Μιγαδανάλυση

44. **α)** Αν $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$, τότε: $|z|=2\Leftrightarrow x^2+y^2=4\Leftrightarrow y^2=4-x^2$.

Είναι $y^2\ge 0\Leftrightarrow 4-x^2\ge 0\Leftrightarrow x^2\le 4\Leftrightarrow -2\le x\le 2$, όμοια και $-2\le y\le 2$.

$$z^2-z+1=(x+yi)^2-(x+yi)+1=(x^2-y^2-x+1)+y(2x-1)i\Leftrightarrow$$

$$|z^2-z+1|=\sqrt{(x^2-y^2-x+1)^2+y^2(2x-1)^2}\Leftrightarrow$$

$$|z^2-z+1|=\sqrt{(x^2-4+x^2-x+1)^2+(4-x^2)(2x-1)^2}=\sqrt{4x^2-10x+13}$$

Εστω $f(x)=\sqrt{4x^2-10x+13}$, $x\in[-2,2]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-2,2]$ με

$$f'(x)=\frac{(4x^2-10x+13)'}{2\sqrt{4x^2-10x+13}}=\frac{8x-10}{2\sqrt{4x^2-10x+13}}=\frac{4x-5}{\sqrt{4x^2-10x+13}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{4x-5}{\sqrt{4x^2-10x+13}}=0\Leftrightarrow 4x-5=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$$

Όταν $x\in\left[-2,\frac{5}{4}\right)$ είναι $f'(x)<0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-2,\frac{5}{4}\right]$.

Όταν $x\in\left(\frac{5}{4},2\right]$ είναι $f'(x)>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{5}{4},2\right]$.

Η f έχει ελάχιστο το $f\left(\frac{5}{4}\right)=\sqrt{4\left(\frac{5}{4}\right)^2-10\frac{5}{4}+3}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

x	-2		$5/4$		2
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Οπότε $|z^2-z+1|_{min}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

β) $w=\frac{2z+2}{4-z}\Leftrightarrow 4w-wz=2z+2\Leftrightarrow 4w-2=wz+2z\Leftrightarrow z(w+2)=4w-2\quad(1)$.

Αν $w=-2$, τότε η (1) γίνεται: $0\cdot z=-10$ που είναι αδύνατο.

Οπότε για $w\ne -2$ η (1) γίνεται: $z=\frac{4w-2}{w+2}$.

Είναι $|z|=2\Leftrightarrow\left|\frac{4w-2}{w+2}\right|=2\Leftrightarrow|4w-2|=2|w+2|\Leftrightarrow|4w-2|^2=4|w+2|^2\Leftrightarrow$

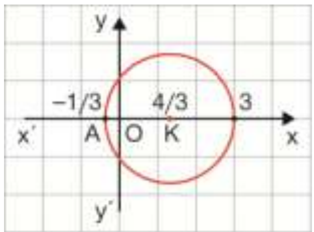
$$\Leftrightarrow(4w-2)(4\bar{w}-2)=4(w+2)(\bar{w}+2)\Leftrightarrow 16w\bar{w}-8w-8\bar{w}+4=4w\bar{w}+8w+8\bar{w}+16\Leftrightarrow$$

$$12w\bar{w}-16w-16\bar{w}-12=0\Leftrightarrow|w|^2-\frac{4}{3}(w+\bar{w})-1=0.$$

Αν $w=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, τότε:

$$\alpha^2+\beta^2-\frac{4}{3}2\alpha-1=0\Leftrightarrow\alpha^2-2\frac{4}{3}\alpha+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\beta^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2+1\Leftrightarrow\left(\alpha-\frac{4}{3}\right)^2+\beta^2=\frac{25}{9}.$$

Ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας M του μιγαδικού w είναι κύκλος με κέντρο $K\left(\frac{4}{3},0\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{5}{3}$.



γ) Ο ζητούμενος μιγαδικός έχει εικόνα το σημείο $A\left(-\frac{1}{3},0\right)$,

οπότε $w=-\frac{1}{3}+0\cdot i=-\frac{1}{3}$.

δ) Αν $z=\kappa+\lambda i$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$, τότε

$x^2+|x-z|\ge|x+z| \Leftrightarrow x^2+|x-\kappa-\lambda i|\ge|x+\kappa+\lambda i| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+\sqrt{(x-\kappa)^2+\lambda^2}-\sqrt{(x+\kappa)^2+\lambda^2}\ge 0 \quad (1)$.

Εστω $f(x)=x^2+\sqrt{(x-\kappa)^2+\lambda^2}-\sqrt{(x+\kappa)^2+\lambda^2}$, $x\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $f(0)=0$ και η (1) γίνεται: $f(x)\ge f(0)$. Δηλαδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2x+\dfrac{x-\kappa}{\sqrt{(x-\kappa)^2+\lambda^2}}-\dfrac{x+\kappa}{\sqrt{(x+\kappa)^2+\lambda^2}}$, από το θεωρήμα Fermat ισχύει: $f'(0)=0\Leftrightarrow \dfrac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}-\dfrac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}=0\Leftrightarrow -2\kappa=0\Leftrightarrow \kappa=0$,

δηλαδή $\mathrm{Re}(z)=0$. Όμως $|z|=2\Leftrightarrow|0+\lambda i|=2\Leftrightarrow|\lambda|=2\Leftrightarrow\lambda=\pm2$, οπότε $z=\pm2$.

45. **α)** Είναι $|z-\bar{w}|=|\bar{z}+w|\Leftrightarrow|z-\bar{w}|^2=|\bar{z}+w|^2\Leftrightarrow(z-\bar{w})(\bar{z}-w)=(\bar{z}+w)(z+\bar{w})\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\bar{z}-zw-\bar{z}\bar{w}+w\bar{w}=z\bar{z}+\bar{z}\bar{w}+zw+w\bar{w}\Leftrightarrow 2\bar{z}\bar{w}=-2zw\Leftrightarrow\overline{zw}=-zw$ άρα $zw\in I$.

β) Είναι $z\cdot w=(f(0)-if(1))(g(1)-ig(0))=f(0)g(1)-if(0)g(0)-if(1)g(1)-f(1)g(0)=$

$=f(0)g(1)-f(1)g(0)-i(f(0)g(0)+f(1)g(1))$

Αφού $zw\in I$ τότε $f(0)g(1)-f(1)g(0)=0\Leftrightarrow f(0)g(1)=f(1)g(0)$ και

αφού $g(x)\ne0$ για κάθε $x\in[0,1]$ τότε $\dfrac{f(0)}{g(0)}=\dfrac{f(1)}{g(1)}$ (1).

γ) Θεωρούμε την $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $x\in[0,1]$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ άρα και συνεχής με $h'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Επίσης από (1) είναι $h(0)=h(1)$ άρα από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$h'(\xi)=0\Leftrightarrow\dfrac{f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}=0\Leftrightarrow f'(\xi)g(\xi)=f(\xi)g'(\xi)$. Επομένως η εξίσωση $f'(x)g(x)=f(x)g'(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

46. **α)** Η $f(x)=x^3+|z-1|x+1$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωμυμικη με $f'(x)=3x^2+|z-1|\ge0$ οπότε $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ και 1–1, συνεπώς η f αντιστρέφεται.

β) Είναι $\int_1^{|z-1|+2}f^{-1}(x)d(x)=\dfrac{5}{4}$. Θέτουμε $f^{-1}(x)=u$ οπότε $x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$

Επίσης για $x=1$ είναι $f(u)=1=f(0)$ άρα $u=0$ ενώ για $x=|z-1|+2$ είναι

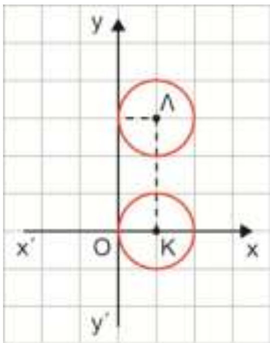
$f(u)=|z-1|+2=f(1)$ άρα $u=1$.

Οπότε $\int_0^1 uf'(u)d(u)=\frac{5}{4}=\int_0^1 u\left(3u^2+|z-1|\right)du=\frac{5}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1+|z-1|\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1=\frac{5}{4}\Leftrightarrow\frac{3}{4}+\frac{|z-1|}{2}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow\frac{|z-1|}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow|z-1|=1$

Οπότε ο γ.τ. των εικόνων του z είναι ο κύκλος με κέντρο $K(0,1)$ και $\rho_1=1$

γ) Αφού $w=z+3i\Leftrightarrow z=w-3i$ και $|z-1|=1$ τότε $|w-3i-1|=1\Leftrightarrow|w-(1+3i)|=1$. Άρα ο γ.τ. των εικόνων του w είναι ο κύκλος με κέντρο $\Lambda(1,3)$ και $\rho_2=1$.



δ) Εστω M η εικόνα του z τότε $0\le(OM)\le(OK)+\rho_1$ δηλαδή $0\le|z|\le 2$ και P η εικόνα του w τότε

$|(O\Lambda)-\rho_2|\le(OP)\le(O\Lambda)+\rho_2\Leftrightarrow\left|\sqrt{10}-1\right|\le|w|\le\sqrt{10}+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{10}-1\le|w|\le\sqrt{10}+1$

ε) Αφού $w=z+3i$ τότε $w-z=3i$ άρα $|w-z|=|3i|\Leftrightarrow|w-z|=3$.

Άρα η απόσταση των εικόνων των z,w είναι σταθερή και ίση με 3.

47. **α)** Είναι $|z-iw|^2=|z|^2+|w|^2\Leftrightarrow(z-iw)(\bar{z}+i\bar{w})=z\bar{z}+w\bar{w}\Leftrightarrow z\bar{z}+zi\bar{w}-iw\bar{z}+w\bar{w}=z\bar{z}+w\bar{w}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow i(z\bar{w}-w\bar{z})=0\Leftrightarrow z\bar{w}-w\bar{z}=0\Leftrightarrow z\bar{w}=w\bar{z}\quad(1)\Leftrightarrow\frac{z}{w}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}}\Leftrightarrow\frac{z}{w}\in\mathbb{R}$

β) Από τη σχέση (1) είναι $z\bar{w}=w\bar{z}\Leftrightarrow z\bar{w}=\overline{z\bar{w}}\Leftrightarrow(z\bar{w})\in\mathbb{R}$.

Όμως $z\bar{w}=(\beta+\alpha i)(f(\beta)-f(\alpha)i)=(\beta f(\beta)+\alpha f(\alpha))+(\alpha f(\beta)-\beta f(\alpha))i$,

οπότε $\alpha f(\beta)-\beta f(\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha f(\beta)=\beta f(\alpha)\quad(2)$.

γ) Εστω $A(\beta,\alpha)$ και $B(f(\beta),f(\alpha))$ οι εικόνες των z,w. Οι ευθείες ΟΑ και ΟΒ έχουν συντελεστή διεύθυνσης: $\lambda_{OA}=\frac{\alpha}{\beta}$ και $\lambda_{OB}=\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}$ [$f(\beta)\ne 0$ γιατί αν $f(\beta)=0$ τότε από τη σχέση του (β) ερωτήματος θα ήταν και $f(\alpha)=0$ που είναι άτοπο].

Είναι $\beta f(\alpha)=\alpha f(\beta)\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}=\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}\Leftrightarrow\lambda_{OA}=\lambda_{OB}\Leftrightarrow OA\parallel OB$ άρα τα σημεία O,A,B είναι συνευθειακά.

δ) Εστω $M(\xi,f(\xi))$.Η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι η ευθεία $\varepsilon: y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$. Για να διέρχεται η ε από την αρχή των αξόνων πρέπει: $0-f(\xi)=f'(\xi)(0-\xi)\Leftrightarrow\xi f'(\xi)-f(\xi)=0$.

Είναι $xf'(x)-f(x)=0\Leftrightarrow\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=0$. Παρατηρούμε ότι $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

Η συνάρτηση $h(x)=\frac{f(x)}{x}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με

$h'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$ και $h(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\beta)}{\beta}=h(\beta)$, οπότε από το θεώρημα Rolle υπάρχει

$\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=0\Leftrightarrow\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0\Leftrightarrow\xi f'(\xi)-f(\xi)=0$.

