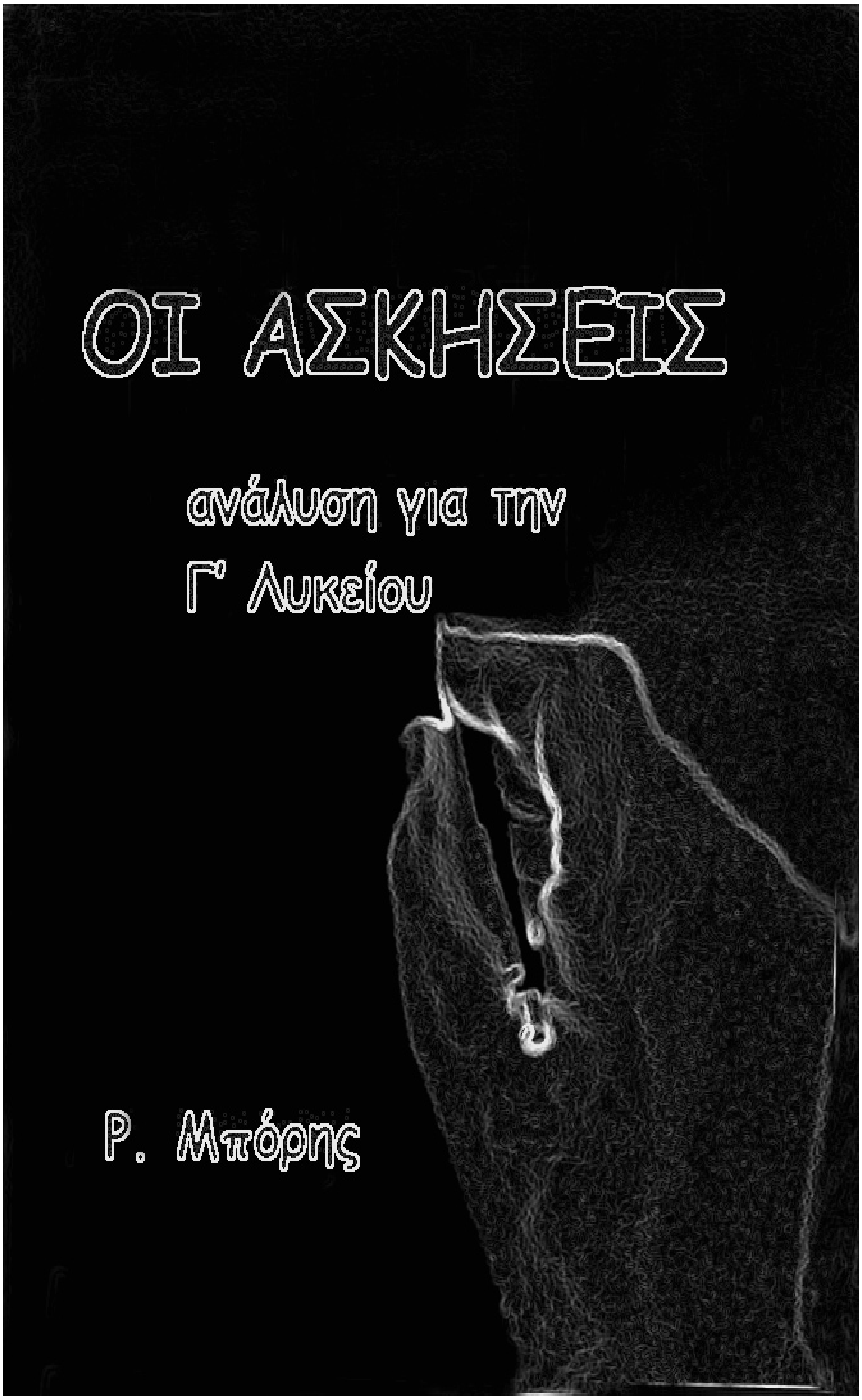

ΟΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ανάλυση για την
Γ' Λυκείου
Ρ. Μπόρης

ΟΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ –ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΠΟΡΗΣ ΡΟΔΟΛΦΟΣ
ΤΗΛ 2109712610

ΕΚΔΟΣΕΙΣ

ΕΞΩΦΥΛΛΟ ΤΙΝΑ ΘΕΡΜΟΥ

ΣΤΟΥΣ
ΑΝΘΡΩΠΟΥΣ ΤΟΥ
MATHEMATICA . GR

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στην παρακάτω συλλογή υπάρχουν ασκήσεις που αφορούν την ανάλυση στο επίπεδο της Γ Λυκείου. Είναι ταξινομημένες κατά κεφάλαιο, περίπου με την σειρά που διδάσκονται στο Λύκειο.

Το επίπεδο μερικών ασκήσεων είναι αρκετά υψηλό ιδίως των Γ,Δ ομάδων και υπερβαίνει τα θέματα των εξετάσεων στα ΑΕΙ, αλλά έτσι εξασφαλίζεται μια σχετική πληρότητα της συλλογής , όχι τόσο ως προς τον όγκο της , αλλά ως προς το περιεχόμενο των θεμάτων που φυσικά αφορούν κατά κύριο λόγο αυτές τις εξετάσεις και που οι ομάδες Α, Β και μερικώς η Γ κρίνονται επαρκείς.

Ένας δεύτερος και ίσως πιο ουσιαστικός λόγος είναι να καταδειχθεί σε πρώτο επίπεδο η ομορφιά που κρύβεται εκεί μέσα. Όχι όμως σαν ένα στείρο αντικείμενο ανταγωνισμού, αλλά έχοντας σαν σκοπό την περαιτέρω ενασχόληση με αυτό που ονομάζεται Μαθηματικά , τον πλούτο της φαντασίας και τελικά μια αναβάθμιση της καθημερινότητάς μας (κάτι που σε μερικούς μπορεί και να φαντάζει σαν λογοτεχνία και ποίηση). Σκεφθείτε ότι **τα Μαθηματικά δεν είναι ασκήσεις** , απλώς οι ασκήσεις είναι ένα μέσον για να προσεγγίσουμε το κάτι παραπάνω. Πιθανώς να προσφέρουν και μια αισθητική απόλαυση σ’ αυτό. (Είναι θαυμάσια μια **κομψή λύση**, αλλά πιο όμορφο είναι ένα **βαθύ θεώρημα**) . Η πρωτοτυπία μπορεί να βοηθήσει για να πραγματοποιηθεί αυτός ο σκοπός . Έτσι υπάρχουν και θέματα διεθνών διαγωνισμών που διακρίνονται ακριβώς σε αυτόν τον τομέα ιδίως στις ομάδες Γ, Δ.

Στο τέλος υπάρχει μια σειρά θεμάτων που δίνουν την αναγκαία σφαιρική ματιά στην ανάλυση του Λυκείου . Επίσης υπάρχουν ασκήσεις που ενώνουν διαφορετικά κομμάτια της ύλης ώστε να μην κατακερματίζεται αυτό που ονομάζουμε μαθηματική σκέψη .

Σύμφωνα με τα παραπάνω η συλλογή μπορεί να χρησιμεύσει κυρίως σε μαθητές (ταξινόμηση, πληρότητα, βοηθητικά ερωτήματα) για τις εξετάσεις τους, αλλά και σε συναδέλφους σαν εργαλείο στην δουλειά τους η ακόμη και σαν ευχάριστη ενασχόληση.

Για την συλλογή χρησιμοποιηθήκαν κατά κύριο λόγο: **το θαυμάσιο forum "mathematica.gr"** και τα παρακάτω βιβλία

- Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης . Χ.Αχτσαλωτίδη
- Θέματα Μαθηματικών . G Alignac
- A problem book in mathematical analysis . G N Berman
- Μαθηματική ανάλυση .. L Brand
- Εισαγωγή στην πραγματική ανάλυση . Ε Γαλανή
- Exercise d Analyse . B Calvo
- Συλλογή ασκήσεων . S Denidovich
- Περιοδικό Ευκλείδης . ΕΜΕ
- Βαλκανικές Μαθηματικές ολυμπιάδες . ΕΜΕ
- Περιοδικο . Quantum
- 1000 ασκήσεις ολοκληρωμάτων . Θ Ν Καζαντζή
- Μαθηματικές ολυμπιάδες των ΗΠΑ . M Klamkin
- Ολοκληρωτικός λογισμός . Μ Καραμαύρου
- L epreuve de mathematiques au baccalaureat . P Louquet Terminal D . Lycee 83
- Πραγματική ανάλυση Ι . Ζ Μαργέτη Γ Γιατύλη
- Παγκόσμια θεματογραφία ολυμπιάδων μαθηματικής ανάλυσης . Γ.Μπαϊλάκη
- Αλγεβρα Β Λυκείου . Γ.Μπαϊλάκη

- Απειροστικός λογισμός . Σ Νεγρεπόντη-Γιωτόπουλου-Γιαννακούλια
- Μαθηματική ανάλυση . Γ Παντελίδη
- Διαφορικός και Ολοκληρωτικός λογισμός . M Spivac
- Ανισότητες . Π Ε Τσαούσογλου
- Διεθνείς Μαθηματικές ολυμπιάδες . Α.Φελλούρη … (ΕΜΕ)
- Πανενωσιακές Μαθηματικές ολυμπιάδες της ΕΣΣΔ . N.Vasilief A Gegorof

Επίσης χρησιμοποίησα προσωπικές επινοήσεις καθώς και πολυάριθμες ασκήσεις που έφερναν οι μαθητές μου σαν απορίες από τα σχολεία η φροντιστήρια τους και δυστυχώς μου είναι αγνώστου προελεύσεως

Θέλω να ευχαριστήσω όλους όσους βοήθησαν με οποιοδήποτε τρόπο στην παρουσίαση αυτής της συλλογής . Δασκάλους μου , Συνεργάτες , Φίλους και Μαθητές μου που συνεχώς με μάθαιναν κάτι με τις παρατηρήσεις τους , τις ερωτήσεις τους , την συμμετοχή τους στο γράψιμο (και όχι μόνο) , την ενθάρρυνση και τελικά την υπομονή τους . Ιδιαίτερα ευχαριστώ τους συναδέλφους Δ.Λύκκα , Μ.Τριπολιτσιώτη , Κ.Τεμπέλη , Χ Οικονόμου για τις πολύτιμες συμβουλές τους και τις Ε.Μηνά , Χ.Κατσούλη και Ε.Ανδρικοπούλου που μετέφρασαν τα χειρόγραφα μου και έγινε κατορθωτή η παρουσίαση αυτής της συλλογής.

Αθήνα
Φλεβάρης 2010
Ροδόλφος . Μπόρης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Γ. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Δ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Α. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1 ΣΥΝΟΛΑ ΟΡΙΣΜΟΥ

Α ΟΜΑΔΑ

Να βρείτε τα σύνολα ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων f με τύπους

(Θα ασχοληθείτε περισσότερο με την ύλη της Β Λυκείου παρά με καινούργια πράγματα)

1Α1. $f(x)=\dfrac{1}{2x^3-7x^2+7x-2}$

1Α2. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-3x}{x^2+5x}}$

1Α3. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-3x}}{\sqrt{x^2+5x}}$

1Α4. $f(x)=\dfrac{2x}{|x-1|-2}$

1Α5. $f(x)=\dfrac{3}{x^2-16}$

1Α6. $f(x)=\sqrt{x^2+|x|}$

1Α7. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{|x-3|-5}$

1Α8. $f(x)=\sqrt{x^4(x+3)}$

1Α9. $f(x)=\sqrt{x^4(x-3)}$

1Α10. $f(x)=\dfrac{x-4}{|2x-3|-|x|}$

1Α11. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

1Α12. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$

1Α13. $f(x)=\sqrt{x^5-x^4}$

1Α14. $f(x)=\sqrt{-\eta\mu^2\pi x}$

1Α15. $f(x)=ln(ln(x))$

Β ΟΜΑΔΑ

Να βρείτε τα σύνολα ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων f με τύπους

1Β1. $f(x)=x^x$

1Β2. $f(x)=(ln\,x)^{\frac{1}{x}}$

1Β3 Να βρείτε τα m ώστε σύνολο ορισμού της

$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{mx^2-2mx+3}}$ να είναι το R

2 ΣΥΝΟΛΑ ΤΙΜΩΝ

Α ΟΜΑΔΑ

Να βρείτε τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων f όπου και να χαρακτηρίσετε ποιες έχουν μέγιστη και ποιες ελάχιστη τιμή.

2Α1. $f(x)=\sqrt{3-x^2}$

2Α2. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

2Α3. $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$

2Α4. $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$

2A5. $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{x^2+1}$

2A6. $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,1\le x<2 \\ 2+x & ,2\le x<4 \end{cases}$

2A7. $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x}{x+1}}$ **,** $0\le x\le 3$

2A8. $f(x)=\dfrac{x}{1+x+x^2}$

2A9. $f(x)=1+\sqrt{x-3}$

2A10. $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$

2A11. $f(x)=\dfrac{|x-2|}{1-|x-3|}$

2A12. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ **,** $2\le x\le 5$

2A13. $f(x)=2x^2+x-3$ **,** $1\le x\le 9$

2A14. $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\ge 0 \\ x-1 & ,x<0 \end{cases}$

<u>Β ΟΜΑΔΑ</u>

Βρείτε τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων f καθώς επίσης να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις έχουν μέγιστη – ελάχιστη τιμή.

(Θα αντιμετωπίσετε τώρα λίγο πιο δύσκολες πράξεις.)

2B1. $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^3-3x+2}$

2B2. $f(x)=\sqrt{4-\sqrt{x-3}}$

2B3. $f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

2B4. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$

2B5. $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+\kappa}$, $\kappa>1$

2B6. $f(x)=ln\dfrac{2-|x|}{2+|x|}$

2B7. $f(x)=\dfrac{4e^{|x|}-1}{e^{|x|}+1}$

2B8. $f(x)=(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x$

2B9. Βρείτε το $\lambda\in R$ ώστε η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\frac{x^2-\lambda x+1}{x^2+x+1}$$

να έχει για σύνολο τιμών το $[-2,2]$.

3 ΙΣΟΤΗΤΑ – ΣΥΝΘΕΣΗ

Α ΟΜΑΔΑ

Να εξεταστεί αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες

(Τα φαινόμενα απατούν)

3A1. $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}, g(x)=|x|-1$

3A2. $f(x)=ln(\dfrac{1}{x^2}), g(x)=-2ln(x)$

3A3 $f(x)=(1+\sqrt{2})^x-(\sqrt{2}-1)^{-x}, g(x)=0$

Να βρείτε την σύνθεση των συναρτήσεων gof και fog όπου:

3A4. $f(x)=|x|$, $g(x)=-3x+6$

3A5. $f(x)=x^2-2$, $g(x)=|x|$

3A6. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$,$g(x)=\sqrt{1-x^2}$

Να εκφράσετε την *f* ως σύνθεση δύο ή και περισσοτέρων συναρτήσεων όταν:

3Α7. $f(x)=\eta\mu(x^2)$

3Α8. $f(x)=\sqrt{\eta\mu^2 x+1}$

3Α9. $f(x)=g(x\cdot g^2(2-x))$

3Α10. Έστω $f{:}R\to R : f(x)=\alpha x+\beta$ και $g(x){:}R\to R : g(x)=\gamma x+\delta$.

Βρείτε την σχέση μεταξύ των α, β, γ, δ ώστε $fog=gof$.

3Α11. Έστω $f : f(x)=2x^2+x+1$. Προσδιορίστε δύο συναρτήσεις g: $g(x)=x+\beta$ και $\varphi : \varphi(x)=\gamma x^2+8$ ώστε $f=\varphi og$.

<u>Β ΟΜΑΔΑ</u>

3Β1. Αν $f : R\to R, g : R\to R$ και

$\forall x,y : x\neq y \Rightarrow f(x)-g(x)+f(y)-g(y)=0$ να δείξετε ότι f=g

3Β2. Αν $f : R\to R, g : R\to R$ και

$f(x)>0, g(x)>0, \forall x,y : x\neq y \Rightarrow f(x).f(y)=g(x).g(y)$

να δείξετε ότι f=g

3Β3. Αν $f : R\to R : f(x-y)=f(2x+3y)$ να δείξετε ότι η *f* είναι σταθερή

Να βρείτε τις συνθέσεις *gof* και *fog* των συναρτήσεων *f*, *g* όπου:

3Β4. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$, $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-3}$

3Β5. $f(x)=2\sigma\upsilon\nu 2x$, $g(x)=\sqrt{3-x^2}$

3Β6. $f(x)=\begin{cases} x+1 \;, x\geq 0 \\ 2x-1 \;, x<0 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 2x+3 \;\;, 1\leq x \\ x-2 \;, 0\leq x<1 \\ x+1 \;\;, x<0 \end{cases}$

3Β7. $f(x)=\dfrac{|x|+x}{2}$, $g(x)=\begin{cases} x \;, x<0 \\ x^2 \;, x\geq 0 \end{cases}$

3Β8. Έστω $f: f(x)=|x|$. Αν για την συνάρτηση g ισχύει: $fog=g$ δείξτε ότι το σύνολο τιμών της g είναι υποσύνολο του R^+.

Γ ΟΜΑΔΑ

3Γ1. Έστω f: $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$ ορίζουμε $f_1=f, f_2=f_1 \,o\, f$, κ.ο.κ., $f_{\nu+1}=f_\nu \,o\, f$ για κάθε $\nu\in N^*$. Βρείτε τον τύπο της f_ν συναρτήσει των x και ν.

4 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

Α ΟΜΑΔΑ

Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία στα αντίστοιχα διαστήματα οι παρακάτω συναρτήσεις.

(Χρησιμοποιήστε και τον λόγο μεταβολής)

4Α1. $f: f(x)=x^2+4$ στο R_+

4Α2. $f: f(x)=2x^2-6x$ στο $[-2,1]$

4Α3. f: $f(x)=-\dfrac{2}{x}$ στο R^*

4Α4. f: $f(x)=\dfrac{x^2}{-1-x}$ στο R_+

4Α5. Έστω *f*: $f(x)=x+\frac{4}{x}$. Να μελετηθεί η μονοτονία της *f* σε καθένα από τα διαστήματα $(0,2]$ και $[2,+\infty)$.

(Θυμηθείτε τον λόγο μεταβολής)

4Α6. Έστω $f: [-3,3] \to R$ είναι γνωστό ότι $f \nearrow$ στο $[1,3]$ και επιπλέον $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x \in [-3,3]$. Μελετήστε την μονοτονία της *f* στο $[-3,-1]$.

4Α7. Έστω *f* αύξουσα στο *R* και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x \in R$. Θέτουμε *g*: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x \in R$. Εξετάστε την μονοτονία της *g* όταν:

α) $f(x)>0$ για κάθε $x \in R$.

