Παράγωγοι

81. **α)** Επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $[1,10]$, έχει ελάχιστη τιμή $m=1$ και μέγιστη τιμή $M=10$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,1)$ τέτοια ώστε $f(x_1)=1$ και $f(x_2)=10$. Επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στις θέσεις x_1,x_2 που βρίσκονται στο εσωτερικό του $[0,1]$ και είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό, λόγω του θεωρήματος Fermat είναι: $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

β) Εστω $x_1<x_2$. Επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2), και $f'(x_1)=f'(x_2)=0$, λόγω του θεωρήματος Rolle υπάρχει $\xi_1\in(x_1,x_2)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1)=0$.

γ) $f''(x)+f'(x)=0\Leftrightarrow e^xf''(x)+e^xf'(x)=0$ ή $\left[e^xf'(x)\right]'=0$. Εστω $g(x)=e^xf'(x)$, $x\in[x_1,x_2]$. Η g είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2). Επειδή $g(x_1)=e^{x_1}f'(x_1)=0$ και $g(x_2)=e^{x_2}f'(x_2)=0$, λόγω του θεωρήματος Rolle υπάρχει $\xi_2\in(x_1,x_2)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi_2)=0\Leftrightarrow e^{\xi_2}f''(\xi_2)+e^xf'(\xi_2)=0\Leftrightarrow f''(\xi_2)+f'(\xi_2)=0$.

δ) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=15x-6\Leftrightarrow f(x)-15x+6=0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(0,1)$. Εστω $h(x)=f(x)-15x+6$, $x\in[0,1]$.
Είναι $h(0)=f(0)-15\cdot0+6=2+6=8>0$ και $h(1)=f(1)-15\cdot1+6=7-15+6=-2<0$, δηλαδή $h(0)h(1)<0$ και η h είναι συνεχής στο $[0,1]$, άρα λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)-15x_0+6=0\Leftrightarrow f(x_0)=15x_0-6$.

82. **α)** Επειδή η f είναι κυρτή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\alpha+1]$.
Για κάθε $\alpha<x<\alpha+1\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}f'(\alpha)<f'(x)<f'(\alpha+1)$ άρα $\frac{1}{2}<f'(x)$, δηλαδή $f'(x)>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\alpha+1]$. Το σύνολο τιμών της f είναι:
$f([\alpha,\alpha+1])=[f(\alpha),f(\alpha+1)]=[\alpha+1,\alpha+2]$.

β) Η εφαπτομένη της C_f στο $x=\alpha$ είναι η ευθεία
$$\varepsilon: y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}(x-\alpha)+\alpha+1\Leftrightarrow 2y=x+\alpha+2\Leftrightarrow x-2y+\alpha+2=0$$

γ) Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα $[\alpha,\alpha+1]$, άρα βρίσκεται πάνω και από την ε, δηλαδή $f(x)\geq\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\alpha+1$ για κάθε $x\in[\alpha,\alpha+1]$.

δ) Λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής για την f, υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,\alpha+1)$ τέτοιο ώστε:
$$f'(\xi_1)=\frac{f(\alpha+1)-f(\alpha)}{\alpha+1-\alpha}=\alpha+2-\alpha-1=1.$$
Επειδή η f' είναι συνεχής στο $[\alpha,\xi_1]$ και παραγωγίσιμη στο (α,ξ_1), λόγω του Θ.Μ.Τ

υπάρχει $\xi \in (\alpha, \xi_1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = \dfrac{f'(\xi_1) - f'(\alpha)}{\xi_1 - \alpha} = \dfrac{1 - \frac{1}{2}}{\xi_1 - \alpha} = \dfrac{1}{2(\xi_1 - \alpha)}$.

Είναι $\alpha < \xi_1 < \alpha + 1 \Leftrightarrow 0 < \xi_1 - \alpha < 1 \Leftrightarrow 0 < 2(\xi_1 - \alpha) < 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2(\xi_1 - \alpha)} > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow f''(\xi) > \dfrac{1}{2}$.

ε) Αρκεί η εξίσωση $f(x) = -3x + 4\alpha + 2 \Leftrightarrow f(x) + 3x - 4\alpha - 2 = 0$, να έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(\alpha, \alpha+1)$. Έστω $g(x) = f(x) + 3x - 4\alpha - 2$, $x \in [\alpha, \alpha+1]$.

Είναι $g'(x) = f'(x) + 3 > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \alpha+1]$.

Είναι $g(\alpha) = f(\alpha) + 3\alpha - 4\alpha - 2 = \alpha + 1 - \alpha - 2 = -1 < 0$ και

$g(\alpha+1) = f(\alpha+1) + 3(\alpha+1) - 4\alpha - 2 = \alpha + 2 + 3\alpha + 3 - 4\alpha - 2 = 3 > 0$, δηλαδή

$g(\alpha)g(\alpha+1) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \alpha+1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, λόγω του θεωρήματος Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -3x + 4\alpha + 2$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(\alpha, \alpha+1)$. Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \alpha+1]$, η ρίζα της g είναι μοναδική.

83. **α)** Για $x = 0$ είναι:

$f^3(0) + f(0) = 4 \cdot 0 \Leftrightarrow f(0)\left(f^2(0) + 1\right) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ ή $f^2(0) = -1$ που είναι αδύνατο.

β) $f^3(x) + f(x) = 4x \Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x) + 1\right) = 4x \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{4x}{f^2(x) + 1}$ (2). Είναι

$f(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x}{f^2(x)+1} > 0 \Leftrightarrow 4x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ και $f(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x}{f^2(x)+1} < 0 \Leftrightarrow 4x < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

γ) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έχουμε:

$\left(f^3(x) + f(x)\right)' = (4x)' \Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x) + f'(x) = 4 \Leftrightarrow f'(x)\left(3f^2(x) + 1\right) = 4$ (3).

Επειδή $3f^2(x) + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι και $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) Αν $\alpha = \beta$, τότε $f(\alpha) - f(\alpha) \le 4(\alpha - \alpha)$ και ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha \ne \beta$ και έστω $\alpha < \beta$, τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β), λόγω του Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

Όμως από τη σχέση (3) είναι $f'(x) = \dfrac{4}{3f^2(x) + 1} \le 4$, αφού $3f^2(x) + 1 \ge 1$, άρα και

$f'(\xi) \le 4 \Leftrightarrow \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \le 4 \Leftrightarrow f(\beta) - f(\alpha) \le 4(\beta - \alpha)$.

ε) Πρέπει $f'(x) = 1$, τότε $(3) \Rightarrow 3f^2(x) + 1 = 4 \Leftrightarrow f^2(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \pm 1$

Αν $f(x) = 1$, τότε από την αρχική σχέση έχουμε:

$1^3 + 1 = 4x \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ και η εφαπτομένη είναι η

$\varepsilon_1 : y - f\left(\dfrac{1}{2}\right) = f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y - 1 = x - \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y = x + \dfrac{1}{2}$

Αν $f(x)=-1$, τότε από την αρχική σχέση έχουμε:

$(-1)^3-1=4x \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ και η εφαπτομένη είναι η

$\varepsilon_2: y-f\left(-\frac{1}{2}\right)=f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y+1=x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=x-\frac{1}{2}$

στ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, αντιστρέφεται.

$f(x)=y \Rightarrow y^3+y=4x \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}(y^3+y)$, άρα $f^{-1}(y)=\frac{1}{4}(y^3+y)$

ζ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{4}x^3=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{4}x^3=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \underset{y\to+\infty}{\overset{\substack{f(x)=y\\ x=f^{-1}(y)}}{=}} \lim\limits_{f^{-1}(y)\to+\infty} y=+\infty$ και όμοια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, άρα $f(A)=\mathbb{R}$.

η) $f^{-1}(1)=\frac{1}{4}(1+1)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ και $f^{-1}(4)=\frac{1}{4}(64+4)=\frac{68}{4}=17 \Leftrightarrow f(17)=4$

84. **α)** Επειδή $f'(x)=e^{g(x)}$ και η $e^{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, τότε και η f' θα είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, δηλαδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(x)=\left(e^{g(x)}\right)'=e^{g(x)}g'(x)$. Όμοια και η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g''(x)=\left(-e^{-f(x)}\right)'=e^{-f(x)}f'(x)$.

β) Είναι $f''(x)=e^{g(x)}g'(x)$ και $g'(x)=-e^{-f(x)}$, άρα $f''(x)=e^{g(x)}\left(-e^{-f(x)}\right)=-e^{g(x)-f(x)}$ (1).

Είναι $g''(x)=e^{-f(x)}f'(x)$ και $f'(x)=e^{g(x)}$, άρα $g''(x)=e^{-f(x)}e^{g(x)}=e^{-f(x)+g(x)}$ (2).

Από τις σχέσεις $(1),(2)$ προκύπτει ότι $f''(x)=-g''(x)$, οπότε υπάρχει $c_1\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$f'(x)=-g'(x)+c_1$. Είναι $f'(e)=e^{g(e)}=e^{-1}$ και $g'(e)=-e^{-f(e)}=-e^{-1}$, οπότε η σχέση (3) για $x=e$ γίνεται: $f'(e)=-g'(e)+c_1 \Leftrightarrow e^{-1}=e^{-1}+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$, άρα $f'(x)=-g'(x)$.

Είναι: $f'(x)=-g'(x) \Leftrightarrow f(x)=-g(x)+c_2$, $c_2\in\mathbb{R}$. Για $x=e$ είναι

$f(e)=-g(e)+c_2 \Leftrightarrow 1=1+c_2 \Leftrightarrow c_2=0$, άρα $f(x)=-g(x)$ για κάθε $x>0$.

γ) Επειδή $f'(x)=e^{g(x)}$ και $f(x)=-g(x)$ είναι:

$f'(x)=e^{-f(x)} \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)}=1 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)'=(x)' \Leftrightarrow e^{f(x)}=x+c$, $c\in\mathbb{R}$.

Για $x=e$ είναι: $e^{f(e)}=e+c \Leftrightarrow e=e+c \Leftrightarrow c=0$, άρα $e^{f(x)}=x \Leftrightarrow f(x)=\ln x$, $x>0$.

δ) Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $f'(x)=\frac{1}{x}$, οπότε λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε:

$f'(\xi)=\frac{f(\pi)-f(e)}{\pi-e} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi}=\frac{\ln\pi-1}{\pi-e}$.

Είναι $e<\xi<\pi \Leftrightarrow \frac{1}{e}>\frac{1}{\xi}>\frac{1}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{\pi}<\frac{\ln\pi-1}{\pi-e}<\frac{1}{e} \Leftrightarrow (\pi-e)\frac{1}{\pi}<\ln\pi-1<(\pi-e)\frac{1}{e} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-\frac{e}{\pi}<\ln\pi-1<\frac{\pi}{e}-1 \Leftrightarrow 2-\frac{e}{\pi}<\ln\pi<\frac{\pi}{e}$.

85. **α)** Για κάθε $x<0$ είναι $e^{2x}-\beta x^2-2x-1\geq \alpha x^3 \Leftrightarrow \alpha \geq \frac{e^{2x}-\beta x^2-2x-1}{x^3}$,

άρα και $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha \geq \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-\beta x^2-2x-1}{x^3}$ (1).

Όμως $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-\beta x^2-2x-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{2x}}{x^3}-\frac{\beta}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=0$,

γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}\frac{1}{x^3}=0\cdot 0=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{\beta}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=0$, οπότε η σχέση (1) γίνεται $\alpha\geq 0$.

β) Για $x\neq 0$ είναι: $e^{2x}-\alpha x^3-2x-1\geq \beta x^2 \Leftrightarrow \beta\leq\frac{e^{2x}-\alpha x^3-2x-1}{x^2}$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\beta\leq\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\alpha x^3-2x-1}{x^2}$ (2).

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\alpha x^3-2x-1}{x^2}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-\alpha x^3-2x-1\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-3\alpha x^2-2}{2x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2e^{2x}-3\alpha x^2-2\right)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-6\alpha x}{2}=2,$$

άρα η σχέση (2) γίνεται: $\beta\leq 2$.

γ) $f'(x)=2e^{2x}-3\alpha x^2-2\beta x-2$, $f''(x)=4e^{2x}-6\alpha x-2\beta$, $f^{(3)}(x)=8e^{2x}-6\alpha$

$f''(0)=0\Leftrightarrow 4-2\beta=0\Leftrightarrow\beta=2$ και $f^{(3)}(0)=0\Leftrightarrow 8-6\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=\frac{4}{3}$.

Τότε $f''(x)=4e^{2x}-8x-4$, $f^{(3)}(x)=8e^{2x}-8$

Για κάθε $x>0$ είναι $f^{(3)}(x)>0\Rightarrow f'$ κυρτή στο $[0,+\infty)$ και για $x<0$ είναι $f^{(3)}(x)<0\Rightarrow f'$ κοίλη στο $(-\infty,0]$.

Για $x>0\overset{f''\uparrow}{\Leftrightarrow} f''(x)>f''(0)=0\Rightarrow f$ κυρτή στο $[0,+\infty)$ και για $x<0$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow f$ κοίλη στο $(-\infty,0]$.

86. **α)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$f'(x)=e^x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+1=e^x+1+\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{x(x+1)}=e^x+1+\frac{1}{x(x+1)}>0$ για κάθε $x>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x + \ln x - \ln(x+1) + x\right) = -\infty$,

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+} e^x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x+1) = 0$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^x + \ln\dfrac{x}{x+1} + x\right) = +\infty$,

γιατί $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\dfrac{x}{x+1} \overset{\frac{x}{x+1}=u}{\underset{u\to 1}{=}} \lim\limits_{u\to 1}\ln u = 0$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$.

Το σύνολο τιμών της f είναι: $f\left((0,+\infty)\right) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.

γ) $e^x + x = \ln\dfrac{x+1}{x} \Leftrightarrow e^x + x = \ln(x+1) - \ln x \Leftrightarrow e^x + x - \ln(x+1) + \ln x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.

Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

87. **α)** Εστω $g(x) = x^2 f(x) - 1,\ x \in (0,+\infty)$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) = x\left(2f(x) + xf'(x)\right) < 0$ για κάθε $x > 0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι $g(1) = f(1) - 1 = 0$.

Για κάθε $x > 1 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(1) \Leftrightarrow x^2 f(x) - 1 < 0 \Leftrightarrow f(x) < \dfrac{1}{x^2}$ και

για κάθε $0 < x < 1 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(1) \Leftrightarrow x^2 f(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > \dfrac{1}{x^2}$.

β) Από το θεώρημα μέσης τιμής για την f, υπάρχει $\xi \in \left(\dfrac{1}{\alpha}, \alpha\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\alpha) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha - \frac{1}{\alpha}} = \frac{f(\alpha) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1}\left(f(\alpha) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) \quad (1)$$

Επειδή $\alpha > 1$ είναι $f(\alpha) < \dfrac{1}{\alpha^2}$ και επειδή $\dfrac{1}{\alpha} < 1$, είναι $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) > \dfrac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2} = \alpha^2 \Leftrightarrow -f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) < -\alpha^2$,

άρα $f(\alpha) - f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) < \dfrac{1}{\alpha^2} - \alpha^2 = \dfrac{1-\alpha^4}{\alpha^2}$.