48. Εστω $f(x)=x^4-\frac{1}{3}x^3+8$, $x\in\mathbb{R}$. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$. Είναι $f'(x)=4x^3-x^2=x^2(4x-1)$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$. Έχει ολικό ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{6143}{768}>0$, άρα $f(x)\geq f\left(\frac{1}{4}\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ή $f(x)>0$, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$1/4$		$+\infty$
f'		$-$	0	$-$	0	$+$	
f		↘		↘	Ο.Ε.	↗	

49. **α)** Εστω $z=\alpha+\beta i$ με $\beta\neq 0$, τότε:

$$f(x)=|xz+1|-4=|x(\alpha+\beta i)+1|-4=|(\alpha x+1)+\beta x i|-4=\sqrt{(\alpha x+1)^2+\beta^2x^2}\Leftrightarrow$$

$f(x)=\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)x^2+2\alpha x+1}-4$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

β) i. $f(-2)=f(2)\Leftrightarrow|-2z+1|-4=|2z+1|-4\Leftrightarrow|-2z+1|=|2z+1|\Leftrightarrow|-2z+1|^2=|2z+1|^2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(-2z+1)(-2\bar{z}+1)=(2z+1)(2\bar{z}+1)\Leftrightarrow 4z\bar{z}-2z-2\bar{z}+1=4z\bar{z}+2z+2\bar{z}+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4z=-4\bar{z}\Leftrightarrow z=-\bar{z}\Leftrightarrow z\in I.$$

ii. Επειδή $z\in I$ είναι $z=\beta i$ με $\beta\neq 0$,

και $f(x)=\sqrt{\beta^2x^2+1}-4$, $f'(x)=\frac{\beta^2x}{\sqrt{\beta^2x^2+1}}$.

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow\beta x=0\Leftrightarrow x=0$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\beta^2x^2+1}-4\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{\beta^2+\frac{1}{x^2}}-4\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{\beta^2+\frac{1}{x^2}}-\frac{4}{x}\right)\right]=+\infty,$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{\beta^2+\frac{1}{x^2}}-\frac{4}{x}\right)\right]=+\infty$ και $f(0)=-3$, οπότε:

Για το διάστημα $\Delta_1=(-\infty,0]$ έχουμε: $f(\Delta_1)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=[-3,+\infty)$ και

για το διάστημα $\Delta_2=[0,+\infty)$ έχουμε: $f(\Delta_2)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[-3,+\infty)$.

Άρα $f(A)=[-3,+\infty)$. Επειδή το 0 ανήκει στο $f(\Delta_1)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(-\infty,0]$, υπάρχει μοναδικό $x_1\in\Delta_1$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$. Επειδή το 0 ανήκει στο

$f(\Delta_2)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[0,+\infty)$, υπάρχει μοναδικό $x_2\in\Delta_2$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

iii. $|\xi z+1|=10\Leftrightarrow|\xi z+1|-4=6\Leftrightarrow f(\xi)=6$. Επειδή το 6 ανήκει στο σύνολο τιμών της f υπάρχει $\xi\in A=\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=6$.

50. **α)** Εστω $f(x)=|z-2|x\ln x+|z|-|z|x$, $x>0$. Είναι $f(1)=|z-2|\cdot1\cdot\ln1+|z|-|z|\cdot1=0$ και η (1) γίνεται: $f(x)\geq f(1)$ για κάθε $x>0$. Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=|z-2|\cdot(\ln x+1)-|z|$, λόγω του θεωρήματος Fermat ισχύει ότι: $f'(1)=0\Leftrightarrow|z-2|-|z|=0\Leftrightarrow|z-2|=|z|\Leftrightarrow|z-2|^2=|z|^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(z-2)(\bar z-2)=z\bar z\Leftrightarrow z\bar z-2z-2\bar z+4=z\bar z\Leftrightarrow 2(z+\bar z)=4\Leftrightarrow z+\bar z=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z)=2\Leftrightarrow\mathrm{Re}(z)=1$.

β) Επειδή $|z-2|=|z|$ η (1) γίνεται: $|z|\cdot x\cdot\ln x+|z|\geq|z|\cdot x\Leftrightarrow x\cdot\ln x+1\geq x\Leftrightarrow x\cdot\ln x\geq x-1$, $x>0$.

Είναι $|z|\cdot x^2\cdot\ln x+5|z-2|x=|z|\cdot x^2+4\Leftrightarrow|z|\cdot x^2\cdot\ln x+5|z|x-|z|\cdot x^2-4=0$.

Εστω $g(x)=|z|\cdot x^2\cdot\ln x+5|z|x-|z|\cdot x^2-4$, $x>0$. Είναι $g'(x)=|z|\cdot(2x\cdot\ln x+x)+5|z|-2|z|\cdot x$

ή $g'(x)=|z|(2x\cdot\ln x+x+5-2x)\geq|z|[2(x-1)+5-2x]=3|z|>0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}x^2\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)=0$,

οπότε $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[|z|\cdot x^2\cdot\ln x+5|z|x-\dfrac{3}{2}|z|\cdot x^2-4\right]=-4$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(|z|\ln x+\dfrac{5|z|}{x}-\dfrac{3}{2}|z|-\dfrac{4}{x^2}\right)\right]=+\infty$.

Η g έχει σύνολο τιμών: $g((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to0^+}g(x),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)=(-4,+\infty)$. Επειδή το μηδέν ανήκει στο σύνολο τιμών της g, υπάρχει $x_0\in(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$ και αφού η g είναι γνησίως αύξουσα το x_0 είναι μοναδικό.

51. **α)** Είναι $z=w^2+w+2i=\left(e^x+(x-1)i\right)^2+e^x+(x-1)i+2i\Leftrightarrow$

$z=e^{2x}+2e^x(x-1)i-(x-1)+e^x+(x-1)i+2i\Leftrightarrow z=\left(e^{2x}+e^x-x+1\right)+\left(2e^x(x-1)+x+1\right)i$

Εστω $f(x)=2e^x(x-1)+x+1$, $x\in[0,1]$. Είναι $f(0)=-2+1=-1<0$, $f(1)=2>0$, δηλαδή $f(0)f(1)<0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$, δηλαδή υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{Im}(z)=0\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $|w|=\sqrt{e^{2x}+(x-1)^2}$. Έστω $g(x)=\sqrt{e^{2x}+(x-1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{e^{2x}+(x-1)^2}}\left(e^{2x}+(x-1)^2\right)'=\dfrac{e^x+x-1}{\sqrt{e^{2x}+(x-1)^2}}$.

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της g' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης e^x+x-1. Έστω $h(x)=e^x+x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $h'(x)=e^x+1>0$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x>0$ είναι $h(x)>h(0)=0$, άρα $g'(x)>0$ και g γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x<0$ είναι $h(x)<h(0)=0$, άρα $g'(x)<0$ και g γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$ το $g(0)=2$. Τότε ο w είναι: $w_0=e^0+(0-1)i=1-i$.

γ) $w_0^{4k}=(\overline{w}_0)^{4k}\Leftrightarrow(1-i)^{4k}=(1+i)^{4k}\Leftrightarrow\left[(1-i)^2\right]^{2k}=\left[(1+i)^2\right]^{2k}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(-2i)^{2k}=(2i)^{2k}\Leftrightarrow 2^{2k}i^{2k}=2^{2k}i^{2k}$ που ισχύει.

δ) $w_0^{4k}=(1-i)^{4k}\left[(1-i)^2\right]^{2k}=2^{2k}i^{2k}=2^{2k}\left(i^2\right)^k=2^{2k}(-1)^k$. Για να είναι ο w_0^{4k} είναι θετικός πραγματικός αριθμός πρέπει $k=2t,\ t\in\mathbb{N}^*$. Όμως $t_{min}=1$, άρα $k_{min}=4$.

52. **α)** Είναι $(z+1)^k=(z+i)^k$, άρα και $\left|(z+1)^k\right|=\left|(z+i)^k\right|\Leftrightarrow|z+1|^k=|z+i|^k\Leftrightarrow|z+1|=|z+i|\Leftrightarrow$

$|z+1|^2=|z+i|^2\Leftrightarrow(z+1)(\overline{z}+1)=(z+i)(\overline{z}-i)\Leftrightarrow z\overline{z}+z+\overline{z}+1=z\overline{z}-iz+i\overline{z}+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z+\overline{z}=-i(z-\overline{z})\quad(1)$. Αν $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$, τότε η (1) γίνεται:

$$2x=-i\cdot 2yi\Leftrightarrow x=y\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)\Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}.$$

β) Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ και

παραγωγίσιμη στα $\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$, οπότε λόγω του θεωρήματος Μέσης τιμής,

υπάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}\ \text{και}\ f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

Είναι $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\Leftrightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=f(\alpha)+f(\beta)\Leftrightarrow$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)=f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow f'(\xi_1)=f'(\xi_2).$$

γ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, υπάρχουν $m,M\in\mathbb{R}$: $m\le f(x)\le M$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $m\le f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\le M\Leftrightarrow 2m\le 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\le 2M\quad(1)$ και

επειδή $\frac{2\alpha+\beta}{3}\in(\alpha,\beta)$ είναι και $m\le f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)\le M\quad(2)$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε:

$$3m\le 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)\le 3M\Leftrightarrow m\le\frac{2}{3}f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)\le M.$$

Επειδή ο αριθμός $\frac{2}{3}f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)$, ανήκει στο σύνολο τιμών της f, υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\frac{2}{3}f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)$.

δ) Επειδή η f' είναι συνεχής και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$. Από το Θ.Μ.Τ για την f, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}>0$, άρα και $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow[\alpha,\beta]$.

53. **Α) α)** Ο w είναι πραγματικός αν και μόνο αν $w=\bar{w}\Leftrightarrow \frac{z+i}{z-2}=\frac{\bar{z}-i}{\bar{z}-2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(z+i)(\bar{z}-2)=(z-2)(\bar{z}-i)\Leftrightarrow z\bar{z}-2z+i\bar{z}-2i=z\bar{z}-iz-2\bar{z}+2i\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2z+iz+i\bar{z}+2\bar{z}-4i=0$

Αν $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$ τότε: $-2(x+yi)+i(x+yi)+i(x-yi)+2(x-yi)-4i=0\Leftrightarrow$

$-2x-2yi+xi-y+xi+y+2x-2yi-4i=0\Leftrightarrow 2xi-4yi-4i=0\Leftrightarrow x-2y-2=0\Leftrightarrow$

$y=\frac{1}{2}x-1$.

Είναι $f(1)=\ln 1-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$. Είναι $f'(1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Η εφαπτομένη της C_f στο Α έχει εξίσωση

$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-1$

Δηλαδή η εικόνα του z βρίσκεται επί της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$.

β) Εστω Κ η προβολή του Ο στην ε. Είναι $\lambda_\varepsilon\lambda_{OK}=-1\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=-2$. Η ΟΚ έχει εξίσωση: $y=-2x$. Οι συντεταγμένες του Κ είναι η λύση του συστήματος των ε ,ΟΚ.

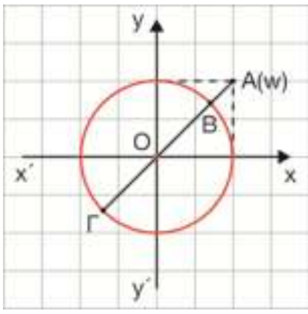
Είναι: $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x-1 \\ y=-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=-\frac{4}{5}\end{cases}$, άρα $z=\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i$.

Β) $|z|\geq\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2^{2x}+\lambda^{2x}}\geq\sqrt{2}\Leftrightarrow 2^{2x}+\lambda^{2x}\geq 2\quad(1)$. Εστω $g(x)=2^{2x}+\lambda^{2x}$, $x\in\mathbb{R}$. Η (1) γίνεται $g(x)\geq g(0)$, δηλαδή η g έχει ελάχιστο στο $x=0$. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=2^{2x}\ln 2+\lambda^{2x}\ln\lambda$, από το θ. Fermat, είναι:

$g'(0)=0\Leftrightarrow\ln 2+\ln\lambda=0\Leftrightarrow\ln(2\lambda)=0\Leftrightarrow 2\lambda=1\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2}$.

54. **α)** Εστω $|z|=x>0$. Εστω $f(x)=\ln\frac{x}{4}-4+x$, $x>0$. Είναι $f(4)=0$ και $f'(x)=\frac{1}{x}+1>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε η $x=4$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$. Άρα $|z|=4$.

β) Επειδή $|z|=4$ η εικόνα Μ του z κινείται σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα 4.



