

## Μιγαδικοί

1.154.  $3 \leq |z| \leq 7$

1.264. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών  $z$  για τους οποίους ισχύει:

α)  $|2z+1|=|z-i|$       β)  $|4-2i-2z|=4$

1.326. Να βρείτε τη γραμμή στην οποία κινείται η εικόνα του μιγαδικού  $z$  για τον οποίο ισχύει :

$$(6+8i)^{2|z|+1} - (1+i)^{12} = 990 \cdot 10^{|z|} + 1064 .$$

1.377. α)  $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}^{2004} + \begin{pmatrix} z_2 \\ z_1 \end{pmatrix}^{2007} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}^{2010} = 1.$

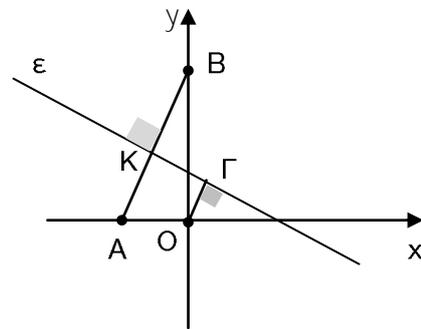
1.399. γ)  $z_1^{30} + z_2^{30} = 2$

1.401. β) Ισχύει  $OG \perp \varepsilon$ , οπότε  $OG : y = 2x$ .

Ο μιγαδικός  $z$  που έχει ελάχιστο μέτρο έχει εικόνα του το  $\Gamma$  και βρίσκεται από τη λύση του συστήματος των  $OG$  και  $\varepsilon$ .

$$\begin{cases} OG : y = 2x \\ \varepsilon : x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases}, \text{ άρα } o$$

ζητούμενος μιγαδικός είναι ο  $z_1 = \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$ .



1.473. β) Αν  $z_1, z_2$  δύο από τους προηγούμενους μιγαδικούς με  $z_1 = -z_2$

## Συναρτήσεις

2.105. Να βρείτε συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει  $f(x+y) = 2f(x) + f(y)$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Λύση

Για  $x = y = 0$ , έχουμε:  $f(0) = 2f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$ .

Για  $y = 0$  είναι  $f(x) = 2f(x) + f(0) \Leftrightarrow f(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow -f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ .

2.148. Δίνεται συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $f(x+y) = 2f(x) + f(y) + 2x$

2.190. γ)  $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

2.202. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γνησίως φθίνουσα συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  για την οποία να ισχύει ότι:  $\ln f(x) = x^2 - 4x + 1$  για κάθε  $x \in (2, +\infty)$ .

2.205. β)  $f(1) = -1$

2.297. γ)  $\sin x - \eta \mu x = e^{\eta \mu x} - e^{\sigma \upsilon \nu x}$

2.309. Δίνεται συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:  $(f \circ f)(x) = 4x - 15$

και  $(f \circ f \circ f)(x) = 8x - 35$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

### Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

Κ. Η συνάρτηση  $f(x) = 2e^{-x}$  έχει αντίστροφη την

β)  $g(x) = \ln(2x)$

### Όρια

3.97. Εστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει ότι  $f^2(x) - 4f(x) \leq x^2 - 4$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ .

3.121. β)  $\lim_{x \rightarrow -1} \left[ (x+1)\eta\mu \frac{2}{x^2-1} + x^{200} - 1 \right]$ .

3.148. δ) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 1}{x - 1 - e^{f(x)}}$ , αν είναι γνωστό ότι  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ .

3.183.  $\lim_{x \rightarrow 1} [-2xf(x) - 3g(x)] = +\infty$

3.195. Να βρείτε τα  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  για τα οποία ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow \kappa} \frac{x^2 - 4\lambda x + 4\lambda^2}{x^2 - \kappa^2} = 2\kappa + 4$ .

3.209. Εστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει ότι:  $8f(x+y) = f(2x) + f(2y) + 24xy(x+y)$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ .

3.256. Για τις διάφορες τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x \left( \mu + \frac{x}{x^2 - 1} \right)$

3.299. δ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+2} - 2^{x+1} + 3}{e^x + 2^{x+2}}$  ε)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{2x+1} - 2^x - 1}{3 \cdot 4^x - 2^{x+2} + 1}$

3.292. στ)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + \sigma \nu^2 x - 2\eta \mu x}{4x + \eta \mu x}$

3.356. δ)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + \eta \mu x} - 1}{x}, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0, x_0 = 0 \\ \frac{\eta \mu x}{2x}, & x > 0 \end{cases}$  3.370.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 8}{\sqrt{2x + 5} - 3}, & -\frac{5}{2} \leq x < 2 \\ \alpha x^2 + (\beta - 1)x, & x \geq 2 \end{cases}$

3.391. Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , συνεχής στο  $x_0 = 6$

3.394. Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , συνεχής στο  $x_0 = 0$

3.469. δ)  $x^6 + 8x^4 + \lambda^2 x^2 + \lambda x = 8$

3.545.  $f^2(x) + xf(x) = 4$  για κάθε  $x \geq 0$  και  $f(3) = -4$ .

3.596. υπάρχει  $\xi \in [\alpha, \beta]$ , τέτοιο ώστε:  $f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$

3.597.  $\xi \in [0,1]$  τέτοιο, ώστε:  $4f(\xi) = f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)$ .

3.599. υπάρχει  $\xi \in [a,\beta]$  τέτοιο, ώστε :  $f(\xi) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n)}$ .

3.609.  $f(0) = -\sqrt{6}$

## Παράγωγοι

4.66.  $2f^3(x) - 2\eta\mu x \cdot f^2(x) + x^2 f(x) = 2x^3 - x\eta\mu^2 x$

4.67. Δίνονται συναρτήσεις  $f, g$ , παραγωγίσιμες στο  $x_0 = 0$  για τις οποίες ισχύει ότι:

$$(f(x)-2)^2 + (g(x)+3)^2 = \left| \sqrt{x^2+9} - 3 \right| \text{ για κάθε } x > -4.$$

4.223.  $e^{-y} [f'(x) + f(x)] = e^{-x} [f'(y) + f(y)]$

4.225. Δίνεται **δύο φορές παραγωγίσιμη** συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

4.275.  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

4.322. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για τις οποίες ισχύει  $f(x) - g(x) = x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των  $C_f, C_g$  **στα σημεία με την ίδια τετμημένη**, τέμνονται στον άξονα  $y'y$ .

4.334. Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f(x-2) \leq x^2 - 3x + 2 \leq f(x-3) + 2x - 4$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Έστω μεταβλητή ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο  $M\left(0, -\frac{1}{2}\right)$  και τέμνει τη  $C_f$  σε δύο

διαφορετικά σημεία A και B.

4.335.  $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^*$

4.347. Το κόστος κατασκευής  $x$  τεμαχίων ενός προϊόντος, είναι  $7x^2 + 27x + 8$  χιλιάδες ευρώ, ενώ τα έσοδα από την πώληση των  $x$  τεμαχίων είναι,  $x^3 - 2x^2 + 3x + 4$  χιλιάδες ευρώ. Να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό τεμαχίων που πρέπει να κατασκευαστούν, **ώστε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους να είναι θετικός.**

4.374.  $x(t) = e^{t^2}$

4.378. Πεζοπόρος A βρίσκεται σε απόσταση 4 Km ανατολικά από ένα σταυροδρόμι O και βαδίζει προς αυτό με ταχύτητα 8 Km/h.

4.382. γ) Το εμβαδό του τριγώνου OAB τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της

τετμημένης του  $M$  είναι διπλάσιος από την απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του.

## Επανάληψη

20. γ) Αν  $g(1) = 4030$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (1, +\infty)$  τέτοιο, ώστε  $h(x_0) = \ln 2$ .

37.  $f(x) = \sqrt{4x - |z|} - |z|$

## Θέματα πανελλαδικών

25. γ) Να αποδείξετε ότι:  $|z^3 - z^2|^2 = |z^2 + \bar{z}|^2 + |z^3 + \bar{z}|^2$ .

30.  $w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$