Επειδή για $\alpha > 1$ είναι $\dfrac{\alpha}{\alpha^2 - 1} > 0$, έχουμε: $\dfrac{\alpha}{\alpha^2 - 1}\left(f(\alpha) - f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)\right) < \dfrac{\cancel{\alpha}}{\alpha^2 - 1}\cdot\dfrac{1-\alpha^4}{\alpha^{\cancel{2}}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(\xi) < \frac{\cancel{(1-\alpha^2)}(1+\alpha^2)}{-\cancel{(1-\alpha^2)}\alpha} \Leftrightarrow f'(\xi) < -\frac{1+\alpha^2}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha f'(\xi) < -1 - \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha f'(\xi) + \alpha^2 + 1 < 0.$$

γ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$. Επειδή $f(1) = 1 > 0$, είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

δ) Επειδή $f(x) > \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \in (0,1)$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$, άρα και $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, οπότε η ευθεία $x = 0$, δηλαδή ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επειδή $0 < f(x) < \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x > 1$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, θα είναι και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, άρα η ευθεία $y = 0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f.

88. **α)** Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $\alpha < \alpha + 2 \overset{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\alpha) < f'(\alpha+2) \Leftrightarrow 3f(\alpha+2) < f(\alpha+2) \Leftrightarrow 2f(\alpha+2) < 0 \Leftrightarrow f(\alpha+2) < 0$.

Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[\alpha, \alpha+2]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \alpha+2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\alpha+2) - f(\alpha)}{\alpha + 2 - \alpha} = \frac{f(\alpha+2) - f(\alpha)}{2}$.

Είναι $\alpha < \xi < \alpha + 2 \overset{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(\xi) < f'(\alpha+2) \Leftrightarrow \frac{f(\alpha+2) - f(\alpha)}{2} < f(\alpha+2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(\alpha+2) - f(\alpha) < 2f(\alpha+2) \Leftrightarrow f(\alpha) > -f(\alpha+2) > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \alpha+2]$ και $f(\alpha)f(\alpha+2) < 0$, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \alpha+2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

β) Επειδή $f(\alpha+3) = 0$, $f(\alpha+2) < 0$ και $f(\alpha) > 0$, είναι $f(\alpha+2) < f(\alpha+3) < f(\alpha)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \alpha+2]$, λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $x_1(\alpha, \alpha+2)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = f(\alpha+3)$ (1).

Αν η f ήταν 1–1, τότε από την (1) θα προέκυπτε ότι $x_1 = \alpha + 3$ που είναι αδύνατο αφού $x_1(\alpha, \alpha+2)$, άρα η f δεν μπορεί να είναι 1–1.

γ) Επειδή $f(\alpha+2) < f(\alpha+3) < f(\alpha)$ η f θα έχει ακρότατο σε σημείο x_2 του διαστήματος $[\alpha, \alpha+3]$ που θα είναι διαφορετικό από τα άκρα του. Από το θεώρημα Fermat ισχύει ότι $f'(x_2) = 0$, δηλαδή η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

δ) Επειδή $\alpha < x_2 < \alpha + 3$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:

$f'(x_2) < f'(\alpha+3) \Leftrightarrow f'(\alpha+3) > 0$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x = \alpha + 3$, είναι:

$y - f(\alpha+3) = f'(\alpha+3)(x - \alpha - 3) \Leftrightarrow y = xf'(\alpha+3) - (\alpha+3)f'(\alpha+3) + f(\alpha+3)$

Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, άρα

$f(x) \geq xf'(\alpha+3) - (\alpha+3)f'(\alpha+3) + f(\alpha+3)$

Όμως $\lim\limits_{x \to +\infty} [xf'(\alpha+3) - (\alpha+3)f'(\alpha+3) + f(\alpha+3)] = \lim\limits_{x \to +\infty} [xf'(\alpha+3)] = +\infty$, άρα και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

89. **α)** Είναι (1) $f(x^3 - 2x) = 2f(-x) + 2x$, $x \in \mathbb{R}$ και θέτουμε όπου $x = 1$ οπότε $f(-1) = 2f(-1) + 2 \Leftrightarrow f(-1) = -2$.

β) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, παραγωγίζουμε την (1) και έχουμε

$f'(x^3-2x)\cdot(3x^2-2)=-2f'(-x)+2$ και για $x=1$ είναι

$f'(-1)\cdot 1=-2f'(-1)+2 \Leftrightarrow 3f'(-1)=2 \Leftrightarrow f'(-1)=\frac{2}{3}$

γ) Είναι $f'(-1)=\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)+2}{x+1}=\frac{2}{3}$ οπότε

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x^2+1)f(x)+4}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2f(x)+f(x)+2x^2-2x^2+2+2}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x^2(f(x)+2)+(f(x)+2)-2(x^2-1)}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\left[x^2\frac{f(x)+2}{x+1}+\frac{f(x)+2}{x+1}-2(x-1)\right]=1\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+4=\frac{16}{3}$$

δ) Στην (1) για $x=-1$ προκύπτει $f(1)=2f(1)-2 \Leftrightarrow f(1)=2$. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[-1,1]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(1)-f(-1)}{1+1}=2$.

Άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ είναι παράλληλη στην $y=2x$.

ε) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(-1,f(-1))$ είναι

$y-f(-1)=f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y+2=\frac{2}{3}(x+1) \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$

Επειδή η f κυρτή τότε $f(x)\ge y$ δηλαδή $f(x)\ge\frac{2}{3}x-\frac{4}{3} \Leftrightarrow 3f(x)-2x+4\ge 0$.

90. **α)** Εστω υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1)=f(x_2)$.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1,x_2]$ τότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi_1\in(x_1,x_2)$ τέτοιο $f'(\xi_1)=0$ άτοπο. Άρα για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\ne x_2$ θα είναι $f(x_1)\ne f(x_2)$ οπότε η f είναι $1-1$ και αντιστρέφεται.

β) Αφού η f είναι συνεχής και $1-1$ θα είναι γνησίως μονότονη και αφού $1<3$ και $f(1)<f(3)$ τότε η f θα είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

γ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1,3]$ οπότε υπάρχει $\rho\in(1,3)$ τέτοιο ώστε

$f'(\rho)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{6-2}{2}=2$. Άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\rho,f(\rho))$ είναι παράλληλη στην $y=2x$.

δ) Είναι $f(1)=2 \Leftrightarrow f^{-1}(2)=1$ και $f(3)=6 \Leftrightarrow f^{-1}(6)=3$ οπότε η ανίσωση $f(4-f^{-1}(x-2))<6$ γίνεται $f(4-f^{-1}(x-2))<f(3) \overset{+\uparrow}{\Rightarrow} 4-f^{-1}(x-2)<3 \Leftrightarrow f^{-1}(x-2)>1 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x-2))>f(1) \Leftrightarrow$ $x-2>2 \Leftrightarrow x>4$.

ε) Θεωρούμε την $g(x)=2f(x)-f(e)-f(1,8)$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,3]$ ως πράξη συνεχών. Επίσης $g(1)=2f(1)-f(e)-f(1,8)=f(1)-f(e)+f(1)-f(1,8)<0$ γιατί $f\uparrow$ και $1<e \Leftrightarrow f(1)<f(e)$, $1<1,8 \Leftrightarrow f(1)<f(1,8)$.

Επίσης $g(3)=2f(3)-f(e)-f(1,8)=(f(3)-f(e))+(f(3)-f(1,8))>0$ ως άθροισμα θετικών. Οπότε $g(1)\cdot g(3)<0$, άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$ $2f(\xi)=f(e)+f(1,8)$. Επίσης η g είναι $\uparrow$ στο $[1,3]$ γιατί για

$x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow 2f(x_1)<2f(x_2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2f(x_1)-f(e)-f(1,8)<2f(x_2)-f(3)-f(1,8)\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$ οπότε η ρίζα ξ που βρήκαμε είναι μοναδική.

στ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$ οπότε υπάρχουν $\theta_1\in(1,2)$ και $\theta_2\in(2,3)$ τέτοια ώστε $f'(\theta_1)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=\dfrac{4-2}{1}=2$ και $f'(\theta_2)=\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}=\dfrac{6-4}{1}=2$ οπότε $f'(\theta_1)=f'(\theta_2)$ και εφαρμόζοντας Θ. Rolle για την f' στο $[\theta_1,\theta_2]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\theta\in(\theta_1,\theta_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\theta)=0$. Οπότε η γραφική παράσταση της f' δέχεται οριζόντια εφαπτομένη για $x=\theta$.

ζ) Θεωρώ $h(x)=f(x)-5$, συνεχής στο $[1,3]$ με $h(1)=f(1)-5=-3<0$, $h(3)=f(3)-5=1>0$ οπότε $h(1)\cdot h(3)<0$ άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=5$ και αφού η $f\uparrow$ τότε και η $h\uparrow$ οπότε το x_0 μοναδικό.

η) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[1,x_0]$ και $[x_0,3]$ οπότε υπάρχουν $x_1\in(1,x_0)$ και $x_2\in(x_0,3)$ τέτοια ώστε

$$f'(x_1)=\frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}=\frac{5-2}{x_0-1}=\frac{3}{x_0-1}\Leftrightarrow\frac{3}{f'(x_1)}=x_0-1\quad(1)\text{ και}$$

$$f'(x_2)=\frac{f(3)-f(x_0)}{3-x_0}=\frac{6-5}{3-x_0}=\frac{1}{3-x_0}\Leftrightarrow\frac{1}{f'(x_2)}=3-x_0\quad(2)$$

Άρα από (1) και (2) προκύπτει $\dfrac{3}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=x_0-1+3-x_0=2$.

91. **α)** Είναι $5f(x)\le 3f(2)+2f(3)\quad(1)$.

Στην (1) θέτουμε $x=2$ και προκύπτει $5f(2)\le 3f(2)+2f(3)\Leftrightarrow f(2)\le f(3)\quad(2)$

Επίσης στην (1) θέτουμε $x=3$ και προκύπτει $5f(3)\le 3f(2)+2f(3)\Leftrightarrow f(2)\ge f(3)\quad(3)$

Οπότε από (2) και (3) προκύπτει $f(2)=f(3)$ και αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $[2,3]$ τότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi_1\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=0$.

β) Αφού $f(2)=f(3)$ τότε από την (1) προκύπτει $f(x)\le f(2)$ ή $f(x)\le f(3)$. Οπότε η f παρουσιάζει μέγιστο στα $x_1=2$ και $x_2=3$ άρα από Θ. Fermat είναι $f'(2)=0$ και $f'(3)=0$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε και στα διαστήματα $[2,\xi]$ και $[\xi,3]$. Επίσης $f'(2)=f'(\xi_1)=f'(3)=0$ άρα από Θ. Rolle υπάρχουν $x_1\in(2,\xi_1)$ και $x_2\in(\xi,3)$ τέτοια ώστε $f''(x_1)=0$ και $f''(x_2)=0$. Αφού η f είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και $f''(x_1)=f''(x_2)$ τότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(2,3)$ τέτοιο ώστε $f^{(3)}(\xi)=0$.

92. **α)** Είναι $f^3(x)+2f(x)=x^3+3$ (1) και θέτουμε όπου x το x_0 άρα γίνεται:

$f^3(x_0)+2f(x_0)=x_0{}^3+3$ (2). Αφαιρώντας (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:

$f^3(x)-f^3(x_0)+2f(x)-2f(x_0)=x^3-x_0^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (f(x)-f(x_0))\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2\right]=(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2)$ (3).

Η παράσταση $f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\geq 0$ γιατί έχει $\Delta=-3f^2(x_0)-8<0$

οπότε η (3) γίνεται: $f(x)-f(x_0)=\dfrac{(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2)}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}$ (4)

οπότε $|f(x)-f(x_0)|=\dfrac{|x-x_0|\cdot|x^2+xx_0+x_0^2|}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}\leq\dfrac{|x-x_0||x^2+xx_0+x_0^2|}{2}\Leftrightarrow$

$-\dfrac{|x-x_0||x^2+xx_0+x_0^2|}{2}\leq f(x)-f(x_0)\leq\dfrac{|x-x_0||x^2+xx_0+x_0^2|}{2}$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-\dfrac{|x-x_0||x^2+xx_0+x_0^2|}{2}\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{|x-x_0||x^2+xx_0+x_0^2|}{2}=0$ άρα το κριτήριο παρεμβολής και $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

β) Για $x\neq x_0$ από τη σχέση (4) έχουμε: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{x_0^2+xx_0+x_0^2}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}$

οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x_0^2+xx_0+x_0^2}{f^2(x_0)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}=\dfrac{3x_0^2}{3f^2(x_0)+2}$

άρα $f'(x_0)=\dfrac{3x_0^2}{3f^2(x_0)+2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x)=\dfrac{3x^2}{3f^2(x)+2}$.

γ) Αφού η f είναι $\uparrow$ θα είναι και 1–1 οπότε η f αντιστρέφεται και στην (1) θέτω $f(x)=y$ και

$x=f^{-1}(y)$ και έχουμε $y^3+2y-3=\left(f^{-1}(y)\right)^3\Leftrightarrow\left(f^{-1}(y)\right)^3=(y-1)(y^2+y+3)$.

Αν $y<1$ $f^{-1}(y)=-\sqrt[3]{-y^3-2y+3}$. Αν $y\geq 1$ $f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y^3+2y-3}$.

Άρα: $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt[3]{-x^3-2x+3}, & x<1\\ \sqrt[3]{x^3+2x-3}, & x\geq 1\end{cases}$

ε) Αφού η f είναι $\uparrow$ τότε η εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$ είναι ισοδύναμη με την $f(x)=x$ και η (1)

γίνεται $x^3+2x=x^3+3\Leftrightarrow 2x=3\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$. Οπότε το κοινό σημείο των $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι το σημείο $A\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

στ) Στην (1) για $x=0$ έχουμε $f^3(0)+2f(0)=3 \Leftrightarrow f(0)\left[f^2(0)+2\right]=3 \Leftrightarrow f(0)=\dfrac{3}{f^2(0)+2}>0$.

Επίσης στην (1) για $x=-2$ προκύπτει

$f^3(-2)+2f(-2)=-5 \Leftrightarrow f(-2)\left[f^2(-2)+2\right]=-5 \Leftrightarrow f(-2)=\dfrac{-5}{f^2(-2)+2}<0$

Επομένως $f(0)\cdot f(-2)<0$ και αφού η f είναι συνεχής στο $[-2,0]$ από Θ. Bolzano υπάρχει $\rho\in(-2,0)$ τέτοιο ώστε $f(\rho)=0$. Και επειδή η f είναι $\uparrow$ τότε το ρ είναι μοναδικό.

93. **α)** $f'(x)=g(x)>0 \Rightarrow f\uparrow\mathbb{R}$. Για $x=0$: $f(0)f(0)\le 0 \Leftrightarrow f^2(0)\le 0 \Leftrightarrow f(0)=0$

Για κάθε $x>0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0)=0 \Rightarrow g'(x)>0 \Rightarrow g\uparrow[0,+\infty)$ και

για κάθε $x<0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(0)=0 \Rightarrow g'(x)<0 \Rightarrow g\downarrow(-\infty,0]$. Ελάχιστο το $g(0)$

β) $f''(x)=g'(x)=f(x)>0$ για κάθε $x>0$, άρα f κυρτή στο $[0,+\infty)$ και

για κάθε $x<0$ είναι $f''(x)=g'(x)=f(x)<0$, άρα f κοίλη στο $(-\infty,0]$.