γ) Εστω $A(4,4)$ η εικόνα του w. Τότε η ευθεία ΟΑ έχει εξίσωση $y=x$. Για τα κοινά σημεία του κύκλου και της ευθείας ΟΑ, έχουμε: $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=16 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=8 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 2\sqrt{2} \\ y=x \end{cases}$

Άρα $x=2\sqrt{2}=y$ ή $x=-2\sqrt{2}=y$. Τότε το σημείο του κύκλου που έχει τη μικρότερη απόσταση από το Α είναι το $B\left(2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$ και είναι εικόνα του μιγαδικού $z_1=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$, ενώ το σημείο του κύκλου που έχει τη μεγαλύτερη απόσταση από το Α είναι το $\Gamma\left(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2}\right)$ και είναι εικόνα του μιγαδικού $z_2=-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$.

55. **α)** $|z+\bar{w}|=|z-\bar{w}| \Leftrightarrow |z+\bar{w}|^2=|z-\bar{w}|^2 \Leftrightarrow (z+\bar{w})(\bar{z}+w)=(z-\bar{w})(\bar{z}-w) \Leftrightarrow$

$z\bar{z}+zw+\bar{z}\bar{w}+w\bar{w}=z\bar{z}-zw-\bar{z}\bar{w}+w\bar{w} \Leftrightarrow 2zw=-2\bar{z}\bar{w} \Leftrightarrow zw=-\overline{zw} \Leftrightarrow (zw)\in I$

β) $zw=\left(\alpha^2+if(\alpha)\right)\left(\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{1}{f(\beta)}i\right)=\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}+\dfrac{\alpha^2}{f(\beta)}i+\dfrac{f(\alpha)}{\beta^2}i-\dfrac{f(\alpha)}{f(\beta)} \Leftrightarrow$

$$zw=\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}-\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}\right)+i\left(\frac{\alpha^2}{f(\beta)}+\frac{f(\alpha)}{\beta^2}\right)$$

$(zw)\in I \Leftrightarrow \dfrac{\alpha^2}{\beta^2}-\dfrac{f(\alpha)}{f(\beta)}=0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha^2}{f(\alpha)}=\dfrac{\beta^2}{f(\beta)}$.

Είναι $xf'(x)=2f(x) \Leftrightarrow x^2f'(x)=2xf(x) \Leftrightarrow 2xf(x)-x^2f'(x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2xf(x)-x^2f'(x)}{f^2(x)}=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x^2}{f(x)}\right)'=0$.

Εστω $g(x)=\dfrac{x^2}{f(x)}$, $x\in[\alpha,\beta]$. Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α,β) με: $g'(x)=\dfrac{2xf(x)-x^2f'(x)}{f^2(x)}$. Είναι $g(\alpha)=\dfrac{\alpha^2}{f(\alpha)}$ και $g(\beta)=\dfrac{\beta^2}{f(\beta)}$, δηλαδή $g(\alpha)=g(\beta)$. Από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2\xi f(\xi)-\xi^2f'(\xi)}{f^2(\xi)}=0 \Leftrightarrow 2\xi f(\xi)-\xi^2f'(\xi)=0 \Leftrightarrow \xi f'(\xi)=2f(\xi)$.

56. **α)** Είναι $|z(x)|^2=\left(\sqrt{x^2+f^2(x)}\right)^2=x^2+f^2(x)$

και $z(x)(1+i)=(x+if(x))(1+i)=x+xi+if(x)-f(x)=(x-f(x))+(x+f(x))i$

$|z(x)|^2=x^2+\mathrm{Re}(z(x)(1+i)) \Leftrightarrow x^2+f^2(x)=x^2+x-f(x) \Leftrightarrow f^2(x)=x-f(x)\quad(1)$.

Εστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in\mathbb{R}$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, λόγω του θεωρήματος Fermat είναι $f'(x_0)=0$. Παραγωγίζοντας την σχέση (1) κατά μέλη, προκύπτει: $\left(f^2(x)\right)' = \left(x - f(x)\right)' \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = 1 - f'(x)$ (2) και αντικαθιστώντας $x = x_0$,

έχουμε: $2f(x_0)\cancel{f'(x_0)}^{0} = 1 - \cancel{f'(x_0)}^{0} \Leftrightarrow 0 = 1$ που είναι αδύνατο. Άρα η f δεν έχει ακρότατα.

β) Επειδή $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \geq \frac{1}{4}$ και η f είναι συνεχής (αφού είναι παραγωγίσιμη), θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$. Επειδή $f(2) = 1 > 0$, είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq \frac{1}{4}$.

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f^2(x) + f(x) = x \Leftrightarrow f^2(x) + 2\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{4} = x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(f(x) + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4x+1}{4}.$$

Επειδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq \frac{1}{4}$, είναι $f(x) + \frac{1}{2} > 0$, οπότε

$$f(x) + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{4x+1}{4}} \Leftrightarrow f(x) = \frac{\sqrt{4x+1}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{4x+1} - 1}{2},\ x \geq \frac{1}{4}.$$

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ με $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{4x+1}}(4x+1)' = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\sqrt{4x+1}} = \frac{1}{\sqrt{4x+1}} > 0$,

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$, οπότε είναι και 1–1 και αντιστρέφεται.

$$f(x) = y \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{4x+1} - 1}{2} \Leftrightarrow 2y = \sqrt{4x+1} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{4x+1} = 2y + 1.$$

Πρέπει $2y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{2}$, τότε:

$$4x + 1 = (2y+1)^2 \Leftrightarrow 4x = 4y^2 + 4y + 1 - 1 \Leftrightarrow x = y^2 + y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = y^2 + y,\ y \geq -\frac{1}{2},$$

άρα $f^{-1}(x) = x^2 + x$, $x \geq -\frac{1}{2}$.

δ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f^{-1}(x) + \eta\mu x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + \eta x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2 + x}{x^2} + \frac{\eta\mu x}{x}\right)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι: $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{x} \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

Επειδή $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$, έχουμε: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f^{-1}(x) + \eta\mu x}{x^2} = 1 + 0 = 1$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 1}{e^x - e^2} \underset{\substack{x \to 2 \Rightarrow \\ y \to 1}}{\overset{\substack{f(x) = y \Leftrightarrow \\ x = f^{-1}(y)}}{=}} \lim_{y \to 1} \frac{y - 1}{e^{f^{-1}(y)} - e^2} = \lim_{y \to 1} \frac{y - 1}{e^{y^2 + y} - e^2} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{y \to 1} \frac{1}{e^{y^2 + y}(2y+1)} = \frac{1}{3e^2}.$$

57. **α)** Είναι $f(x) = |z(x)|^2 = \left(\sqrt{\left(\sqrt{2x}\right)^2 + (\lambda - \ln x)^2}\right)^2 = 2x + (\lambda - \ln x)^2$, $x > 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 2 - 2(\lambda - \ln x)\frac{1}{x} = \frac{2x - 2\lambda + 2\ln x}{x}$ και

$$f''(x)=\frac{\left(2+\frac{2}{x}\right)x-(2x-2\lambda+2\ln x)}{x^2}=\frac{2x+2-2x+2\lambda-2\ln x}{x^2}=\frac{2+2\lambda-2\ln x}{x^2}.$$

$$f''(x)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{2+2\lambda-2\ln x}{x}\ge 0 \Leftrightarrow 2+2\lambda-2\ln x\ge 0 \Leftrightarrow \ln x\le \lambda+1 \Leftrightarrow x\le e^{\lambda+1}$$

Για κάθε $x\in\left(0,e^{\lambda+1}\right)$ είναι $f''(x)>0$,

οπότε η f είναι κυρτή στο $\left(0,e^{\lambda+1}\right]$.

Για κάθε $x\in\left(e^{\lambda+1},+\infty\right)$ είναι $f''(x)<0$,

οπότε η f είναι κοίλη στο $\left[e^{\lambda+1},+\infty\right)$.

x	0		$e^{\lambda+1}$		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	
f			Σ.Κ.		

Η f έχει σημείο καμπής το $A\left(e^{\lambda+1},f\left(e^{\lambda+1}\right)\right)$ και επειδή

$f\left(e^{\lambda+1}\right)=2e^{\lambda+1}+\left(\lambda-\ln e^{\lambda+1}\right)^2=2e^{\lambda+1}+(\lambda-\lambda-1)^2=2e^{\lambda+1}+1$, είναι $A\left(e^{\lambda+1},2e^{\lambda+1}+1\right)$.

Για να ανήκει το Α στην ευθεία $y=2x+1$, πρέπει: $2e^{\lambda+1}+1=2e^{\lambda+1}+1$ που ισχύει.

β) Είναι $f'(x)=\dfrac{2x-2\lambda+2\ln x}{x}$. Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $2x-2\lambda+2\ln x$. Έστω $g(x)=2-2\lambda+2\ln x$, $x>0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=2+\dfrac{2}{x}>0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Για κάθε $x>1$ είναι $g(x)>g(1)=2-2\lambda$.

- Αν $2-2\lambda\ge 0\Leftrightarrow\lambda\le 1$, τότε $g(x)>0$, άρα $f'(x)>0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.
- Αν $2-2\lambda<0\Leftrightarrow\lambda>1$, τότε επειδή η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ το $2-2\lambda$ που είναι αρνητικός αριθμός, θα αλλάζει πρόσημο, οπότε και η f' θα αλλάζει πρόσημο, οπότε η f δεν μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.
- Για $\lambda_{max}=1$ είναι: $z(1)=\sqrt{2}-i$ και $-iz(1)=-i\left(\sqrt{2}-i\right)=-1-i\sqrt{2}$.

γ) i. Εστω Α,Β οι εικόνες των $z(1)$, $-iz(1)$.

Είναι $\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=|z(1)|^2=\left(\sqrt{\sqrt{2}^2+1^2}\right)^2=3$, $\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=|-iz(1)|^2=\left(\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}\right)^2=3$ και

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=|z(1)-iz(1)|^2=\left|\sqrt{2}-i+1+i\sqrt{2}\right|^2=\left|\left(\sqrt{2}+1\right)+i\left(\sqrt{2}-1\right)\right|^2\Leftrightarrow$$

$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2+\left(\sqrt{2}-1\right)^2}\right)^2=2+2\sqrt{2}+1+2-2\sqrt{2}+1=6$. Επειδή $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|$, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές. Επειδή $\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=3+3=6=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$, επαληθεύεται το πυθαγόρειο θεώρημα, οπότε το τρίγωνο είναι και ορθογώνιο.

ii. Είναι $w=\left[\mathrm{Re}^2(z(1))+2\mathrm{Im}(z(1))\right]^{4k}=\left[\left(\sqrt{2}\right)^2+2(-i)\right]^{4k}=(2-2i)^{4k}\Leftrightarrow$

$$w=[2(1-i)]^{4k}=2^{4k}\left[(1-i)^2\right]^{2k}=2^{4k}\left(\cancel{1}-2i+\cancel{i^2}\right)^{2k}\Leftrightarrow$$

$$w=2^{4k}\cdot 2^{2k}\cdot i^{2k}=2^{6k}\left(i^2\right)^k=2^{6k}(-1)^k\in\mathbb{R}$$

58. **α)** Εστω $zw=u$,τότε $u=(\ln x+xi)(1-ei)=\ln x-ei\ln x+xi+ex=(\ln x+ex)+(x-e\ln x)i$.

$\frac{zw+2}{zw-2}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{u+2}{u-2}=\frac{\bar{u}+2}{\bar{u}-2}\Leftrightarrow(u+2)(\bar{u}-2)=(u-2)(\bar{u}+2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u\bar{u}-2u+2\bar{u}-4=u\bar{u}+2u-2\bar{u}-4\Leftrightarrow 4\bar{u}=4u\Leftrightarrow\bar{u}=u\Leftrightarrow u\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \operatorname{Im}(u)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-e\ln x=0$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $x-e\ln x=0$ έχει μοναδική ρίζα.

Εστω $f(x)=x-e\ln x$, $x>0$. Παρατηρούμε ότι $f(e)=e-e\ln e=e-e=0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=1-\frac{e}{x}$. $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow 1-\frac{e}{x}\geq 0\Leftrightarrow\frac{e}{x}\leq 1\Leftrightarrow e\leq x$.

Για κάθε $x\in(0,e)$ είναι $f'(x)<0$,

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,e]$.

Για κάθε $0<x<e$ είναι $f(x)>f(e)=0$.

Για κάθε $x>e$ είναι $f'(x)>0$,

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$.

Για κάθε $x>e$ είναι $f(x)>f(e)=0$.

x	0		e		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Δηλαδή $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,e)\cup(e,+\infty)$ και επειδή $f(e)=0$, η $x=e$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0\Leftrightarrow x-e\ln x=0$.