β) $f(x)<0$ για κάθε $x \in R$.

4Α8. Έστω $f: A \to B$ και $g: B \to \Gamma$.

α) Αν οι *f, g* έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας δείξτε ότι η συνάρτηση *gof* είναι αύξουσα στο *A*

β) Αν οι *f, g* έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας δείξτε ότι η συνάρτηση *gof* είναι φθίνουσα στο *A*

Β ΟΜΑΔΑ

(εδώ το κλίμα είναι λίγο πιο θεωρητικό)

4Β1. Έστω $f: f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$. Αφού δείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x \in R$ μελετήστε την μονοτονία της *f*.

4Β2. Μελετήστε την μονοτονία της *f* όπου

$$f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}.$$

4B3. Αν μια συνάρτηση f είναι γνήσια μονότονη δείξτε ότι έχει το πολύ μια ρίζα.

(Αυτή την άσκηση να την προσέξετε σαν θεωρία)

4B4. Αν τα σημεία : $A(7,5)$ και $B(1,4)$ ανήκουν στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τότε να λυθεί η ανίσωση : $f(3+f(2x-1))<5$ όταν f γνήσια αύξουσα

4B5. Αν η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα και είναι : $g(x)=f(x)-x$ τότε να δείξετε ότι γνήσια φθίνουσα είναι και η g και στην συνέχεια να λύσετε την εξίσωση : $f(x^2+x) - f(x+1)= x^2 - 1$

4B6. Έστω f αύξουσα και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in R$. Θέτουμε g: $g(x)=\dfrac{f(x)}{1+f^2(x)}$. Δείξτε ότι $0\leq g(x)\leq f(x)$. Ακόμη αν $f(x)<1$ δείξτε ότι g αύξουσα ενώ αν $f(x)>1$ δείξτε ότι g φθίνουσα Τέλος αν υπάρχει κάποιο $x_0 : f(x_0)=1$ δείξτε ότι η g παίρνει μια μέγιστη τιμή την οποία να υπολογίσετε.

4B7. Αν $\left(f(x)-x\right)^3+x^2f(x)=3x^3, \forall x\in R$ βρείτε τον τύπο της f στο R

4B8. Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ τότε αν η $\dfrac{f(x)}{x}$ είναι φθίνουσα να δείξετε ότι $f(x+y)\leq f(x)+f(y), \forall x,y>0$ ενώ αν η $\dfrac{f(x)}{x}$ είναι αύξουσα δείξτε ότι $f(3x+4y)\geq 3f(x)+4f(y)$

Να λύσετε τις εξισώσεις

4B9. $x\ln x=e$

4B10. $3^x+4^x=7$

4B11. $a^x+b^x=2(a+b)^x,\ a>0, b>0$

4Β12. $f(x+a)=f(a)+2x$ όπου f φθίνουσα στο R

4Β13. $f(x+f(1))=1-x$ όπου f αύξουσα στο R

5 ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ

Α ΟΜΑΔΑ

5Α1. Έστω $f{:}R\to R$ και $g{:}R\to R$

α) Αν οι f, g και οι δύο άρτιες ή και οι δύο περιττές δείξτε ότι $f\cdot g$ άρτια.

β) Αν η μια είναι άρτια ενώ η άλλη είναι περιττή δείξτε ότι $f\cdot g$ περιττή.

5Α2. Έστω $f{:}R\to R$ περιττή και $g{:}R\to R$. Επιπλέον ορίζεται η gof. Εξετάστε αν είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση. Ομοίως αν f άρτια.

5Α3. Έστω $f{:}R\to R$, $g{:}R\to R$. Ορίζεται η gof και είναι άρτια συνάρτηση. Εξετάστε αν η f είναι άρτια.

5Α4. Έστω f,g συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού. Να εξετάσετε αν η $f+g$ είναι άρτια ή περιττή όταν:

α) f,g άρτιες β) f,g περιττές γ) f άρτια και g περιττή

5Α5. Έστω $f: R\to R$ με $f(x)=-x$.

α) Αν $g{:}R\to R$ και $fog=gof$ τι συμπεραίνετε για την g;

β) Αν $h{:}R\to R$ και $hof=f$ τι συμπεραίνετε για την h;

γ) Τέλος αν $\varphi{:}R\to R$ και $\varphi of=\varphi$ τι συμπεραίνετε για την φ;

5Α6. Έστω f: $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$. Βρείτε τα α, β, γ ώστε η f να είναι άρτια.

5Α7. Έστω f : $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $\alpha\neq 0$. Βρείτε τα α, β, γ, δ ώστε η f να είναι περιττή συνάρτηση.

5Α8. $f: R \to R$ και g: $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$. Δείξτε ότι η *g* είναι άρτια.

5Α9. Έστω *f*: $(-\alpha,\alpha) \to R$ δοσμένη συνάρτηση. Να προσδιοριστούν μία άρτια συνάρτηση *g* και μία περιττή *h* ώστε *g*+*h*=*f*.

Να εξετάσετε παρακάτω συναρτήσεις *f* είναι περιοδικές και να βρείτε την περίοδό τους όταν:

(Οι τριγωνομετρικές είναι από τις πιο βασικές περιοδικές συναρτήσεις. Το ξέρετε και από την φυσική. Θυμηθείτε καλά τις τριγωνομετρικές εξισώσεις)

5Α10. $f(x) = 4\eta\mu 2x$

5Α11. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x$

5Α12. $f(x) = x + \sigma\upsilon\nu x$

<u>Β ΟΜΑΔΑ</u>

5Β1. Να βρεθεί σχέση των $\alpha, \beta \in R$ ώστε η συνάρτηση *f* με τύπο $f(x) = |x+a| + |x+b|$ να είναι άρτια.

5Β2. Αν *f* περιοδική με περίοδο το *2* και $f(x) = /x-1/$ για κάθε *x* στο $[0,2]$, να εξετάσετε αν η *f* είναι άρτια.

5Β3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση *f* με τύπο $f(x)=\eta\mu(x^2)$ δεν είναι περιοδική.

5Β4. Έστω *f,g* περιοδικές στο *Α* με περιόδους τα T_1 και T_2 όπου το πηλίκο των περιόδων τους είναι ρητός αριθμός , της μορφής μ/ν. Δείξτε ότι η $kf(x) + mg(x)$ είναι περιοδική με περίοδο το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των μ και ν επί κάποιον αριθμό α

5Β5. Έστω *f*: $f(x)=\begin{cases} 0 & , x\in Q \\ 1 & , x\in R-Q \end{cases}$ δείξτε ότι η *f* είναι περιοδική, αλλά δεν έχει ελάχιστη θετική περίοδο.

*(Αυτή είναι μια διάσημη συνάρτηση. Ονομάζεται **συνάρτηση Dirichlet** και χρησιμοποιείται σε πολλά αντιπαραδείγματα.)*

5Β6. Έστω $f: R\to R$. Να βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να πληροί η συνάρτηση ώστε η γραφική της παράσταση να έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=2a$. Ακόμη βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να πληροί η συνάρτηση ώστε η γραφική της παράσταση να έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο $(2a,2b)$

6 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1-1 . ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Α ΟΜΑΔΑ

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ένα προς ένα και να βρεθεί τύπος για την f^{-1} όταν:

6Α1. $f(x)=\dfrac{x}{2+x}$

6Α2. $f(x)=3+\sqrt{x-2}$,

6Α3. $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$

6Α4. $f(x)=\begin{cases} 2x+1, x\geq 0 \\ x+1 , x<0 \end{cases}$

6Α5. $f(x)=ln(1+e^x)$

6Α6. $f(x)=ln\dfrac{x}{1-x}$

6Α7. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

6Α8. $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

6Α9. $f(x)=\sqrt{4-\sqrt{x-3}}$

6Α10. $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν αντιστρέφονται

6Α11. $f: f(2)+3f(3)=4, 2f(2)-f(3)=1$

6Α12. $f(x)=x^2+4x+5$

<u>Β ΟΜΑΔΑ</u>

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ένα προς ένα και όπου είναι δυνατόν να βρεθεί τύπος για την f^{-1} όταν:

6Β1. f: $[4,7] \to R$ και $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x+6}$

6Β2. $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{x-1}}$

6Β3. $f^3(x)+4f(x)=x\ ,\ \forall x \in R=f(R)$

6Β4. $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν αντιστρέφονται

6Β5. $f(x)=x^2(x^3-8)+11$

6Β6. $f:R\to R: f^2(x)\le f(x)f(3-x)$

6Β7. $f:R\to R: f^2(x)\le 12f(x^2)-36$

6Β8. Αν τα σημεία : *Α(3,2)* και *Β(5,9)* ανήκουν στην γραφική παράσταση της συνάρτησης *f,* τότε να λυθούν: η ανίσωση : $f(-2+f^{-1}(x^2-8x))<2$ όταν f γνήσια αύξουσα και η εξίσωση : $f(2+f^{-1}(x^2+x))=9$ όταν είναι γνήσια φθίνουσα

Γ ΟΜΑΔΑ

6Γ1. Έστω f γνήσια αύξουσα στο R τότε

Α) αν $f(f(x))=x\ ,\ \forall x\in R \Leftrightarrow f(x)=x,\ \forall x\in R$

Β) τα σημεία τομής των $C_f, C_{f^{-1}}$ βρίσκονται πάνω στην πρώτη διχοτόμο $y=x$

Γ) δώστε ένα παράδειγμα που να δείχνει ότι αν η συνάρτηση ήταν γνήσια φθίνουσα το Β) δεν ισχύει

(Η άσκηση αυτή είναι σχεδόν ***θεώρημα*** *και χρησιμεύει αργότερα στην επίλυση άλλων ασκήσεων)*

6Γ2. Αν $f: R\to R$ συνάρτηση ένα προς ένα για την οποία ισχύει $f(x)\,f(1-x)=f(\alpha x+\beta)$ να δείξετε ότι: α) $\alpha=0$ β) $f(1-\beta)=1$

6Γ3. Έστω $f: R\to R$ ώστε $f(x)=x^5+x-1$

Α) Να δείξετε ότι f ένα προς ένα συνάρτηση.

Β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$.

6Γ4. Έστω $f: f(x)=x-\eta\mu x$

Α) Να δείξετε ότι $|\eta\mu\, x|\le|x|$ για κάθε x στο R.

(Θεωρία στο σχολικό βιβλίο!!)

Β) Να δείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα.

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$.

6Γ5. Έστω $f: R \to R$ ώστε $(fof)(x)= -x$ για κάθε x στο R.

Α) Να δείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα.

Β) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή συνάρτηση.

Γ) Βρείτε την f^{-1} συναρτήσει της f

6Γ6. Έστω f η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\begin{cases} x, x \geq 0 \\ \dfrac{1}{x}, x<0 \end{cases}$

Α)Να κατασκευάσετε την γραφική της παράσταση

Β)Να μελετήσετε την μονοτονία της f

Γ)Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 συνάρτηση

Δ)Να βρείτε την $f^{-1}(x)$

Ε)Να δείξετε και να εξηγήσετε και γραφικά ότι $f(x)=f^{-1}(x)$

ΣΤ)Θεωρούμε την συνάρτηση $\underbrace{fofo...of}_{666}(x)$. Να βρείτε τον τύπο της

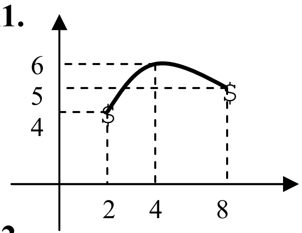
(Η παραπάνω άσκηση είναι μια καλή ευκαιρία να θυμηθείτε όλα τα προηγούμενα)

7 ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

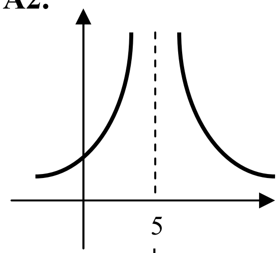
Α ΟΜΑΔΑ

Για τις παρακάτω συναρτήσεις f δίνονται οι γραφικές τους παραστάσεις και ζητούνται το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών, τα μέγιστα – ελάχιστα, οι ρίζες, το κατά πόσον είναι άρτιες – περιττές περιοδικές, και η μονοτονία τους κατά διαστήματα και συνολικά.

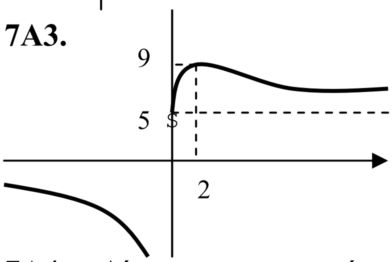
7Α1.



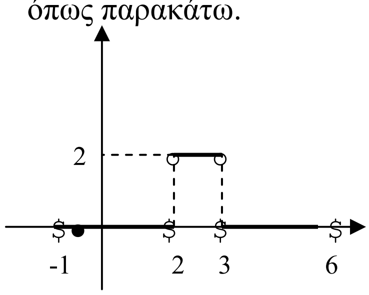
7Α2.

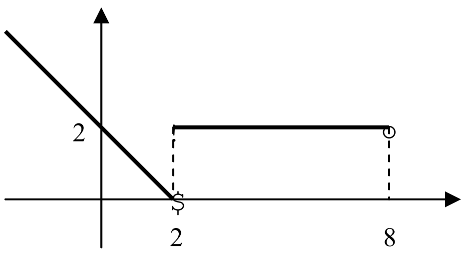


7Α3.



7Α4. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων *f* και *g* όπως παρακάτω.





Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $2f+3g$

7Α5. Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων *f* όπου:

Α) $f(x)=|x|-x$

Β) $f(x)=\dfrac{|x|(2x+5)}{x}$

Γ) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{1-|x|}$

Δ) $f(x)=|\eta\mu 2x|$

7Α6. Αν $f: R \to R$ ώστε $f(x)=f(\alpha-x)$ δείξτε ότι η ευθεία $x=\alpha/2$ είναι άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f. Βρείτε έτσι τον τύπο μίας παραβολής που έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=2$ και ρίζα το -1.

Να σχεδιάσετε παραδείγματα γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων f ώστε:

7Α7. $f: R \to R$ να είναι γνήσια αύξουσα και να μην έχει ρίζα.

7Α8. $f: R \to R$ άρτια και αύξουσα στο R.

7Α9. $f: R\text{-}\{-1,1\} \to R$ ώστε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ να έχει πάντοτε τρεις ακριβώς λύσεις για κάθε $a \in R$ $\mathbb{R}$.

7Α10. $f: R \to R$ ένα προς ένα, αλλά όχι γνήσια μονότονη.

7Α11. $f: (-2,2) \to [-1,1]$ περιττή, όχι μονότονη που δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.

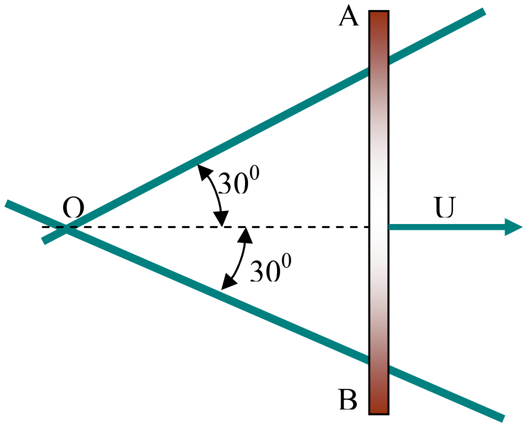
7Α12. $f: R \to R$ γνήσια φθίνουσα, ώστε $f^{-1}=f$.

8 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

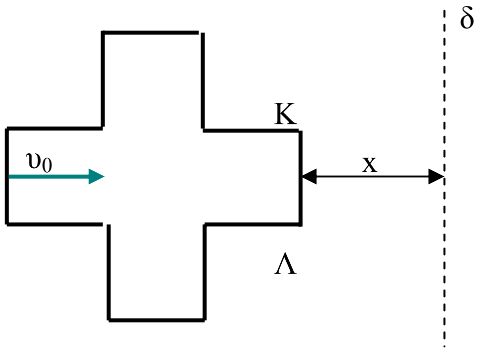
Β ΟΜΑΔΑ

8Β1. Ένας κύλινδρος έχει όγκο V. Να εκφράσετε το εμβαδό της ολικής του επιφάνειας σαν συνάρτηση της ακτίνας της βάσης του και να βρείτε εκείνη την ακτίνα που καθιστά την επιφάνεια ελάχιστη

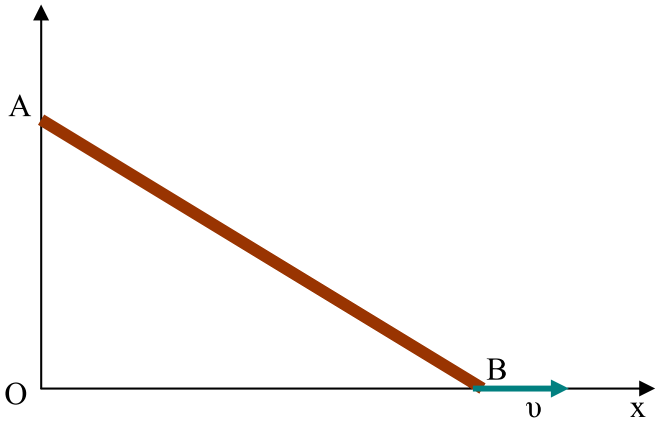
8Β2. Η ράβδος *ΑΒ* κινείται με σταθερή ταχύτητα *υ=2m/sec*, έχει μήκος *6m* και αρχικά βρισκόταν στο *0*. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης *f* που παριστάνει το εμβαδόν του τριγώνου *ΟΑΒ* συναρτήσει του χρόνου.



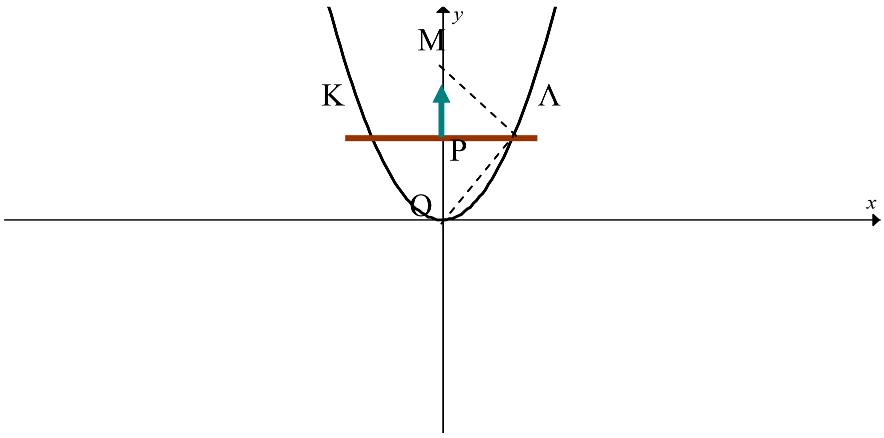
8Β3. Όλες οι ακμές του σταυρού είναι ίσες με *α*. Με *x* συμβολίζουμε την απόσταση της *ΚΛ* από την ευθεία *δ* .Την χρονική στιγμή *t=0* είναι *x=0* και ο σταυρός κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_0$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης *f* που παριστάνει το εμβαδόν του σταυρού που έχει εισέλθει δεξιά της ευθείας *δ*, συναρτήσει του χρόνου.