$g''(x)=f'(x)=g(x)>0 \Rightarrow g$ κυρτή στο $\mathbb{R}$.

γ) Εστω $h(x)=f(x)-xg(0)$, $x\in[0,+\infty)$.

$h'(x)=f'(x)-g(0)=g(x)-g(0)>0$ για κάθε $x>0$, άρα $h\uparrow[0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0 \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} h(x)>h(0) \Leftrightarrow f(x)>xg(0)$.

94. **α)** Επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $[1,5]$ τότε το ελάχιστο της f είναι το 1 και το μέγιστο της f είναι το 5 και $1<f(0)<f(2)<5$ οπότε τα ακρότατα δεν εμφανίζονται στα άκρα 0 και 2, άρα αφού η f είναι συνεχής υπάρχουν $x_1,\ x_2\in(0,2)$ τέτοια ώστε $f(x_1)=1$ και $f(x_2)=5$, οπότε από Θ. Fermat θα είναι $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

β) Αφού $f'(x_1)=f'(x_2)$ και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(0,2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

γ) Θεωρούμε την $g(x)=2f(x)+f'(x)-x-2$, η οποία είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και

$g(x_1)=2f(x_1)+f'(x_1)-x_1-2=2\cdot 1+0-x_1-2=-x_1<0$ αφού $x_1\in(0,2)$

$g(x_2)=2f(x_2)+f'(x_2)-x_2-2=2\cdot 5-x_2-2=8-x_2>0$ αφού $x_2\in(0,2)$.

Οπότε $g(x_1)\cdot g(x_2)<0$ άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε

$g(x_0)=0 \Leftrightarrow 2f(x_0)+f'(x_0)=x_0+2$.

δ) Θεωρούμε την $h(x)=xf'(x)+f(x)-4$, η οποία είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και

$h(x_1)=x_1f'(x_1)+f(x_1)-4=0+1-4=-3<0$, $h(x_2)=x_2f'(x_2)+f(x_2)-4=5-4=1>0$.

Οπότε $h(x_1)\cdot h(x_2)<0$ και από Θ. Bolzano υπάρχει $\rho\in(x_1,x_2)\subseteq(0,2)$ τέτοιο ώστε

$h(\rho)=0 \Leftrightarrow \rho f'(\rho)=4-f(\rho)$.

ε) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[0,1]$ και $[1,2]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0,1)$ και $\xi_2 \in (1,2)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = f(1)-2$ και $f'(\xi_2) = \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} = 4-f(1)$ οπότε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2) = f(1)-2+4-f(1) = 2$.

95. **α)** Αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε παραγωγίζοντας την σχέση $f(x)-e^{-f(x)} = x-1 \quad (1)$ έχουμε: $f'(x)+e^{-f(x)}f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x)\left(1+e^{-f(x)}\right) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+e^{-f(x)}} \quad (2)$.

β) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη τότε από τη (2) προκύπτει ότι και η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x) = -\dfrac{\left(1+e^{-f(x)}\right)'}{\left(1+e^{-f(x)}\right)^2} = \dfrac{e^{-f(x)}f'(x)}{\left(1+e^{-f(x)}\right)^2} > 0$ αφού η $f'(x) > 0$ οπότε η f κυρτή άρα η $f' \uparrow$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,x]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{f(x)}{x}$.

Είναι $0 < \xi < x$ οπότε $f'(0) < f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < \dfrac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} < f(x) < xf'(x) \quad (3)$

Επίσης $f'(x) = \dfrac{1}{1+e^{-f(x)}} < 1$ οπότε για $x > 0$ θα είναι $xf'(x) < x \quad (4)$.

Άρα από (3) και (4) έχουμε $\dfrac{x}{2} < f(x) < xf'(x) < x$.

γ) Αφού $\dfrac{x}{2} < f(x) < x$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^{f(x)}} = \lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{1}{e^u} = 0$. Από τη σχέση (1) έχουμε: $f(x)-(x-1) = e^{-f(x)}$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-f(x)} = 0$ άρα η $y = x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

96. **α)** Είναι $f(x) = -x^{-\nu}e^x = \dfrac{e^x}{x^\nu}$ οπότε $D_f = \mathbb{R}^*$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = \dfrac{e^x x^\nu - e^x \nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = \dfrac{e^x x^{\nu-1}(x-\nu)}{x^{2\nu}}$

- Αν ν άρτιος τότε $(\nu-1)$ περιττός οπότε το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f δίνεται στο παρακάτω πίνακα. Και η f έχει Τ.Ε. για $x = \nu$ το $f(\nu) = \dfrac{e^\nu}{\nu^\nu}$.

x	$-\infty$	0	ν	$+\infty$
$x-\nu$	$-$	$-$	$+$	
$x^{\nu-1}$	$-$	$+$	$+$	
f'	$+$	$-$	$+$	
f	↗	↘	↗	

- Αν ν περιττός τότε $(\nu-1)$ άρτιος οπότε το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f δίνεται στο παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	ν	$+\infty$
$x-\nu$	$-$	$-$	$+$	
$x^{\nu-1}$	$+$	$+$	$+$	
f'	$-$	$-$	$+$	
f	↘	↘	↗	

γ) Για $x>0$ θα ήταν $f(x)\ge f(\nu)\Leftrightarrow \dfrac{e^x}{x^\nu}\ge\dfrac{e^\nu}{\nu^\nu}\Leftrightarrow e^x\ge\dfrac{e^\nu x^\nu}{\nu^\nu}\Leftrightarrow e^x\ge\left(\dfrac{ex}{\nu}\right)^\nu$

δ) Θεωρούμε την $g(x)=\alpha^x-\left(\dfrac{\alpha x}{\nu}\right)^\nu$ για κάθε $x>0$. Άρα $g(x)\ge 0$ και $g(\nu)=0$, δηλαδή $g(x)\ge g(\nu)$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=\alpha^x\ln\alpha-\nu\left(\dfrac{\alpha x}{\nu}\right)^{\nu-1}\dfrac{\alpha}{\nu}$ και επειδή έχει ελάχιστο στο $x_0=\nu$ από Θ. Fermat θα είναι

$$g'(\nu)=0\Leftrightarrow \alpha^\nu\ln\alpha-\nu\left(\frac{\alpha\nu}{\nu}\right)^{\nu-1}\frac{\alpha}{\nu}=0\Leftrightarrow \alpha^\nu\ln\alpha-\alpha^\nu=0\Leftrightarrow \alpha^\nu(\ln\alpha-1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\alpha=1\Leftrightarrow \alpha=e$$

97. **α)** Από τη σχέση $f^2(x)+\eta\mu^2x=2xf(x)\quad(1)$ για $x\ne 0$ προκύπτει

$$\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{\eta\mu^2x}{x^2}=\frac{2xf(x)}{x^2}\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2=2\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2$$ οπότε και

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right]=2\lim\left[\frac{f(x)}{x}\right]^2$$ δηλαδή $L^2+1=2L\Leftrightarrow(L-1)^2=0\Leftrightarrow L=1$

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right]=1\cdot 1\cdot(-1)=-1$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}=1$ θέτοντας $\eta\mu x=u$.

γ) Από τη σχέση $(1)\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2-\eta\mu^2x\Leftrightarrow(f(x)-x)^2=x^2-\eta\mu^2x\quad(2)$.
Για κάθε $x\ne 0$ είναι $|\eta\mu x|<|x|$ οπότε $\eta\mu^2x<x^2\Leftrightarrow x^2-\eta\mu^2x>0$ οπότε αν θέσουμε $h(x)=f(x)-x$ από την (2) θα $h^2(x)=x^2-\eta\mu^2x>0$ οπότε $h(x)\ne 0$ και αφού η h είναι συνεχής τότε η h θα διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

δ) Οπότε από (2) είναι $|h(x)| = \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}$.

- Άρα $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}, & x > 0 \end{cases}$

  οπότε $h(x) = \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$

- Αν $h(x) = \begin{cases} -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}, & x > 0 \end{cases}$ τότε $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}, & x > 0 \end{cases}$

- Αν $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}, & x > 0 \end{cases}$ τότε $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}, & x < 0 \end{cases}$

- Αν $h(x) = \begin{cases} -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}, & x < 0 \end{cases}$ τότε $h(x) = -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$

  οπότε $f(x) = x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$

ε) Αφού $f(\pi) = 2\pi$ τότε για $x > 0$ θα είναι

i. $f(x) = x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$

με $f'(x) = 1 + \dfrac{2x - 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}} = 1 + \dfrac{x - \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{x^2 - \eta\mu x}}$. Εστω $\varphi(x) = x - \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$, $x > 0$ είναι

$\varphi'(x) = 1 - (\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x) = 2\eta\mu^2 x > 0$ άρα $\varphi \uparrow$. Για $x > 0 \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(0) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$

οπότε $f'(x) > 0$ άρα η $f \uparrow$ στο $(0, +\infty)$.

ii. Είναι $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$ γιατί $\sqrt[12]{3^4} > \sqrt[12]{4^3}$ αφού $81 > 64$ οπότε αφού η f είναι $\uparrow$ τότε

$f\left(\sqrt[3]{3}\right) > f\left(\sqrt[4]{4}\right)$.

98. **α)** $2f(x)f'(x) = \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow \left(f^2(x)\right)' = (\eta\mu x)' \Leftrightarrow f^2(x) = \eta\mu x + c \overset{x=0}{\Rightarrow} c = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^2(x) = \eta\mu x + 9 \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής διατηρεί πρόσημο.

Επειδή $f(0) = 3$, είναι $f(x) > 0$, άρα $f(x) = \sqrt{\eta\mu x + 9}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) i. Είναι $\left(f(x) - 2x\right)e^{-g(x)} = g'(x) \Leftrightarrow e^{g(x)}g'(x) = f(x) - 2x \Leftrightarrow f(x) = e^{g(x)}g'(x) + 2x \Rightarrow$

$f(x) = \left(e^{g(x)} + x^2\right)'$. Εστω $h(x) = e^{g(x)} + x^2$, $x \in \mathbb{R}$ οπότε $h'(x) = f(x)$. Από το ΘΜΤ για την

h υπάρχει $\xi \in (0, x)$, $x > 0$: $h'(\xi) = \dfrac{h(x) - h(0)}{x} \Leftrightarrow f(\xi) = \dfrac{1}{x}\left(e^{g(x)} + x^2 - eg^{(0)}\right)$.

Είναι $-1<\eta\mu\xi<1 \Leftrightarrow 8\le \eta\mu\xi+9\le 10 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\le\sqrt{\eta\mu\xi+9}\le\sqrt{10}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\le f(\xi)\le\sqrt{10}\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\le\frac{1}{x}\left(e^{g(x)}+x^2-e^{g(0)}\right)\le\sqrt{10}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}x\le e^{g(x)}+x^2-e^{g(0)}\le\sqrt{10}x\Leftrightarrow 2\sqrt{2}x-x^2\le e^{g(x)}-e^{g(0)}\le\sqrt{10}x-x^2$.

ii. Εστω ότι έχει δύο ρίζες $\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}$ με $\rho_1<\rho_2$. Τότε από θ.Rolle υπάρχει

$\xi\in(\rho_1,\rho_2)$: $\varphi'(\xi)=0$. Όμως $\varphi'(x)=\left(e^{g(x)}+x^2\right)'-2=f(x)-2$,

άρα $f(\xi)=2\Leftrightarrow\sqrt{\eta\mu\xi+9}=2\Leftrightarrow\eta\mu\xi=-5$ άτοπο.

99. **α)** Η εξίσωση γίνεται $e^x\left(xf'(x)-f(x)\right)=x+1\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=xe^{-x}+e^{-x}\Leftrightarrow$

$x\left(f'(x)-e^{-x}\right)-\left(e^{-x}+f(x)\right)=0\underset{:x^2}{\overset{x\neq 0}{\Rightarrow}}\left(\frac{e^{-x}+f(x)}{x}\right)'=0$. Εστω $g(x)=\frac{e^{-x}+f(x)}{x}$.

Επειδή $g(1)=\frac{e^{-1}+f(1)}{1}$, $g(2)=\frac{e^{-2}+f(2)}{2}$ είναι $g(1)=g(2)$ γιατί

$\frac{1}{e}+f(1)=\frac{e^{-2}+f(2)}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{e}+2f(1)=\frac{1}{e^2}+f(2)\Leftrightarrow 2e+2e^2f(1)=1+e^2f(2)\Leftrightarrow$

$e^2+\left(2f(1)-f(2)\right)=1-2e$ που ισχύει,

οπότε από θεώρημα Rolle $\exists\rho\in(1,2): g'(\rho)=0\Leftrightarrow\rho e^{\rho}f'(\rho)=e^{\rho}f(\rho)+\rho+1$

β) Εστω ότι έχει κι άλλη ρίζα $\rho_1\neq\rho$ τότε στο (ρ_1,ρ) ή (ρ,ρ_1) τότε για τη συνάρτηση

$\varphi(x)=xe^xf'(x)-e^xf(x)-x-1$ εφαρμόζεται το θ. Rolle και υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho)$ ή (ρ,ρ_1):

$\varphi'(\xi)=0$. Είναι $\varphi'(x)=\cancel{e^xf'(x)}+xe^xf'(x)+xe^xf''(x)-e^xf(x)\cancel{-e^xf'(x)}-1\Leftrightarrow$

$\varphi'(x)=xe^x\left(f'(x)+f''(x)\right)-e^xf(x)-1$

$\varphi'(\xi)=0\Leftrightarrow\xi f'(\xi)+\xi f''(\xi)-e^{-\xi}-f(\xi)=0$ που είναι άτοπο.

γ) Από το ΘΜΤ για την f', $\exists x_0\in(\rho,2)$:

$$f''(x_0)=\frac{f'(2)-f'(\rho)}{2-\rho}\Leftrightarrow f''(x_0)=\frac{\frac{\rho+1}{\rho e^{\rho}}-\frac{e^{\rho}f(\rho)+\rho+1}{\rho e^{\rho}}}{2-\rho}=\frac{f(\rho)}{\rho(2-\rho)}.$$

Είναι $0<2-\rho<1\Rightarrow|2-\rho|<1\Leftrightarrow\frac{1}{|2-\rho|}>1$, άρα $|f''(x_0)|=\frac{|f(\rho)|}{\rho|2-\rho|}>\frac{|f(\rho)|}{\rho}$.

100. **α)** Στην σχέση $f(x+y)=f(x)e^{2y}+f(y)e^{2x}+e^{2x+2y}-1$ (1) για $x=y=0$ έχουμε:

$f(0)=f(0)+f(0)+e^0-1\Leftrightarrow f(0)=0$.

β) Παραγωγίζουμε στην (1) οπότε έχουμε $f'(x+y)=f'(x)e^{2y}+2e^{2x}f(y)+2e^{2x+2y}$ και

θέτοντας $x=0$ έχουμε $f'(y)=f'(0)e^{2y}+2e^0f(y)+2e^{2y}\Leftrightarrow f'(y)=-e^{2y}+2f(y)+2e^{2y}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(y)=2f(y)+e^{2y}$ άρα και $f'(x)=2f(x)+e^{2x}$.