β) Ο μιγαδικός $\frac{zw+i}{zw-i}=\frac{u+i}{u-i}$, είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $\frac{u+i}{u-i}=\overline{\left(\frac{u+i}{u-i}\right)}\Leftrightarrow\frac{u+i}{u-i}=\frac{\bar{u}-i}{\bar{u}+i}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(u+i)(\bar{u}+i)=(\bar{u}-i)(u-i)\Leftrightarrow\cancel{u\bar{u}}+iu+i\bar{u}+\cancel{i^2}=\cancel{u\bar{u}}+i\bar{u}+iu+\cancel{i^2}\Leftrightarrow 2iu=-2i\bar{u}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u=-\bar{u}\Leftrightarrow u\in I\Leftrightarrow \operatorname{Re}(u)=0\Leftrightarrow\ln x+ex=0$. Έστω $g(x)=\ln x+ex$, $x>0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=\frac{1}{x}+e$. Είναι $g'(x)>0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x+ex)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x+ex)=+\infty$, η g έχει σύνολο τιμών το $g((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to0^+}g(x),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της g και η g είναι γνησίως αύξουσα, υπάρχει μοναδική τιμή του $x>0$ για την οποία $g(x)=0$.

γ) Για $x=\frac{1}{e}$ είναι $z=\ln\frac{1}{e}+\frac{1}{e}i=\ln e^{-1}+\frac{1}{e}i==-1+\frac{1}{e}i=\frac{-e+i}{e}$.

$(ez)^{4k}=\left(e\cdot\frac{-e+i}{e}\right)^{4k}=(-e+i)^{4k}=(i^2e+i)^{4k}=\left[i(1+ei)\right]^{4k}=i^{4k}(\bar{w})^{4k}=\bar{w}^{4k}$.

59. **α)** $|z(\alpha)+iz(\beta)|=|z(\alpha)-iz(\beta)|\Leftrightarrow|z(\alpha)+iz(\beta)|^2=|z(\alpha)-iz(\beta)|^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(z(\alpha)+iz(\beta))\left(\overline{z(\alpha)}-i\overline{z(\beta)}\right)=(z(\alpha)-iz(\beta))\left(\overline{z(\alpha)}+i\overline{z(\beta)}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z(\alpha)\overline{z(\alpha)}-iz(\alpha)\overline{z(\beta)}+iz(\beta)\overline{z(\alpha)}+z(\beta)\overline{z(\beta)}=z(\alpha)\overline{z(\alpha)}+iz(\alpha)\overline{z(\beta)}-i\overline{z(\alpha)}z(\beta)+z(\beta)\overline{z(\beta)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-2iz(\alpha)\overline{z(\beta)}+2i\overline{z(\alpha)}z(\beta)=0\Leftrightarrow z(\alpha)\overline{z(\beta)}-\overline{z(\alpha)}z(\beta)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\operatorname{Im}\left(z(\alpha)\overline{z(\beta)}\right)=0\Leftrightarrow\operatorname{Im}\left(z(\alpha)\overline{z(\beta)}\right)=0$

Είναι $z(\alpha)\overline{z(\beta)}=(\alpha+if(\alpha))(\beta-if(\beta))=\alpha\beta-i\alpha f(\beta)+i\beta f(\alpha)+f(\alpha)f(\beta)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z(\alpha)\overline{z(\beta)}=(\alpha\beta+f(\alpha)f(\beta))+i(\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta))$

Άρα $\mathrm{Im}\left(z(\alpha)\overline{z(\beta)}\right)=0\Leftrightarrow \beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)=0\Leftrightarrow \beta f(\alpha)=\alpha f(\beta)\Leftrightarrow \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=\dfrac{f(\beta)}{\beta}$ (1)

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=0\Leftrightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{f^2(x)}=0\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=0.$$

Εστω $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x\in[\alpha,\beta]$. Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{f^2(x)}$.

Είναι $g(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$, $g(\beta)=\dfrac{f(\beta)}{\beta}$ και λόγω της σχέσης (1) είναι $g(\alpha)=g(\beta)$, οπότε από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$g'(\xi)=0\Leftrightarrow\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{f^2(\xi)}=0\Leftrightarrow \xi f'(\xi)-f(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi}.$$

β) Η εφαπτομένη της C_f στο $x=\xi$, είναι $y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$ και για να διέρχεται από το O πρέπει: $-f(\xi)=f'(\xi)(-\xi)\Leftrightarrow f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi}$ που ισχύει.

γ) Επειδή $f(\alpha)=f(\beta)=0$, από το Θ.Rolle υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$: $f'(x_0)=0$.

Για κάθε $\alpha<x<x_0\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_0)=0\Rightarrow f\downarrow[\alpha,x_0]$. Άρα $f(x)\le f(\alpha)=0$.

Για κάθε $x_0<x<\beta\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_0)=0\Rightarrow f\uparrow[x_0,\beta]$. Άρα $f(x)\le f(\beta)=0$.

60. **α)** $|\bar z+w|\ge|z-\bar w|\Leftrightarrow|\bar z+w|^2\ge|z-\bar w|^2\Leftrightarrow(\bar z+w)(z+\bar w)\ge(z-\bar w)(\bar z-w)\Leftrightarrow$

$\cancel{\bar z z}+\bar z\bar w+zw+\cancel{w\bar w}\ge\cancel{z\bar z}-zw-\bar z\bar w+\cancel{w\bar w}\Leftrightarrow 2zw+2\bar z\bar w\ge0\Leftrightarrow zw+\bar z\bar w\ge0\Leftrightarrow$

$2\mathrm{Re}(zw)\ge0\Leftrightarrow \mathrm{Re}(zw)\ge0$.

β) $zw=\left(\alpha^{f(x)}+i\right)\left[1+(1+f(x))i\right]=\alpha^{f(x)}+\alpha^{f(x)}(1+f(x))i+i-(1+f(x))\Leftrightarrow$

$zw=\left(\alpha^{f(x)}-1-f(x)\right)+i\left[\alpha^{f(x)}(1+f(x))+i\right]\Leftrightarrow \mathrm{Re}(zw)\ge0\Leftrightarrow\alpha^{f(x)}-1-f(x)\ge0$ (1)

Εστω $g(x)=\alpha^{f(x)}-1-f(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $g(0)=\alpha^{f(0)}-1-f(0)=\alpha^0-1=0$.

Η (1) γίνεται: $g(x)\ge g(0)$, δηλαδή η g έχει ελάχιστο στο $x_0=0$.

Επειδή η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με $g'(x)=\alpha^{f(x)}f'(x)\ln\alpha-f'(x)$, από το θεώρημα Fermat, ισχύει: $g'(0)=0\Leftrightarrow$

$$\alpha^{f(0)}f'(0)\ln\alpha-f'(0)=0\Leftrightarrow f'(0)(\ln\alpha-1)=0\overset{f'(0)\neq0}{\Leftrightarrow}\ln\alpha-1=0\Leftrightarrow\ln\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=e.$$

61. **α)** $z(\xi_1)+z(\xi_2)=2(i-1)\Leftrightarrow f'(\xi_1)+i+f'(\xi_2)+i=2i-2\Leftrightarrow f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=-2$.

Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ και παραγωγίσιμη στα $\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$, οπότε λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\beta}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \text{ και } f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\alpha-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

Άρα $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=\dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\beta}{\frac{\beta-\alpha}{2}}+\dfrac{\alpha-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}=\dfrac{-\beta+\alpha}{\frac{\beta-\alpha}{2}}=\dfrac{-2\cancel{(\beta-\alpha)}}{\cancel{\beta-\alpha}}=-2$.

β) Από το Θ.Μ.Τ για την f, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha}=-1=\varepsilon\varphi 135^\circ$

γ) $z\notin I\Leftrightarrow f'(x)\neq 0$. Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ με $x_1\neq x_2$, τέτοια ώστε $f(x_1)=f(x_2)$, τότε από το θ.Rolle η $f'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β), το οποίο όμως είναι άτοπο. Άρα $f(x_1)\neq f(x_2)$ και η f είναι $1-1$ και αντιστρέφεται.

62. **α)** Αφού το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο στο Ο τότε $(OA)^2+(OB)^2=(AB)^2\Leftrightarrow$

$|z|^2+|w|^2=|z-w|^2\Leftrightarrow z\bar{z}+w\bar{w}=(z-w)(\bar{z}-\bar{w})\Leftrightarrow z\bar{z}+w\bar{w}=z\bar{z}-z\bar{w}-\bar{z}w+w\bar{w}\Leftrightarrow$

$z\bar{w}+\bar{z}w=0\Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z\bar{w})=0$.

Όμως $z\bar{w}=(\alpha+f(\alpha)i)(f(\beta)+\beta i)=\alpha f(\beta)+\alpha\beta i+f(\alpha)f(\beta)i-\beta f(\alpha)=$

$=(\alpha f(\beta)-\beta f(\alpha))+i(\alpha\beta+f(\alpha)f(\beta))$

Οπότε αφού $\mathrm{Re}(z\bar{w})=0$ τότε $\alpha f(\beta)-\beta f(\alpha)=0\quad(1)$

β) Η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ έχει εξίσωση $y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$ και για να διέρχεται από το $(0,0)$ πρέπει $-f(\xi)=-\xi f'(\xi)\Leftrightarrow \xi f'(\xi)-f(\xi)=0$. Θεωρούμε την $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

Επίσης από την $(1)\Leftrightarrow \alpha f(\beta)=\beta f(\alpha)\Leftrightarrow \dfrac{f(\beta)}{\beta}=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$ (2) δηλαδή $g(\alpha)=g(\beta)$, οπότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0\Leftrightarrow \xi f'(\xi)-f(\xi)=0$

γ) Εστω $A(\alpha,f(\alpha))$ η εικόνα του z. $iw=i(f(\beta)-\beta i)=\beta+if(\beta)$ και $B(\beta,f(\beta))$ η εικόνα του w και $(0,0)$ η αρχή των αξόνων.

Είναι $\lambda_{OA}=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$, $\lambda_{OB}=\dfrac{f(\beta)}{\beta}$ και αφού από $(2)\Rightarrow \dfrac{f(\beta)}{\beta}=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$ δηλαδή $\lambda_{OA}=\lambda_{OB}$ τότε $OA\parallel OB$, άρα τα σημεία O,A,B είναι συνευθειακά.

63. **α)** $|z-2|=|z-2i|\Leftrightarrow |z-2|^2=|z-2i|^2\Leftrightarrow (z-2)(\bar z-2)=(z-2i)(\bar z+2i)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{z\bar z}-2z-2\bar z+\cancel{4}=\cancel{z\bar z}+2iz-2i\bar z+\cancel{4}\Leftrightarrow -2(z+\bar z)=2i(z-\bar z)\quad (1)$.

Αν $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$, τότε η σχέση (1) γίνεται: $-2x=i(2yi)\Leftrightarrow 2x=2y\Leftrightarrow y=x$, δηλαδή η εικόνα του z βρίσκεται στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων.

β) Επειδή η εικόνα του z βρίσκεται στην $y=x$, ισχύει:

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\beta)=f(\beta)-f(\alpha)\Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+f(\alpha)=2f(\beta)\Leftrightarrow f(\beta)=\frac{f(\alpha)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{2}.$$

γ) Επειδή $\operatorname{Re}(z)>0$, είναι $x>0$ και $y=x>0$, δηλαδή $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\beta)=f(\beta)-f(\alpha)>0$, άρα $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>f(\beta)$ και $f(\beta)>f(\alpha)$, δηλαδή $f(\alpha)<f(\beta)<f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $x_0\in\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=f(\beta)$.

δ) Αν η f ήταν αντιστρέψιμη, τότε θα ήταν και 1–1. Τότε όμως από τη σχέση του προηγούμενου σκέλους θα είχαμε: $f(x_0)=f(\beta)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x_0=\beta$, που είναι άτοπο αφού $x_0\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\subseteq(\alpha,\beta)$. Άρα η f δεν μπορεί να είναι αντιστρέψιμη.

ε) Επειδή η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right],\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ και παραγωγίσιμη στα $\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right),\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$, λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοια ώστε: $f'(\xi_1)=\dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=2\dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ και

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+f(\alpha)}{2}-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}=\frac{\frac{f(\alpha)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{2}}{\frac{\beta-\alpha}{2}}=\frac{f(\alpha)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\alpha}$$

Οπότε $f'(\xi_1)+2f'(\xi_2)=2\dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}+2\dfrac{f(\alpha)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\alpha}=0$.