8Β4. Η ράβδος AB έχει μήκος $10m$ και το άκρο της B γλιστρά στην Ox με ταχύτητα $\upsilon=2m/sec$ την χρονική στιγμή $t=0$ το $B\equiv 0$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f που δίνει το μήκος του OA συναρτήσει του χρόνου καθώς και τον τύπο της g που δίνει το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει του χρόνου.



8Β5. Η ράβδος $ΚΛ$ αρχικά βρισκόταν στον άξονα $xx΄$ και κινείται με σταθερή ταχύτητα $4m/sec$. Η παραβολή (c) έχει εξίσωση $y = x^2$. Να βρείτε το μήκος της ράβδου $(ΚΛ)$ ως συνάρτηση του χρόνου t. Αν ακόμη $ΟΛ \perp ΛΜ$ και P το μέσον της $ΚΛ,$ δείξτε ότι το μήκος PM παραμένει σταθερό. $Κ,Λ$ είναι τα σημεία στα οποία η , απείρου μήκους ράβδος τέμνει την παραβολή.



9 ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

*Οι ασκήσεις αυτές **είναι ιδιαίτερα όμορφες** και καλλιεργούν την φαντασία. Κάποιες είναι και **πολύ δύσκολες**, άλλες θέματα διαγωνισμών, γι αυτό πολλές τις συνοδεύουμε με σύντομες υποδείξεις.*

Α ΟΜΑΔΑ

9Α1. Έστω ότι $f(x)-2f(-x)=x^2$ για κάθε x στο R Να βρείτε την f.

9Α2. Έστω ότι $xf(x)+f(1-x)=x^2$ για κάθε x στο R. Να βρείτε την f.

9Α3. Έστω ότι $f(x)+2xf(\frac{1}{x})=x^4$ για κάθε x στο R^* . Να βρείτε την f.

9Α4. Έστω ότι $f(\frac{3+x}{x-1})+4f(\frac{x-1}{3+x})=x$ για κάθε x στο $R\setminus\{-3,1\}$. Να βρείτε την f.

9Α5. Έστω ότι $f^2(x)f(\frac{1-x}{1+x})=64x$ για κάθε x στο $R\setminus\{-1,0,1\}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

(Σε όλες τις προηγούμενες ασκήσεις ονομάστε ψ την «άλλη» παράσταση και θα καταλήξετε σε εύκολα συστήματα)

9Α6. Έστω f πολυωνυμική συνάρτηση ν βαθμού , τότε

α. Να βρεθεί ο βαθμός του πολυωνύμου : $f(x+1)-f(x)$

β. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα f : $f(x+1)-f(x)=x$ για κάθε x στο R

9Α7. Έστω ότι $f(x)=f(2x)$ για κάθε x στο R . Τότε να δείξετε ότι $f(x)=f(2^kx)$ για κάθε ακέραια τιμή του k και x στο R

9Α8. Έστω συνάρτηση g με $A_g=R$ και $g(g(x))=x$ για κάθε x στο R. Αν η συνάρτηση h έχει πεδίο ορισμού το R, να δείξετε ότι υπάρχει μόνο μια συνάρτηση f, ώστε $2f(x)+f(g(x))=h(x)$ γιά κάθε x στο R. Προσπαθήστε να εκμεταλλευτείτε το δεδομένο $g(g(x))=x$. Θα φτάσετε έτσι σε ένα εύκολο σύστημα.

9Α9. Έστω $f: R \to R$ ώστε $f(f(x))=-x$ για κάθε x στο R. Να δείξετε ότι :

α. Η f είναι *1-1*.

β. Η f είναι περιττή συνάρτηση.

9Α10. Έστω ότι η f είναι *1-1* συνάρτηση με πεδίο ορισμού το R ώστε να ισχύει : $f(x)\quad f(1-x)=f(ax+b)$ για κάθε x στο R. Τότε δείξτε ότι :

α. $a=0$

β. $f(1-b)=1$

(Είναι εύκολο να βρείτε ειδικές τιμές που θα σας δώσουν τη λύση εξ άλλου τις δυο τελευταίες τις έχετε ξαναδεί)

9Α11. Έστω ότι $f(x-y)=f(x)+f(y)$ $\forall x,y$ στο R. Να βρείτε τον τύπο της f.

9Α12. Έστω ότι $f(x-y)=f(x+y)$ για κάθε x,y στο R και $f(0)=1$. Να βρείτε τον τύπο της f.

9Α13. Έστω ότι $f(xy)=f(x)-f(y)$ $\forall x,y \in (0,+\infty)$. Να βρείτε τον τύπο της f.

9Α14. Έστω ότι $f(xy)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$ $\forall x,y \in (0,+\infty)$ και $f(x)\neq 0$ Να βρείτε τον τύπο της f.

9Α15. Έστω $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε x,y στο R. Να δείξετε ότι

α. $f(0)=0$

β. $f(-x)=-f(x)$ για κάθε x στο R

γ. $f(x-y)=f(x)-f(y)$ για κάθε x,y στο R

9Α16. Έστω $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε x,y στο R. Να δείξετε ότι

α. $f(nx)=nf(x)$ για κάθε n στο N^*

β. $f(\frac{1}{n}x)=\frac{1}{n}f(x)$ για κάθε n στο N^*

γ. $f(\frac{m}{n}x)=\frac{m}{n}f(x)$ για κάθε m,n στο N^*

δ. $f(rx)=rf(x)$ για κάθε r στο Q

(Για το γ. αρκεί να δείξετε ότι $nf(x/n)=f(x)$)

9A17. Έστω ότι $f(xy)=f(x)+f(y)$ x,y στο R τότε $f(x)=0$. Αν τώρα x,y στο R^*. Να δείξετε ότι

α. $f(1)=f(-1)=0$

β. f άρτια συνάρτηση

γ. $f(\frac{1}{x})=-f(x)$ για κάθε x στο R^*

δ. $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$ για κάθε x,y στο R^*

9A18. Έστω ότι $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε x,y στο R^* .Να δείξετε ότι

α. $f(x^n)=nf(x)$ για κάθε η στο N^*

β. $f(x^k)=kf(x)$ για κάθε k στο Z^*

γ. $f(x^r)=rf(x)$ για κάθε r στο Q^*

9A19. Έστω $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε x,y στο R^*_+. Δείξτε ότι το σύνολο τιμών της f δεν είναι ούτε άνω ούτε κάτω φραγμένο υποσύνολο του R.

(Είναι άμεσο συμπέρασμα του προηγούμενου)

9A20. Έστω $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε x,y στο R^*_+ και επιπλέον $(x-1)f(x)>0$.Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα

(Θέτοντας $\chi=\alpha/\beta$ μπορείτε να δημιουργήσετε τον λόγο μεταβολής)

9A21. Αν $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο R να δείξετε ότι

α. Αν η f έχει μία ρίζα τότε $f(x)=0$ για κάθε x στο R

β. Αν η f δεν είναι σταθερή τότε $f(0)=1$

9Α22. Έστω $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο R και f όχι σταθερή. Τότε δείξτε ότι

α. $f(x)>0$ για κάθε x στο R

β. $f(-x)f(x)=1$ για κάθε x στο R

γ. $f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$ για κάθε x,y στο R

9Α23. Έστω $f(xy)=f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο $(0,+\infty)$ Τότε

α. Αν $f(1)=0$ βρείτε τον τύπο της f

β. Αν $f(a)=0$ με $a>0$ δείξτε ότι $f(x)=0$ στο R^*_+

γ. Αν $f(1)\neq 1$ δείξτε ότι f σταθερή

9Α24. Έστω ότι $f(xy)=f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο R^*_+ και f όχι σταθερή. Τότε δείξτε ότι

α. $f(x)f(\dfrac{1}{x})=1$ για κάθε x στο R^*_+

β. $f(\dfrac{x}{y})=\dfrac{f(x)}{f(y)}$ για κάθε x,y στο R^*_+

γ. $f(x)>0$ για κάθε x στο R^*_+

9Α25. Έστω $f(xy)=f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο R^*_+ και f όχι σταθερή . Τότε

α. $f(x^n)=[f(x)]^n$ για κάθε η στο N^* και x στο R^*_+

β. $f(x^k)=[f(x)]^k$ για κάθε κ στο Z^* και x στο R^*_+

γ. $f(x^r)=[f(x)]^r$ για κάθε r στο Q^* και x στο R^*_+

δ. Αν η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μοναδική λύση η f είναι 1-1

9Α26. Αν $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$ τότε

α. Αν υπάρχει $x_0 : f(x_0)=1$ δείξτε ότι f σταθερή

β. Αν $f(x)\neq \pm 1$ για κάθε x στο R και θέσουμε :

$g(x)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ δείξτε ότι $g(x+y)=g(x)g(y)$ για κάθε x,y στο R

9A27. Έστω f άρτια , $f(0) \neq 0$ και $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο R. Να βρείτε τον τύπο της f.

(Δείξτε πρώτα ότι $f(x)>0$ και μετά χρησιμοποιείστε κάποιες ειδικές τιμές)

9A28. Αν $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$, $f(x)=g(x)+g(-x)$ για κάθε x,y στο R τότε η g μπορεί να ικανοποιεί την σχέση $g(x+y)=g(x)g(y)$

9A29. Αν $f(x)+x \leq x^2 \leq f(x+1)-x$, $\forall x \in R$ Να βρείτε τον τύπο της f.

9A30. Να βρείτε τον τύπο της f στο $(0,+\infty)$ αν

$$f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ell nx \leq f(x)-1$$

9A31. Έστω ότι $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|$ $\forall x,y \in R$. Δείξτε ότι η $f(x)-x$ είναι φθίνουσα στο R .

<u>**Β ΟΜΑΔΑ**</u>

9B1. Έστω ότι η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R και για κάθε x στο R ισχύει $f(f(x))=x^2-x+1$. Να δείξετε ότι :

α. $f(1)=1$

β. Η συνάρτηση με τύπο $x^2-xf(x)+1$ δεν μπορεί να είναι 1-1

(Άλλη μια φορά το $f(x)$?)

9B2. Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το R για την οποία ισχύει $f(f(x))=x+f(x)$ για κάθε x στο R . Τότε να δείξετε ότι :

α. Η f είναι 1-1 συνάρτηση

β. $f(0)=0$

γ. $f^{-1}(x)+x=f(x)$ για κάθε x στο R

δ. $f(f(x)-x)=x$ για κάθε x στο R

9Β3. Έστω ότι για τη συνάρτηση f ισχύει $f(f(x)-2)=1+x$ για κάθε x στο R. Τότε να δείξετε ότι :

α. Η f είναι 1-1 συνάρτηση

β. Η εξίσωση $f(x)=y$ έχει τουλάχιστον μια λύση για οποιαδήποτε τιμή του y

γ. Ισχύει : $f^{1}(x)=f(x-2)-1$ για κάθε x στο R

(Βάλτε όπου x το f(y-2)-1)

9Β4. Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το R ώστε $f(f(x))=2x+1$ για κάθε τιμή του x στο R . Τότε

α. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 συνάρτηση

β. Δείξτε ότι $f(2x+1)=2f(x)+1$ για κάθε x στο R

γ. Αν f πολυωνυμική να βρείτε τον τύπο της

(Τι πρέπει να θέσετε στην θέση του χ στα δεδομένα για να προκύψει το β μέλος του β ερωτήματος?)

9Β5. Έστω $f: R \to R$ ώστε $f(f(x))=x$ και f αύξουσα Τότε

α. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 συνάρτηση

β. Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο R

γ. Να δείξετε ότι : $f(x)=x$ για κάθε x στο R

δ. Χρησιμοποιείστε τα προηγούμενα ώστε να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$ ii) $(x^2+100)^2=(x^3-100)^3$

(το γ ερώτημα το έχουμε ξαναδεί στην μονοτονία. Το δ είναι εφαρμογή των προηγουμένων)

9Β6. Αν $f(\frac{x+f(x)}{2})=x$, $\forall x \in R$ και f γνήσια αύξουσα συνάρτηση να δείξετε ότι $f(x)=x$ για κάθε x στο R

(Είναι παρόμοια με την προηγούμενη)

9Β7. Έστω $A \subseteq R \ : \ 0 \notin A$ και συνάρτηση

$$f : A \to A: \ f(f(x)) = \frac{f(x)}{x}$$ τότε

α. Αν $x \in A$ να δείξετε ότι $\frac{1}{x} \in A$

β. Δείξτε ότι $f(x)f(\frac{1}{x})=1$ για κάθε x στο R

γ. Δείξτε ότι η f είναι 1-1 συνάρτηση

δ. Αν 2 και 4 είναι δυο στοιχεία του συνόλου A και $f(2)=4$, τότε να λύσετε την εξίσωση : $f(x)=4$

(Τριπλό και τετραπλό f χρειάζονται τα δυό πρώτα)

9Β8. Έστω ότι $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε x,y στο R. Να δείξετε ότι αν $f(a)=ka$ όπου k,a ακέραιοι αριθμοί $\alpha \neq 0$, τότε δείξτε ότι για κάθε ακέραιο αριθμό b, ο αριθμός $f(b)$ είναι επίσης ακέραιος.

9Β9. Έστω ότι $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε x,y στο R. Να δείξετε ότι

α. Αν μοναδική ρίζα της f είναι το 0 τότε η f είναι 1-1 συνάρτηση.

β. Αν ισχύει το προηγούμενο τότε $f^{-1}(a+b)=f^{-1}(a)+f^{-1}(b)$ για κάθε a,b στο R. (Θεωρείστε ότι $f(R)=R$)

(Βρείτε πρώτα πόσο κάνει το f(x-y))

9Β10. Έστω $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε x στο R^*_+. Τότε

α. Αν η f έχει ρίζα $\rho \neq 1$ δείξτε ότι έχει άπειρες ρίζες*.

β. Αν η f έχει μοναδική ρίζα το 1 να δείξετε ότι είναι 1-1 συνάρτηση.

γ. Αν η f είναι 1-1 και a,b θετικοί αριθμοί τότε $f^{-1}(a+b)=f^{-1}(a)f^{-1}(b)$.

9Β11. Έστω ότι $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο R . Να δείξετε ότι α. $f(nx)=[f(x)]^n$ για κάθε n στο N και x στο R

β. $f(kx)=[f(x)]^k$ για κάθε k στο Z και x στο R

γ. $f(rx)= [f(x)]^r$ για κάθε r στο Q και x στο R

δ. Αν $f(1)=2$ τότε $f(x)=2^x$ για κάθε ρητό αριθμό x.

ε. Αν μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=1$ είναι το 0 τότε η f δεν είναι σταθερή.

στ. Αν ισχύει το προηγούμενο τότε η f είναι $1\text{-}1$

ζ. Αν η f είναι $1\text{-}1$ τότε $f^{-1}(ab)=f^{-1}(a)+f^{-1}(b)$ για κάθε a,b στο R_+^*

9Β12. Έστω ότι $f(\frac{x+y}{2})=\frac{f(x)+f(y)}{2}$ για κάθε x,y στο R και $g(x)=f(x)-f(0)$

α. Δείξτε ότι $g(x+y)=g(x)+g(y)$ για κάθε x,y στο R

β. Αν $f(1)=f(0)$ δείξτε ότι $f(x)=f(0)$ για κάθε ρητό αριθμό x

(Δείξτε για το β΄ότι αν g(1)=0 τότε g(x)=0, ***Τύπος Jensen****)*

9Β13. Έστω $(x+y)f(x+y)=(1+f(x))(1+f(y))$ για κάθε x,y στο R και f περιττή συνάρτηση. Να εξετάσετε αν υπάρχει τέτοια συνάρτηση f.

9Β14. Έστω $f(x+y)=f(x)f(a-y)+f(y)f(a-x)$ για κάθε x,y στο R.με $f(a)=1$ $a\neq 0$. Τότε

α. $f(0)=0$

β. $f(2a)=0$

γ. $f(x+2a)=f(x)f(-a)$ για κάθε x στο R

δ. $f(x+4na)=f(x)$ για κάθε n στο N και x στο R

(Μπορείτε να δημιουργήσετε τα ζητούμενα από το πρώτο μέλος της δοσμένης σχέσης για τα α,β,γ και για το δ να κάνετε επαγωγή.)

9Β15. Αν $f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\quad \forall x\in R$ δείξτε ότι η f είναι περιοδική.

9Β16. Αν $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο R τότε :

α. Να βρείτε όλες τις σταθερές f που ικανοποιούν την προηγούμενη σχέση.

β. Αν f όχι σταθερή τότε $f(0)\neq 0$ και f άρτια συνάρτηση

γ. Αν $f(a)=0$ με $a>0$, θα είναι : $f(x+4a)=f(x)$

δ. Κέντρο συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f είναι το $(a,0)$

9Β17. Αν $f(x^2+y^2)=f(x)+f(y)$ γιά κάθε x,y στο R τότε δείξτε ότι :

α. $f(0)=0$

β. $f(x^2)=f(x)$ για κάθε x στο R

γ. $f(-x)=f(x)$ για κάθε x στο R

δ. $f(x)=0$ για κάθε x στο R

(Για το 4 αφού δείξετε ότι $f(y^2)=f(x^2)+f(y^2-x^2)$ λάβετε υπ όψιν σας το 3, ώστε να καταλήξετε σε $f(x^2)=f(y^2)$ οπότε και πάλι με τη βοήθεια του 3, καταλήγετε στο ζητούμενο)

9Β18. Έστω ότι $f(x+y)\leq y+f(x)\ \ \forall x,y\in R$ και $f(5)=1$. Δείξτε ότι $f(x)=x-4\ \ \forall x\in R$.