γ) Είναι $f'(x)-2f(x)=e^{2x}\Leftrightarrow e^{-2x}f'(x)-2e^{-2x}f(x)=1\Leftrightarrow\left(e^{-2x}f(x)\right)'=(x)'\Leftrightarrow e^{-2x}f(x)=x+c$.

Για $x=0$ $f(0)=c\Leftrightarrow c=0$ άρα $f(x)=xe^{2x}$.

δ) Αν $\alpha<\beta$ εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,\beta]$,

οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Όμως $f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}$ και $f''(x)=2e^{2x}+2e^{2x}+4xe^{2x}=4e^{2x}+4xe^{2x}>0$

αφού $x\in(0,+\infty)$ οπότε η $f'\uparrow$

Είναι $\alpha<\xi<\beta\Leftrightarrow f'(\alpha)<f'(\xi)<f'(\beta)\Leftrightarrow$

$$e^{2\alpha}(1+2\alpha)<\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}<e^{2\beta}(1+2\beta)\Leftrightarrow(\beta-\alpha)e^{2\alpha}(1+2\alpha)<\beta e^{2\beta}-\alpha e^{2\alpha}<e^{2\beta}(1+2\beta)(\beta-\alpha)$$

Όμοια αν $\alpha>\beta$ και για $\alpha=\beta$ ισχύει η ισότητα. Οπότε για κάθε $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$ είναι

$$e^{2\alpha}(1+2\alpha)(\beta-\alpha)\le\beta e^{2\beta}-\alpha e^{2\alpha}\le e^{2\beta}(1+2\beta)(\beta-\alpha).$$

101. α) i. Για $y=1$ και $x>0$ είναι $f(x)=f(x)f(1)\overset{f(x)\neq0}{\Rightarrow}f(1)=1$

ii. Για $y=\dfrac{1}{x}$ έχουμε $f\left(x\dfrac{1}{x}\right)=f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right)\Leftrightarrow f(1)=f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right)\Leftrightarrow f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1\Leftrightarrow f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{f(x)}$

iii. f συνεχής και $f(x)\neq0$ και αφού $f(1)>0\Rightarrow f(x)>0$ για $x\in(0,+\infty)$ και $f(0)=0$ άρα $f(x)\ge0$ για $x\ge0$

iv. Είναι $f'(\rho)=\lim\limits_{x\to\rho}\dfrac{f(x)-f(\rho)}{x-\rho}$. Για $x=x_0\dfrac{h}{\rho}$, $h\neq\rho$, έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f\left(x_0\frac{h}{\rho}\right)-f(x_0)}{x_0\frac{h}{\rho}-x_0}=\frac{f(x_0)\cdot f\left(\frac{h}{\rho}\right)-f(x_0)}{\frac{x_0(h-\rho)}{\rho}}=\frac{\rho f(x_0)}{x_0}\cdot\frac{f\left(h\frac{1}{\rho}\right)-1}{h-\rho}=$$

$$=\frac{\rho f(x_0)}{x_0}\cdot\frac{f(h)f\left(\frac{1}{\rho}\right)-1}{h-\rho}=\frac{\rho f(x_0)}{x_0}\cdot\frac{f(h)\frac{1}{f(\rho)}-1}{h-\rho}=\frac{\rho f(x_0)}{x_0f(\rho)}\cdot\frac{f(h)-f(\rho)}{h-\rho}$$

άρα $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{\rho f(x_0)}{x_0f(\rho)}f'(\rho)\Leftrightarrow f'(x_0)=\dfrac{\rho f(x_0)}{x_0f(\rho)}f'(\rho)$ για κάθε $x_0>0$,

άρα $xf'(x)f(\rho)=\rho f'(\rho)f(x)$ για κάθε $x>0$.

β) Είναι $xf'(x)f(\rho)=\rho f'(\rho)f(x)\Leftrightarrow xf'(x)\sqrt{\rho}=\rho\dfrac{1}{2\sqrt{\rho}}f(x)\Leftrightarrow 2xf'(x)\cancel{\rho}=\cancel{\rho}f(x)\Leftrightarrow$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{2x}\Leftrightarrow\ln f(x)=\ln\sqrt{x}+c\overset{c=0}{\Rightarrow}f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$.

102. α) Είναι $f'(x)=-e^{-x}+(x+1)e^{-x}=(-1+x+1)e^{-x}=xe^{-x}$.

Επειδή $x>0$ και $e^{-x}>0$, είναι και $xe^{-x}>0$, άρα $f'(x)>0$.

Ακόμη $x>0\Leftrightarrow-x<0\Leftrightarrow e^{-x}<e^0=1\overset{x>0}{\Leftrightarrow}xe^{-x}<x$, δηλαδή $f'(x)<x$.

β) Είναι $0<f'(x)<x$ για κάθε $x>0$, άρα και $0<f'(t)<t$, για κάθε $t>0$.

Επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, έχουμε:

$$0<\int_0^x f'(t)dt<\int_0^x tdt \Leftrightarrow 0<f(x)-f(0)<\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x \overset{f(0)=0}{\Leftrightarrow} 0<f(x)<\frac{x^2}{2}$$

γ) $g(x)=2x^2-2(x^2+1)e^{-\frac{1}{x^2}}=2x^2\left(1-\frac{x^2+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}\right)=2x^2\left[1-\left(1+\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\right]=2x^2f\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Επειδή $0<f(x)<\frac{x^2}{2}$ για κάθε $x>0$, αντικαθιστώντας όπου x το $\frac{1}{x^2}$ προκύπτει:

$$0<f\left(\frac{1}{x^2}\right)<\frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}{2}\Leftrightarrow 0<f\left(\frac{1}{x^2}\right)<\frac{1}{2x^4}\Leftrightarrow 0<2x^2f\left(\frac{1}{x^2}\right)<2x^2\frac{1}{2x^4}\Leftrightarrow 0<g(x)<\frac{1}{x^2}.$$

103. **α)** Αφού $f'(x)=\frac{e}{e+e^{f(x)}}>0 \quad (1)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε και η συνάρτηση $\frac{e}{e+e^{f(x)}}$ είναι παραγωγίσιμη οπότε η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $f''(x)=-\frac{ce^{f(x)}f'(x)}{\left(e+e^{f(x)}\right)^2}<0$ οπότε η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

γ) Είναι $f'(1)=\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow\frac{e}{e+e^{f(1)}}=\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow e+e^{f(1)}=e+1\Leftrightarrow e^{f(1)}=1\Leftrightarrow e^{f(1)}=e^0\Leftrightarrow f(1)=0$ οπότε το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ και αφού η $f\uparrow$ τότε το 1 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

δ) Από $(1)\Leftrightarrow\left(e+e^{f(x)}\right)f'(x)=e\Leftrightarrow ef'(x)+e^{f(x)}f'(x)=e\Leftrightarrow\left(ef(x)+e^{f(x)}\right)'=(ex)'$ άρα $ef(x)+e^{f(x)}=ex+c$. Για $x=1$ έχουμε $e\cdot 0+e^0=e+c\Leftrightarrow c=1-e$.

Άρα $ef(x)+e^{f(x)}=ex+1-e \quad (2)$.

ε) $(2)\Leftrightarrow ex=ef(x)+e^{f(x)}+e-1\Leftrightarrow x=f(x)+\frac{ef(x)}{e}+\frac{e-1}{e} \quad (3)$. Αφού η f είναι $\uparrow$ θα είναι και 1−1 οπότε αντιστρέφεται. Θέτω όπου $f(x)=y$ και $x=f^{-1}(y)$ οπότε

$f^{-1}(y)=y+\frac{e^y}{e}+\frac{e-1}{e}$ άρα $f^{-1}(x)=x+e^{x-1}+\frac{e-1}{e}$.

104. **α)** $x(x+2)f'(x)+(x+2)f(x)=1\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=\frac{1}{x+2}\Rightarrow$

$(xf(x))'=(\ln(x+2))'\Leftrightarrow xf(x)=\ln(x+2)+c$

$f(\rho-2)=\frac{1}{\rho-2}\Leftrightarrow c=0$ άρα $f(x)=\frac{\ln(x+2)}{x}$, $x>0$.

β) Είναι $f'(x)=\frac{x-(x+2)\ln(x+2)}{x^2(x+2)}$. Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $x-(x+2)\ln(x+2)$. Εστω $g(x)=x-(x+2)\ln(x+2)$, $x>0$.

Είναι $g'(x)=-\ln(x+2)<0 \Rightarrow g\overset{\vee}{\downarrow}(0,+\infty)$ $\quad x>0 \overset{g\overset{\vee}{\downarrow}}{\Leftrightarrow} g(x)<g(0)=-2\ln 2<0$

άρα $f'(x)<0 \Rightarrow f\overset{\vee}{\downarrow}(0,+\infty)$

γ) $(x+2)<(x+3) \overset{f\overset{\vee}{\downarrow}}{\Leftrightarrow} f(x+2)>f(x+3) \Leftrightarrow \dfrac{\ln(x+4)}{x+2}>\dfrac{\ln(x+5)}{x+3} \Leftrightarrow$

$(x+3)\ln(x+4)>(x+2)\ln(x+5) \Leftrightarrow \ln(x+4)^{x+3}>\ln(x+5)^{x+2} \Leftrightarrow (x+4)^{x+3}>(x+5)^{x+2}$

δ) Είναι $f(e^x)\le \dfrac{x+\alpha}{e^x} \Rightarrow \dfrac{\ln(e^x+2)}{e^x}\le \dfrac{x+\alpha}{e^x} \Leftrightarrow \ln(e^x+2)-x\le \alpha$.

Εστω $h(x)=\ln(e^x+2)-x$, $x\ge 0$. $h'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+2}-1=\dfrac{\cancel{e^x}-\cancel{e^x}-2}{e^x+2}<0$ άρα $h\downarrow$ στο $[0,+\infty)$

$x\ge 0 \Rightarrow h(x)\le h(0)=\ln 3$. Άρα $\alpha_{min}=\ln 3$

105. **α)** Στην σχέση $3f(x)\le 2f(\alpha)+f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ θέτουμε διαδοχικά $x=\alpha$, $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ και προκύπτει:

$f(\alpha)=f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Οπότε η ανισότητα γίνεται $f(x)\le f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$, δηλαδή η f έχει μέγιστο στο $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Επειδή $\dfrac{\alpha+\beta}{2}\in(\alpha,\beta)$ από θ.Fermat είναι $f'\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$.

β) Από το θ.Rolle για την f στο $\left[\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\exists \rho\in\left(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right): f'(\rho)=0$ και αφού $f'\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$

τότε υπάρχουν δύο τουλάχιστον κρίσιμα σημεία για $x=\rho$ και $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

γ) Από το θ.Rolle για την f' στο $\left[\rho,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\exists \xi\in\left(\rho,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$: $f''(\xi)=0$

δ) Από το ΘΜΤ για την f' στο $\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$

$$\exists x_0\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right): f''(x_0)=\frac{f'(\beta)-f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \Rightarrow f''(x_0)=2\frac{f'(\beta)}{\beta-\alpha}.$$

Όμως $|f''(x_0)|\le \alpha+\beta \quad 2\left|\dfrac{f'(\beta)}{\beta-\alpha}\right|\le \alpha+\beta \overset{\beta-\alpha>0}{\Rightarrow} 2|f'(\beta)|\le(\beta-\alpha)(\beta+\alpha) \Rightarrow 2|f'(\beta)|\le \beta^2-\alpha^2$.

106. **α)** Η $h(x)=\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta)$ ως πηλίκο σ.σ.

Στο $x=\beta$ είναι $\lim\limits_{x\to\beta^-} h(x)=\lim\limits_{x\to\beta^-}\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}=f'(\beta)=0=h(\beta)$ άρα h συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

β) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta)$ με $h'(x)=\dfrac{f'(x)(x-\beta)-f(x)+f(\beta)}{(x-\beta)^2}$ και

$h'(\alpha)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{(\alpha-\beta)^2}<0$ γιατί $f'(\alpha)=0$ και $f(\beta)>f(\alpha)$.

γ) Αφού $h'(\alpha)<0$ τότε $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}<0$, άρα $\dfrac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}$ κοντά στο α.

Όμως $x-\alpha>0$ κοντά στο α, οπότε $h(x)-h(\alpha)<0\Leftrightarrow h(x)<h(\alpha)$.

Είναι $h(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}<0$ οπότε $h(x)<h(\alpha)<0=h(\beta)$ οπότε η f δεν έχει ελάχιστη τιμή στα άκρα α ή β. Όμως είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ οπότε θα έχει ελάχιστο σε εσωτερικό σημείο του (α,β). Έστω $x_0\in(\alpha,\beta)$ τότε από Fermat είναι

$$h'(x_0)=0\Leftrightarrow\frac{f'(x_0)(x_0-\beta)-f(x_0)+f(\beta)}{(x_0-\beta)^2}=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow f'(x_0)=\frac{f(x_0)-f(\beta)}{x_0-\beta}.$$

107. **α)** Είναι $f(x)=e^x-1$ και $f'(x)=e^x$, $f(0)=0$ και $f'(0)=1$ οπότε η εξίσωση εφαπτομένης στο $x_0=0$ είναι $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ άρα $\varepsilon: y=x$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η $y=x$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=-x^2-x-1$. Είναι $h'(x)=-2x-1$. Αν υποθέσουμε ότι $(x_1,h(x_1))$ είναι το σημείο επαφής πρέπει $h'(x_1)=\lambda_\varepsilon\Leftrightarrow -2x_1-1=1\Leftrightarrow x_1=-1$ και $h(-1)=-1$, $h'(-1)=1$ οπότε η εφαπτομένη της C_h στο $x_1=-1$ είναι $y-h(-1)=h'(-1)(x+1)\Leftrightarrow y+1=x+1\Leftrightarrow y=x$.

β) Εστω $g(x)=f(x)-h(x)=e^x-1+x^2+x+1=e^x+x^2+x$.

Είναι $g'(x)=e^x+2x+1$ και $g''(x)=e^x+2>0$ οπότε η g' είναι γνησίως αύξουσα.

$g'(-1)=e^{-1}-1=\dfrac{1}{e}-1<0$, $g'(0)=e^0+1=2>0$. Οπότε $g'(-1)\cdot g'(0)<0$ και αφού η g' είναι συνεχής στο $[-1,0]$ και γνησίως αύξουσα θα υπάρχει μοναδικό $p\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε $g'(p)=0\Leftrightarrow e^p+2p+1=0\quad(1)$.

γ) Για $x<p$ είναι $g'(x)<g'(p)\Leftrightarrow g'(x)<0$ οπότε $g\downarrow$

i. Για $x>p$ είναι $g'(x)>g'(p)\Leftrightarrow g'(x)>0$ οπότε $g\uparrow$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα είναι $g(x)\geq g(p)\Leftrightarrow g(x)\geq e^p+p^2+p$.

Όμως από (1) $e^p=-2p-1$ οπότε $g(x)\geq -2p-1+p^2+p\Leftrightarrow g(x)\geq p^2-p-1$.

ii. Για το πρόσημο της g' και την μονοτονία της g έχουμε το διπλανό πίνακα.

	$-\infty$	p	$+\infty$
g'	$-$		$+$
g	↘		↗

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^x+x^2+x\right]=+\infty$

γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+x^2+x)=+\infty$.