64. **α) i.** Αν $z(x)=f(x)+xi$ τότε $z(x)(1+i)=(f(x)+xi)(1+i)\Leftrightarrow f(x)+if(x)+xi-x=$

$=(f(x)+x)+i(f(x)+x)$

Οπότε η σχέση $|z(x)|^2+\text{Re}[z(x)(1+i)]=x^2$ γίνεται

$f^2(x)+x^2+f(x)-x=x^2\Leftrightarrow f^2(x)+f(x)=x\quad(1)$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ τότε παραγωγίζοντας στη σχέση (1) έχουμε:

$2f(x)f'(x)+f'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)(2f(x)+1)=1\quad(2)$ και αφού $f(x)\geq 0$ τότε $2f(x)+1>0$.

Αν η f παρουσίαζε ακρότατο για $x=x_0$ τότε από Θ. Fermat θα ήταν $f'(x_0)=0$, οπότε στη (2) για $x=x_0$ προκύπτει $0=1$ άτοπο.

ii. Από $(2)\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2f(x)+1}>0$ άρα η $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$. Στην (1) για $x=0$ έχουμε

$f^2(0)+f(0)=0\Leftrightarrow f(0)(f(0)+1)=0\Rightarrow f(0)=0$ αφού $f(0)+1>0$.

Για $x>0$ θα είναι $f(x)>f(0)\Rightarrow f(x)>0$.

iii. Από τη σχέση (1) έχουμε $f^2(x)+f(x)+\dfrac{1}{4}=x+\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\left(f(x)+\dfrac{1}{2}\right)^2=x+\dfrac{1}{4}$.

Εστω $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{2}$ τότε $g^2(x)=x+\dfrac{1}{4}\neq 0$ αφού $x+\dfrac{1}{4}\geq\dfrac{1}{4}$. Αφού η g συνεχής στο $[0,+\infty)$ και $g(x)\neq 0$ τότε η g θα διατηρεί πρόσημο. Είναι $g(0)=f(0)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}>0$ άρα $g(x)>0$ οπότε $g(x)=\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}\Leftrightarrow f(x)+\dfrac{1}{2}=\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}-\dfrac{1}{2}$, $x\in[0,+\infty)$

iv. α) Εστω $f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}-\dfrac{1}{2}=y\Leftrightarrow\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}=y+\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x+\dfrac{1}{4}=y^2+y+\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x=y^2+y$

Επίσης $f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ άρα $f(A)=[0,+\infty)$, οπότε $f^{-1}(x)=x^2+x$, $D_{f^{-1}}=[0,+\infty)$.

β) Είναι $|z(x)|^2\geq x^4+1\Leftrightarrow f^2(x)+x^2\geq x^4+1\Leftrightarrow f^2(x)+x^2-x^4-1\geq 0$.

Θεωρούμε $h(x)=f^2(x)+x^2-x^4-1,\ x\geq 0$ είναι $h(1)=f^2(1)-1=0$ γιατί $z(1)=1+i\Leftrightarrow f(1)+i=1+i\Leftrightarrow f(1)=1$, οπότε $h(x)\geq h(1)$ και η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=2f(x)f'(x)+2x-4x^3$, οπότε από Θ. Fermat θα είναι:

$h'(1)=0\Leftrightarrow 2f(1)f'(1)+2-4=0\Leftrightarrow f'(1)=1$.

Άρα η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $x_0=1$ είναι:

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=1(x-1)\Leftrightarrow y=x$.

65. **α)** Αν $z=x+yi$ τότε $x=\sigma\upsilon\nu\theta$, $y=-\eta\mu\theta$ οπότε $x^2+y^2=\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta=1$ άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι ο μοναδιαίος κύκλος, δηλαδή $|z|=1$

β) Είναι $w=\dfrac{1-2z}{z-2}\Leftrightarrow wz-2w=1-2z\Leftrightarrow wz+2z=2w+1\Leftrightarrow z=\dfrac{1+2w}{w+2}$. Επειδή $|z|=1$ τότε:

$$\left|\frac{1+2w}{w+2}\right|=1\Leftrightarrow|1+2w|^2=|w+2|^2\Leftrightarrow(1+2w)(1+2\bar{w})=(w+2)(\bar{w}+2)\Leftrightarrow$$

$$1+2w+2\bar{w}+4w\bar{w}=w\bar{w}+2w+2\bar{w}+4\Leftrightarrow 3w\bar{w}=3\Leftrightarrow|w|^2=1\Leftrightarrow|w|=1$$

Οπότε ο γ.τ. των εικόνων του w είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

γ) Αφού $|z|=1$ τότε $x^2+y^2=1\Leftrightarrow y^2=1-x^2$ και αφού $y^2\ge 0\Leftrightarrow 1-x^2\ge 0\Leftrightarrow -1\le x\le 1$

Είναι: $$|z-w|^2=\left|z-\frac{1-2z}{z-2}\right|^2=\left|\frac{z^2-2z+1+2z}{z-2}\right|^2=\left|\frac{z^2-1}{z-2}\right|^2=\left|\frac{(x+yi)^2-1}{x+yi-2}\right|^2=$$

$$=\left|\frac{x^2-y^2-1+2xyi}{(x-2)+yi}\right|^2\overset{(1)}{=}\left|\frac{x^2+x^2-1-1+2xyi}{(x-2)+yi}\right|^2=\frac{4\left|(x^2-1)+xyi\right|^2}{\left|(x-2)+yi\right|^2}=$$

$$=\frac{4\left[(x^2-1)^2+x^2y^2\right]}{(x-2)^2+y^2}\overset{(1)}{=}\frac{4\left[x^4-2x^2+1+x^2(1-x^2)\right]}{x^2-4x+4+1-x^2}=\frac{4(1-x^2)}{5-4x}$$

οπότε $|z-w|=2\sqrt{\dfrac{1-x^2}{5-4x}}$, $x\in[-1,1]$.

δ) Η μέγιστη τιμή του $|z-w|$ είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{4(1-x^2)}{5-4x}$, $x\in[-1,1]$

η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=4\dfrac{-2x(5-4x)-(-4)(1-x^2)}{(5-4x)^2}=\dfrac{4(4x^2-10x+4)}{(5-4x)^2}$.

Είναι $f'(x)>0\Leftrightarrow 4x^2-10x+4>0\Leftrightarrow x<\dfrac{1}{2}$ ή $x>2$

Η f παρουσιάζει μέγιστο για $x=\dfrac{1}{2}$ το $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{4\left(1-\frac{1}{4}\right)}{5-2}=1$

	-1		$1/2$		1
f'		$+$		$-$	
f		↗		↘	

Άρα $|z-w|_{max}=1$

Αν $x=\dfrac{1}{2}$ από $(1)\Rightarrow y^2=1-\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα

$z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ οπότε $w=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ή $z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, οπότε $w=\dfrac{1-2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-2}=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

66. **α)** Είναι $z(\alpha)=f(\alpha)+\alpha i$, $z(\beta)=f(\beta)+\beta i$ και $\mathrm{Re}\,z(\alpha)=\mathrm{Re}\,z(\beta)\Leftrightarrow f(\alpha)=f(\beta)$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, θα είναι και συνεχής στο διάστημα αυτό, οπότε λόγω του θεωρήματος Rolle, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$. Δηλαδή η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι παράλληλη στον άξονα x΄x, στον οποίο όμως είναι παράλληλη και η ευθεία $y=3$. Άρα η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=3$.

β) $w(\xi_1)-\bar{w}(\xi_1)=\bar{w}(\xi_2)-w(\xi_2)\Leftrightarrow \xi_1+if'(\xi_1)-(\xi_1-if'(\xi_1))=\xi_2-if'(\xi_2)-(\xi_2+if'(\xi_2))\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \xi_1+if'(\xi_1)-\xi_1+if'(\xi_1)=\xi_2-if'(\xi_2)-\xi_2-if'(\xi_2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2if'(\xi_1)=-2if'(\xi_2)\Leftrightarrow f'(\xi_1)=-f'(\xi_2)$

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$, παραγωγίσιμη στα $\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$, οπότε λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοια ώστε: $f'(\xi_1)=\dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$ και

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}=\frac{f(\alpha)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}=-\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}=-f'(\xi_1)$$

γ) Επειδή f είναι κοίλη, η f' είναι $\downarrow[\alpha,\beta]$. Για $\alpha<x<\xi\overset{f'\downarrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(\xi)=0\Rightarrow f\uparrow[\alpha,\xi]$ και για κάθε $\xi<x<\beta\overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(\xi)=0\Rightarrow f\downarrow[\xi,\beta]$. Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x=\xi$.

67. **α)** $xf'(x)+f(x)=\sigma\upsilon\nu x+2x\Leftrightarrow (xf(x))'=(\eta\mu x+x^2)'\Leftrightarrow xf(x)=\eta\mu x+x^2+c,\ c\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$f(x)=\dfrac{\eta\mu x+x^2+c}{x},\ x>0$. $f(\pi)=\pi\Leftrightarrow\dfrac{\eta\mu\pi+\pi^2+c}{\pi}=\pi\Leftrightarrow\pi^2+c=\pi^2\Leftrightarrow c=0$,

άρα $f(x)=\dfrac{\eta\mu x+x^2}{x},\ x>0$.

β) Αν $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$, τότε:

$|z-i|=|z-1|\Leftrightarrow|x+yi-i|=|x+yi-1|\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2y+\cancel{1}=\cancel{x^2}-2x+\cancel{1}+\cancel{y^2}\Leftrightarrow-2y=-2x\Leftrightarrow y=x$.

Ο γεωμετρικός τόπος του Μ είναι η ευθεία $\varepsilon: y=x\Leftrightarrow x-y=0$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x^2}+1\right)$.

Για κάθε $x>0$, είναι: $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x^2}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{x^2}\le\dfrac{1}{x^2}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{x^2}\le\dfrac{\eta\mu x}{x^2}\le\dfrac{1}{x^2}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=0$, άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x^2}=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$.

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\eta\mu x+x^2}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+x^2-x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}$$

Για κάθε $x>0$, είναι: $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{x}\le\frac{1}{x}\Leftrightarrow-\frac{1}{x}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{x}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$, οπότε η ευθεία $y=1x+0\Leftrightarrow y=x$, είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu x+x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+x\right)=1$, άρα $w=3+4i$.

Αν $A(3,4)$ η εικόνα του w, τότε το $|z-w|$ είναι η απόσταση του A από τυχαίο σημείο της ευθείας ε. Είναι $|z-w|_{min}=d(A,\varepsilon)=\frac{|3-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, οπότε

$|z-w|\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow2|z-w|\ge\sqrt{2}\Leftrightarrow2|z-w|-\sqrt{2}\ge0$.

ε) Εστω $F(u)=\int_{\pi}^{u}f(t)dt$, $u\in[\pi,x]$, $x>\pi$.

Από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi\in(\pi,x):F'(\xi)=\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}\Leftrightarrow f(\xi)(x-\pi)=\int_{\pi}^{x}f(t)dt$.

Είναι $f(x)=\frac{\eta\mu x+x^2}{x}$, $f'(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x^2}{x^2}$. Εστω $\varphi(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x^2$, $x\ge\pi$.

Είναι $\varphi'(x)=-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x+2x$, $\varphi''(x)=-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+2=(1-\sigma\upsilon\nu x)+1+\eta\mu x>0\Rightarrow$

$\varphi'\uparrow[\pi,+\infty)$. Για κάθε $x>\pi\Rightarrow\varphi'(x)>\varphi'(\pi)=2\pi+1>0\Rightarrow\varphi\uparrow[\pi,+\infty)$.

Για κάθε $x>\pi\Rightarrow\varphi(x)>\varphi(\pi)=\pi^2-1>0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow[\pi,+\infty)$

$\pi<\xi<x\Leftrightarrow f(\pi)<f(\xi)<f(x)\Leftrightarrow\pi<f(\xi)<f(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\pi(x-\pi)<f(\xi)(x-\pi)<f(x)(x-\pi)\Leftrightarrow\pi x-\pi^2<\int_{\pi}^{x}f(t)dt<f(x)(x-\pi)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\pi x-\pi^2\right)=+\infty$, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\pi}^{x}f(t)dt=+\infty$.