(Προσπαθήστε να δείξετε ότι $f(x-y)=-y+f(x)$)

9Β19. Αν $f:R_+^*\to R_+^*$ ώστε $2xf(y)\leq xf(x)+yf(y)\ \ \forall x,y\in(0,+\infty)$ τότε δείξτε ότι

α. $\frac{2y-x}{y}f(x)\leq f(y)\leq\frac{x}{2x-y}f(x)$ όταν $2x>y$

β. $\frac{f(x)}{y}\leq\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\leq\frac{f(y)}{x}$ όταν $x>y$

9Β20. Έστω ότι $f(x)\le x$ *και* $f(x+y)\le f(x)+f(y)$ για κάθε x,y στο R.

Να βρείτε τον τύπο της f.

(Βρείτε πρώτα το $f(0)$ και δείξτε ότι η f είναι περιττή)

<u>Γ ΟΜΑΔΑ</u>

9Γ1. Έστω ότι $f(x+y)=f(x)+f(y)$ $\forall$ x,y στο R και $xf(x)\ge 0$ $\forall x\in R$

Βρείτε όλες τις f

9Γ2. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα $[0,1]$. Αν ισχύει :

$|f(x)-f(y)|\ge|x-y|$ $\forall x,y\in[0,1]$ τότε να δείξετε ότι

α. $|f(0)-f(1)|=1$

β. $f(0)=0$ και $f(1)=1$ ή $f(0)=1$ και $f(1)=0$

γ. $f(x)=x$ ή $f(x)=1-x$ $\forall x\in[0,1]$

(Για το α προσέξτε το σύνολο τιμών .Το β είναι εύκολο και για το γ διακρίνετε περιπτώσεις)

9Γ3. Έστω $f:[a,b]\to R$ ώστε $f(kx+(1-k)y)\le kf(x)+(1-k)f(y)$ $,k\in[0,1]$

α. Δείξτε ότι αν $x_0\in[a,b]$ τότε υπάρχει $r\in[0,1]$:

$x_0=ra+(1-r)b$

β. Δείξτε ότι $f(x_0)\le rf(a)+(1-r)f(b)$

γ. Αν $m,n\in[0,1]$: $m+n=1$ *τότε* $f(mx+ny)\le mf(x)+nf(y)$

$\forall x,y\in[a,b]$

δ. Αν $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in[0,1]$ με $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$ να δείξετε ότι ισχύει :

$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)\le\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\lambda_3f(x_3)$ $\forall x_1, x_2, x_3\in[a,b]$

(να χρησιμοποιήσετε την $κα+λβ=(κ/(κ+λ))α+(λ/(κ+λ))β$)

9Γ4. Έστω $f(x+y)=2^x f(y)+2^y f(x)$ για κάθε x,y στο R .

α. Να δείξετε ότι $f(0)=0$

β. Να βρείτε το $f(nx)$ συναρτήσει των η και $f(x)$ $\forall n \in N$

γ. Να γενικεύσετε για n στο Z.

9Γ5. Βρείτε όλες τις μονότονες συναρτήσεις f:

$|f(x)-f(y)|=|x-y|$ $\forall x, y \in R$

9Γ6. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y)$

$\forall x, y \in R$ και αν $f(0)=0$ τότε $f(x)=0\, \forall x \in R$

(Θα καταλήξετε σε μια δίκλαδη και την μηδενική)

9Γ7. Έστω ότι $f(x+y)=f(x)+f(y)$ $\forall\, x,y$ στο R και υπάρχει φ :

$|f(x)| \leq \phi \ , \forall x \in [a,b]$

α. Να δείξετε ότι f φραγμένη στο $[0,b-a]$

β. Αν $g(x)=f(x)-kx, k=\dfrac{f(b-a)}{b-a}$ τότε $g(x+y)=g(x)+g(y)$

γ. Δείξτε ότι $g(x+T)=g(x)$ για κάθε x στο $[a,b]$ με $T=b-a$

δ. Δείξτε ότι $g(nx)=ng(x)$ για κάθε η στο N^* και x στο R

ε. Δείξτε ότι g φραγμένη στο $[a,b]$

στ. Βρείτε τον τύπο της f.

(Για το γ θα χρειαστείτε το f(b-a) . Όσο για το ε χρησιμοποιείστε τριγωνική και για το στ εκμεταλλευτείτε το δ ερώτημα)

9Γ8. Έστω ότι

$f: R \to R^*$, $f(x+\dfrac{1}{n})=f(x)$ $\forall n \in N^*, \forall\, x \in R$. Να

δείξετε ότι

α. $f(x+1)=f(x)$ για κάθε x στο R

β. $f(n)=f(0)$ για καθε η στο N^*

γ. $f(k)=f(0)$ για κάθε κ στο Z

δ. $f(r)=f(0)$ για κάθε r στο Q

(Ειδικές τιμές όχι μόνον στο x)

9Γ9. Έστω ότι $f(x+f(y))=y+f(x)$ για κάθε x,y στο R. Να δείξετε ότι

α. Η f είναι 1-1

β. $f(0)=0$

γ. Βρείτε την f στο Q

9Γ10. Έστω ότι $f: R^*_+ \to R^*_+$ με $f(xf(y))=yf(x)$ $\forall x, y \in R^*_+$. Να δείξετε ότι

α Η f είναι 1-1 συνάρτηση

β. Η εξίσωση $f(x)=a>0$ έχει λύση την $a\,f(\frac{a}{f(a)})$ $\forall a>0$

γ. $f(1)=1$

δ. $f^{1}(x)=f(x)$

ε. $f(xy)=f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο R^*_+

στ. $f(\frac{x}{y})=\frac{f(x)}{f(y)}$ για κάθε x,y στο R^*_+

ζ. $f(x^r)=[f(x)]^r$ για κάθε x,y στο R^*_+ και r στο Q

9Γ11. Να βρείτε τον τύπο της f αν ισχύουν τα παρακάτω:

$f:(0,+\infty)\to R$

$f(x)>\frac{1}{2x}, \forall x>0$

$f(x).f(f(x)+\frac{1}{x})=1$

f γνήσια φθίνουσα

9Γ12. Αν $f(xf(y))=\frac{f(x)}{y}$ $\forall x,y \in Q^*_+$, $f(x)\in Q^*_+$ δείξτε ότι

α. f : 1-1

β. $f(1)=1$

γ. $f(f(x))=\frac{1}{x}$

δ. $f(x.y)=f(x).f(y)$

9Γ13. Έστω

$$f(x+y)=f(x)+f(y), f(1)=1, x^2 f(\frac{1}{x})=f(x) \forall x \in R^*$$

α.Δείξτε ότι $f(x-y)=f(x)-f(y)$

β.Δείξτε ότι $f(\frac{1}{1-x})=\frac{1-f(x)}{(1-x)^2} \quad \forall x \in R-\{0,1\}$

γ.Δείξτε ότι $f(1+\frac{x}{1-x})=\frac{1-2x+f(x)}{(1-x)^2} \quad \forall x \in R-\{0,1\}$

δ. Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

9Γ14. Έστω $f(x^3+x) \leq x \leq \left(f(x)\right)^3+f(x)$ για όλους τους πραγματικούς x

α. Δείξτε ότι η $g(x)=x^3+x$ είναι αντιστρέψιμη στο R.

β. Δείξτε ότι $f=g^{-1}$.

(Για το β εισάγετε την g στο α)

9Γ15. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν συναρτήσεις $f: R \to R, g: R \to R$ έτσι ώστε

$$f(g(x)=x^2 \;,\; g(f(x))=x^3 \;,\; \forall x \in R$$

(Για x=-1,0,1 πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $x^2=a$?)

9Γ16. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: R \to R$ ώστε

$$f(x+y)=3^x f(y)+2^y f(x)$$

(ανταλλάξτε και ξεχωρίστε τα x από τα y)

9Γ17. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: R \to R$ ώστε

$$f(x^3+y^3)=x^2 f(x)+yf(y^2)$$

(υπολογίστε τελικά το $f((x+1)^2)$ με δυο τρόπους)

9Γ18. Αν $f(x+19)\le 19+f(x), f(x+94)\ge 94+f(x)$

τότε αν $f(0)=0$ να βρεθεί το $f(n)$, $n\in N$ συναρτήσει του n

9Γ19. Έστω ότι $f(x+y)=f(y)f(xf(y))$ για κάθε x,y στο $[0,+\infty)$,

$f(2)=0$ και επιπλέον $f(x)\neq 0$ για κάθε x στο $[0,2)$. Τότε να δείξετε ότι

α. $f(x)=0 \ \forall x\in[2,+\infty)$

β. $f((2-x)f(x))=0$ για κάθε x στο $[0,2)$

γ. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{2-x} & , 0\le x<2\\ 0 & , x\ge 2\end{cases}$

(Από το β βρείτε που ανήκει το (2-x)f(x), ξαναγυρίστε στην αρχική και βάλτε όπου y το 2/f(x).)

9Γ20. Έστω $f(x+y)=f(x)f(a-y)+f(y)f(a-x)$ για κάθε x,y στο R και

$f(0)=\dfrac{1}{2}$ Δείξτε ότι

α. $f(a)=\dfrac{1}{2}$

β. $f(a-x)=f(x)$ για κάθε x στο R

γ. $f(x+a)=f(x)$ για κάθε x στο R

δ. Η f είναι σταθερή συνάρτηση

(Για τα β,γ ερωτήματα θα βοηθήσει ένα άθροισμα τετραγώνων και χρησιμοποιείστε τα για το 4.)

9Γ21. Έστω

$$S=(-1,+\infty)\ ,\ f:S\to S\ ,\ \frac{f(x)}{x}\ \ 1-1\quad \forall x\in S-\{0\}$$

$$f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x)\qquad \forall x,y\in S$$

α.Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in S: f(x_0)=x_0$

β.Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

9Γ22. Έστω $f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1$ x,y στο R

α.Δείξτε ότι $f(x)=\frac{f(0)+1}{2}-\frac{x^2}{2}$ $\forall x\in f(R)$

β.Δείξτε ότι $f(0)\neq 0$

γ.Δείξτε ότι ο οποιοσδήποτε πραγματικός γράφεται σαν διαφορά δύο αριθμών του $f(R)$

δ.Δείξτε ότι $f(0)=1$

ε.Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

(Για το γ βρείτε ότι $f(0)x+f(f(0))-1$ γράφεται σαν διαφορά δύο τιμών της f και ασχοληθείτε με τα σύνολα τιμών τους. Για το δ βάλτε όπου x το y_1 και όπου f(y) το y_2 με y_1 , y_2 στο f(R) και εκμεταλλευτείτε στην συνέχεια το α)

9Γ23 Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f, όταν

$f(x^2-y^2)=xf(x)-yf(y)$ $\forall x,y\in R$, $f(1)=A$

Δ ΟΜΑΔΑ

9Δ1. Έστω ότι $f(x+y)+2f(xy)=2+f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο Q και $f(1)=3$. Να δείξετε ότι

α. $f(0)=1$

β. $f(x+1)=2+f(x)$

γ. $f(x+n)=2n+f(x)$ για κάθε n στο N

δ. $f(x)=2x+1$ για κάθε x στο Q

9Δ2. Έστω $f(x+f(y))=f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο Q . Δείξτε ότι

α.Αν η f έχει ρίζα τότε είναι η μηδενική συνάρτηση

Έστω τώρα ότι η f δεν είναι η μηδενική συνάρτηση

β. $f(y-f(y))=1$ και $f(x+1)=f(x)$

γ. $f(nf(y))=f(0)[f(y)]^n$ για κάθε n στο N

δ. $f(x)=1$ $\forall x\in Q$

9Δ3. Έστω $f(x^2+f(y))=y+f^2(x)$ για όλους τους πραγματικούς x,y

α. Δείξτε ότι $f(\kappa)=\kappa^2$, $f(x^2+k)=f^2(x)$, $f(f(x))=x+k^2$ όπου $f(0)=k$

β. Εκφράστε το $f(k^2+f^2(1))$ με δύο τρόπους συναρτήσει του k και έτσι δείξτε ότι $k=0$

γ. Δείξτε ότι $f(f(x))=x$, $f(x^2)=f^2(x)$

δ. Δείξτε ότι $f(x+y)=f(x)+f(y)$,$x>0$

ε. Δείξτε ότι f περιττή

στ. Δείξτε ότι $f(x)=x$

(Για το δ δείξτε ότι $f(x^2+y)=f(y)+f(x^2$ενώ για το ε σκεφθείτε ότι όταν έχετε $f(x-x)$ τότε ένας από τους $x,-x$ θα είναι θετικός. Τώρα γενικεύστε το δ σε όλους τους πραγματικούς. Τελικά να υποθέσετε ότι $y=f(x)>x$,$w=y-x$ καταλήξτε ότι $f(w)=-w$.Όμοια και αν υποθέσετε ότι $w<0$.Το γ θα σας εξασφαλίσει το επιθυμητό άτοπο)

9Δ4. Έστω $(f(a)+f(b))(f(c)+f(d))=f(ac-bd)+f(ad+bc)$ a,b,c,d στο R

α.Να βρείτε όλες τις σταθερές συναρτήσεις f.

β.Δείξτε ότι :$f(ab)=f(a)f(b)$ a,b στο R

γ. Δείξτε ότι: f άρτια

δ. Δείξτε ότι: $f(\alpha)\in[0,+\infty)$

ε. Δείξτε ότι: $f(x^2+y^2)\geq f(x^2)$ $\forall x,y\in R$

στ. Να συμπεράνετε ότι η f είναι αύξουσα στο R_+

ζ. Δείξτε ότι $f(x-1)+f(x+1)=2[f(x)+1]$ $\forall x\in R$

η. Δείξτε ότι $f(n)=n^2$ $\forall n\in N$

θ. Γενικεύστε την προηγούμενη σχέση για ακεραίους και κατόπιν για ρητούς.

ι. Σκεφθείτε ότι πάντα υπάρχει ρητός ανάμεσα σε δυό πραγματικούς και με την βοήθεια του στ) και της απαγωγής σε άτοπο δείξτε ότι $f(x)=x^2 \quad \forall x \in R$.

9Δ5. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : N \to N$:

$(x+y)f(x^2+y^2)=xf(y)+yf(x)$

(δείξτε ότι $f(x)<f(x^2+y^2)<f(y)$ με $f(x)$ το ελάχιστο στοιχείο της όχι σταθερής f και $f(y)$ το διαδοχικό στοιχείο του συνόλου τιμών άτοπο)

9Δ6. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : N^* \to N^*$ που είναι 1-1 και

$$f(f(n)) \le \frac{n+f(n)}{2}, \forall n \in N^*$$

9Δ7. Βρείτε όλες τις γνήσια μονότονες συναρτήσεις $f : R \to R$ ώστε $f(f(y)+x)) = y + f(x)$ και αποδείξτε ότι για κάθε φυσικό $n > 1$ δεν υπάρχουν γνήσια μονότονες συναρτήσεις $f : R \to R$ ώστε $f(f(y)+x)) = y^n + f(x)$

(Για το α αν $f(y)=a$ τότε $f(a)=y$ και ανάγεστε σε γνωστό συναρτησιακό τύπο. Για το β διακρίνετε περιπτώσεις αν n άρτιος ή περιττός)

Β. ΟΡΙΑ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1 ΜΟΡΦΗ 0/0 , Α/0

Α ΟΜΑΔΑ

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1Α1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$

1Α2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}$ $(a>0)$

1Α3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ $m,\ n\in N^*$

1Α4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ $m,\ n\in N^*$

1Α5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

1Α6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^3-x+1|}{x^2-1}$

1Α7. $\lim\limits_{x\to +2}\dfrac{|x^2-5x+6|}{x^2-4}$

1Α8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5}{x^2-4x+4}$

1Α9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}$

1Α10.. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^\nu-1-\nu(x-1)}{(x-1)^2}$

Β ΟΜΑΔΑ

1Β1. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{2x^2-x-1}$

1Β2. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$

1Β3. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x^3-5x^2+4x}}$

1Β4. $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{2x-4}}{\sqrt{x^3-6x^2+9x}}$

1Β5. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+8}+x}{x-1}$

2 ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Α ΟΜΑΔΑ

2Α1. $\lim_{x\to 0} x\eta\mu(\frac{1}{x})$

(Προσέξτε το αποτέλεσμα δεν είναι 1)

2Α2. $\left|f(x)-x^3\right|\le x^4$ Δείξτε ότι $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$.Βρείτε το

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}$

2Α3. $\left|f(x)+2\right|\le x^2\left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right|$ βρείτε το $\lim_{x\to 0} f(x)$

Β ΟΜΑΔΑ

2Β1. Αν $-4\le f^2(x)+4f(x)\le|x|-4$ βρείτε το $\lim_{x\to 0} f(x)$

2Β2. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1} f(x)=2 \\ |f(x)-g(x)|\le |x^2-1| \end{array}\right\}$ βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

2Β3. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=0 \\ f(x)>0, g(x)>0 \end{array}\right\}$ βρείτε το $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^2(x)+g^2(x)}{f(x)+g(x)}$

2Β4. $\lim\limits_{x\to a}\left(f^2(x)+g^2(x)\right)=0$ βρείτε τα $\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to a} g(x)$

(μην νομίσετε εξαρχής ότι ξεχωριστά τα όρια υπάρχουν

Βασική άσκηση)

2Β5. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0<g(x)<f(x)$ βρείτε το

$\ell im\limits_{x\to 0}\dfrac{f^3(x)+g^3(x)\eta\mu x}{f^2(x)+g^2(x)}$

2Β6. $0<f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ βρείτε το $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2 f^2(x)+1}{x^2 f(x)+x}$

Γ ΟΜΑΔΑ

2Γ1. Αν $f^3(x)+f(x)=x^3 \quad \forall x\in R$ να βρείτε τα όρια:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

3 ΘΕΤΩ

Α ΟΜΑΔΑ

3Α1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+3}{f(x)}=+\infty$ βρείτε το $\ell im\limits_{x\to 1} f(x)$

3Α2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-1}{x-2}=1$ βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^{\nu}f(x)-2^{\nu}}{x-2}$

3Α3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt{x}}{x-1}=1$ βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt[3]{x+7}+1}{\sqrt{x}-1}$

Β ΟΜΑΔΑ

3Β1. $\left.\begin{array}{c} xf(x)+f(1+x)=\eta\mu x \\ \lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lambda \end{array}\right\}$ βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

3Β2. $\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0) \\ f(x+y)=f(x)+f(y) \end{array}$ βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ αν $f(1)=4$

3Β3. $\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0}\{f(x)-xg(x)\}=3 \\ \lim\limits_{x\to 0}\{x^3f(x)+g(x)\}=1 \end{array}$ βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\{(1-x)f(x)+5g(x)\}$

4 ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ

Α ΟΜΑΔΑ

Προσδιορίστε τις τιμές ή τις σχέσεις των παραμέτρων ώστε να υπάρχουν τα παρακάτω όρια.