Επίσης $p^2-p-1<1821 \Leftrightarrow p^2-p<1822$ γιατί $p\in(-1,0)$ και $-2<p-1<-1$ οπότε $\rho(\rho-1)<2 \Leftrightarrow \rho^2-\rho<2<1822$.

Η $g\downarrow$ στο $(-\infty,p]$ με σύνολο τιμών $g(A_1)=\left[g(p),\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)\right)=\left[p^2-p-1,+\infty\right)$ και αφού $1821\in g(A_1)$ τότε υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=1821$ στο $(-\infty,p)$.

Επίσης η $g\uparrow$ στο $[p,+\infty)$ με σύνολο τιμών $g(A_2)=\left[g(p),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)=\left[p^2-p-1,+\infty\right)$ και αφού $1821\in g(A_2)$ τότε η εξίσωση $g(x)=1821$ θα έχει άλλη μια ρίζα στο διάστημα $(p,+\infty)$. Άρα η εξίσωση $g(x)=1821$ έχει ακριβώς δύο λύσεις στο $\mathbb{R}$.

108. **α)** Εχουμε $\left(f'(x)\right)^2-2f'(x)+\dfrac{4}{x^2+4}=0 \Leftrightarrow \left(f'(x)\right)^2-2f'(x)+1=1-\dfrac{4}{x^2+4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(f'(x)-1\right)^2=\dfrac{x^2}{x^2+4}$. Έστω $h(x)=f'(x)-1$ τότε είναι $h^2(x)=\dfrac{x^2}{x^2+4}$.

Αν $x\in(-\infty,0)$ τότε $h^2(x)>0$ και αφού η h είναι συνεχής τότε διατηρεί πρόσημο.

Είναι $h(-2)=f'(-2)-1<0$ άρα $h(x)=-\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+4}}=-\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+4}}\overset{x<0}{=}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.

Επίσης για $x=0$ $h(0)=\left(f'(0)-1\right)^2=0 \Leftrightarrow f'(0)=1$.

Άρα $f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $f'(x)=\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)' \Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+4}+c$. Για $x=0$ είναι $f(0)=2+c \Leftrightarrow c=0$.

Άρα $f(x)=x+\sqrt{x^2+4}$.

Επίσης $f(x)=x+\sqrt{x^2+4}>x+\sqrt{x^2}=x+|x|\geq 0 \Leftrightarrow f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Είναι $f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+4}}>0$ (1) άρα η f είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

Επίσης $f''(x)=\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)'=\dfrac{4}{\left(x^2+4\right)\sqrt{x^2+4}}>0$ οπότε η f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

δ) i. Είναι $g(x)=\ln f(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\overset{(1)}{=}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}>0$.

ii. Αφού $g'(x)>0$ τότε η $g\uparrow$ οπότε για $x>0$ θα είναι $g(x)>g(0)=\ln 2>0 \Leftrightarrow g(x)>0$.

Θεωρούμε $\varphi(x)=xg(x)-f(x)+x+1,\ x>0$ είναι

$$\varphi'(x)=g(x)+xg'(x)-f'(x)+1=g(x)+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}-1-\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}+1=g(x)>0$$

οπότε η $\varphi\uparrow$ άρα για $x>0$ θα είναι

$$\varphi(x)>\varphi(0) \Leftrightarrow xg(x)-f(x)+x+1>0 \Leftrightarrow xg(x)>f(x)-x-1 \Leftrightarrow g(x)>\frac{f(x)-x-1}{x}$$

109. **α) i.** Εστω $g(x)=e^x-x-1,\ x\in\mathbb{R}$ τότε $g'(x)=e^x-1$ και $g'(x)>0\Leftrightarrow e^x-1>0\Leftrightarrow$ $e^x>e^0\Leftrightarrow x>0$. Οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα είναι $g(x)\geq g(0)\Leftrightarrow e^x-x-1\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq x+1\ \ (1)$.

Θέτουμε στην (1) όπου x το $f(x)$ και γίνεται $e^{f(x)}\geq f(x)+1$

	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$-$		$+$
g	↘		↗

ii. Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $e^{f(x)}+f(x)=x+1\ \ (3)$

Οπότε $(2)\Leftrightarrow e^{f(x)}+f(x)\geq 2f(x)+1\overset{(3)}{\Leftrightarrow}x+1\geq 2f(x)+1\Leftrightarrow 2f(x)\leq x,\ x\in\mathbb{R}$.

iii. Εχουμε $(3)\ \ e^{f(x)}=x+1-f(x)$ αφού $f(x)\leq\frac{x}{2}\Leftrightarrow -f(x)\geq-\frac{x}{2}\Leftrightarrow$

$$x+1-f(x)\geq x+1-\frac{x}{2}\Leftrightarrow e^{f(x)}\geq\frac{x}{2}+1\Leftrightarrow \ln e^{f(x)}\geq\ln\left(\frac{x+2}{2}\right)\Leftrightarrow f(x)\geq\ln(x+2)-\ln 2$$

β) Παραγωγίζοντας την (3) έχουμε: $e^{f(x)}f'(x)+f'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{1+e^{f(x)}}>0$ οπότε η f είναι ↑ στο $\mathbb{R}$. Αφού η συνάρτηση $\frac{1}{1+e^{f(x)}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε και $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $f''(x)=-\frac{e^{f(x)}f'(x)}{\left(1+e^{f(x)}\right)^2}<0$ οπότε η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $2f(x)\leq x$ οπότε και για $x<0$ είναι $f(x)\leq\frac{x}{2}<0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2}=-\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

Επίσης για $x\geq 0$ είναι $f(x)\geq\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)=+\infty$ θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ τότε

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

δ) Αφού η f είναι ↑ θα είναι και 1–1 οπότε αντιστρέφεται. Στην (3) θέτουμε όπου $f(x)=y$ και $x=f^{-1}(y)$ και γίνεται $e^y+y=f^{-1}(y)+1\Leftrightarrow f^{-1}(y)=e^y+y-1$.

Άρα $f^{-1}(x)=e^x+x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

110. **α)** Εστω ότι η f'' δεν είναι 1–1 τότε υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, έστω $x_1<x_2$ με $f''(x_1)=f''(x_2)$ οπότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f^{(3)}(\xi)=0$ (άτοπο).

β) Αφού η f είναι 3 φορές παραγωγίσιμη, $f^{(3)}(x)$ είναι συνεχής και διάφορη του μηδενός τότε θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Αφού $f^{(3)}(3)>0$ τότε $f^{(3)}(x)>0$ άρα $f''(x)$↑

γ) Παραγωγίζοντας τη σχέση $f(x)+f(6-x)=5\ \ (1)$ έχουμε $f'(x)-f'(6-x)=0$ και $f''(x)+f''(6-x)=0\ \ (2)$. Στην (2) για $x=3$ προκύπτει $f''(3)=0$ οπότε για $x<3$ θα είναι $f''(x)<f''(3)=0\Leftrightarrow f''(x)<0$ οπότε f κοίλη στο $(-\infty,3]$

ενώ για $x>3$ είναι $f''(x)>f''(3)\Leftrightarrow f''(x)>0$ άρα f κυρτή στο $[3,+\infty)$.

Η f έχει Σ.Κ. για $x=3$ το $(3,f(3))\equiv\left(3,\frac{5}{2}\right)$.

δ) Αφού $f(3)=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2f(3)=5$ τότε η εξίσωση $2f(x)=5$ έχει ρίζα τη $x=3$.

Επίσης

		3	
g'	$-$	0	$+$
g	↘		↗

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $f'(x)>f'(3)>0$ οπότε $f'(x)>0$ άρα η f είναι ↑ οπότε η ρίζα $x=3$ είναι μοναδική.

ε) Η εξίσωση $2f(x+2)=f(x+1)+f(x+3)$ γίνεται $f(x+2)-f(x+1)=f(x+3)-f(x+2)$ (3).

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα $[x+1,x+2]$ και $[x+2,x+3]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(x+1,x+2)$ και $\xi_2\in(x+2,x+3)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)=f(x+2)-f(x+1)$, $f'(\xi_2)=f(x+3)-f(x+2)$. Άρα (3) προκύπτει $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ άτοπο αφού $\xi_1\neq\xi_2$ και f'↑ στο $[3,+\infty)$.

111. α) Είναι $f'(x)=e^{x-f(x)}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{e^x}{e^{f(x)}}\Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)=e^x\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}\right)'=\left(e^x\right)'\Leftrightarrow e^{f(x)}=e^x+c$

και για $x=0$ είναι $e^{\ln 2}=e^0+c\Leftrightarrow c=1$, οπότε $e^{f(x)}=e^x+1\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(e^x+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

β) $f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ και $f''(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-e^x\cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}>0$ οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

γ) $f'(0)=\frac{e^0}{e^0+1}=\frac{1}{2}$ άρα η εξίσωση εφαπτομένης είναι $y-\ln 2=\frac{1}{2}(x-0)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\ln 2$.

δ) Αφού η f είναι κυρτή σε κάθε σημείο η εφαπτομένη θα είναι κάτω από C_f

άρα $f(x)\geq\frac{1}{2}x+\ln 2$ $\ln\left(e^x+1\right)\geq\frac{1}{2}x+\ln 2$.

ε) Είναι $g(x)=3x-e^{f(x)+x}=3x-e^{\ln\left(e^x+1\right)+x}=3x-\left(e^x+1\right)e^x=3x-e^{2x}-e^x$ οπότε

$g'(x)=3-2e^{2x}-e^x$, $g''(x)=-4e^{2x}-e^x<0$ οπότε η g'↓.

Για $x<0$ είναι $g'(x)>g'(0)\Rightarrow g'(x)>0$ ενώ για $x>0$ είναι $g'(x)<g'(0)\Rightarrow g'(x)<0$ οπότε έχουμε τον διπλανό πίνακα.

	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$+$		$-$
g	↗		↘

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)\leq g(0)\Leftrightarrow g(x)\leq -2$.

Άρα η g έχει μέγιστο στο σημείο $A(0,2)$.

στ) Είναι $g(x) \le -2 < 0$ και αφού $1+e^x > 1$ τότε $\ln(1+e^x) > \ln 1 \Leftrightarrow f(x) > 0$ άρα $f(x) > g(x)$.

112. Ισχύει $\ln f(x) + f(x) = x \quad (1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Θεωρούμε την $h(x) = \ln x + x$, $x > 0$ είναι $h'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ οπότε η h είναι $\uparrow$.

Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τότε από (1) θα είναι $\ln f(x_1) + f(x_1) < \ln f(x_2) + f(x_2)$.

Δηλαδή $h(f(x_1)) < h(f(x_2))$ και αφού η h είναι $\uparrow$ τότε θα έχουμε $f(x_1) < f(x_2)$

οπότε η $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

β) Αν $f(x) = x$, τότε $(1) \Rightarrow \ln x + x = x \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

γ) i. Παραγωγίζουμε στη σχέση (1) και έχουμε:

$$f'(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f'(x)\left(1 + \frac{1}{f(x)}\right) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)+1} \quad (2).$$

ii. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε από (2) και η f' είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = \frac{f'(x)}{(f(x)+1)^2} > 0$$ άρα η f είναι κυρτή.

113. **α)** Είναι $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$ οπότε η $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

β) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{0}{0+1} = 0$ και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = 1.$$

Αφού η f είναι συνεχής και $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ τότε $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (0,1)$.

γ) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x) = \frac{e^x(e^x+1)^2 - e^x 2(e^x+1)\cdot e^x}{(e^x+1)^4} = \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3} \ge 0 \Rightarrow 1 - e^x \ge 0 \Rightarrow x \le 0.$$

Οπότε για το πρόσημο της f'' και την κυρτότητα της f έχουμε τον διπλανό πίνακα.

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$ και κοίλη στο $[0, +\infty)$

και παρουσιάζει σημείο καμπής για το $(0, f(0)) \equiv \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$+$		$-$
f'	⌣		⌢

δ) Αρκεί να δείξουμε ότι: $f(4^x)-f'(4^x)<f(5^x)-f'(5^x)$.

Θεωρούμε την $g(x)=f(x)-f'(x)$, $x>0$.

Είναι $g'(x)=f'(x)-f''(x)=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}-\dfrac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}=\dfrac{2e^{2x}}{(1+e^x)^3}>0$ οπότε η $g\uparrow$ στο $(0,+\infty)$.

Για $x>0$ είναι $4<5$ και $4^x<5^x$ άρα $g(4^x)<g(5^x)\Leftrightarrow f(4^x)-f'(4^x)<f(5^x)-f'(5^x)$.

ε) Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$ έχει μοναδική λύση στο $(0,1)$.

Είναι $h(0)=f(0)=\dfrac{1}{2}>0$, $h(1)=f(1)-1=\dfrac{e}{e+1}-1=-\dfrac{1}{e+1}<0$ οπότε αφού h συνεχής στο $[0,1]$ και $h(0)\cdot h(1)<0$ από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=x_0$. Επίσης $h'(x)=f'(x)-1=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}-1=-\dfrac{e^{2x}+e^x+1}{(e^x+1)^2}<0$ οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

114. α) i. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,1]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}\Leftrightarrow f'(\xi)=f(1)-f(0)\quad(2).$$

ii. Στη σχέση $2(f'(x)-1)\ge f^2(0)+f^2(1)\quad(1)$ θέτουμε $x=\xi$ οπότε γίνεται

$$2(f'(\xi)-1)\ge f^2(0)+f^2(1)\Leftrightarrow 2f'(\xi)-2\ge f^2(0)+f^2(1)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}2(f(1)-f(0))-2\ge f^2(0)+f^2(1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(0)+f^2(1)-2f(1)+2f(0)+1+1\le 0\Leftrightarrow (f(0)+1)^2+(f(1)-1)^2\le 0$$ όμως

$(f(0)+1)^2+(f(1)-1)^2\ge 0$ άρα $(f(0)+1)^2+(f(1)-1)^2=0$ οπότε $f(0)=-1$ και $f(1)=1$.

iii. Από την (1) έχουμε

$$2f'(x)-2\ge f^2(0)+f^2(1)\overset{(4)}{\Leftrightarrow}2f'(x)-2\ge(-1)^2+1^2\Leftrightarrow 2f'(x)\ge 4\Leftrightarrow f'(x)\ge 2\quad(3)$$

β) i. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,x_0]$ οπότε υπάρχει $\xi_1\in(0,x_0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0}\Leftrightarrow x_0f'(\xi_1)=f(x_0)+1.$$

ii. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x_0,1]$ οπότε υπάρχει $\xi_2\in(x_0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}\Leftrightarrow (x_0-1)f'(\xi_2)=f(x_0)-1.$$

iii. Από τη σχέση (3) θα είναι $f'(\xi_1)\ge 2$ και $f'(\xi_2)\ge 2$ δηλαδή

$$\frac{f(x_0)+1}{x_0}\ge 2\Leftrightarrow f(x_0)\ge 2x_0-1\quad(4)$$ και

$$\frac{f(x_0)-1}{x_0-1}\ge 2\overset{x_0-1<0}{\Leftrightarrow} f(x_0)-1\le 2(x_0-1)\Leftrightarrow f(x_0)\le 2x_0-1\quad(5)$$

Από $(4),(5)$ είναι $f(x_0)=2x_0-1$ για τυχαίο $x_0\in[0,1]$ άρα $f(x)=2x-1$, $x\in(0,1)$ και αφού $f(0)=-1$, $f(1)=1$ τότε $f(x)=2x-1$, $x\in[0,1]$.