68. **α)** Είναι $|z+iw|=|z-iw|\Leftrightarrow|z+iw|^2=|z-iw|^2\Leftrightarrow(z+iw)(\bar{z}-i\bar{w})=(z-iw)(\bar{z}+i\bar{w})\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\bar{z}-iz\bar{w}+i\bar{z}w+w\bar{w}=z\bar{z}+iz\bar{w}-i\bar{z}w+w\bar{w}\Leftrightarrow2\bar{z}wi=+2z\bar{w}i\Leftrightarrow\frac{\bar{z}}{\bar{w}}=\frac{z}{w}$

άρα $\frac{z}{w}\in\mathbb{R}$ που ισχύει.

β) $\frac{z}{w}=\frac{\alpha+if(\alpha)}{\beta+if(\beta)}=\frac{(\alpha+if(\alpha))(\beta-if(\beta))}{\beta^2+f^2(\beta)}=\frac{\alpha\beta-\alpha f(\beta)i+\beta f(\alpha)i+f(\alpha)f(\beta)}{\beta^2+f^2(\beta)}=$

$=\frac{\alpha\beta+f(\alpha)f(\beta)}{\beta^2+f^2(\beta)}+i\frac{\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)}{\beta^2+f^2(\beta)}$,

αφού $\frac{z}{w}\in\mathbb{R}$ τότε $\frac{\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)}{\beta^2+f^2(\beta)}=0\Leftrightarrow\beta f(\alpha)=\alpha f(\beta)\Leftrightarrow\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\beta)}{\beta}$ (1)

Η συνάρτηση $h(x)=\frac{f(x)}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $h'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$ και από (1) είναι $h(\alpha)=h(\beta)$ οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle για την h στο $[\alpha,\beta]$.

γ) Οπότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi)=0 \Leftrightarrow \frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0 \Leftrightarrow \xi f'(\xi)=f(\xi) \quad (2)$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ έχει εξίσωση $y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$ και για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει $0-f(\xi)=f'(\xi)(-\xi) \Leftrightarrow f'(\xi)=f(\xi)$ που ισχύει από (2).

δ) Θέτουμε $x+\alpha-t=u$ οπότε $dt=-du$ και

t	x	α
u	α	x

οπότε $\lim\limits_{x\to\alpha}\int_x^{\alpha}\frac{f(x+\alpha-t)}{(x-\alpha)(x+\alpha-t)}dt$

γίνεται $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\frac{1}{x-\alpha}\int_{\alpha}^{x}\frac{f(u)}{u}(-du)\right]=\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{-\int_{\alpha}^{x}\frac{f(u)}{u}du}{x-\alpha}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\frac{-f(x)}{x}}{1}=\frac{-f(\alpha)}{\alpha}=-1\Leftrightarrow f(\alpha)=\alpha$

γιατί η f είναι παραγωγίσιμη στο α, οπότε θα είναι και συνεχής.

Αφού $f(\alpha)=\alpha$ τότε από $(1)\Leftrightarrow 1=\frac{f(\beta)}{\beta}\Leftrightarrow f(\beta)=\beta$. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha}=1$. Οπότε η εξίσωση $f'(x)=1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β)

69. **α)** Η συνάρτηση $\frac{2}{e^t+c}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\frac{2}{e^x+c}>0$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και 1−1 και αντιστρέφεται.

β) Είναι $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$, οπότε ο z γίνεται $z=y+f^{-1}(y)i$ και έχει εικόνα το σημείο $(y,f^{-1}(y))$ που ανήκει στη $C_{f^{-1}}$.

γ) Είναι $|z+i|\ge|z+1|\Leftrightarrow|z+i|^2\ge|z+1|^2\Leftrightarrow(z+i)(\bar{z}-i)\ge(z+1)(\bar{z}+1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\bar{z}-iz+i\bar{z}+1\ge z\bar{z}+z+\bar{z}+1\Leftrightarrow -i(z-\bar{z})\ge z+\bar{z}\Leftrightarrow -i\cdot 2xi\ge 2f(x)\Leftrightarrow f(x)\le x$.

δ) Εστω $h(x)=f(x)-x=\int_0^x\frac{2}{e^t+c}dt-x$. Είναι $h(x)\le 0\Leftrightarrow h(x)\le h(0)$, δηλαδή η h έχει ολικό μέγιστο στο $x=0$. Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=\frac{2}{e^x+c}-1$, λόγω του θεωρήματος Fermat ισχύει: $h'(0)=0\Leftrightarrow\frac{2}{e^0+c}-1=0\Leftrightarrow c=1$.

ε) Για $c=1$ είναι $f(x)=\int_0^x\frac{2}{e^t+1}dt$. Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[1,2]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=f(2)-f(1)\Leftrightarrow f'(\xi)=\int_0^2\frac{2}{e^t+1}dt-\int_0^1\frac{2}{e^t+1}dt\Leftrightarrow\frac{2}{e^{\xi}+1}=\int_1^2\frac{2}{e^t+1}dt.$$

Είναι $1<\xi<2 \Leftrightarrow e<e^{\xi}<e^2 \Leftrightarrow e+1<e^{\xi}+1<e^2+1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{e+1}>\dfrac{1}{e^{\xi}+1}>\dfrac{1}{e^2+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{e^2+1}<\dfrac{2}{e^{\xi}+1}<\dfrac{2}{e+1}$. Είναι $\dfrac{2}{e^2+1}<\int_1^2 \dfrac{2}{e^t+1}dt<\dfrac{2}{e+1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{e^2+1}<\int_1^1 \dfrac{1}{e^t+1}dt<\dfrac{1}{e+1}$.

70. **α)** Για $x=0$ είναι $|z-1|f(0)+|z+i|f(2)=|z-1|$ (1) και

για $x=2$ είναι $|z-1|f(2)+|z+i|f(0)=|z-1|$ (2).

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει:

$|z-1|f(0)+|z+i|f(2)-|z-1|f(2)-|z+i|f(0)=0 \Leftrightarrow$

$f(0)\left(|z-1|-|z+i|\right)-f(2)\left(|z-1|-|z+i|\right)=0 \Leftrightarrow \left(|z-1|-|z+i|\right)\left(f(0)-f(2)\right)=0 \Leftrightarrow |z-1|=|z+i|$

ή $f(0)=f(2)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $0<2$ ισχύει ότι $f(0)<f(2)$, οπότε $|z-1|=|z+i|$.

β) $|z-1|=|z+i| \Leftrightarrow |z-1|^2=|z+i|^2 \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1)=(z+i)(\bar{z}-i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\bar{z}-z-\bar{z}+1=z\bar{z}+iz+i\bar{z}+1 \Leftrightarrow z+\bar{z}=i(z-\bar{z}) \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z)=i\cdot 2\mathrm{Im}(z)i \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=-\mathrm{Im}(z)$

γ) Επειδή $|z-1|=|z+i|$ η σχέση $|z-1|f(x)+|z+i|f(2-x)=|z-1|$ γίνεται:

$|z-1|f(x)+|z-1|f(2-x)=|z-1| \Leftrightarrow f(x)+f(2-x)=1$.

Για $x=1$ είναι $f(1)+f(1)=1 \Leftrightarrow 2f(1)=1 \Leftrightarrow f(1)=\dfrac{1}{2}$. Εχουμε $f(x)<\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow f(x)<f(1)$ και

επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύει: $x<1$.

δ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, από τη σχέση $f(x)+f(2-x)=1$ προκύπτει:

$\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f(2-x)dx=\int_0^2 1dx=2$ (3). Αν θέσουμε $2-x=u$ τότε $dx=-du$, για $x=0$ είναι $u=2$, ενώ για $x=2$ είναι $u=0$ και η σχέση (3) γίνεται:

$\int_0^2 f(x)dx-\int_2^0 f(u)du=2 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx=2 \Leftrightarrow 2\int_0^2 f(x)dx=2 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx=1$.

ε) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη οπότε και συνεχής στο $[x,x+1]$. Λόγω του θεωρήματος Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε:

$F'(\xi)=\dfrac{F(x+1)-F(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow f(\xi)=\int_0^{x+1} f(t)dt-\int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(\xi)=\int_0^{x+1} f(t)dt+\int_x^0 f(t)dt=\int_x^{x+1} f(t)dt$.

Είναι $x<\xi<x+1$ και f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε:

$f(x)<f(\xi)<f(x+1) \Leftrightarrow f(x)<\int_x^{x+1} f(t)dt<f(x+1)$.

στ) Εστω $g(x)=\int_0^x f(t)dt+2x-1$, $x\in[0,2]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,2]$, η g είναι παραγωγίσιμη οπότε και συνεχής στο διάστημα αυτό ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι $g(0)=-1<0$ και $g(2)=\int_0^2 f(t)dt+4-1=4>0$, δηλαδή $g(0)g(1)<0$, οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $\xi_1\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $g(\xi_1)=0 \Leftrightarrow \int_0^{\xi_1} f(t)dt=1-2\xi_1$.

ζ) $2f(\xi_2)=2\xi_2-1 \Leftrightarrow 2f(\xi_2)-2\xi_2+1=0$.

Εστω $h(x)=2\int_0^x f(t)dt-x^2+x$, $x[0,2]$. Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ οπότε η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=2f(x)-2x+1$, άρα η h είναι και συνεχής στο $[0,2]$.

$h(0)=0$ και $h(x)=2\int_0^2 f(t)dt-2^2+2=2\cdot1-4+2=0$, δηλαδή $h(0)=h(2)$, οπότε λόγω του θεωρήματος Rolle υπάρχει $\xi_2\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $h(\xi_2)=0 \Leftrightarrow 2f(\xi_2)=2\xi_2-1$.

71. **α)** $w\in\mathbb{R} \Leftrightarrow w=\bar{w} \Leftrightarrow \dfrac{z-1}{z+1}=\dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}+1)=(z+1)(\bar{z}-1) \Leftrightarrow$

$\cancel{z\bar{z}}+z-\bar{z}-\cancel{1}=\cancel{z\bar{z}}-z+\bar{z}-\cancel{1} \Leftrightarrow 2z=2\bar{z} \Leftrightarrow z=\bar{z} \Leftrightarrow z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\operatorname{Im}(z)=0 \Leftrightarrow \ln x+x-1=0$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $\ln x+x-1=0$, έχει μοναδική ρίζα.

Εστω $f(x)=\ln x+x-1$, $x>0$. Παρατηρούμε ότι $f(1)=\ln1+1-1=0$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{1}{x}+1>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε η $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Είναι $z(e)=e+(\ln e+e-1)i=e+ei=e(1+i)$,

άρα $(z(e))^{100}-\left(\overline{z(e)}\right)^{100}=\left[e(1+i)\right]^{100}-\left[e(1-i)\right]^{100}=e^{100}\left[(1+i)^2\right]^{50}-e^{100}\left[(1-i)^2\right]^{50} \Leftrightarrow$

$(z(e))^{100}-\left(\overline{z(e)}\right)^{100}=e^{100}\left(\cancel{1}+2i+\cancel{i^2}\right)^{50}-e^{100}\left(\cancel{1}-2i+\cancel{i^2}\right)^{50}=e^{100}2^{50}i^{50}-e^{100}2^{50}i^{50}=0$.

γ) Είναι $f(x)=\operatorname{Im}z(x)=\ln x+x-1$, $x>0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{1}{x}+1>0$ για κάθε $x>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, άρα είναι και 1–1 και αντιστρέφεται. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} βρίσκονται επί της ευθείας $y=x$, οπότε: $f(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow \ln x+\cancel{x}-1=\cancel{x} \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$.

Κοινό σημείο των $C_f, C_{f^{-1}}$ το (e,e).

δ) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E=\int_0^e\left|f^{-1}(x)\right|dx$. Θέτουμε $f^{-1}(x)=u$, τότε $x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$. Για $x=0$ είναι $f(u)=0 \Leftrightarrow f(u)=f(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} u=1$ και για $x=e$ είναι $f(u)=e \Leftrightarrow f(u)=f(e) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} u=e$. Οπότε:

$$E=\int_0^e\left|f^{-1}(x)\right|dx=\int_1^e|u|f'(u)du=\int_1^e u\left(\frac{1}{u}+1\right)du=\int_1^e(1+u)du \Leftrightarrow$$

$$E=\left[u+\frac{u^2}{2}\right]_1^e=e+\frac{e^2}{2}-1-\frac{1}{2}=\frac{e^2+2e-3}{2}.$$

72. **α)** Είναι $|z|=\sqrt{\left(e^{\alpha x}\sqrt{x}\right)^2+\beta^2}=\sqrt{e^{2\alpha x}x+\beta^2}$, $x\ge0$. Έστω $f(x)=\sqrt{e^{2\alpha x}x+\beta^2}$, $x\ge0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,+\infty\right)$ με $f'(x)=\dfrac{\left(e^{2\alpha x}x+\beta^2\right)'}{2\sqrt{e^{2\alpha x}x+\beta^2}}=\dfrac{2\alpha e^{2\alpha x}x+e^{2\alpha x}}{2\sqrt{e^{2\alpha x}\chi+\beta^2}}$.

Επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο για $x=1$ και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό που είναι εσωτερικό του πεδίου ορισμού της, λόγω του θ. Fermat, ισχύει ότι:

$$f'(1)=0\Leftrightarrow\frac{2\alpha e^{2\alpha}+e^{2\alpha}}{2\sqrt{e^{2\alpha}+\beta^2}}=0\Leftrightarrow e^{2\alpha}(2\alpha+1)=0\Leftrightarrow 2\alpha+1=0\Leftrightarrow\alpha=-\frac{1}{2}.$$

Επειδή το ακρότατο είναι το $\sqrt{\frac{1}{e}+1}$, ισχύει ότι:

$$f(1)=\sqrt{\frac{1}{e}+1}\Leftrightarrow\sqrt{e^{2\alpha}+\beta^2}=\sqrt{\frac{1}{e}+1}\Leftrightarrow e^{-1}+\beta^2=\frac{1}{e}+1\Leftrightarrow\beta^2=1\overset{\beta>0}{\Leftrightarrow}\beta=1.$$

β) Για $\alpha=-\frac{1}{2}$ και $\beta=1$, είναι $f(x)=\sqrt{e^{-x}x+1}$ και $f'(x)=\dfrac{-e^{-x}x+e^{-x}}{2\sqrt{e^{-x}x+1}}=\dfrac{e^{-x}(1-x)}{2\sqrt{e^{-x}x+1}}$

Είναι $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{e^{-x}(1-x)}{2\sqrt{e^{-x}x+1}}\geq 0\Leftrightarrow e^{-x}(1-x)\geq 0\Leftrightarrow 1-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 1$

Για κάθε $x<1$ είναι $f'(x)>0$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$.

Για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)<0$, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

Η f έχει μέγιστο στο $x=1$, το $f(1)=\sqrt{\frac{1}{e}+1}$.

γ) Επειδή το $|z|$ έχει μέγιστο το $\sqrt{\frac{1}{e}+1}$, ισχύει ότι $|z|\leq\sqrt{\frac{1}{e}+1}$ για κάθε $x\geq 0$, άρα:

$\sqrt{\frac{1}{e}+1}-|z|\geq 0$, οπότε και $\int_1^e\left(\sqrt{\frac{1}{e}+1}-|z|\right)\geq 0\Leftrightarrow\int_0^1\sqrt{\frac{1}{e}+1}dx-\int_0^1|z|dx\geq 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\int_0^1|z|dx\leq\sqrt{\frac{1}{e}+1}\cdot\int_0^1dx=\sqrt{\frac{1}{e}+1}.$$

73. **α)** $\int_1^x f(t)dt\geq x^4-1\Leftrightarrow\int_1^x f(t)dt-x^4+1\geq 0$ (1). Εστω $g(x)=\int_1^x f(t)dt-x^4+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $g(1)=\int_1^1 f(t)dt-1^4+1=0$, οπότε η (1) γίνεται: $g(x)\geq g(1)$. Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$που είναι στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων, το $\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, άρα η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=f(x)-4x^3$.

Λόγω του θεωρήματος Fermat για την g, ισχύει ότι: $g'(1)=0\Leftrightarrow f(1)-4=0\Leftrightarrow f(1)=4$.

Όμως $f(1)=|2z+2w|=2|z+w|$, άρα $f(1)=4\Leftrightarrow 2|z+w|=4\Leftrightarrow|z+w|=2\Leftrightarrow|z+w|^2=4\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(z+w)(\bar{z}+\bar{w})=4\Leftrightarrow z\bar{z}+z\bar{w}+\bar{z}w+w\bar{w}=4\Leftrightarrow|z|^2+z\bar{w}+\bar{z}w+|w|^2=4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+z\bar{w}+\bar{z}w+1=4\Leftrightarrow z\bar{w}+\bar{z}w=2\Leftrightarrow z\bar{w}+\bar{z}w=\frac{1}{2}f(1).$$

β) Είναι $|z|=1\Leftrightarrow|z|^2=1\Leftrightarrow z\bar{z}=1\Leftrightarrow\bar{z}=\frac{1}{z}$ και όμοια $\bar{w}=\frac{1}{w}$.

Οπότε: $z\bar{w}+\bar{z}w=2 \Leftrightarrow z\frac{1}{w}+\frac{1}{z}w=2 \Leftrightarrow z^2+w^2=2zw \Leftrightarrow z^2+w^2-2zw=0 \Leftrightarrow$

$(z-w)^2=0 \Leftrightarrow z=w$.

γ) Για $z=w$ είναι $f(x)=|2z+(x+1)z|=|(2+x+1)z|=|x+3||z|=|x+3|$.

74. **α)** Είναι $z(x)=2\sqrt{x}+ie^{2-2x}$, $x\ge 0$ και $|z(x)|=\sqrt{\left(2\sqrt{x}\right)^2+\left(e^{2-2x}\right)^2}=\sqrt{4x+e^{4-4x}}$

Εστω $f(x)=\sqrt{4x+e^{4-4x}}$, $x\ge 0$ είναι $f'(x)=\dfrac{4-4e^{4-4x}}{2\sqrt{x+e^{4-4x}}}$ και είναι $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow$

$4-e^{4-4x}\ge 0 \Leftrightarrow 4e^{4-4x}\le 4 \Leftrightarrow e^{4-4x}\le e^0 \Leftrightarrow 4-4x\le 0 \Leftrightarrow x\ge 1$.

Άρα για κάθε $x\ge 0$ θα είναι $f(x)\ge f(1)$

και $f(1)=\sqrt{5}$ άρα $z_1=z(1)=2+ie^0=2+i$

	0	1	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

β) Είναι $(z_1-1)^{200}=(\bar{z}_1-1)^{200} \Leftrightarrow (2+i-1)^{200}=(2-i-1)^{200} \Leftrightarrow$

$(1+i)^{200}=(1-i)^{200} \Leftrightarrow \left[(1+i)^2\right]^{100}=\left[(1-i)^2\right]^{100} \Leftrightarrow (2i)^{100}=(-2i)^{100} \Leftrightarrow 2^{100}=2^{100}$ ισχύει.

γ) Από το (α) ερώτημα έχουμε $f(0)=e^2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x+e^{4-4x}}=+\infty$, οπότε η $f\downarrow$ στο $[0,1]$ με σύνολο τιμών $f(A_1)=[f(1),f(0)]=\left[\sqrt{5},e^2\right]$ και η $f\uparrow$ στο $[1,+\infty)$ με σύνολο τιμών $f(A_2)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left[\sqrt{5},+\infty\right)$, επειδή $100\notin f(A_1)$ και $100\in f(A_2)$ αφού $f\uparrow$ στο $[1,+\infty)$ υπάρχει μοναδικός μιγαδικός $z(x)$ όπου $|z(x)|=100$.

δ) **i.** $g(x)=|z(x)|^2-5=4x+e^{4-4x}-5$, $x\ge 1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$ με $g'(x)=4-4e^{4-4x}$ και $g'(x)\ge 0 \Leftrightarrow 4-4e^{4-4x}\ge 0 \Leftrightarrow e^{4-4x}\le e^0 \Leftrightarrow x\ge 1$ άρα $g'(x)\ge 0$ όταν $x\in[1,+\infty)$, άρα η g είναι $\uparrow$ στο $[1,+\infty)$ οπότε θα είναι και 1–1 άρα η g αντιστρέφεται.

ii. Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E(\Omega)=\int_0^{e^{-4}+3}\left|g^{-1}(x)\right|dx$

Θέτουμε $g^{-1}(x)=u \Leftrightarrow x=g(u)$ και $dx=g'(u)du$.

Για $x=0$ είναι $g(u)=0=g(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}u=1$ και

για $x=e^{-4}+3$ είναι $g(u)=e^{-4}+3=g(2)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}u=2$. Είναι

$$E(\Omega)=\int_1^2|u|g'(u)du=\int_1^2 ug'(u)du=\left[ug(u)\right]_1^2-\int_1^2 g(u)du=2g(2)-\int_1^2\left(4u+e^{4-4u}-5\right)du \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=6+2e^{-4}-2\left[u^2\right]_1^2+\frac{1}{4}\left[e^{4-4u}\right]_1^2+5=\cancel{6}+2e^{-4}-\cancel{6}+\frac{1}{4}\left(e^{-4}-1\right)+5=\frac{9}{4}e^{-4}+\frac{19}{4}\text{ τ.μ.}$$

75. **α)** Είναι $z_x = e^x + (1+xe^x)i$. Πρέπει να δείξουμε ότι:

$\mathrm{Re}(z) \le \mathrm{Im}(z) \Leftrightarrow e^x \le 1+xe^x \Leftrightarrow e^x - 1 - xe^x \le 0$

Εστω $g(x) = e^x - 1 - xe^x$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$

Οπότε το πρόσημο της g' και η μονοτονία της g φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$+$		$-$
g	$\nearrow$		$\searrow$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$g(x) \le g(0) \Leftrightarrow e^x - 1 - xe^x \le 0 \Leftrightarrow e^x \le 1+xe^x$

β) Πρέπει $e^x = 1+xe^x \Leftrightarrow e^x - 1 - xe^x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$

και από το προηγούμενο ερώτημα αυτό συμβαίνει μόνο όταν $x = 0$

γ) Είναι $|z-\bar{z}| = |2\mathrm{Im}(z)i| = |2(1+xe^x)i| = 2|1+xe^x|$.

Όπως δείξαμε στο (α) ερώτημα $1+xe^x \ge e^x > 0$ άρα $|z-\bar{z}| = 2(1+xe^x)$

Εστω $h(x) = 2(1+xe^x)$, $h'(x) = 2(e^x + xe^x) = 2(1+x)e^x$

και $h'(x) > 0 \Leftrightarrow 1+x > 0 \Leftrightarrow x > -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
h'	$-$	0	$+$
h	$\searrow$		$\nearrow$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h(x) \ge h(-1)$

και $h(x) \ge 2\left(1 - \frac{1}{e}\right) > 0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[2(1+xe^x)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[2 + 2\frac{x}{e^{-x}}\right] = 2$, γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = 0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[2(1+xe^x)\right] = +\infty$

Η f είναι $\downarrow$ στο $(-\infty,-1]$ με σύνολο τιμών $f(A_1) = \left[f(-1), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) = \left[2 - \frac{2}{e}, 2\right)$

και η $f \uparrow$ στο $[1,+\infty)$ με σύνολο τιμών $f(A_2) = \left[f(-1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = \left[2 - \frac{2}{e}, +\infty\right)$

Άρα $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left[2 - \frac{2}{e}, +\infty\right)$.

δ) Είναι $f(x) = \mathrm{Re}(z) = e^x$ και $g(x) = \mathrm{Im}(z) = 1+xe^x$, αφού $\mathrm{Im}(z) \ge \mathrm{Re}(z)$ τότε $g(x) \ge f(x)$

και $g(0) = f(0) = 1$. Οπότε $E(\Omega) = \int_0^1 (g(x) - f(x))dx = \int_0^1 (1+xe^x - e^x)dx =$

$$= 1 + \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx - \left[e^x\right]_0^1 = 1 + e - 2(e-1) = 3 - e$$

76. **α)** $|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2 = 1 \quad (1)$.

Είναι $f(x) = |x+\alpha+\beta i| - |x-\alpha-\beta i| = \sqrt{(x+\alpha)^2+\beta^2} - \sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} - \sqrt{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} \overset{(1)}{=} \sqrt{x^2+2\alpha x+1} - \sqrt{x^2-2\alpha x+1}$.

Επειδή οι συναρτήσεις $x^2+2\alpha x+1$, $x^2-2\alpha x+1$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ τότε και οι συναρτήσεις $\sqrt{x^2+2\alpha x+1}$, $\sqrt{x^2-2\alpha x+1}$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=\frac{2x+2\alpha}{2\sqrt{x^2+2\alpha x+1}}-\frac{2x-2\alpha}{2\sqrt{x^2-2\alpha x+1}}=\frac{x+\alpha}{\sqrt{x^2+2\alpha x+1}}-\frac{x-\alpha}{\sqrt{x^2-2\alpha x+1}}$.