4Α1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ax^2+\beta x-3}{x-2}$

4Α2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-a}{(x-2)(\sqrt{x}-1)}$

4Α3. $\lim\limits_{x\to 1}f(x):\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-ax+\beta}{x-1} & x>1 \\ x+2 & x\le 1\end{cases}$

4Α4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a|x-3|+\beta|x+1|-2}{x-1}$

4Α5. $\lim\limits_{x\to 4} f(x):\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-ax+\beta}{\sqrt{x}-2} & x>4\\ ax^2-x+2 & x\le 4\end{cases}$

4Α6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{a|x-1|+\beta|x-3|+4}{x^2-3x+2}$

Β ΟΜΑΔΑ

4Β1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+\beta^2}-\beta}$

4Β2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+ax+a^2}-\sqrt[3]{x^2-ax+a^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}\ ,\quad a>0$

Προσδιορίστε τις τιμές, ή τις σχέσεις, των παραμέτρων ώστε:

4Β3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(a+1)x^3-6x^2+3x+8}{x^2-1}=\beta\in R$

4Β4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{ax^2+\beta x+4}{x+1}=\gamma\in R$

4Β5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}+ax+\beta}{x^2-4}=\dfrac{1}{4}$

4Β6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}+ax+\beta}{x-1}=1$

4Β7. Βρείτε για τις διάφορες τιμές των λ,μ το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-x_0)^{\lambda}f(x)}{(x-x_0)^{\mu}g(x)}$

$\lambda,\ \mu\in N^*$ όπου $f,\ g$ πολυώνυμα που δεν έχουν ρίζα.

4B8. Έστω $p(x)$ πολυώνυμο τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{p(x)}{x-k}=3\ ,\ \lim_{x\to 2}\frac{p(x)}{x-k}=m\in R^*,\ p(0)=-6$$

Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί m,k και ο τύπος του πολυωνύμου $p(x)$

4B9. Δείξτε ότι $\lim_{a\to 0}x_1=\frac{-c}{b}$ όπου $|x_1|<|x_2|$ και x_1,x_2 οι ρίζες της $ax^2+bx+c=0$

4B10. Βρείτε το : $\lim_{x\to 1}\frac{ax^{\nu}+\beta x^{\mu}+\gamma}{x-1}$ με $\alpha+\beta+\gamma=0,\ \mu,\ \nu\in N^*$

4B11. Βρείτε το : $\lim_{x\to 1}\frac{ax^{\nu}+\beta x^{\rho}+\gamma}{(x-1)^2}$ $\alpha+\beta+\gamma=0$, με $\nu\alpha+\rho\beta=0$, $\nu>2$, $\rho>2$

(Ένα θεώρημα με παραγώγους αργότερα θα έδινε πιο εύκολη λύση. Προς το παρόν χρειάζεστε μια καλή τεχνική και γνώση της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^{\nu}$ *)*

5 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

Α ΟΜΑΔΑ

Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

(Θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα του De l Hospital σε κάποιες . Αν δεν είναι γνωστό εξασκηθείτε στην τριγωνομετρία.)

5A1. $\lim_{x\to 0}\frac{2\eta\mu^2 x}{x}$

5A2. $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(ax)}{\eta\mu(\beta x)}$ $\alpha\beta\neq 0$

5Α3. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2x-\pi}$

5Α4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\eta\mu x|+x}{x}$

5Α5. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{x-\pi/2}{\sqrt{1-\eta\mu x}}$

5Α6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\eta\mu 5x}$

5Α7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+8}-2}{\eta\mu^3 4x}$

5Α8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^{\nu} x}{x^2}$ $\nu \in N^*$

Β ΟΜΑΔΑ

5Β1. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x+\eta\mu x}{x-\eta\mu x}$

5Β2. $\lim\limits_{x\to 0} x\sigma\varphi x$

5Β3. $\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\eta\mu(6x)} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt[3]{1+x}-1\right) g(x) = 10 \end{array}\right\}$ βρείτε τα $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}, \lim\limits_{x\to 0} f(x) g(x)$

5Β4. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)\eta\mu 3x - xg(x)}{4x} = 5 \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)\eta\mu 3x + xg(x)}{4x} = 7 \end{array}\right\}$ βρείτε τα $\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\to 0} g(x)$

5Β5. $\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \\ x^2 f(x) - 1 + \sigma\upsilon\nu^2 x = 0 \end{array}\right\}$ βρείτε την *f(x)*

5Β6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$ βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)-f(-x)\eta\mu 4x}{x^2+\eta\mu^2 x}$

5Β7. Αν $f(x)=a\eta\mu x+b\eta\mu 2x+c\eta\mu 3x\geq 0$, $\forall x\in(-\pi,\pi)$ δείξτε ότι

$a+2b+3c=0$ όταν το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=k\in R$

Γ ΟΜΑΔΑ

5Γ1. $f(x)=3x-4x^3, f_1(x)=f(x), f_n(x)=f_{n-1}(f(x))$ με

$x\in[-1,1], n\in N^*$ Βρείτε το: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f_n(x)}{x}$

(Πρέπει να δείτε τι σχέση έχει με την τριγωνομετρία γι αυτό παρατηρήστε καλά τον τύπο της f(x))

6 ΟΡΙΑ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Α ΟΜΑΔΑ

Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

6Α1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$

6Α2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}\right)$

6Α3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}+\sqrt{x+2}\right)$

6Α4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x\right)$

6Α5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-x\right)$

6Α6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2}-\sqrt{x^2+1}\right)$

Β ΟΜΑΔΑ

Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων βρείτε τα:

(Μην ξεχάσετε τα πεδία ορισμού)

6Β1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt[3]{x^3+\lambda x+1}\right)$

6Β2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\lambda x^2-5x+6}-2x-1\right)$

6Β3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\lambda x^3+\mu x^2+1}{(\mu-\lambda)x^2+2\lambda\mu x+(\lambda+\mu)}\quad \lambda\neq 0$

6Β4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\lambda x^3+x+1}{(\lambda-1)x^2+3}$

6Β5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\lambda-1)x^2-x+2}{(\lambda+3)x^2+2\lambda x+3}$

6Β6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\alpha x^2-x}-\sqrt{\beta x^2-1}-x\right)$

Βρείτε τις παραμέτρους ή σχέσεις μεταξύ τους ώστε:

6Β7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt{4x^2+x+2}+\lambda x+\mu\right)=1$

6Β8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{4x^2+x}+(\lambda-1)x\right)=\mu-2$

6Β9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-(\lambda x+\mu)\right)=0$

6Β10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+\alpha x+\beta}+\gamma x\right)=3$

6Β11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}+\sqrt{4x^2+1}-\lambda x-\mu\right)=10$

6B12. Αν $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-3x-4)=0$ να βρεθεί ο

$$m:\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+mx-2}{xf(x)-3x^2+1}=2$$

Βρείτε τα παρακάτω όρια:

(Θυμηθείτε και ανισότητες που αφορούν τριγωνομετρία)

6B13. $\lim_{x\to\infty}\left(x^2+\eta\mu 3x\right)$

6B14. $\lim_{x\to\infty}\left(2x-\sigma\upsilon\nu x\right)$

6B15. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x+4+\eta\mu 4x}$

6B16. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x}\eta\mu 3x\right)$

6B17. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\eta\mu 2x}{x^2+1}$

6B18. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\left(3x^2+1\right)\eta\mu 5x}{x^3+1}$

6B19. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x\,\eta\mu x+1}{3x^2+5x\,\sigma\upsilon\nu x+3}$

6B20. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\left(\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+1\right)}{x+1}$

Παρακάτω να ασχοληθείτε με εκθετικές συναρτήσεις βρίσκοντας τα

6B21. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2^{2x+1}-3}{4^x+3^x}$

6Β22. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+a^x}{a^{x-1}+2^{x+1}}$, $a>0$

6Β23. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^{x+1}+b^x+1}{b^{x+2}+a^x+2}$ $a>0,\ b>0$

Γ ΟΜΑΔΑ

6Γ1. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\eta\mu\sqrt{x+1}-\eta\mu\sqrt{x}\right)$

6Γ2. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\eta\mu\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x\right)$

6Γ3. $a_1b_1^x+a_2b_2^x+\ldots+a_nb_n^x=0\ \ \forall x\in R$, $b_1<b_2<\ldots<b_n\in R_+^*$ δείξτε τότε ότι όλες οι σταθερές $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$

7 ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Α ΟΜΑΔΑ

Να εξετάσετε ως προς την συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις.

7Α1. $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 1 & ,x=0\end{cases}$

7Α2. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\varepsilon\phi x}{x-\pi} & ,x\neq \pi\\ -1 & ,x=\pi\end{cases}$

7Α3. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2-4} & ,x\leq -2\\ \dfrac{1}{x}\sqrt{6+x-x^2} & ,-2<x\neq 0<3\\ \eta\mu(x-3) & ,3\leq x\end{cases}$

7Α4. $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu\left(x-3\right)}{\sqrt{x^2+7}-4} & ,x<3\\ x\,\eta\mu(\pi/x) & ,x\geq 3\end{cases}$

7Α5. $f\left(x\right)=\begin{cases}x^{\nu}\eta\mu\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$ $\nu\in N^*$

7Α6. $f\left(x\right)=\begin{cases}1-x & ,x\leq 0\\ -1-x & ,x>0\end{cases}$ Μελετήστε ως προς την συνέχεια της f και $\left|f\right|$. Δώστε γεωμετρική ερμηνεία.

Βρείτε τις τιμές ή τις σχέσεις των παραμέτρων ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να είναι συνεχείς.

7Α7. $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-3x+1}{x-1} & ,x>1\\ ax+2 & ,x\leq 1\end{cases}$

7Α8. $f\left(x\right)=\begin{cases}x+3 & ,x\leq 1\\ \dfrac{ax+\beta}{x-1} & ,x>1\end{cases}$

7Α9. $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+3x & ,x\leq a\\ x-1-\beta^2 & ,x>a\end{cases}$

7Α10. $f: (-\lambda,\lambda)\to R$, $\lambda>0$, και f συνεχής ώστε

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3f\left(x\right)-2x^2f\left(x\right)-x\,\eta\mu 4x}{\sqrt{x^2+9}-3}=-36$ βρείτε το $f(0)$.

7Α11. f συνεχής και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f\left(x\right)-\sqrt{x}}{x-1}=3$ βρείτε το $f(1)$.

7Α12. Βρείτε όλες τις συνεχείς f: $x^2f(x)+1=\sigma\upsilon\nu x$.

7Α13. $f{:}R \to R$ συνεχής στο 0 και $ημ4x \le xf(x)$, $\forall x \in R$ βρείτε τότε το $f(0)$

7Α14. Έστω $h{:}R \to R$ συνεχής. Βρείτε μια άρτια f και μία περιττή g συνεχείς ώστε $f+g=h$.

7Α15. Αν $f: R \to R$ ώστε $|f(x)| \le |x|$ δείξτε ότι f συνεχής στο 0.

7Α16. $f: R \to R$, $g: R \to R$ συνεχής, $g(0) = 0$, και $|f(x)| \le |g(x)|$ δείξτε ότι f συνεχής στο 0.

7Α17. $f: R \to R$: $|f(x) - f(x_0)| \le M|x - x_0|$ $\forall x, x_0 \in R$ δείξτε ότι f συνεχής.

7Α18. $f: R \to R$: $|f(x)| \le |x^2 - 3x + 2|$ δείξτε ότι f συνεχής στο 2.

7Α19. f, g συνεχείς στο $α$. $h(x) = \begin{cases} f(x), & x \le a \\ g(x), & x > a \end{cases}$ Δείξτε ότι h συνεχής στο $α$. όταν $f(a)=g(a)$

7Α20. Έστω $f(x)=g(x)$ $\forall x \in (α,γ)\cup(γ,β)$, $f(γ) \neq g(γ)$. Δείξτε ότι δεν μπορεί ταυτόχρονα οι f, g να είναι συνεχείς στο $γ$.

<u>Β ΟΜΑΔΑ</u>

7Β1. $f(x) = \begin{cases} xημ\dfrac{1}{x} & , x < β, x \neq 0 \\ x^3 + x & , x \ge β \end{cases}$

7Β2. f: $R \to R$ συνεχής στο 0, $g: R \to R$: $|g(x)| \le k$ $κ>0$ και

$x f(x) - x \le g(x)\left(\sqrt{1+x^2} - 1\right) - ημx$ βρείτε το $f(0)$.

7Β3. Βρείτε δύο συνεχείς f, g και μη αρνητικές συναρτήσεις ώστε f-g=h όπου h δοσμένη συνεχής συνάρτηση.

7Β4. $f^2(x) + g^2(x) = ημ^2x$ δείξτε ότι f, g συνεχείς στο $π$.

7Β5. $f^2(x) + g^2(x) + 2f(x) - 4g(x) + 5 \leq \sqrt{|x|}$ δείξτε ότι f, g συνεχείς στο 0.

7Β6. $f(x) \geq \dfrac{1}{|x-1|}$ δείξτε ότι η f δεν μπορεί να είναι συνεχής στο 1.

8 ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Α ΟΜΑΔΑ

8Α1. Για τις διάφορες τιμές του α κάντε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και μελετήστε την συνέχειά της.

$$f(x) = \lim_{\nu \to +\infty} \frac{(1+x)^2 + (\alpha + x)e^{\nu x}}{1 + e^{\nu x}} \qquad (\nu \in R_+^*)$$

Μελετήστε ως προς την συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις. Κατασκευάστε και μια πρόχειρη γραφική παράσταση.

8Α2. $f(x) = \lim\limits_{\nu \to +\infty} \dfrac{x^{\nu+1} + 2x}{1 + x^\nu} \quad \nu \in R_+^*$

8Α3. $f(x) = \lim\limits_{\nu \to +\infty} \dfrac{x^{2\nu} + 4^\nu}{9^\nu + x^{2\nu+1}} \quad \nu \in R_+^*$

8Α4. $f(x) = \lim\limits_{\nu \to +\infty} 1 - (1 - x^2)^\nu \quad \nu \in R_+^*$

8Α5. $f(x) = \lim\limits_{\nu \to +\infty} \dfrac{x^\nu + 2^{\nu+1}}{2x^\nu - 3 \cdot 2^{\nu-1}} \quad \nu \in R_+^*$

8Α6. $f(x) = \lim\limits_{\nu \to +\infty} \dfrac{x^{2\nu}}{1 + x^{2\nu}} \quad \nu \in R_+^*$

8Α7. $f(x) = \lim\limits_{\nu \to +\infty} \dfrac{x^2 + x^{2\nu+1}}{1 + x^{2\nu}} \quad \nu \in R_+$

8Α8. $f(x) = \lim\limits_{\nu \to +\infty} \dfrac{x^\nu}{1 + x^\nu} \quad \nu \in R_+^{\ *}$

9 BOLZANO

Α ΟΜΑΔΑ

9Α1. Δείξτε ότι η εξίσωση $x = a\eta\mu x + b \quad a > 0, b > 0$ έχει λύση στο $[0, a+b]$

9Α2. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και είναι $m > 0, n > 0$.Να δείξετε ότι υπάρχει

$\xi \in [a,b] : f(\xi) = \dfrac{mf(a) + nf(b)}{m+n}$

(Μια ειδική περίπτωση μέσου όρου)

9Α3. Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ σημεία του $[0,1]$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,1] : |x_0 - x_1| + |x_0 - x_2| + \ldots + |x_0 - x_{100}| = 50$.

9Α4. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R , $a>0$, $f(a) \neq 0$, τότε να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,a) : \dfrac{f(a-x_0)}{x_0} = \dfrac{f(x_0)}{a-x_0}$

(Εδώ αξίζει να είστε παρατηρητικοί)

9Α5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$, $f(a) \neq 0$, τότε να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a,b) : \dfrac{f(a) + f(b)}{a-b} = \dfrac{f(x_0)}{a-x_0}$

9Α6. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $0 < a \leq f(x) \leq b , \forall x \in [a,b]$. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο $[a,b] : f^2(\xi) + \xi f(\xi) = 2\xi^2$.

9Α7. Έστω $f : [0,1] \to [-1,0]$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $[0,1]$: $f^2(\xi)+f(\xi)+\xi=0$

9Α8. Έστω $f : [a,b] \to [a,b], a>0$ συνεχής στο $[a,b]$. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο $[a,b]$:$\xi f(\xi)=ab$.

9Α9. Έστω $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=-x^2+ax+b$, $b \neq 0$. Αν $f(x_1)=g(x_2)=0$ με $x_1<x_2$ δείξτε ότι η εξίσωση : $kf(x)+\lambda g(x)=0$ όπου $\kappa,\lambda>0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $[x_1,x_2]$.

9Α10. Δείξτε ότι η εξίσωση $(x^2-1)\sigma\upsilon\nu\, x+2\eta\mu(x^2)=0$ έχει δυο λύσεις στο $(-1,1)$.

9Α11. Να δείξετε ότι η εξίσωση : $x^3+ax^2=-b$ με $b>0$, $1+a+b<0$ έχει δυο τουλάχιστον λύσεις ετερόσημες.

9Α12. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα (a,b) και επιπλέον ισχύει: $(\lim\limits_{x\to a+} f(x)).(\lim\limits_{x\to b-} f(x))<0$ τότε να δείξετε ότι υπάρχει x_0 στο (a,b) τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

(Και αυτή η άσκηση μπορεί να είναι θεώρημα)

9Α13. Αν $a>0$, $n\in N^*$ τότε να δείξετε ότι η εξίσωση : $x^n=a$ έχει μοναδική θετική λύση.

(Πώς θα ονομάζατε αυτή την λύση;)

9Α14. Έστω $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a>0$, $d<0$, $a+c<b+d$. Δείξτε ότι η f έχει δυο αρνητικές και μία θετική ρίζα ακριβώς.

9Α15. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R , $f(0)=5$ και $f(x)\neq 2$ για κάθε $x\in R$ τότε να δείξετε ότι η f δεν έχει καμιά ρίζα.

9Α16. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R ,$f(0)=-2$ και $f^2(x)+xf(x)-4=0$, $\forall x\in R$ τότε να δείξετε ότι η f δεν έχει καμιά ρίζα.και βρείτε τον τύπο της

9A17. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R , $f(0)=-1$ και $f^2(x)=3f(x)+x^2-x+4$ τότε να δείξετε ότι η f δεν έχει καμιά ρίζα.και βρείτε τον τύπο της

9A18. Έστω f,g συνεχείς στο $[a,b]$ και $g(x)\neq 0$, $\forall x\in[a,b]$. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο (a,b) : $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{1}{\xi-a}+\dfrac{1}{\xi-b}$.