115. **α)** Είναι $f(x)=x^2e^{\frac{1}{x^2}}$, $x\neq 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=2xe^{\frac{1}{x^2}}-x^2e^{\frac{1}{x^2}}\frac{2}{x^3}=2e^{\frac{1}{x^2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)=2e^{\frac{1}{x^2}}\frac{x^2-1}{x}$$

οπότε για το πρόσημο της f' και την μονοτονία της f έχουμε τον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x^2-1	$+$	$-$	$-$	$+$	
x	$-$	$-$	$+$	$+$	
f'	$-$	$+$	$-$	$+$	
f	↘	↗	↘	↗	

Η f έχει τοπικό ελάχιστο για $x=1$ και $x=-1$ το $f(-1)=f(1)=e$.

β) $$f''(x)=2e^{\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^3}\right)\frac{x^2-1}{x}+2e^{\frac{1}{x^2}}\frac{2x^2-(x^2-1)}{x^2}=2e^{\frac{1}{x^2}}\frac{x^2+1}{x^2}-4e^{\frac{1}{x^2}}\frac{x^2-1}{x^4}=$$

$$=2e^{\frac{1}{x^2}}\left(\frac{x^2+1}{x^2}-\frac{2(x^2-1)}{x^4}\right)=2e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{x^4-x^2+2}{x^4}>0$$

αφού $x^4-x^2+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (τριώνυμο ως προς x^2 με $x<0$). Οπότε η f είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0),(0,+\infty)$.

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2e^{\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x^2}}=1$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(x^2e^{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x^2}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x^2e^{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{-\frac{2}{x^3}}=+\infty$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2e^{\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$

Από τον πίνακα μονοτονίας και τα προηγούμενα όρια διαπιστώνουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι $f(A)=[e,+\infty)$.

δ) Η εξίσωση $e^{\frac{1}{x^2}}=\frac{\lambda}{x^2}$ γίνεται $x^2e^{\frac{1}{x^2}}=\lambda\Leftrightarrow f(x)=\lambda$

- Αν $\lambda<e$ η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda=e$ η εξίσωση έχει δύο λύσεις $\rho_1=-1$ και $\rho_2=1$
- Αν $\lambda>e$ η εξίσωση έχει τέσσερις λύσεις μία σε κάθε διάστημα: $\rho_1\in(-\infty,-1)$, $\rho_2\in(-1,0)$, $\rho_3\in(0,1)$ και $\rho_4\in(1,+\infty)$.

116. **α)** Η συνάρτηση $f'(x)=\dfrac{4e^x+x^2}{e^x+x^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x)=\frac{(4e^x+2x)(e^x+x^2)-(e^x+2x)(4e^x+x^2)}{(e^x+x^2)^2}=$$

$$=\frac{4e^{2x}+4x^2e^x+2xe^x+2x^3-4e^{2x}-x^2e^x-8xe^x-2x^3}{(e^x+x^2)^2}=\frac{3x^2e^x-6xe^x}{(e^x+x^2)^2}=\frac{3e^xx(x-2)}{(e^x+x^2)^2}$$

οπότε για το πρόσημο της f'' και την κυρτότητα της f έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'	+	−	+	
f	⌣	⌢	⌣	

Η f είναι κυρτή στα $(-\infty,0]$ και $[2,+\infty)$ και κοίλη στο $[0,2]$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $h'(x)=f'(x)-1=\dfrac{4e^x+x^2}{e^x+x^2}-1=\dfrac{4e^x+x^2-e^x-x^2}{e^x+x^2}=\dfrac{3e^x}{e^x+x^2}>0$ άρα η h είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

γ) Αφού $f'(x)>0$ τότε η f είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ οπότε το σύνολο τιμών είναι:

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$.

Για $x\in(-\infty,0)$ είναι $h(x)<h(0)\Leftrightarrow f(x)-x<f(0)\Leftrightarrow f(x)<x+f(0)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+f(0))=-\infty$ άρα $x+f(0)<0$ σε περιοχή του $-\infty$ οπότε

$f(x)<x+f(0)<0\Leftrightarrow 0>\dfrac{1}{f(x)}>\dfrac{1}{x+f(0)}$.

Από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$ και $f(x)<0$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

Επίσης για κάθε $x>0$ θα είναι $h(x)>h(0)\Leftrightarrow f(x)-x>f(0)\Leftrightarrow f(x)>x+f(0)$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+f(0))=+\infty$. Άρα $x+f(0)>0$ σε περιοχή του $+\infty$ άρα $0<\dfrac{1}{f(x)}<\dfrac{1}{x+f(0)}$ οπότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Οπότε το σύνολο τιμών της $\mathbb{R}$ είναι $f(A)=\mathbb{R}$.

δ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x,x+504]$ οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα

$\xi\in(x,x+504)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x+504)-f(x)}{x+504-x}\Leftrightarrow 504f'(\xi)=f(x+504)-f(x)$.

Για $x>4$ η f είναι κυρτή άρα η $f'\uparrow$ οπότε $4<x<\xi<x+504\Leftrightarrow f'(x)<f'(\xi)<f'(x+504)$

$504f'(x)<504f'(\xi)<504f'(x+504)$ άρα $504f'(x)<f(x+504)-f(x)<504f'(x+504)$.

Για $x>4$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4e^x+x^2}{e^x+x^2}\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4e^x+2x}{e^x+2x}\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4e^x+2}{e^x+2}\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4e^x}{e^x}=4$.

Αν $x \to +\infty$ τότε $x+504 \to +\infty$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} 504f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[504f'(x+504)\right] = 4\cdot 504 =$
$= 2016$. Οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+504)-f(x)\right) = 2016$.

117. **α) i.** Στη σχέση $f(x) \ge e^{2x}$ (1) θέτω όπου $x=0$ και προκύπτει $f(0) \ge e^0 \Leftrightarrow f(0) \ge 1$ (3).
Επίσης στη σχέση (2) $f(x)\cdot f(-x) = 1$ θέτουμε όπου $x=0$ και προκύπτει
$f(0)\cdot f(0) = 1 \Rightarrow f^2(0) = 1$ (4). Από (3) και (4) προκύπτει $f(0)=1$.

ii. Στην (1) θέτω όπου x το $-x$ και έχουμε $f(-x) \ge e^{-2x} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{f(x)} \ge \dfrac{1}{e^{2x}} \Leftrightarrow f(x) \le e^{2x}$ (5).
Οπότε από (1) και (5) προκύπτει $f(x) = e^{2x}$.

β) i. Είναι $h(x) = \dfrac{e^{2x}}{x}$, $x>0$ και

$$h'(x) = \frac{2e^{2x}x - e^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$$

$$h'(x) \ge 0 \Leftrightarrow 2x-1 \ge 0 \Rightarrow x \ge \frac{1}{2}.$$

	0		1/2	
h'		$-$		$+$
h		↘		↗

Άρα για κάθε $x>0$ θα είναι $h(x) \ge h\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2e$.

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}e^{2x}\right) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim \dfrac{2e^{2x}}{1} = +\infty$ οπότε και
από τον πίνακα μονοτονίας της h προκύπτει ότι το σύνολο τιμών είναι $h(A) = [2e, +\infty)$.

iii. Είναι $\ln\alpha + \ln\beta + \ln\gamma = -2 \Leftrightarrow \ln(\alpha\beta\gamma) = -2 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = e^{-2}$.
Επίσης $h(\alpha) = \dfrac{e^{2\alpha}}{\alpha} \ge 2e$, $h(\beta) = \dfrac{e^{2\beta}}{\beta} \ge 2e$, $h(\gamma) = \dfrac{e^{2\gamma}}{\gamma} \ge 2e$.
Επομένως $h(\alpha)h(\beta) + h(\beta)h(\gamma) + h(\gamma)h(\alpha) \ge 12e^2 \Leftrightarrow$

$$\frac{e^{2\alpha}}{\alpha}\cdot\frac{e^{2\beta}}{\beta} + \frac{e^{2\beta}}{\beta}\cdot\frac{e^{2\gamma}}{\gamma} + \frac{e^{2\gamma}}{\gamma}\cdot\frac{e^{2\alpha}}{\alpha} \ge 12e^2 \Leftrightarrow \frac{\gamma e^{2(\alpha+\beta)} + \alpha e^{2(\beta+\gamma)} + \beta e^{2(\gamma+\alpha)}}{\alpha\beta\gamma} \ge 12e^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\gamma e^{2(\alpha+\beta)} + \alpha e^{2(\beta+\gamma)} + \beta e^{2(\gamma+\alpha)}}{e^{-2}} \ge 12e^2 \Leftrightarrow \gamma e^{2(\alpha+\beta)} + \alpha e^{2(\beta+\gamma)} + \beta e^{2(\gamma+\alpha)} \ge 12$$

118. **α)** Η $f(x) = (x^3+3x^2+6x+6)e^{-x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = (3x^2+6x+6)e^{-x} - e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6) =$$
$$= e^{-x}(3x^2+6x+6-x^3-3x^2-6x-6) = -x^3e^{-x}.$$

Οπότε για το πρόσημο της f' και τη μονοτονία της f έχουμε το διπλανό πίνακα.

	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$		$-$	
f		↗		↘	

Η f έχει μέγιστο το $f(0) = 6$.

β) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=-3x^2e^{-x}+x^3e^{-x}=e^{-x}x^2(x-3)$.

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

	$-\infty$	0	3	$+\infty$
f''	$-$	$-$	$+$	
f	∩	∩	∪	

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,3]$ και κυρτή στο $[3,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο σημείο $A\left(3,\dfrac{84}{e^3}\right)$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+3x^2+6x+6}{e^x}=-\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+3x^2+6x+6\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}=+\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+3x^2+6x+6}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+6x+6}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x+6}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{e^x}=0$

Η f είναι $\uparrow$ στο $(-\infty,0]$ οπότε έχει σύνολο τιμών $f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),f(0)\right]=(-\infty,6]$ και η f είναι $\downarrow$ στο $[0,+\infty)$ οπότε έχει σύνολο τιμών $f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),f(0)\right]=(0,6]$ οπότε το σύνολο τιμών της f είναι $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty,6]$.

δ) Είναι $f(x)\le f(0)\Leftrightarrow f(x)\le 6\Leftrightarrow \dfrac{x^3+3x^2+6x+6}{e^x}\le 6\Leftrightarrow \dfrac{x^3+3x^2+6x+6}{6}\le e^x\Leftrightarrow$

$e^x\ge\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2}+x+1\Leftrightarrow e^x-x\ge\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2}+1.$

ε) Από το προηγούμενο ερώτημα είναι:

$e^{h(x)}-h(x)\ge\dfrac{h^3(x)}{6}+\dfrac{h^2(x)}{2}+1\Leftrightarrow e^{h(x)}-h(x)-\dfrac{h^3(x)}{6}\ge\dfrac{h^2(x)}{2}+1$

οπότε $e^{h(x)}-h(x)-\dfrac{h^3(x)}{6}\ge\dfrac{h^2(x)}{2}+1\ge 1$ και σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{h^2(x)}{2}+1\right)=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{h^2(x)}{2}=0$ άρα $\lim\limits_{x\to0}h^2(x)=0$.

Επειδή $-|h(x)|\le h(x)\le h(x)\Leftrightarrow-\sqrt{h^2(x)}\le h(x)\le\sqrt{h^2(x)}$

τότε $\lim\limits_{x\to0}\left(-\sqrt{h^2(x)}\right)=0=\lim\limits_{x\to0}\sqrt{h^2(x)}$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to0}h(x)=0$.

119. α) Είναι $f(x)=(x-2)\ln x+x-3$, $D_f=(0,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[(x-2)\ln x+x-3\right]=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+}(x-2)=-2$

οπότε η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-2)\ln x+x-3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln x-\frac{2\ln x}{x}+1-\frac{3}{x}\right]=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$ οπότε δεν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\ln x-\frac{2}{x}+2$. Παρατηρούμε ότι $f'(1)=0$ και $f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}>0$ οπότε η $f'\nearrow$. Άρα $0<x<1\Rightarrow f'(x)<f'(1)\Leftrightarrow f'(x)<0$ οπότε η $f\searrow$ στο $(0,1]$. Αν $x>1$ τότε $f'(x)>f'(1)\Leftrightarrow f'(x)>0$ άρα η $f\nearrow$ στο $[1,+\infty)$.

γ) Είναι $f(1)=-2<0$. Επειδή η $f\searrow$ στο $(0,1]$ τότε $f(A_1)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=[-2,+\infty)$ και επειδή $0\in f(A_1)$ υπάρχει μοναδικό $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$. Επίσης η $f\nearrow$ στο $[1,+\infty)$ τότε $f(A_2)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[-2,+\infty)$ και αφού $0\in f(A_2)$ τότε υπάρχει μοναδικό $x_2\in(1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

δ) Θεωρούμε την $h(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x\in[x_1,x_2]$ θα είναι $h(x_1)=h(x_2)=0$ αφού $f(x_1)=f(x_2)=0$.

Επίσης η h είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1,x_2]$ με $h'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$ οπότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=0\Leftrightarrow\xi f'(\xi)-f(\xi)=0\quad(1)$. Η εφαπτόμενη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ είναι $y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$ και αυτή διέρχεται από το $(0,0)$ αν $0-f(\xi)=-\xi f'(\xi)\Leftrightarrow\xi f'(\xi)-f(\xi)=0$ που ισχύει από (1). Θεωρούμε τη $\varphi(x)=xf'(x)-f(x)$, $x>0$ τότε $\varphi'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(x)=xf''(x)>0$ οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα άρα το ξ μοναδική ρίζα της εξίσωσης $xf'(x)-f(x)=0$.

ε) Επειδή $f''(x)>0$ τότε $f'\nearrow$ και αφού $\xi\in(x_1,x_2)$ δηλαδή $\xi<x_2$ τότε

$f'(\xi)<f'(x_2)\Leftrightarrow\frac{f(\xi)}{\xi}<f'(x_2)\Leftrightarrow\xi f'(x_2)-f(\xi)>0$.

120. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{\frac{2}{2x}2x-2\ln 2x}{4x^2}=\frac{2(1-\ln 2x)}{4x^2}=\frac{1-\ln 2x}{2x^2}\ge0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow1-\ln 2x\ge0\Rightarrow\ln 2x\le\ln e\Leftrightarrow x\le\frac{e}{2}$.

Η $f\nearrow$ στο $\left(0,\frac{e}{2}\right]$ και $\searrow$ στο $\left[\frac{e}{2},+\infty\right)$,

παρουσιάζει μέγιστο για $x=\frac{e}{2}$ το $f\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{1}{e}$

β) $\lim\limits_{x\to 0^+} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln 2x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{2x}\ln 2x\right] = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln 2x}{2x} \overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{f}{2x}}{2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x} = 0$.

$f\uparrow$ στο $\left(0,\frac{e}{2}\right]$ με $f(A_1) = \left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$ και $f\downarrow$ στο $\left[\frac{e}{2},+\infty\right)$ με $f(A_2) = \left(0,\frac{1}{e}\right]$.

Οπότε το σύνολο τιμών $f(A) = f(A_1)\cup f(A_2) = \left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$.