β) Εστω ότι ο z είναι πραγματικός. Τότε $\beta=0$ και $z=\alpha$.

Τότε $f(x)=|x+\alpha|-|x-\alpha|=\begin{cases}-x-\alpha+x-\alpha=-2\alpha,\ x<-\alpha\\ x+\alpha+x-\alpha=2x,\ -\alpha\le x\le\alpha\\ x+\alpha-x+\alpha=2\alpha,\ x>\alpha\end{cases}$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη και στο $x=\alpha$.

Δηλαδή $\lim\limits_{x\to\alpha^-}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\alpha^-}\frac{2x-2\alpha}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha^+}\frac{2\alpha-2\alpha}{x-\alpha}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\alpha^-}\frac{2\cancel{(x-\alpha)}}{\cancel{x-\alpha}}=0\Leftrightarrow 2=0$ που είναι άτοπο. Άρα ο z δεν είναι πραγματικός.

γ) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-\alpha,f(-\alpha))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45°, τότε $f'(-\alpha)=1\Leftrightarrow$

$\frac{-\alpha+\alpha}{\sqrt{(-\alpha)^2+2\alpha(-\alpha)+1}}-\frac{-\alpha-\alpha}{\sqrt{(-\alpha)^2-2\alpha(-\alpha)+1}}=1\Leftrightarrow 2\alpha=\sqrt{\alpha^2+2\alpha+1}\Leftrightarrow$

$4\alpha^2=\alpha^2+2\alpha+1\Leftrightarrow 3\alpha^2-2\alpha-1=0\Leftrightarrow\alpha=1$ ή $\alpha=-\frac{1}{3}$ που απορρίπτεται αφού $\alpha>0$.

δ) $\int_0^x f(t)dt=\int_0^{-x}f(t)dt\Leftrightarrow\int_0^x f(t)dt-\int_0^{-x}f(t)dt=0$. Εστω $g(x)=\int_0^x f(t)dt-\int_0^{-x}f(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής και επειδή η $-x$ είναι παραγωγίσιμη, οι συναρτήσεις $\int_0^x f(t)dt$, $\int_0^{-x}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ οπότε και η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=f(x)+f(-x)=|x+z|-|x-z|+|-x+z|-|-x-z|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g'(x)=|x+z|-|x-z|+|-(x-z)|-|-(x+z)|=\cancel{|x+z|}-\cancel{|x-z|}+\cancel{|x-z|}-\cancel{|x+z|}=0$.

Άρα $g(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$. Όμως $g(0)=0$, άρα $c=0$ και

$g(x)=0\Leftrightarrow\int_0^x f(t)dt-\int_0^{-x}f(t)dt=0\Leftrightarrow\int_0^x f(t)dt=\int_0^{-x}f(t)dt$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

77. **α)** Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β).
Επειδή $f(\alpha)=f(\beta)=0$, λόγω του θεωρήματος Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

β) Επειδή $f''(x)>0$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x<\xi$ είναι $f'(x)<f'(\xi)=0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\xi]$, ενώ για κάθε $x>\xi$ είναι $f'(x)>f'(\xi)=0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\xi,+\infty)$.

Για κάθε $\alpha\le x\le\xi$ είναι $f(\alpha)\ge f(x)\ge f(\xi)\Leftrightarrow 0\ge f(x)\ge f(\xi)$,

δηλαδή $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\xi]$ και

για κάθε $\xi\le x\le\beta$ είναι $f(\xi)\le f(x)\le f(\beta)\Leftrightarrow f(\xi)\le f(x)\le 0$.

Δηλαδή $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\xi,\beta]$. Άρα $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

γ) $zw=\left[f(x)+if'(x)\right]\left[f'(x)+if''(x)\right]=f(x)f'(x)-f'(x)f''(x)+i\left[f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2\right]\Leftrightarrow$

$zw\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \mathrm{Im}(zw)=0\Leftrightarrow f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0$.

Δηλαδή, αρκεί η εξίσωση $f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0$ να έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β).

Εστω $g(x)=f'(x)f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$. Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $g'(x)=f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2$. Επειδή $g(\alpha)=f'(\alpha)f(\alpha)=0$, $g(\beta)=f'(\beta)f(\beta)=0$ δηλαδή $g(\alpha)=g(\beta)$, λόγω του θεωρήματος Rolle η εξίσωση $g'(x)=0\Leftrightarrow f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β).

δ) Επειδή η διχοτόμος του 1ου τεταρτημορίου είναι η ευθεία $y=x$, αν η εικόνα του w βρίσκονταν σε αυτή την ευθεία, τότε θα έπρεπε να υπήρχαν τιμές του x για τις οποίες $\mathrm{Re}(w)=\mathrm{Im}(w)\Leftrightarrow f'(x)=f''(x)\Leftrightarrow f''(x)-f'(x)=0\Leftrightarrow e^{-x}f''(x)-e^{-x}f'(x)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(e^{-x}f'(x)\right)'=0\Leftrightarrow e^{-x}f'(x)=c,\ c\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f'(x)=ce^{x}\Leftrightarrow f(x)=ce^{x}+c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$.

Επειδή $f(\alpha)=f(\beta)=0$, είναι: $ce^{\alpha}+c_1=0$ και $ce^{\beta}+c_1=0$ και με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει: $c\left(e^{\alpha}-e^{\beta}\right)=0\Leftrightarrow c=0$ και $c_1=0$, άρα $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ που είναι άτοπο αφού η f είναι μη σταθερή συνάρτηση.

78. **α)** Είναι $|\bar{w}+z|<|w-\bar{z}|\Leftrightarrow|\bar{w}+z|^2<|w-\bar{z}|^2\Leftrightarrow(\bar{w}+z)(w+\bar{z})<(w-\bar{z})(\bar{w}-z)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w\bar{w}+\bar{z}\bar{w}+zw+z\bar{z}<w\bar{w}-zw-\bar{z}\bar{w}+z\bar{z}\Leftrightarrow 2(zw+\bar{z}\bar{w})<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cdot 2\mathrm{Re}(zw)<0\Leftrightarrow \mathrm{Re}(zw)<0$

Είναι $zw=\left(\alpha^2+if(\alpha)\right)\left(\beta^2-if(\beta)\right)=\alpha^2\beta^2-\alpha^2f(\beta)i+\beta^2f(\alpha)i+f(\alpha)f(\beta)=$

$=\left(\alpha^2\beta^2+f(\alpha)f(\beta)\right)+i\left(\beta^2f(\alpha)-\alpha^2f(\beta)\right)$

Οπότε $\mathrm{Re}(zw)<0\Leftrightarrow\alpha^2\beta^2+f(\alpha)f(\beta)<0\Leftrightarrow f(\alpha)f(\beta)<-\alpha^2\beta^2<0$. Αφού η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$.

β) Είναι $f(\alpha)<f(\gamma)<f(\beta)$ οπότε από Θ.Ε.Τ. υπάρχει $\xi_1\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi_1)=f(\gamma)$.

γ) Αφού η f είναι συνεχής τότε και η συνάρτηση $e^{t^2+f(t)}$ θα είναι συνεχής οπότε η συνάρτηση $f(x)=\int_{\alpha}^{x}e^{t^2+f(t)}dt$ θα είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^{x^2+f(x)}>0$ οπότε η f είναι $\uparrow$ στο $[\alpha,\beta]$.

79. **α)** Είναι $|z-w|=|f(x)+i-x+3i|=|f(x)-x+4i|=\sqrt{\left(f(x)-x\right)^2+16}$.

Εστω $g(x)=\sqrt{\left(f(x)-x\right)^2+16}$, $x\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$g'(x)=\dfrac{2\left(f(x)-x\right)\left(f'(x)-1\right)}{2\sqrt{\left(f(x)-x\right)^2+16}}$ και παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$, οπότε από Θ. Fermat

είναι $g'(1)=0\Leftrightarrow\dfrac{\cancel{2}\left(f(1)-1\right)\left(f'(1)-1\right)}{\cancel{2}\sqrt{\left(f(1)-1\right)^2+16}}=0\Leftrightarrow\dfrac{f'(1)-1}{\sqrt{17}}=0\Leftrightarrow f'(1)=1$

β) Είναι $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-2=x-1\Leftrightarrow y=x+1$.

γ) Είναι $\int_1^x 3(f'(t)-1)\left(|z-w|^2-16\right)dt=0$ για $x\geq 1$

οπότε $\int_1^x 3(f'(t)-1)(f(t)-t)^2\,dt=0\Leftrightarrow\left[(f(t)-t)^3\right]_1^x=0$

$(f(x)-x)^3-(f(1)-1)=0\Leftrightarrow(f(x)-x)^3=1\Leftrightarrow f(x)-x=1\Leftrightarrow f(x)=x+1,\ x\geq 1$.

δ) i. Είναι $f(0)=f(1)=2$ και αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ τότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

Αν $0<x<\xi$ αφού $f'\uparrow$ τότε $f'(x)<f'(\xi)\Leftrightarrow f'(x)<0$ άρα η $f\downarrow$ στο $[0,\xi]$

Αν $\xi<x<1$ τότε $f'(x)>f'(\xi)\Leftrightarrow f'(x)>0$ άρα $f\uparrow$ στο $[\xi,1]$ οπότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=\xi\in(0,1)$.

ii. Αφού η f είναι κυρτή στο $[0,1]$ τότε σε κάθε σημείο η C_f είναι πάνω από την εφαπτομένη της καμπύλης εκτός από το σημείο επαφής. Αφού $y=x+1$ είναι η εφαπτομένη στο $x_0=1$ τότε $f(x)\geq x+1$.

iii. Αφού $f(x)\geq x+1\Leftrightarrow f(x)-(x+1)\geq 0$ οπότε

$$\int_0^1[f(x)-(x+1)]dx\geq 0\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx\geq\int_0^1(x+1)dx\Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f(x)dx\geq\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+[x]_0^1\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx\geq\frac{3}{2}.$$

80. **α)** Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,x]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{f(x)}{x}$. Επειδή $0<\xi<x$ και $f'\uparrow$ τότε $f'(0)<f'(\xi)<f'(x)$, δηλαδή $\dfrac{f(x)}{x}<f'(x)\Leftrightarrow f(x)<xf'(x)\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)>0$.

β) Για $x>0$ είναι $f'(x)>f'(0)\Leftrightarrow f'(x)>0$, οπότε η $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$.

γ) i. Αφού η $f\uparrow$ τότε $f(|z+i|)\geq f(|z|+1)\Leftrightarrow|z+i|\geq|z|+1$

οπότε $|z+i|^2\geq(|z|+1)^2\Leftrightarrow(z+i)(\bar{z}-i)\geq|z|^2+2|z|+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cancel{z\bar{z}}-iz+i\bar{z}+\cancel{1}\geq\cancel{z\bar{z}}+2|z|+\cancel{1}\Leftrightarrow-i(z-\bar{z})\geq 2|z|\Leftrightarrow-i2yi\geq 2\sqrt{x^2+y^2}\Leftrightarrow y\geq\sqrt{x^2+y^2}$,

οπότε $y\geq 0$ και $y^2=x^2+y^2\Leftrightarrow x^2\leq 0$, άρα $x=0$. Οπότε ο γ.τ. των εικόνων του z είναι θετικός ημιάξονας Oy αφού $y\geq 0$.

ii. Η σχέση $5f(|z-3|)=|z-3|f(5)$ γίνεται: $\dfrac{f(|z-3|)}{|z-3|}=\dfrac{f(5)}{5}$ (1).

Θεωρούμε την $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}>0$ από το (α) ερώτημα, οπότε η g είναι $\uparrow$ άρα και $1-1$.

Η σχέση (1) γίνεται $g(|z-3|)=g(5)$ άρα $|z-3|=5$, οπότε ο ζητούμενος z είναι το σημείο που ο κύκλος $(x-3)^2+y^2=25$ τέμνει τον Oy. Δηλαδή

$$\left.\begin{array}{r}(x-3)^2+y^2=25\\ x=0\end{array}\right\}\ 9+y^2=25 \Leftrightarrow y^2=16\text{, άρα } y=4 \text{ ή } y=-4 \text{ απορρίπτεται.}$$

Άρα ο ζητούμενος μιγαδικός είναι $z=4i$.