^x f(t)dt-\frac{1}{x}+2x$.

Αφού η h έχει μέγιστο στο $x_0=1\in(0,+\infty)$ τότε από Θ. Fermat είναι

$h'(1)=0 \Leftrightarrow \int_2^1 f(t)dt-1+2=0 \Leftrightarrow \int_1^2 f(t)dt=1 \quad (1)$.

Αφού $f(t)>0$ στο $\mathbb{R}$ τότε εμβαδό του χωρίου που σχηματίζει η C_f με τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=2$ είναι $E(\Omega)=\int_1^2 f(t)dt\overset{(1)}{=}1$.

β) Αφού $f(x)>0$ και $x-1\geq 0$ για $x\in[1,2]$ τότε $g(x)=(x-1)f(x)\geq 0$ όταν $x\in[1,2]$ άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$E=\int_1^2 g(x)dx=\int_1^2(x-1)f(x)dx=\int_1^2(x-1)F'(x)dx=$

$=\left[(x-1)F(x)\right]_1^2-\int_1^2 F(x)dx=F(2)-1=1.$

γ) Είναι $\int_1^2(x-1)f(x)dx=1 \Leftrightarrow \int_1^2 xf(x)dx-\int_1^2 f(x)dx=1 \Leftrightarrow$

$\int_1^2 xf(x)dx-1=1 \Leftrightarrow \int_1^2 xf(x)dx=2 \quad (2)$.

Επίσης $\int_1^2 F(x)dx=1 \Leftrightarrow \int_1^2 (x)'F(x)dx=1 \Leftrightarrow \left[xF(x)\right]_1^2-\int_1^2 xF'(x)dx=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2F(2)-F(1)-\int_1^2 xf(x)dx=1 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2\cdot 2-F(1)-2=1 \Leftrightarrow 2-F(1)=1 \Leftrightarrow F(1)=1 \quad (3)$.

Θεωρούμε την $\varphi(x)=F(x)-x$, $x\in[1,2]$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ με $\varphi'(x)=F'(x)-1$. Επίσης $\varphi(1)=F(1)-1=0$ από την (3) και $\varphi(2)=F(2)-2=2-2=0$ άρα $\varphi(1)=\varphi(2)$ οπότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $\varphi'(\xi)=0 \Leftrightarrow F'(\xi)=1$.

Άρα υπάρχει σημείο της C_F στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην $y=x$.