γ) Η εξίσωση $\sqrt{2x} = e^{\lambda x}$ γίνεται $2x = \left(e^{\lambda x}\right)^2 \Leftrightarrow 2x = e^{2\lambda x}$ οπότε

$\ln 2x = \ln e^{2\lambda x} \Leftrightarrow 2\lambda x = \ln 2x \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2x}{2x} \Leftrightarrow f(x) = \lambda$

- Αν $\lambda \le 0$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση
- Αν $0 < \lambda < \frac{1}{e}$ η εξίσωση έχει 2 λύσεις
- Αν $\lambda = \frac{1}{e}$ η εξίσωση έχει λύση την $x = \frac{e}{2}$
- Αν $\lambda > \frac{1}{e}$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

δ) Η εφαπτομένη στο $M(x_0, f(x_0))$ είναι

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - \frac{\ln 2x_0}{2x_0} = \frac{1-\ln 2x_0}{2x_0^2}(x - x_0)$.

Αν αυτή διέρχεται από το σημείο $(0,-1008)$ τότε

$-1008 - \frac{\ln 2x_0}{2x_0} = \frac{1-\ln 2x_0}{2x_0^2}(-x_0) \Leftrightarrow -2016x_0 - \ln 2x_0 = -1 + \ln 2x_0 \Leftrightarrow 2\ln 2x_0 + 2016x_0 - 1 = 0$

Εστω $g(x) = 2\ln 2x + 2016x - 1$, $x > 0$ με $g'(x) = \frac{2}{x} + 2016 > 0$ άρα η $g\uparrow$ με σύνολο τιμών

$g((0,+\infty)) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} g(x), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right) = (-\infty,+\infty)$.

Επειδή $0 \in g((0,+\infty))$ υπάρχει μοναδικό $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

ε) Θεωρούμε την $h(x) = \ln^2 2x$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[x, x+1]$ με

$h'(x) = 2\ln 2x\frac{1}{2x}2 = 4f(x)$, οπότε από ΘΜΤ υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε

$h'(\xi) = \frac{h(x+1) - h(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow 4f(\xi) = \ln^2 2(x+1) - \ln^2 2x$.

Αφού $x \to +\infty$ τότε $x > \frac{e}{2}$ όπου $f\downarrow$ οπότε $x < \xi < x+1 \Leftrightarrow 4f(\xi) > 4f(x+1)$ οπότε

$4f(x+1) < \ln^2(2x+1) - \ln^2 2x < 4f(x)$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln 2x}{2x} = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1) \overset{x+1=u}{\underset{u\to+\infty}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} f(u) = 0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln^2 2(x+1) - \ln^2 2x\right] = 0$.

121. **α)** Είναι $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \ge -x \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2+1} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε $D_f = \mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$ και

$$f(-x) = \ln\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right) = \lim \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+1} + x} =$$

$$= \ln \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \ln 1 - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = -f(x)$$

οπότε η f είναι περιττή άρα η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

γ) $f'(x) = \dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ άρα η $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

δ) Είναι $f''(x) = -\dfrac{x}{x^2+1}$. Η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει καμπή στο σημείο $(0, f(0)) \equiv (0,0)$.

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\ln 2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln 2x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\dfrac{1}{2x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = 2.$

στ) $f(5x) + 2x = f(3x) \Leftrightarrow f(5x) + 5x - 3x = f(3x) \Leftrightarrow f(5x) + 5x = f(3x) + 3x \quad (1)$.

Αν θεωρήσουμε $g(x) = f(x) + x$ τότε $g'(x) = f'(x) + 1 = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} + 1 > 0$ άρα η $g \uparrow$ οπότε και 1–1. Συνεπώς η (1) γίνεται $g(5x) = g(3x) \Leftrightarrow 5x = 3x \Leftrightarrow x = 0$.

122. **α)** $f'(x) = 2xe^{-x} - e^{-x}\left(x^2+\lambda\right) = e^{-x}\left(-x^2+2x-\lambda\right)$ με $f(0) = \lambda$ και $f'(0) = -\lambda$ οπότε η εξίσωση εφαπτομένης στο $A(0, f(0))$ είναι $y - \lambda = -\lambda x \Leftrightarrow y = -\lambda x + \lambda$.
Για να ταυτίζεται με την $y = -3x + 3$ πρέπει $\lambda = 3$.

β) Για $\lambda = 3$ είναι $f'(x) = e^{-x}\left(-x^2+2x-3\right) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα $f \overset{\vee}{\downarrow}$ στο $\mathbb{R}$.

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^{-x}\left(x^2+3\right)\right] = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3}{e^x} \overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{e^x} \overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$

Η $f \overset{\vee}{\downarrow}$ στο $\mathbb{R}$ άρα $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) = (0, +\infty)$

δ) Επειδή $2014 \in (0, +\infty)$ και η $f \overset{\vee}{\downarrow}$ στο $(0, +\infty)$ τότε η εξίσωση $f(x) = 2014$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$.

123. **α)** $xf'(x)+e=f(x)+e\ln x \Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=e(\ln x-1) \Leftrightarrow \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{e(\ln x-1)}{x^2} \Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\left(-\dfrac{e\ln x}{x}\right)' \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}=-\dfrac{e\ln x}{x}+c \Leftrightarrow f(x)=-e\ln x+cx$.

$f(1)=1 \Leftrightarrow c=1$, άρα $f(x)=x-e\ln x$, $x>0$.

β) Είναι $f'(x)=1-\dfrac{e}{x}=\dfrac{x-e}{x}$ και $f\downarrow$ στο $(0,e]$ και $\uparrow$ στο $[e,+\infty)$.

Εχει ολικό ελάχιστο για $x=e$ το $f(e)=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}[x-e\ln x]=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[x\left(1-\dfrac{e\ln x}{x}\right)\right]=+\infty$

γιατί $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e\ln x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{e}{x}}{1}=0$. Οπότε $f(A)=[0,+\infty)$

Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)\ge f(e) \Leftrightarrow x-e\ln x\ge 0 \Leftrightarrow e\ln x\le x \Leftrightarrow \ln x\le \dfrac{e}{x} \Leftrightarrow x\le e^{\frac{x}{e}}$.

γ) $f\uparrow$ στο $[e^2,+\infty)$ με $f(e^2)=e^2-2e=e(e-2)>0$ άρα $0\notin[f(e^2),+\infty)$.

δ) Αν $\alpha=\beta$ ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha<\beta$, τότε από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi_1\in\left(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \text{ και } f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

Είναι $f''(x)=\left(1-\dfrac{e}{x}\right)'=\dfrac{e}{x^2}>0 \Rightarrow f'\uparrow(0,+\infty)$ και $\xi_1<\xi_2$, άρα

$$f'(\xi_1)<f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}<\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)<f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<f(\alpha)+f(\beta).$$

124. **α)** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(x^3-\dfrac{3}{2}x^2\right)+3x^2\ln x\right]=0+0=0$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2\ln x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)=0$

β) i. Εστω $g(x)=x\ln x+1,\ x\in\left[\frac{1}{e^2},1\right]$.Η g συνεχής στο $\left[\frac{1}{e^2},1\right]$ ως άθροισμα συνεχών και

$g\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{1}{e^2}+\ln\frac{1}{e^2}+1=\frac{1}{e^2}-2+1=\frac{1}{e^2}-1<0$, $g(1)=2>0$. Άρα σύμφωνα με το Θ.

Bolzano υπάρχει $\xi\in\left(\frac{1}{e^2},1\right)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0\Leftrightarrow\xi+\ln\xi+1=0$.

Είναι $g'(x)=1+\frac{1}{x}>0$, $x\in\left[\frac{1}{e^2},1\right]$ οπότε η g είναι $\uparrow$ στο $\left[\frac{1}{e^2},1\right]$ άρα η ρίζα ξ είναι μοναδική.

ii. Είναι $f'(x)=3x^2+6x\ln x+3x^2\frac{1}{x}-3x=3x^2+6x\ln x$,

$f''(x)=6x+6\ln x+6x\frac{1}{x}=6(x+\ln x+1)=6g(x)$

Είναι $f''(\xi)=6g(\xi)=0$ και αφού $g\uparrow$, έχουμε:

Για $x<\xi$ είναι $g(x)<g(\xi)\Leftrightarrow f''(x)<0$

Για $x>\xi$ είναι $g(x)>g(\xi)\Leftrightarrow f''(x)>0$

Οπότε η f'' αλλάζει πρόσημο στο $x=\xi$ άρα το ξ είναι θέση σημείου καμπής.

iii. Είναι $f'(x)=3x^2+6x\ln x$ με $f'(\xi)=3\xi^2+6\xi\ln\xi$. Όμως $\xi+\ln\xi+1=0\Rightarrow\ln\xi=-1-\xi$

άρα $f'(\xi)=3\xi^2+6\xi(-1-\xi)=-3\xi^2-6\xi<0$ αφού $\xi>0$.

$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(3x^2+6x\ln x\right)=0$, γιατί

$$\lim_{x\to0^+}x^2\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=0$$

Το σύνολο τιμών της f' στο διάστημα $\Delta_1=(0,\xi)$ είναι $f(\Delta_1)=\left(-3\xi^2-6\xi,0\right)$, άρα

$f'(x)<0$ στο Δ_1 και $f\downarrow(0,\xi]$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2+6x\ln x\right)=+\infty$ και $f'\uparrow$ στο Δ_2,

άρα $f'(\Delta_2)=\left[-3\xi^2-6\xi,+\infty\right)$. Επειδή $0\in f'(\Delta_2)$, υπάρχει $x_0\in\Delta_2$ τέτοιο ώστε

$f'(x_0)=0$. Για κάθε $\xi<x<x_0$ είναι $f'(x)<f'(x_0)=0\Rightarrow f\downarrow[\xi,x_0]$, ενώ για $x>x_0$ είναι $f'(x)>f'(x_0)=0\Rightarrow f\uparrow[x_0,+\infty)$. Οπότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $x=x_0$.

125. α) Είναι $g'(x)=f'(x)e^{-f(x)}$ (1), όμως από την υπόθεση $f'(x)=e^{f(x)}-1$ (2).

Άρα από (1) και (2) θα είναι $g'(x)=\left(e^{f(x)}-1\right)e^{-f(x)}=e^{f(x)}e^{-f(x)}-e^{-f(x)}=1-e^{-f(x)}$.

Συνεπώς είναι $g'(x)=g(x)$ άρα $g(x)=ce^x$.

Για $x=0$ $g(0)=c\Rightarrow1-e^{-f(0)}=c\Leftrightarrow c=1-e^{\ln2}\Leftrightarrow c=-1$ άρα $g(x)=-e^x$

β) Είναι $g(x)=1-e^{-f(x)}\Leftrightarrow-e^x=1-e^{-f(x)}\Leftrightarrow e^{-f(x)}=1+e^x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=-\ln\left(1+e^x\right)\Leftrightarrow f(x)=\ln\frac{1}{1+e^x}$.

γ) $f'(x)=-\dfrac{e^x}{e^x+1}$ και $f''(x)=\dfrac{e^x\left(e^x+1\right)-e^xe^x}{\left(e^x+1\right)^2}=-\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0$. Άρα η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

δ) Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $\left(0,f(0)\right)$ είναι $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ με $f(0)=\ln\dfrac{1}{2}$

και $f'(0)=\dfrac{e^0}{e^0+1}=-\dfrac{1}{2}$. Άρα $\in$: $y=-\dfrac{1}{2}x-\ln 2$.

Αφού f είναι κοίλη τότε $f(x)\le y$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε

$$\ln\frac{1}{1+e^x}\le-\frac{1}{2}x-\ln 2\Leftrightarrow-\ln\left(1+e^x\right)\le-\frac{x}{2}-\ln 2\Leftrightarrow\ln\left(1+e^x\right)\ge\frac{x}{2}+\ln 2\Leftrightarrow 2\ln\left(1+e^x\right)\ge x+\ln 4.$$

ε) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{e^x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{e^x}{e^x+1}}{e^x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{1+e^x}\right)=-1.$

126. α) Για $x>0$ έχουμε

$$x^2f'(x)+xf(x)=1\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=\frac{1}{x}\Leftrightarrow\left(xf(x)\right)'=(\ln x)'\Leftrightarrow xf(x)=\ln x+c$$

Για $x=e$ είναι $ef(e)=\ln e+c\Rightarrow 2e\cdot e^{-1}=1+c\Leftrightarrow c=1.$

Άρα $xf(x)=\ln x+1\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$

β) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}x-(\ln x+1)}{x^2}=\dfrac{-\ln x}{x^2}$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow(0,1]$ και

για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow[1,+\infty)$.

Η f έχει μέγιστο το $f(1)=1$.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f''		$-$		$+$	
f		$\frown$		$\smile$	

$$f''(x)=-\frac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln x}{x^4}=\frac{x(2\ln x-1)}{x^4}=\frac{2\ln x-1}{x^3}$$

Η f κοίλη στο $\left(0,\sqrt{e}\right]$ και κυρτή στο $\left[\sqrt{e},+\infty\right)$ με σημείο καμπής το $\left(\sqrt{e},\dfrac{3}{2\sqrt{e}}\right)$.

γ) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{x}(\ln x+1)\right]=-\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+1}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

Είναι $f\uparrow$ στο $A_1=(0,1]$ οπότε $f(A_1)=(-\infty,1]$ και $f\downarrow$ στο $A_2=[1,+\infty)$ οπότε $f(A_2)=(0,1]$.

Άρα το σύνολο τιμών $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty,1]$.

δ) Αν $\alpha<0$ τότε $\alpha\in f(A_1)$ και η εξίσωση έχει μια ρίζα $\rho\in(0,1)$.

Αν $\alpha=0$ τότε $f(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e}$ άρα η εξίσωση έχει ρίζα την $\rho=\dfrac{1}{e}$.

Αν $0<\alpha<1$ το $\alpha\in f(A_1)$ και $\alpha\in f(A_2)$ και η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει ακριβώς 2 ρίζες $\rho_1\in(0,1)$ και $\rho_2\in(1,+\infty)$.

Αν $\alpha = 1$ τότε η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μόνο μια ρίζα τη $\rho = 1$ αφού $f(1) = 1$ και αν $\alpha > 1$ τότε $\alpha \notin f(A)$ και η εξίσωση είναι αδύνατη.

127. **α)** Είναι $f(x) = e^{x-1} + x^2 - 3x + 1$, $D_f = \mathbb{R}$. $f'(x) = e^{x-1} + 2x - 3$ και $f'(1) = 0$ και $f''(x) = e^{x-1} + 2 > 0$ οπότε η $f' \uparrow$.

Για $x < 1$ είναι $f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$

Για $x > 1$ είναι $f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Οπότε η f έχει ελάχιστο για $x = 1$ το $f(1) = 0$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	↘		↗

Επίσης $g(x) = \ln x - x + 1$, $Dg = (0, +\infty)$

με $g'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$

Η g έχει μέγιστο για $x = 1$ το $g(1) = 0$.

x	0	1	
g'	$+$		$-$
g	↗		↘

β) Η εξίσωση $e^{x-1} - \ln x + x^2 - 2x = 0$ γίνεται

$e^{x-1} + x^2 = \ln x + 2x \Leftrightarrow e^{x-1} + x^2 - 3x + 1 = \ln x - x + 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ και αφού $f(1) = g(1) = 0$ και $g(x) \le g(1) = 0 = f(1) \le f(x)$ τότε το $x = 1$ μοναδική ρίζα της παραπάνω εξίσωσης.