9A19. Έστω $f: R\to R$:$|f(x)|=1+|x|$. Θεωρούμε τα διανύσματα:

$\vec{u}=(f(0),1),\vec{v}=(f(1),-2),\vec{w}=(2,2)$

α) Αν $\vec{u}\,//\,\vec{v}$ δείξτε ότι η f δεν μπορεί να είναι συνεχής συνάρτηση.

β) Αν $\vec{u}\,//\,\vec{w}$ και f συνεχής, τότε βρείτε τον τύπο της.

9A20. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, έχει μοναδική ρίζα στο (a,b) και $f(a).f(b)>0$. Δείξτε ότι $f(a).f(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$.

9A21. Έστω f,g συνεχείς συναρτήσεις στο R, ώστε οι γραφικές τους παραστάσεις να μην έχουν κανένα κοινό σημείο. Αν επιπλέον ισχύει: $f(a)>g(a)$ τότε δείξτε ότι : $f(x)>g(x)$ για κάθε τιμή του x. Ενώ αν $f(a)<g(a)$ τότε δείξτε ότι : $f(x)<g(x)$ για κάθε τιμή του x.

9A22. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[a,b]: f(\xi)=\dfrac{2f(k)+5f(l)}{7}$ όπου $k,l\in[a,b]$

9A23. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[a,b]: f(\xi)=\dfrac{f(k)+f(l)+f(m)}{3}$

όπου $k,l,m\in[a,b]$

(Γενικεύστε!)

9Α24. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και γνήσια μονότονη.

Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό

$$\xi \in (a,b) : f(\xi) = \frac{f(a) + f(\frac{2a+3b}{5}) + f(b)}{3}$$

9Α25. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο

$f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{1-x}$.

9Α26. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο

$f(x) = \ell nx - \ell n(e-x)$.

9Α27. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο

$f(x) = \sqrt{\ell nx} + 2e^{x-1}$.

9Α28. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $f(x) \in Z$, $\forall x \in [a,b]$.

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

<u>**Β ΟΜΑΔΑ**</u>

9Β1. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $a \le f(x) \le b$, $\forall x \in [a,b]$.

Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο $[a,b]$: $f(\xi)=\xi$.

*(Η πρόταση αυτή ονομάζεται **θεώρημα σταθερού σημείου**).*

Αν επιπλέον η συνάρτηση είναι γνήσια φθίνουσα να δείξετε ότι το ξ είναι μοναδικό και δεν μπορεί να είναι ούτε το a ούτε το b.

9Β2. Οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο R , $(a+b)ab \neq 0$ και ισχύει $abf^2(x)+(a+b)g(x)+abx=0$. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x σε δυο σημεία A,B εκατέρωθεν της αρχής των αξόνων, τότε να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα x σε σημείο ανάμεσα στα A,B.

9B3. Να δείξετε ότι η εξίσωση : $x^3=1-x$ έχει μοναδική ρίζα r στο διάστημα $(\frac{1}{2},1)$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\frac{1}{2},r)$ τέτοιο ώστε $(x_0^3-x_0)$ $συνx_0=1-2x_0$

9B4. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, $f(0)=f(1)$ και $g(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x)$. Να δείξετε ότι $g(0)+g(\frac{1}{n})+g(\frac{2}{n})+\ldots+g(\frac{n-1}{n})=0$ και στη συνέχεια ότι υπάρχει $\xi\in[0,1-\frac{1}{n}]:f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n})$.

9B5. Ένα κινητό ξεκινά από το σημείο A την στιγμή $t=1$ και μετά από 2 ώρες, αφού έχει διανύσει διάστημα *160 Km,* φθάνει στο σημείο B την στιγμή $t=3$. Δείξτε ότι υπάρχουν δύο σημεία $Γ$ και $Δ$ στην διαδρομή A και B που απέχουν απόσταση *80 Km* ώστε το κινητό να διανύσει την διαδρομή $ΓΔ$ σε 1 ώρα.

9B6. Αν f συνεχής στο R και γνήσια φθίνουσα δείξτε ότι τέμνει σε μοναδικό σημείο την πρώτη διχοτόμο

9B7. Αν f συνεχής στο R και $f(x).f(f(x))=1$, $f(9)=1/9$ υπολογίστε το $f(1)$

9B8. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $0<f(a)<f(b)$ Δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ στο (a,b):
$f(\xi)(f(a)+f(b))=2f(a)f(b)$

9B9. Αν f συνεχής στο R και $a<b<c$ ενώ $f(a)+f(b)+f(c)=0$ να δείξετε ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[a,c]$. Στη συνέχεια δείξτε ότι αν $3k+l+m=0$ τότε το πολυώνυμο

$p(x)=kx^3+lx+m$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0,2]$.

9B10. Έστω $f: R \to (k,l) \quad k,l \in R$ συνεχής συνάρτηση με $f(0)=m \neq 0$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $a,b \in R^*: \ a^3 f(b)+b^3 f(a)=0$.

9B11. Η f είναι συνεχής στο R και $\lim\limits_{x \to =\infty} \frac{f(x)}{x^n} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^n} = 0$

n περιττός . Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in R : \xi^{\nu} + f(\xi) = 0$.

9B12. Αν $p(x)$ πολυώνυμο αρτίου βαθμού να δείξετε ότι έχει ολικό ακρότατο

9B13. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και $f(a+b)=b^2-b+1$. Αν η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{1}{x-a+f(x)}$ έχει πεδίο ορισμού όλο το R, τότε να δείξετε ότι ισχύει: $f(a-1)>1$

9B14. Αν h συνεχής συνάρτηση στο R και η εξίσωση $h(x)=x$ είναι αδύνατη, τότε να δείξετε ότι και η εξίσωση $h(h(x))=x$ είναι επίσης αδύνατη

9B15. Έστω w συνεχής στο R και

$v: R \to R: v(x)=\dfrac{1}{w(x)-2}-\dfrac{1}{x^2+1}$ Αν η συνάρτηση v έχει ρίζα, τότε να δείξετε ότι η w δεν έχει ρίζα.

9B16. Δώστε παράδειγμα δυο μη μηδενικών στο R συναρτήσεων f,g: $f(x).g(x)=0$ για κάθε $x \in R$. Στην συνέχεια βρείτε όλες τις συνεχείς στο R συναρτήσεις ώστε

$\{f(x)-2\}.\{f(x)-3\}=0 \ \forall x \in R$

9B17. Αν $a(x),b(x),f(x)$ συνεχείς στο R συναρτήσεις, ώστε τα σύνολα τιμών των a,b να είναι διαστήματα που να μην έχουν κανένα κοινό στοιχείο και ισχύει

$\{ f(x)-a(x)\}.\{ f(x)-b(x)\}=0 \ \forall x\in R$ τότε υποχρεωτικά

θα είναι : $f(x)-a(x)=0 \ \ \eta \ \ f(x)-b(x)=0 \quad \forall x\in R$

9B18. Να δείξετε ότι η εξίσωση $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$ με $f>0$, $a+b+c+d+e+f=0$, $5a+4b+3c+2d+e>0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0,1)$

9B19. Έστω $A=[-a,a]$ f,g συνεχείς στο A , $g(A)=A$, $f(-x)=-f(x)$ $\forall x\in A$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(g(x))+f(x)+g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο A.

(Η άσκηση αυτή έχει δυσκολίες. Θα ήταν πιο εύκολη αν η g ήταν γνήσια μονότονη)

9B20. i)Έστω f συνάρτηση που δεν είναι γνήσια μονότονη σε κάποιο διάστημα Δ. Εξηγήστε γιατί υπάρχουν $a<b<c$ στο Δ τέτοια ώστε να μην ισχύει καμιά από τις ανισότητες: $f(a)<f(b)<f(c)$, $f(a)>f(b)>f(c)$. Υποθέστε μια διάταξη για τα $f(a),f(b),f(c)$ και αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής και 1-1 στο Δ τότε είναι και γνήσια μονότονη

(Πρόκειται για βασικό θεώρημα το οποίο σας προτείνεται να αποδείξετε).

ii) Με την βοήθεια του προηγούμενου ερωτήματος δείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση f στο R ώστε $f(f(x))=-x$

iii)Αν f συνεχής συνάρτηση στο R και $f(a)+f(b)=f(c)+f(d)$ με a,b,c,d διαδοχικούς όρους μη σταθερής αριθμητικής προόδου τότε η f δεν μπορεί να είναι αντιστρέψιμη

Γ ΟΜΑΔΑ

9Γ1. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση στο $[0,1]$ ώστε για κάθε y στο $f([0,1])$ η εξίσωση $y=f(x)$ να έχει δυο ακριβώς λύσεις στο $[0,1]$.

(Κάντε ένα σχήμα να πάρετε ιδέες)

9Γ2. Έστω ότι $f(f(x))+f(x)=x-1\ \ \forall x \in R$ και $f(0)=1$. Να δείξετε ότι η f δεν μπορεί να είναι συνεχής.

9Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $ax^3+bx^2-(4a+3b+2c)x+c=0$ δεν μπορεί να έχει τρεις ακέραιες λύσεις

Δ ΟΜΑΔΑ

9Δ1. Έστω $f:[1,+\infty)\to(0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Αν για κάθε τιμή του α>0 η εξίσωση $f(x)=ax$,έχει τουλάχιστον μια λύση, τότε δείξτε ότι για οποιαδήποτε συγκεκριμένη τιμή του α η εξίσωση $f(x)=ax$ έχει άπειρες λύσεις

10 ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

Α ΟΜΑΔΑ

10Α1. Έστω $\varphi:R \to R$: $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)\ \ \forall x,y \in R$ δείξτε ότι φ συνεχής στο R αν και μόνο αν η φ είναι συνεχής στο 0.

10Α2. Έστω $\varphi:R\to R$: $\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)\ \ \forall x,y \in R$. Αν η φ είναι συνεχής στο 0 τότε δείξτε ότι η φ είναι συνεχής στο R.

10Α3. $\varphi:R \to R$: $\varphi(x+y)=e^x\varphi(y)+e^y\varphi(x)\ \ \forall x,y \in R$ και $\lim_{x\to 0}\phi(x)=0$ δείξτε ότι η φ είναι συνεχής στο R.

Β ΟΜΑΔΑ

10Β1. Αν $\left|\phi(x)-\phi(y)\right|=\left|x-y\right|$ και *φ* συνεχής στο *R,* βρείτε τον τύπο της.

Με δεδομένο ότι οποιοσδήποτε άρρητος μπορεί να προκύψει από την σύγκλιση ρητών,(**άρα μπορείτε να πείτε ότι $\mathbf{r \to x, r \in Q, \forall x \in R}$**), βρείτε του τύπους των συναρτήσεων *φ* όπου ισχύουν:

10Β2. $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)\ \ \forall x,y \in R/R$, *φ* συνεχής στο *0*.

*(Δείξτε πρώτα ότι $\varphi(\rho x)=\rho\varphi(x)\ \ \forall \rho \in Q$ εξίσωση **Cauchy**)*

10Β3. $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)\ \ \forall x,y \in R^+$, *φ* όχι σταθερή.

(Δείξτε πρώτα ότι $\varphi(x^\rho)=(\varphi(x))^\rho\ \ \forall \rho \in Q$).

10Β4. Έστω $\varphi : R \to R$ όχι σταθερή και συνεχής στο *0* συνάρτηση : $\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)\ \ \forall x, y \in R$.

Α) Δείξτε ότι $\varphi(0)=1$, η *φ* δεν έχει ρίζα, $\phi(-x)=\dfrac{1}{\phi(x)}$.

Β) Είναι $\phi(x-y)=\dfrac{\phi(x)}{\phi(y)}$, $\varphi(x)>0$ για κάθε $x \in R$.

Γ) Αν μοναδική λύση της $\varphi(x)=1$ είναι το *0* τότε η *φ* είναι *1-1*.

Δ) Η *φ* είναι συνεχής στο R.

Ε) Ισχύει $\varphi(\rho x)=(\varphi(x))^\rho$ για κάθε $\rho \in Q$.

Στ) Με την βοήθεια των Δ), Ε) βρείτε τον τύπο της *φ*.

10Β5. Αν $\varphi:R\to R$: $\varphi(x+y)-x-y=(\varphi(x)-x)(\varphi(y)-y)$ για κάθε *x, y* στο *R* και *φ* συνεχής, βρείτε τον τύπο της *φ*.

10Β6. Αν $\varphi: (0,+\infty) \to R$ συνεχής: $\nu \in N^*$ και για κάθε τιμή των x, y στο R^+ είναι $\phi\left(\sqrt[\nu]{x^\nu + y^\nu}\right) = \phi(x)\cdot\phi(y)$ βρείτε τον τύπο της φ

10Β7. Βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης φ όταν $1+(x+y)\varphi(x+y)=(x\varphi(x)+1)(y\varphi(y)+1) \quad \forall x,y \in R$.

10Β8. Έστω $\varphi(x+\alpha)=\beta\varphi(x)$, $g(x+\alpha)=g(x)$, $\varphi(0)=g(0) \neq 0$, $\beta \neq 1,0$ βρείτε τον τύπο μιας συνεχούς $h(x)$ ώστε $\varphi(x)=\beta^{h(x)}g(x)$.

10Β9. Αν $\varphi: R \to R$ συνεχής ώστε $\varphi(2x)=\varphi(x)$ δείξτε ότι η φ είναι σταθερή.

Γ ΟΜΑΔΑ

10Γ1. Αν $x\phi(y)+y\phi(x)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\phi(xy)$ $\forall\, x,y>1$ και φ συνεχής δείξτε ότι $\varphi(x)=0$

10Γ2. Έστω φ συνεχής στο R και $\varphi(x+y)=\varphi(\varphi(x))+\varphi(\varphi(y))$. Δείξτε ότι $\varphi(x+y)+\varphi(0)=\varphi(x)+\varphi(y)$ και βρείτε τον τύπο της φ.

10Γ3. Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις φ, φ_1, φ_2, …, φ_ν ώστε $\varphi(x_1+x_2+ \ldots +x_\nu)=\varphi_1(x_1)+\varphi_2(x_2)+\ldots+\varphi_\nu(x_\nu)$ για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_\nu \in R$.

Δ ΟΜΑΔΑ

10Δ1. $f : [-1,1] \to R$ συνεχής συνάρτηση :

$f(2x^2-1)=2x\cdot f(x)\ \forall x\in[-1,1]$ τότε βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

(Βοηθητικά ερωτήματα

Α) Δείξτε ότι $f(-x)=-f(x)\ ,\ \forall x\in[-1,0)\cup(0,1]$

Β) Χρησιμοποιείστε την συνέχεια ώστε να δείξετε ότι f περιττή.

Γ) Τώρα υπολογίστε τους αριθμούς $f(0), f(-1), f(1)$

Μπορείτε πια να περιοριστείτε στο διάστημα (0,1) .Τα υπόλοιπα αφήστε τα στην συμμετρία./

Δ) Η παράσταση $2x^2$-1 και το διάστημα [-1,1] ή (0,1) θυμίζουν! κάποιον τριγωνομετρικό τύπο. Γι 'αυτό να θέσετε :

$x = \sigma\upsilon\nu\phi$, $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ *όταν το x βρίσκεται στο (0,1)και*

$g(\phi) = \frac{f(\sigma\upsilon\nu\phi)}{\eta\mu\phi}$ *. Έτσι να δείξετε ότι : g(2φ)=g(φ)*

Ε) Τώρα δείξτε ότι $g(\phi) = g(\frac{\phi}{2^n})$, $\forall n \in N$

ΣΤ)Από την συνέχεια της g μπορείτε τώρα να βρείτε τον τύπο της και βέβαια και τον τύπο της f. Η συμμετρία θα επεκτείνει τα αποτελέσματά σας σε όλο το [-1,1])

10Δ2 Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f : R \to R$ με την ακόλουθη ιδιότητα : Για κάθε ζευγάρι αριθμών a,b με α<b η εικόνα του διαστήματος $[a,b]$ μέσω της f δηλαδή το $f([a,b])$ είναι διάστημα πλάτους $b-a$.

10Δ3 Να δείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f : R \to R$ έτσι ώστε

$f(x+y) > f(x)(1+yf(x)), \forall x, y \in (0,+\infty)$

(Αποδείξτε ότι η f τείνει στο άπειρο και είναι αύξουσα

10Δ4 Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : R \to R$ ώστε

$(f(x)+f(y))f(\frac{x+y}{2}) = 2f(x)f(y)$, $\forall x, y \in R$

10Δ5 Αν $f(f(x))+af(x)=bx, x\in R, a>0, b>0, \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

όπου f συνεχής να βρείτε τον τύπο της

(πρέπει να έχετε γνώσεις από αναδρομικές ακολουθίες β τάξεως)

10Δ6 Αν $f: R\to R$ συνεχής και ισχύει :

$f(f(x))+4x=4f(x)$, $\forall x\in R$ τότε να βρείτε τον τύπο της f .

(και πάλι πρέπει να έχετε γνώσεις από αναδρομικές ακολουθίες β τάξεως)

Γ. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

1 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

Α ΟΜΑΔΑ

Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο x_0

1Α1. $f(x)=|x-1|x\ ,\ x_0=1$

1Α2. $f(x)=\dfrac{x|x|}{2+|x|}\ ,x_0=0$

1Α3. $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|},x_0=0$

1Α4. $f(x)=x\sqrt{|x|}\ ,\ x_0=0$

1Α5. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\ ,\ x_0=0$

1Α6. $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{\pi}{x},x\neq 0 \\ 0\ ,\ x=0 \end{cases}\ ,\ x_0=0$

1Α7. $f(x)=\begin{cases} x^\nu\ ,x\geq 0 \\ 0\ ,x<0 \end{cases}$ $(\nu\in N)$

1Α8. Έστω $f'(1)=1$ και $H(x)=\begin{cases} f(1-x),x\geq 0 \\ f(1+x),x<0 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν η H είναι παραγωγίσιμη στο 0.

1Α9. Έστω $f\,'(1)=0$ και $H(x)=\begin{cases} f(2x-3)\ \ ,x\geq 2 \\ f(3x-5)\ \ ,x<2 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν η H είναι παραγωγίσιμη στο 2.

Βρείτε τις τιμές των παραμέτρων ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να είναι παραγωγίσιμες στο x_0

1Α10. $f(x)=\begin{cases} \alpha\eta\mu x+\beta, & x<0 \\ x, & 0\le x \end{cases}, \ x_0=0$

1Α11. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{3x^2+1}, & x<1 \\ \alpha x+\beta, & x\ge 1 \end{cases}, x_0=1$

1Α12. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+3}, & x<1 \\ x^2+\alpha x+\beta, & x\ge 1 \end{cases}, \ x_0=1$

1Α13. $f(x)=(x-a)\sqrt{x}$, $x_0=0$

1Α14. $f(x)=\begin{cases} 2\alpha\eta\mu x+\beta, & -\pi\le x<0 \\ \alpha\sigma\upsilon\nu 2x+\eta\mu x-1, & 0\le x\le\pi \end{cases}, \ x_0=0$

1Α15. Υπάρχει ο $f\,'(0)$. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+(x-1)f(0)}{x}$

1Α16. Έστω: $f(x)=(x^2+2x+6)g(x)$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-5}{x}=4$, g συνεχής. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

1Α17. Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\sqrt{4+x}}{x}=0$. Αφού δείξετε ότι $f(0)=2$, βρείτε, αν υπάρχει, την $f\,'(0)$.

1Α18. Έστω f συνεχής στο 1 και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt{x+3}}{x-1}=5$. Δείξτε ότι $f(1)=2$ και βρείτε ,αν υπάρχει, την $f'(1)$

1Α19. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R. Αν επιπλέον $f(x)>0$ για κάθε x στο R δείξτε ότι η $\sqrt{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη.

(θα μπορούσε να ήταν θεώρημα)

1Α20. Υπάρχει ο $f\,'(\alpha)$. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{xf(\alpha)-\alpha f(x)}{x-\alpha}$

1Α21. Υπάρχει ο $f\,'(\alpha)$. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{x^2 f(\alpha)-\alpha^2 f(x)}{x-\alpha}$

1Α22. Η συνάρτηση g είναι συνεχής και $g(2)\neq 0$.

Αν $f: f(x)=|x-2|g(x)$, δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2.

1Α23. Αν $f\,'(0)\cdot g\,'(0)\neq 0$, $f(0)=g(0)=0$, δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(0)}{g'(0)}$.

1Α24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=a\in R$ Αν υπάρχει η $f\,'(0)$ να βρείτε την τιμή της

1Α25. Έστω $f: R\to R$ ώστε $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε x, y , $f\,'(0)=\lambda$. Να δείξετε ότι f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in R$.

1Α26. Έστω $f: R\to R$ ώστε $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε x, y , $f\,'(0)=1$. $f(0)\neq 0$ Να δείξετε ότι f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in R$.

1Α27. Αν $f(xy)=x^2f(y)+y^2f(x),\forall x,y\in(0,+\infty)$, $f'(1)=2$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $(0,+\infty)$

1Α28. Αν $f(xy)=f(y)f(x),\forall x,y\in(0,+\infty)$, $f'(1)=1/2$ τότε δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $(0,+\infty)$

1Α29. Έστω $f: R \to R$ ώστε $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)$ για κάθε x, y $f'(0)=\lambda$. Να δείξετε ότι f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in R$.

1Α30. Αν $f(x+y) = f(y)\sigma\upsilon\nu x + f(x)\sigma\upsilon\nu y$ $f'(0)=1$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R

1Α31. Αν $f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$ $\forall x, y \in R$, $f'(0) = 2$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R

1Α32. Βρείτε την $f'(0)$, αν είναι γνωστό ότι: $|f(x)-x| \leq x^2$.

Β ΟΜΑΔΑ

1Β1. Δείξτε ότι η $f(x) = |x-a|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο α αλλά είναι παντού αλλού. Έστω τώρα ότι

: $A_0|x| + A_1|x-1| + \ldots + A_n|x-n| = 0$, $\forall x \in R$.Δείξτε τότε ότι όλες οι σταθερές $A_\kappa=0$

1Β2. Βρείτε τις τιμές των παραμέτρων ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη στα x_0

$$f(x) = \left(x^2 + \alpha x + \beta\right)\sqrt{\left|x^2 - 4x\right|} \ , \ x_0 = 0 \ , \ x_0 = 4$$

1Β3. Έστω $f:[\alpha,\beta] \to R$ συνεχής συνάρτηση ώστε f^2 να είναι παραγωγίσιμη. Αν επιπλέον $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη. Δώστε και ένα παράδειγμα συνάρτησης g ώστε : g^2 παραγωγίσιμη στο R αλλά η g να μην παραγωγίζεται σε ολόκληρο το R.

1Β4. Έστω $f:R \to R$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και g: $g(x)= |f(x)|$. Είναι γνωστό ότι και η g είναι παραγωγίσιμη. Τότε, αν υπάρχει $x_0: f(x_0)=0$ δείξτε ότι $f'(x_0)=0$. Αξίζει να δώσετε και μια γεωμετρική ερμηνεία στο αποτέλεσμά σας.

1Β5. Έστω $f: R \to R$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $g: 2g(x)=1-\sqrt{f^2(x)-2f(x)+1}$. Είναι γνωστό ότι και η g είναι παραγωγίσιμη. Τότε, αν $f(2)=0$ δείξτε ότι $f'(2)=0$.

1Β6. Υπάρχει ο $f'(0)$ και $f^2(x)+2\eta\mu x f(-x)+\ell n(1+x^2)=0$ Βρείτε το $f'(0)$

1Β7. Υπάρχει ο $f'(\alpha)$. Δείξτε ότι $f'(\alpha)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+\alpha)-f(\alpha-x)}{2x}$

1Β8. Έστω $f'(x_0)=\alpha$, $f(x_0)=\beta$. Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^2(3x+x_0)-f^2(x+x_0)}{x}$$

1Β9. Έστω $f: (0,+\infty)\to R$ ώστε $f(xy)=yf(x)+xf(y)$ για κάθε $x, y>0$ και $f'(1)=4$. Να δείξετε ότι f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 του $(0,+\infty)$.

1Β10. Έστω συνάρτηση f ώστε για κάθε $x, y \in A_f$ να ισχύει $f(x+y)-f(x)f(y)-xy=yf(x)+xf(y)-x-y$, με $f'(0)=1$, $f(x)\neq 0$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο τυχόν $x_0 \in A_f$.

1Β11. Βρείτε την $f'(0)$, αν είναι γνωστό ότι: $\left|x^2-f(x)\eta\mu x\right|\leq x^4$ και f συνεχής στο R

1Β12. Αν $0\geq g(1)$, $(x-1)\eta\mu(\pi x)\leq g(x)$ $\forall x\in R-\{1\}$ και g παραγωγίσιμη στο 1. τότε να δείξετε ότι : $g'(1)=0$

1Β13. Έστω $f: R\to R$ ώστε $\left|f(x)-f(y)\right|\leq\left|x-y\right|^{\nu}$ $\nu\in N^*-\{1\}$. Να δείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

1Β14. Έστω f: $R\to R$ ώστε $f(0)=0$ και $\left|f(x)\right| \geq \sqrt{|x|}$, $x\in R$. Δείξτε ότι η f δεν παραγωγίζεται στο μηδέν.

1Β15. Έστω συναρτήσεις f, g με $f(1)$-$g(1)=0$,$x+f(x)-g(x)\leq 1$ και f, g παραγωγίσιμες στο 1. Να δείξετε ότι: $f'(1)=g'(1)-1$

1Β16. Έστω συναρτήσεις f, g με $f(p)=g(p)$, $f(x)$-$g(x)\leq p$-x και f, g παραγωγίσιμες στο p. Να δείξετε ότι: $f'(p)$-$g'(p)+1=0$.

1Β17. Αν $f(1)\geq g(1)$, $xf(x)\leq g(x)$ $\forall x\in R-\{1\}$ και f, g παραγωγίσιμες στο 1. Να δείξετε ότι: $f(1)+f'(1)=g'(1)$

1Β18. Έστω f: $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$ για κάθε x, y. Δείξτε ότι $f'(x_0)=1$.

2 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΕΙΣ

Α ΟΜΑΔΑ

Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων όπου υπάρχουν

2Α1. $f(x)=x\sqrt{x}$

2Α2. $f(x)=\dfrac{|x|-1}{|x|+1}+\dfrac{|x|+1}{|x|-1}$

2Α3. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

2Α4. $f(x)=\sqrt{x}$

2Α5. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

2A6. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

2A7. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

2A8. $f(x)=(\sqrt[3]{x})^2$

2A9. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

2A10. $f(x)=x^{\frac{4}{3}}$

2A11. Να προσδιοριστεί η $2^η$ παράγωγος της συνάρτησης

$f(x)=x^2|x|$

2A12. Αν f παραγωγίσιμη και $f(2x^3-1)=x^5+3x$, $\forall x\in R$ βρείτε την $f'(-3)$

2A13. Αν f δυο φορές παραγωγίσιμη να βρείτε την

$\left(xf(\ln x)+\left(\ln f'(x)\right)\right)'$

2A14. Αν f δυο φορές παραγωγίσιμη να βρείτε την $\left(xf(x^2)\right)''$

2A15. Αν $f(x)=\dfrac{x\,συνα-ημα}{x\,ημα+συνα}$, $α\in\left(0,\dfrac{π}{4}\right)$ δείξτε ότι η

παράσταση: $I=\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$ είναι ανεξάρτητη του $α$.

2A16. Αν $f(t)=e^{-αt}ημ(ωt)$, $α$, $ω\in R^*$ σταθερές, υπολογίστε την τιμή της παράστασης: $f''(t)+2αf'(t)+(α^2+ω^2)f(t)$.

(Η παράσταση αυτή είναι διάσημη στην φυσική γιατί παριστάνει την εξίσωση της φθίνουσας Α.Τ)

2Α17. Να δείξετε ότι η συνάρτηση y με τύπο $y(x)=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$ επαληθεύει την εξίσωση

$4xy''(x)+2y'(x)-y(x)=0\ ,\ \forall x\in R$

2Α18. Να δείξετε ότι η συνάρτηση y με τύπο

$y(t)=\alpha\eta\mu(\omega t)+b\sigma\upsilon\nu(\omega t)$ επαληθεύει την εξίσωση

$y''(t)+\omega^2 y(t)=0\ ,\ \forall t\in R$

(Και αυτή παράσταση αυτή είναι διάσημη στην φυσική γιατί παριστάνει την εξίσωση Α. Α.Τ)

2Α19. Να δείξετε ότι υπάρχουν δυο τιμές του α : η συνάρτηση y με τύπο $y_a(x)=e^{ax}$ να επαληθεύει την εξίσωση

$y''(x)-3y'(x)+2y(x)=0\ ,\ \forall x\in R$.Στην συνέχεια δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ επαληθεύει την ίδια εξίσωση

2Α20. Αν $g(x)=e^{-x}y(x)$ και $y''(x)+ay'(x)+by(x)=0\ ,\ \forall x\in R$ προσδιορίστε τα α,b ώστε $g''(x)=0\ ,\ \forall x\in R$

2Α21. Αν f συνεχής και $x^2+f^2(x)=r^2$ να δείξετε ότι:

Α)Η f έχει σταθερό πρόσημο στο $(-r,r)$

Β)Είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-r,r)$

Γ)Η παράσταση $\dfrac{f''(x)}{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^{3/2}}$ είναι ανεξάρτητη του x στο $(-r,r)$

(Αργότερα το αντίστροφο αυτής της παράστασης θα έχει να κάνει με την καμπυλότητα της f)

2Α22. Έστω f *τρεις* φορές παραγωγίσιμη στο R ώστε $\left(f'(x)\right)^2+\left(f(x)\right)^2=x^4$ Να δείξετε ότι $f''(0)=0$

2Α23. Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R^*.Τότε δείξτε ότι $:x^3\left(xf(\frac{1}{x})\right)''=f''(\frac{1}{x})$

2Α24. Αν $f\left(x\right)=\frac{x^2}{2}+\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2}+\ell n\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$,δείξτε ότι: $2f\left(x\right)=xf'\left(x\right)+\ell n\left(f'\left(x\right)\right)$

2Α25. Αν $f(x+a)+f(a-x)=2b$, $\exists f''(x)$ $\forall x\in R$ δείξτε ότι : $f''(0)+f''(2a)=0$

2Α26. Έστω f, g δύο φορές παραγωγίσιμες στο R ώστε $f^2(x)+g^2(x)=x^2$. Να δείξετε ότι $(f\,'(0))^2+(g'(0))^2=1$.

2Α27. Έστω f: $R\to R$ παραγωγίσιμη και άρτια. Δείξτε ότι η $f\,'$ είναι περιττή.

2Α28. Έστω f: $R\to R$ παραγωγίσιμη και περιττή. Δείξτε ότι η $f\,'$ είναι άρτια και εξετάστε αν ισχύει και το αντίστροφο.

2Α29. Αν f δυο φορές παραγωγίσιμη και άρτια στο R δείξτε ότι η $g(x)=f'(x)f''(x)$ είναι περιττή συνάρτηση

2Α30. Έστω f: $R\to R$ παραγωγίσιμη και περιοδική με περίοδο T. Δείξτε ότι η $f\,'$ έχει την ίδια περίοδο. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης g ώστε η $g'(x)$ να είναι περιοδική όχι όμως και η g.

2Α31. Αν *f, g* παραγωγίσιμες και ισχύει $f(0)=g(0)=0$, δείξτε ότι δεν είναι δυνατόν να ισχύει $f(x)g(x)=x$ για κάθε $x\in R$.

2Α32. Αν $P(x)=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$, $r_1r_2r_3\neq 0$ τότε

$$\frac{p'(x)}{p(x)}=\frac{1}{x-r_1}+\frac{1}{x-r_2}+\frac{1}{x-r_3} \quad \forall x\in R-\{r_1,r_2,r_3\}$$

2Α33. Αν $P(x)=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$, $r_1r_2r_3\neq 0$ τότε δείξτε ότι $\forall x\in R-\{r_1,r_2,r_3\}$ ισχύει

$$\left(P'(x)\right)^2-P''(x)P(x)=\frac{P^2(x)}{(x-r_1)^2}+\frac{P^2(x)}{(x-r_2)^2}+\frac{P^2(x)}{(x-r_3)^2}$$

2Α34. Αν $p(x)$ πολυώνυμο και η συνάρτηση $p(x)|x-a|$ είναι παραγωγίσιμη και στο α τότε δείξτε ότι $p(a)=0$

2Α35. Αν $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$ δείξτε ότι $p^{(3)}(x)=1\cdot 2\cdot 3=3!$

(Γενικεύστε για πολυώνυμο νιοστού βαθμού)

2Α36. Αν $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

τότε $p(x)=p(0)+\dfrac{p'(0)}{1}x+\dfrac{p''(0)}{1\cdot 2}x^2+\dfrac{p'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3$

(Γενικεύστε πάλι για πολυώνυμο νιοστού βαθμού)

2Α37. Να δείξετε ότι : $(\eta\mu x)^{(n)}=\eta\mu(x+\dfrac{n\pi}{2})$,$\forall n\in N$

2Α38. Να βρείτε την $\left(e^{ax}\right)^{(n)}$, $\forall n\in N$

Β ΟΜΑΔΑ

2Β1. Αν υπάρχει η $f''(0), f'(0)=2, g(x)=xf(x)$ να υπολογιστεί η $g''(0)$

2B2. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα συναρτήσει των n, x :

$$S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} \quad , x \neq 1$$
$$\Sigma(x) = x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \ldots + n^2x^n \quad , x \neq 1$$

2B3. Αν $f''(x) = xf(x), \forall x \in R$, $f(x) \neq 0$ δείξτε ότι η f είναι πέντε φορές παραγωγίσιμη και $f^{(5)}(0) = 0$

2B4. Αν $ln|f(x)| = xf(x)$ $, \forall x \in R$, $f(x) \neq 0$ και f δυο φορές παραγωγίσιμη να βρείτε την $f''(0)$

2B5. Αν $x^3 - x^2 f(x) = (f(x) - x)^3$, $\forall x \in R, \exists f'(x)$ δείξτε ότι : $f(x) = xf'(x)$

2B6. Αν f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και $e^{f(x)}+xf(x)=e$
Υπολογίστε, εδώ την $f''(0)$.

(λέμε ότι η f ορίζεται πεπλεγμένα και συνήθως δεν υπάρχει τρόπος να βρούμε τον τύπο της.)

2B7. Αν $y=y(x)$, ώστε, $(a+\beta x)e^{\frac{y(x)}{x}} = x$ δείξτε ότι:

$x^3 \dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(x\dfrac{dy}{dx} - y \right)^2$. Υποθέστε ότι οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες όπου τις χρειάζεστε και $y(x)>0$, $x>0$

2B8. Αν $f(x)g(x)=e^x$ όπου f, g παραγωγίσιμες, δείξτε ότι:

$4f'(x)g'(x) \leq e^x$, για κάθε $x \in R$

2B9. Αν $x = t^5 + 5t$, $y = 5t^3, t > 0$ βρείτε την $\dfrac{dx}{dy}$

2B10. Έστω f, g τρεις φορές παραγωγίσιμες στο R συναρτήσεις ώστε $f'(x)\cdot g'(x)=c$ για κάθε $x\in R$. Δείξτε

$(f(x)g(x))'''=f'''(x)g(x)+g'''(x)f(x)$.

2B11. Να βρεθεί η $H''(0)$ όπου $H(x)=f(x)\sigma\upsilon\nu x - f(\sigma\upsilon\nu x)$ με f, δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, f περιττή και $f'(-1)=-2$.

2B12. Έστω f: $(0,1)\to(0,1)$ δυο φορές παραγωγίσιμη ώστε

$f^2(x)+(f'(x))^2=1$. Να δείξετε ότι: $f^{(4)}(x)=f(x)$.

2B13. Το θεώρημα: f παραγωγίσιμη στο $x_0 \Rightarrow f$ συνεχής στο x_0 , μπορεί να σας κάνει να υποψιαστείτε ότι η παράγωγος συνάρτηση είναι πάντα συνεχής. Τα πράγματα όμως δεν είναι έτσι. Έστω λοιπόν f: $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}x & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0. Βρείτε (και με κανόνες παραγώγισης) την f' και δείξτε ότι **η f' είναι ασυνεχής στο *0*.**

2B14. Για το πολυώνυμο $p(x)$ να δείξετε ότι ισχύει η ισοδυναμία

$p(x)=(x-a)^2Q(x) \Leftrightarrow p(a)=p'(a)=0$

*(Είναι βασικό συμπέρασμα και καλύτερα **να το έχετε υπ' όψη σας ως θεωρία**)*

και έτσι να βρείτε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες , ώστε το $p(x)=x^n-ax^{n-m}+b$,$a>0,b>0$, $n>m$ να έχει τουλάχιστον μια διπλή ρίζα .