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο $(1,0)$ είναι $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = 0$ και η εφαπτομένη της C_g στο $(1,0)$ είναι επίσης $y - g(1) = g'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = 0$. Οπότε οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(1,0)$.

128. **α)** Επειδή $g^2(x) = g'(x) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \dfrac{g'(x)}{g^2(x)} = 1 \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{g(x)}\right)' = (x)' \Leftrightarrow \dfrac{1}{g(x)} = x + c_1$.

Επειδή $g(1) = -1$ τότε $c_1 = 0$ άρα $g(x) = -\dfrac{1}{x}$ (2).

Είναι $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = f'(x) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} f'(x)\left(-\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x^2}f(x) = f'(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}f(x) \Leftrightarrow \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)f'(x) - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)' f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{1 + \dfrac{1}{x}}\right)' = 0$

άρα $\left.\begin{array}{l} f(x) = c_2\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow c_2 = 1$ άρα $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.

Οπότε $f(x) + g(x) = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} = 1$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)\right]^{-\frac{1}{g(x)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]=e$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=1.$

γ) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow f'(x)-1=-1-\frac{1}{x^2}\neq 0$ και

$g'(x)=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow g'(x)+1=1+\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow -\left[g'(x)+1\right]=-1-\frac{1}{x^2}$.

Οπότε $\left(f'(x)-1\right)=-\left[g'(x)+1\right]<0$ άρα η εξίσωση γίνεται $x+\ln x+\sigma\upsilon\nu x=0$.

Θεωρούμε $h(x)=x+\ln x+\sigma\upsilon\nu x$, $x\in(0,+\infty)$.

Είναι $h'(x)=1+\frac{1}{x}-\eta\mu x=1-\eta\mu x+\frac{1}{x}>0$ όταν $x\in(0,+\infty)$. Οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+\ln x+\sigma\upsilon\nu x)=-\infty$.

Επίσης $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le1\Leftrightarrow x+\ln x-1\le x+\ln x+\sigma\upsilon\nu x\le x+\ln x+1$ και είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\ln x-1)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$. Επομένως $h(A)=\mathbb{R}$ και $0\in\mathbb{R}$ και αφού η $h\uparrow$ τότε η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

129. α) $f'(x)=2-2e^{-2x}=2\left(1-e^{-2x}\right)\ge0\Leftrightarrow1-e^{-2x}\ge0\Leftrightarrow e^{-2x}\le e^{0}\Leftrightarrow-2x\le0\Leftrightarrow x\ge0$

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow[0,+\infty)$ και για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow(-\infty,0]$.

Η f έχει ελάχιστο το $f(0)$, άρα $f(x)\ge f(0)=1$.

β) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{2x}}=0$, άρα η $y=2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη,

ενώ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+e^{-2x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2+\frac{e^{-2x}}{x}\right]=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-2x}}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2e^{-2x}}{1}=-\infty$

οπότε δεν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

γ) Η εξίσωση γίνεται $\left[f(x)-1\right]+\left[f(x^2)-1\right]+\left[f(x^3)-1\right]+\left[f(x^4)-1\right]=0$. Επειδή $f(x)\ge1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε η προηγούμενη εξίσωση αποτελεί άθροισμα μη αρνητικών αριθμών το οποίο είναι ίσο με 0. Άρα πρέπει $f(x)-1=0$ και $f(x^2)-1=0$ και $f(x^3)-1=0$ και $f(x^4)-1=0$. Όμως η f παίρνει ελάχιστη τιμή μόνο για $x=0$ άρα οι παραπάνω ισότητες ισχύουν αν και μόνο αν $\left(x=0\text{ και }x^2=0\text{ και }x^3=0\text{ και }x^4=0\right)\Leftrightarrow x=0$.

δ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$f(x)\ge1\Leftrightarrow2x+e^{-2x}\ge1\Leftrightarrow2x+\frac{1}{e^{2x}}\ge1\Leftrightarrow1\ge e^{2x}-2xe^{2x}\Leftrightarrow1\ge e^{2x}(1-2x)$ και το $=$ ισχύει μόνο όταν $x=0$. Άρα για $x=\frac{1}{10}$ έχουμε: $1>e^{\frac{1}{5}}\left(1-\frac{1}{5}\right)\Leftrightarrow1>e^{\frac{1}{5}}\frac{4}{5}\Leftrightarrow e^{\frac{1}{5}}<\frac{5}{4}$.

130. **α)** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x-3)\ln x + 2x - 5\right] = +\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-3) = -3$

άρα η $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[(x-3)\ln x + 2x - 5\right] = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{x-3}{x}\cdot\ln x + \dfrac{2x-5}{x}\right] = +\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-3}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-5}{x} = 2$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x = +\infty$. Άρα η C_f δεν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη.

β) $f'(x) = \ln x + (x-3)\dfrac{1}{x} + 2 = \ln x + 1 - \dfrac{3}{x} + 2 = \ln x + 3 - \dfrac{3}{x}$ με $f'(1) = 0$, $f''(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} > 0$

για $x > 0$ οπότε $f' \nearrow$

- $0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$ άρα $f \searrow$ στο $[0,1)$.
- Αν $x > 1$ τότε $f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$ άρα $f \nearrow$ στο $[1,+\infty)$.

γ) Είναι $f(1) = -3 < 0$ οπότε η f έχει μια ρίζα $\rho_1 \in (0,1)$ αφού $f(A_1) = [-3,+\infty)$ και έχει μια ρίζα $\rho_2 \in (1,+\infty)$ αφού $f \nearrow$ στο $A_2 = [1,+\infty)$ και $f(A_2) = [-3,+\infty)$. Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες.

δ) Εστω $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \in [\rho_1, \rho_2]$ Από το Rolle για τη g υπάρχει

$x_0 \in (\rho_1, \rho_2)$: $g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$

Εστω $\varphi(x) = xf'(x) - f(x)$ με $\varphi'(x) = f'(x) + xf''(x) = xf''(x) > 0 \Rightarrow \varphi \nearrow$ στο $(0,+\infty)$ άρα το x_0 είναι μοναδικό.

Η εφαπτομένη στο $M(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ και για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει $0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$ που ισχύει.

131. **α)** Είναι $f(x) = \lambda\sqrt{x}\ln x + 2$, $D_f = (0,+\infty)$. Για να είναι η ευθεία $y = ex - e + 2$ εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ πρέπει $f(1) = e - e + 2 = 2$ και $f'(1) = e$. Έχουμε $f'(x) = \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}}\ln x + \dfrac{\lambda\sqrt{x}}{x}$.

Οπότε $f'(1) = \lambda \Leftrightarrow e = \lambda$

β) i. Είναι $f(x) = e\sqrt{x}\ln x + 2$, $x > 0$

$$f'(x) = e\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\frac{1}{x}\right) = \frac{e\sqrt{x}(\ln x + 2)}{2x}$$

Οπότε το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f δίνεται στο διπλανό πίνακα.

Η f έχει ολικό ελάχιστο για $x = e^{-2}$ το $f(e^{-2}) = 0$.

x	0		e^{-2}	
f'		$-$		$+$
f		$\searrow$		$\nearrow$

ii. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[e\sqrt{x}\ln x + 2\right] = 2$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x}\ln x\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-\left(\sqrt{x}\right)'}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(-2\sqrt{x}\right) = 0$

και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(e\sqrt{x}\ln x + 2\right) = +\infty$ άρα από τον πίνακα μονοτονίας διαπιστώνουμε ότι το σύνολο τιμών είναι $f(A) = [0,+\infty)$.

iii. Για $x > e^{-2}$ η f είναι $\uparrow$ και αφού $x < x+1$ τότε

$f(x) < f(x+1) \Leftrightarrow e\sqrt{x}\ln x + 2 < e\sqrt{x+1}\ln(x+1) + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x}\ln x < \sqrt{x+1}\ln(x+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x^{\sqrt{x}} < \ln(x+1)^{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow x^{\sqrt{x}} < (x+1)^{\sqrt{x+1}}$.

132. **α)** Για $x > e$ είναι $2\left(f'(x)-1\right)\left(f(x)-x\right) = \dfrac{1}{x}$ οπότε

$\left[\left(f(x)-x\right)^2\right]' = (\ln x)' \Leftrightarrow \left(f(x)-x\right)^2 = \ln x + c$.

Για $x = e^5$ είναι $\left(e^5 + 2 - e^5\right)^2 = \ln e^5 + c \Rightarrow 4 = 5 + c \Rightarrow c = -1$ άρα $\left(f(x)-x\right)^2 = \ln x - 1$ και αφού $f\left(e^5\right) - e^5 = 2 > 0$ τότε $f(x) - x > 0$ αφού και για $x > e$ $\ln x - 1 > 0$ άρα

$f(x) - x = \sqrt{\ln x - 1} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{\ln x - 1},\ x > e$.

β) $f'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x - 1}} + 1$ και $f''(x) = -\dfrac{2(\ln x - 1) + 1}{4x^2(\ln x - 1)\sqrt{\ln x - 1}} < 0$ άρα f κοίλη στο $(e,+\infty)$.

γ) Η εφαπτομένη στο $A\left(e^5, e^5 + 2\right)$ είναι $y = \left(\dfrac{1}{4e^5} + 1\right)x + \dfrac{7}{4}$ και αφού η f κοίλη τότε

$f(x) \le \left(\dfrac{1}{4e^5} + 1\right)x + \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left(4f(x) - 7\right)e^5 \le \left(4e^5 + 1\right)x$.

δ) Είναι $h(x) = \dfrac{f(x)}{x} = 1 + \dfrac{\sqrt{\ln x - 1}}{x}$. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{\ln x - 1}}{x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x - 1}} = 0$ άρα $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = 1$ οπότε η $y = 1$ οριζόντια ασύμπτωτη C_h στο $+\infty$.

133. **α)** $f'(x) = \dfrac{4}{1 + e^{f(x)}} > 0$ άρα $f\uparrow$ και $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.

β) Αφού η f παραγωγίσιμη τότε η $f'(x) = \dfrac{4}{1 + e^{f(x)}}$ είναι παραγωγίσιμη με

$f''(x) = \dfrac{-4e^{f(x)}f'(x)}{\left(1 + e^{f(x)}\right)^2} < 0$ άρα f κοίλη.

γ) Αφού $f'(0) = 2$ τότε $\dfrac{4}{1 + e^{f(0)}} = 2 \Leftrightarrow 2 + 2e^{f(0)} = 4 \Leftrightarrow e^{f(0)} = 1 = e^0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ και αφού η $f\uparrow$ η ρίζα $x = 0$ μοναδική.

δ) Είναι $f'(x)+f'(x)e^{f(x)}=4 \Leftrightarrow \left(f(x)+e^{f(x)}\right)'=(4x)'$ άρα $f(x)+e^{f(x)}=4x+c$ για $x=0 \Rightarrow c=1$

άρα $f(x)+e^{f(x)}=4x+1 \Leftrightarrow f(x)-(4x+1)=-e^{f(x)}$

οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(4x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^{f(x)}\right)=0$ άρα η $y=4x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ε) Από τη σχέση $f(x)+e^{f(x)}=4x+1$ (1) για $x\in(0,+\infty)$, έχουμε:

$$\frac{f(x)}{x}+\frac{e^{f(x)}}{x}=4+\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}=4+\frac{1}{x}-\frac{e^{f(x)}}{x} \text{ οπότε } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[4+\frac{1}{x}-\frac{e^{f(x)}}{x}\right]=0$$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{f(x)}}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{f(x)}f'(x)}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4e^{f(x)}}{e^{f(x)}\left(1+\frac{1}{e^{f(x)}}\right)}=\dfrac{4}{1+0}=4$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ άρα η C_f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

134. **α)** Είναι $f(x)=x^3-6x^2+9x-5$, $x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)=3(x-1)(x-3)$

		1		3	
f'	$+$		$-$		$+$
f	↗	$f(1)=-1$	↘	$f(3)=-5$	↗

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $f(1)=-1$, $f(3)=-5$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Η $f\uparrow$ στο $(-\infty,1]$ με $f(A_1)=(-\infty,-1]$.

Η $f\downarrow$ στο $[1,3]$ με $f(A_2)=[f(3),f(1)]=[-5,-1]$.

Η $f\uparrow$ στο $[3,+\infty)$ με $f(A_3)=[-5,+\infty)$.

Επειδή $0\in f(A_3)$ και $0\notin f(A_1)$, $0\notin f(A_2)$ τότε υπάρχει μοναδικός $\rho\in(3,+\infty)$ τέτοιος ώστε $f(\rho)=0$.

β) Είναι $g(x)=3x^4-24x^3+54x^2-60x+1$, $x\in\mathbb{R}$

$g'(x)=12x^3-72x^2+108x-60=12(x^3-6x^2+9x-5)=12f(x)$

- Αν $x\in(-\infty,1]$ τότε $f(x)\le-1$ άρα $g'(x)<0$ οπότε η $g\downarrow$
- Αν $x\in[1,3]$ τότε $-5\le f(x)\le-1 \Leftrightarrow f(x)<0$ άρα $g'(x)<0$ οπότε η $g\downarrow$ στο $[1,3]$
- Αν $x\in[3,\rho]$ τότε αφού $f\uparrow$ τότε $f(3)\le f(x)\le f(\rho)-5\le f(x)\le 0$ άρα $g'(x)<0$ οπότε η $g\downarrow$ στο $[3,\rho]$

Αφού η g συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε η g είναι $\downarrow$ στο $(-\infty,p]$.

Επίσης $x \geq p$ θα είναι $f(x) \geq f(p) \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$.

Άρα η $g \uparrow$ στο $[3,+\infty)$ οπότε η g έχει ολικό ελάχιστο για $x = p$.

γ) Η ζητούμενη σχέση γίνεται $f(\beta) - f(\alpha) + 3(\beta - \alpha) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \geq -3$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$. Οπότε αρκεί $f'(\xi) \geq -3$

δηλαδή $3\xi^2 - 12\xi + 9 \geq -3 \Leftrightarrow 3\xi^2 - 12\xi + 12 \geq 0 \Leftrightarrow 3(\xi - 2)^2 \geq 0$ που ισχύει.

135. α) Είναι $f(x) = 12x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 30x^2 - 1821$

$f'(x) = 60x^4 + 60x^3 + 60x^2 + 60x = 60x(x^3 + x^2 + x + 1) = 60x(x+1)(x^2+1)$

		-1		0	
f'	$+$		$-$		$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $f(-1) = -1808 < 0$

$f(0) = -1821 < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Από τα επιμέρους σύνολα τιμών διαπιστώνουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $x_1 \in (0,+\infty)$

β) Εχουμε $f''(x) = 240x^3 + 180x^2 + 120x + 60 = 60(4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)$

Εστω $g(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ και

$g'(x) = 12x^2 + 6x + 1 > 0$ (αφού $\Delta < 0$) άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_2 η οποία $x_2 \in (-\infty, 0)$ αφού $g(-1) = -2$ και $g(0) = 1$.

Οπότε η $f''(x) = 0$ έχει μοναδικό σημείο καμπής στο σημείο $B(x_2, f(x_2))$.

γ) Αφού $x_1 \in (0, +\infty)$ και $x_2 \in (-1, 0)$ τότε $x_1 > x_2$.