2B15. Αν το πολυώνυμο $p(x)$ έχει μια ρίζα με βαθμό πολλαπλότητας ίσο με κ να δείξετε ότι το $p'(x)$ έχει την ίδια ρίζα με βαθμό πολλαπλότητας $\kappa-1$

2Β16. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $(x^2-1)^3$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου :$x^{4v+2}-(2v+1)x^{2v+2}+(2v+1)x^{2v}-1$

2Β17. Αν $p(x)=a(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$ τότε να δείξετε ότι $\forall x \in R \setminus \{a_1,a_2,...,a_n\}$ είναι: $\dfrac{p'(x)}{p(x)}=\dfrac{1}{x-a_1}+...+\dfrac{1}{x-a_n}$ και

στην συνέχεια αν όλα τα a_k είναι διαφορετικά μεταξύ τους, τότε να δείξετε ότι το $[p'(x)]^2-p(x)p''(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες

(διάσημο συμπέρασμα που αφορά τα πολυώνυμα)

2Β18. Αν $p(x)=(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$, $a_1,a_2,...,a_n \neq 0$ τότε να δείξετε ότι είναι: $-\dfrac{p'(0)}{p(0)}=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}...+\dfrac{1}{a_n}$

2Β19. Αν οι ρίζες του $p(x)$ είναι πραγματικές και διαφορετικές μεταξύ τους να δείξετε ότι και οι ρίζες του $p'(x)+ap(x)$ είναι και αυτές πραγματικές για κάθε a στο R

(Πρέπει να ξέρετε λίγα πράγματα από μιγαδικούς)

2Β20. Να βρείτε τους πραγματικούς $\alpha,\beta,\gamma,\delta$: Για κάθε πραγματικό x να ισχύει: $(2x-1)^{20}-(\alpha x+\beta)^{20}=(x^2+\gamma x+\delta)^{10}$

2Β21. Να βρεθεί πολυώνυμο ν βαθμού $P(x)$: $P^{(\kappa)}(0)=\kappa!$, $\kappa=0,1,...,v$ και στην συνέχεια να λυθεί η εξίσωση $P(x)=P(1/x)$ στο R.

2Β22. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα

$p(x)$: $x^2(p(x)+p''(x))=\left(xp'(x)\right)^2$

2Β23. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα $p(x)$:$[p'(x)]^2=p(x)$

2Β24. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα $p(x)$

$:(p'(x))^2p''(x)=32(p(x)-3), p(0)=-3$

2Β25. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα $p(x)$: $p'(x)=p(x)+x^3+x-2$

2Β26. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα $p(x)$:$x\,p'(x)=p(x)+x^2$

2Β27. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα $p(x)$: $p'(x)$ να είναι παράγοντας του $p(x)$.

2Β28. Έστω πολυώνυμο ν βαθμού $P(x)$: $A_0 p(x) + A_1 p'(x) + \ldots + A_\nu p^{(\nu)}(x) = 0$.Δείξτε ότι όλες οι σταθερές $A_\kappa=0$

2Β29. Αν είναι f: $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, δείξτε ότι: $f^{(\nu)}(x) = \dfrac{(-1)^\nu \nu!}{(x+1)^{\nu+1}}$

($\nu \in N^*$) ($\nu! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \nu$).

2Β30. Έστω f: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$. Βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε:

$f(x)=\alpha x+\beta+\dfrac{\gamma}{x+1}$ και υπολογίστε έτσι την $f^{(\nu)}(x)$, $\nu \in N^*$.

2Β31. Αν $f(x)g(x)=e^x$ όπου f, g παραγωγίσιμες, δείξτε ότι:

$4f'(x)g'(x) \le e^x$, για κάθε $x \in R$

Γ ΟΜΑΔΑ

2Γ1. Έστω f: $f(x)=x^\alpha e^{-1/x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: $f^{(\nu)}(x)=x^{\alpha-2\nu}e^{-1/x}p_\nu(x)$, όπου $p_\nu(x)$ πολυώνυμο νιοστού βαθμού .

2Γ2. Αν $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, δείξτε ότι: $f^{(\nu)}(x) = \dfrac{p_\nu(x)}{(1+x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}$, όπου $p_\nu(x)$ πολυώνυμο νιοστού βαθμού .

2Γ3. Δείξτε ότι: $\left(x^{\nu-1}e^{1/x}\right)^{(\nu)} = (-1)^\nu \dfrac{1}{x^{\nu+1}} e^{1/x}$. $\nu \in N$.

2Γ4. Δείξτε ότι δεν είναι δυνατόν να ισχύει $\ln x = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ $\forall x \in R_+^*$ με P,Q πολυώνυμα

2Γ5. Έστω r_i οι n απλές ρίζες του $p(x)$, και έστω ξ είναι τυχαία ρίζα του πολυωνύμου $f(x)=p(x)-kp'(x), k \neq 0$ Τότε αν $|\rho_i| \leq R \Rightarrow |\xi| \leq R + n|k|$ ενώ αν ρ πραγματικός και $\xi=a+bi$ τότε : $|b| \leq n|k|$ όπου $n>1$ ο βαθμός του $p(x)$

3 ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

Α ΟΜΑΔΑ

Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της $f(x)$ στο x_0

3Α1. $f(x)=2^x$, $x_0=0$

3Α2. $f(x)=x^3$, $x_0= x_0$

3Α3. $f(x)=lnx$, $x_0=1$.

3Α4. $f(x)=x^\nu$, $x_0=0, \nu \in N^*$

3Α5. $f(x)=\sqrt{|x|}$, $x_0=0$.

3Α6. Για ποια τιμή του λ η ευθεία *(ε): $y=\lambda x$* εφάπτεται της C_f όπου $f(x)=x^2+1$. Δώστε γεωμετρική ερμηνεία.

3Α7. Για ποια τιμή του λ η ευθεία *(ε): $y=\lambda x-4$* εφάπτεται της C_f όπου $f(x)=x^2$. Δώστε γεωμετρική ερμηνεία

3Α8. Βρείτε για ποια τιμή του λ η ευθεία $y=x$ είναι εφαπτομένη της C_f όπου $f(x)=ln(\lambda x)$, $\lambda>0$.

3Α9. Βρείτε όλες τις εφαπτόμενες της C_f: $f(x)=\sqrt{x}$ που διέρχονται από το $(0,1)$.

3Α10. Βρείτε όλες τις εφαπτόμενες της C_f: $f(x)=\dfrac{2}{x}$ που διέρχονται από το $(0,1)$.

3Α11. Βρείτε όλες τις εφαπτόμενες της C_f: $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ που διέρχονται από το *(0,1/3)*.

(Προσέξτε! $\sqrt[3]{x^2} \neq x^{2/3}$*)* .

3Α12. Έστω *f:* $f(x)=\sqrt{5-x^2}$, και *g:* $g(x)=6-\sqrt{1+4x-x^2}$.

Βρείτε τις εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από το *(1,3)* και δείξτε ότι αυτές είναι εφαπτόμενες και της C_g. Εξετάστε αν τα σημεία επαφής σχηματίζουν τετράγωνο.

(Μια γεωμετρική αναγνώριση των C_f*,*C_g *θα απλοποιούσε κατά πολύ την άσκηση)*

3Α13. Έστω *f:* $f(x)=\ell n(\varepsilon\varphi x)$ και *g:* $g(x)=\alpha x^2+\beta$, $x\in(0,\pi/2)$. Οι C_f και C_g τέμνονται σε κάποιο σημείο $(x_0,0)$ με $x_0 \in(0,\pi/2)$. Αν οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στο $(x_0,0)$ ταυτίζονται, βρείτε τα *α*, *β*.

3Α14. Έστω *C* η καμπύλη με εξίσωση *f(x)lnf(x)=ex*, Αν *f* παραγωγίσιμη , βρείτε την εφαπτομένη της *C* στο σημείο της *(1,e)*.

3Α15. Έστω ότι η καμπύλη *C* με εξίσωση: $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\nu}+\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\nu}=2$, $\alpha\cdot\beta\neq 0$, $\nu\in N^*$ ορίζει μια παραγωγίσιμη συνάρτηση *y=f(x) (x,y,α,β>0)*. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο *(α,f(α))*.

3Α16. Έστω *C* η καμπύλη με εξίσωση $x^2(x+f(x))=\alpha^2(x-f(x))$, $\alpha\neq 0$. Αν *f* παραγωγίσιμη στο *0*, βρείτε την εφαπτομένη της *C* στο σημείο της *(0,0)*.

3Α17. Βρείτε τα α, β, γ ώστε οι C_f και C_g όπου $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$ και $g(x)=x^3-\gamma$ να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο τους $(1,2)$. *(Λέμε τότε ότι C_f και C_g εφάπτονται στο $(1,2)$.)*

3Α18. Δείξτε ότι η καμπύλη c: $y=e^{\kappa x}\eta\mu(\kappa x)$ εφάπτεται των καμπύλων: c_1: $y=e^{\kappa x}$ και c_2: $y=-e^{\kappa x}$, $\kappa>0$

3Α19. Βρείτε αν υπάρχουν κοινές εφαπτόμενες των C_f και C_g όπου $f(x)=x^3-1$ και $g(x)=x^2+2x$.

3Α20. Βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των C_f και C_g όπου $f(x)=x^2$ και $g(x)=x^2+2x$.

3Α21. Βρείτε αν υπάρχουν τις κοινές εφαπτόμενες των C_f και C_g όπου $f(x)=lnx$ και $g(x)=x$

3Α22. Βρείτε αν υπάρχουν τις κοινές εφαπτόμενες των C_f και C_g όπου $f(x)=1+x^2$ και $g(x)=-1-x^2$

3Α23. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f: $f(x)=x^4+\lambda x^2-\lambda x+1$ στο $(-1,f(-1))$ διέρχεται από σημείο του οποίου οι συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες του λ.

3Α24. Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f με τον άξονα x, στο σημείο όπου η $f(x)=\ell nx$ τέμνει τον άξονα x.

3Α25. Βρείτε το α ώστε να υπάρχει εφαπτομένη της $f(x)=x^2+\alpha x+4$ που να διέρχεται από το σημείο $(0,0)$

3Α26. Βρείτε το α ώστε η εφαπτομένη της $f(x)=\alpha x-\dfrac{x^3}{4}$ στο σημείο που η C_f τέμνει τον άξονα x, να σχηματίζει με τον άξονα x γωνία $\pi/4$.

3Α27. Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της

$f(x)=\frac{\alpha^2}{x}$ με τον άξονα x στο σημείο (α,α) της C_f $(\alpha>0)$.

3Α28. Βρείτε τις εφαπτόμενες της. $f(x)=x^2$ που είναι κάθετες και τέμνονται σε σημείο του άξονα y

3Α29. Βρείτε την εφαπτόμενη της. $f(x)=x^3+2$ που διέρχεται από το $(0,0)$ και βρείτε σε ποια σημεία τέμνει την C_f ?

3Α30. Έστω ότι η εφαπτομένη της $f(x)=x^2$ στο $A(a,f(a))$ τέμνει τον άξονα y στο B Δείξτε ότι δεν μπορεί το τρίγωνο OAB να είναι ισοσκελές με κορυφή το O

3Α31. Αν $A(a,f(a))$, $B(a,g(a))$ και f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις ώστε $f(x)+x=g(x)$ τότε δείξτε ότι οι εφαπτόμενες τους στα A και B τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$.

3Α32. Έστω ότι η εφαπτομένη της $f(x)=\sqrt{x}$ στο $A(a,f(a))$, $\alpha>0$, τέμνει τον άξονα y στο M και τον άξονα x στο B. Δείξτε ότι το M είναι το μέσον του AB

3Α33. Έστω f: $f(x)=x^2+\kappa x+\lambda$. Αν $A(\alpha,f(\alpha))$, $B(\beta,f(\beta))$ να δείξετε ότι η AB είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της C_f στο

$$x_0=\frac{a+b}{2}$$

(Αυτή είναι μια χαρακτηριστική ιδιότητα κάθε παραβολής)

3Α34. Έστω f: $f(x)=\alpha/x$. Δείξτε ότι το τμήμα της εφαπτομένης C_f που περιέχεται μεταξύ των αξόνων διχοτομείται από το σημείο επαφής. $(\alpha\neq 0)$

3Α35. Η ευθεία με εξίσωση $y=3x$ εφάπτεται της C_g στο $M(2,g(2))$. Αν $f(x)=(x-1)^2 g(x)$ να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της f στο M.

Β ΟΜΑΔΑ

3Β1. Βρείτε για ποια τιμή του λ η ευθεία $y=x$ είναι εφαπτομένη της C_f όπου $f(x)=\lambda^x$, $\lambda>0$.

3Β2. Να δείξετε ότι η $f(x)=e^x$ και η $g(x)=-x^2$ έχουν κοινή εφαπτομένη

(Δεν ζητείται και να την βρείτε!)

3Β3. Να δείξετε ότι η $f(x)=lnx$ και η $g(x)=e^x$ έχουν κοινή εφαπτομένη

3Β4. Να δείξετε ότι η $f(x)=x^{2n}$ και η $g(x)=(x-1)^{2n-1}$ έχουν κοινή εφαπτομένη

3Β5. Να δείξετε ότι η $f(x)=e^x$ και η $g(x)=-1/x$ έχουν κοινή εφαπτομένη

3Β6. Αν $f(x)=x(x-1)...(x-n), g(x)=-x(x-1)...(x-n-1)$

τότε δείξτε ότι σε κάποια από τα κοινά σημεία των C_f, C_g υπάρχει κοινή εφαπτομένη τους

3Β7. Να βρείτε για ποιες του θετικού ακέραιου $\nu<4$ η εφαπτομένη της $f(x)=x^\nu$ τέμνει την C_f και σε δεύτερο σημείο εκτός από το σημείο επαφής

3Β8. Έστω $g_\lambda(x)=\lambda f(x)$ όπου f παραγωγίσιμη στο R. Θεωρούμε τις εφαπτόμενες των g_λ στα $(x_0,g_\lambda(x_0))$. Δείξτε ότι διέρχονται δια σταθερού σημείου ανεξάρτητου του λ. ($f'(x_0)\neq 0$)

3Β9. Αν $f'(x)\neq 0$, $h(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, $\exists f''(x)$ τότε να δείξετε ότι η εφαπτομένη της h στο σημείο που τέμνει τον άξονα $x'x$ είναι παράλληλη με την ευθεία $x\text{-}y=0$.

3Β10. Έστω C η καμπύλη με εξίσωση: $\dfrac{\alpha}{x^2}+\dfrac{\beta}{y^2}=1$, $\alpha\cdot\beta\neq 0$. Η εφαπτομένη της C στο (x_0,y_0) διέρχεται από το $(x_1,0)$. Δείξτε ότι: $x_0^3=\alpha x_1$.

3Β11. Έστω $f:R\to R$, $f(x)f(-x)=|x|$, $f(x)>0\ \forall x\in(0,+\infty)$, f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Τότε δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R^* και δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 και εξετάστε αν ορίζεται εφαπτομένη της f στο $(0,0)$.

3Β12. Αν $p(x)$ πολυώνυμο τουλάχιστον δευτέρου βαθμού και είναι $y=g(x)$ η εξίσωση εφαπτομένης του $p(x)$ στο σημείο $(\alpha,p(\alpha))$ να δείξετε ότι το πολυώνυμο $p(x)\text{-}\ g(x)$ έχει παράγοντα το $(x\text{-}a)^{2.}$

4 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΡΥΘΜΟ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Α ΟΜΑΔΑ

4Α1. Η περίμετρος μιας κυκλικής κηλίδας μεταβάλλεται με ρυθμό $2m/sec$ όταν η ακτίνα της είναι $12m$. Να βρεθεί την ίδια στιγμή ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού της

4Α2. Ο όγκος μιας σφαίρας μειώνεται με ρυθμό $-4m^3/sec$ την στιγμή που η ακτίνα της είναι $2m$. Να βρεθεί την ίδια στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειάς της. (Δίνεται ότι η επιφάνεια $E=4\pi\rho^2$).

4Α3. Να βρεθεί ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της επιφάνειάς κύβου την ίδια στιγμή που η διαγώνιος του αυξάνεται με ρυθμό *3m/sec* και ο όγκος του είναι $8m^3$

4Α4. Ο όγκος κώνου είναι $8m^3$ και το ύψος του *2m* την στιγμή που οι ρυθμοί μεταβολής τους είναι και οι δυο ίσοι με $1m^3/sec$ και *2m/sec* αντίστοιχα. Να βρεθεί την ίδια στιγμή ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της επιφάνειάς της βάσης του και της γωνίας της κορυφής του

4Α5. Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου *ΑΒΓΔ* αυξάνονται με ίσους στιγμιαίους ρυθμούς μεταβολής *2m/sec* όταν το *ΑΒΓΔ* είναι τετράγωνο εμβαδού $1m^2$.Να βρεθεί την ίδια στιγμή στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της διαγωνίου του

4Α6. Να βρεθεί ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του όγκου κυλίνδρου την στιγμή που η ακτίνα της βάσης του αυξάνεται με ρυθμό *3m/sec* , το ύψος του αυξάνεται με ρυθμό *1m/sec* , ο όγκος του είναι $8m^3$ και η ακτίνα του είναι *2m*

4Α7. Ένας άνθρωπος ύψους *170cm* κινείται προς μια φωτεινή πηγή που απέχει από το έδαφος *300cm*. Αν η ταχύτητα του ανθρώπου είναι *7,2Km/h* να βρεθεί με τι ταχύτητα κινείται η σκιά του κεφαλιού του.

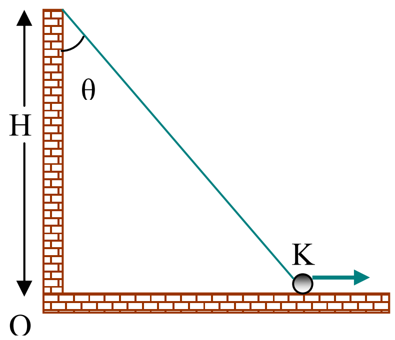
4Α8. Σε μια ευθύγραμμη κίνηση το μέτρο της ταχύτητας είναι ανάλογο της ρίζας της μετατόπισης. Αν η κίνηση δεν αλλάζει φορά δείξτε ότι η επιτάχυνση του κινητού είναι σταθερή.

4Α9. Η βαρομετρική πίεση p μεταβάλλεται συναρτήσει του ύψους h σύμφωνα με την σχέση $ln\frac{p}{p_0}=c.h$ όπου c μια σταθερά και p_0 η πίεση στο έδαφος ίση με $1Atm$.Σε ύψος $5430\ km$ η πίεση γίνεται το μισό της p_0.Να βρεθεί σ αυτό το ύψος ο ρυθμός μεταβολής της πίεσης ως προς το ύψος.

4Α10. Κινητό κινείται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $Ax+By+C=0$. Αν είναι $B\neq 0,\frac{dx}{dt}=K$ σταθερό δείξτε ότι το διάνυσμα της ταχύτητας του κινητού είναι σταθερό.

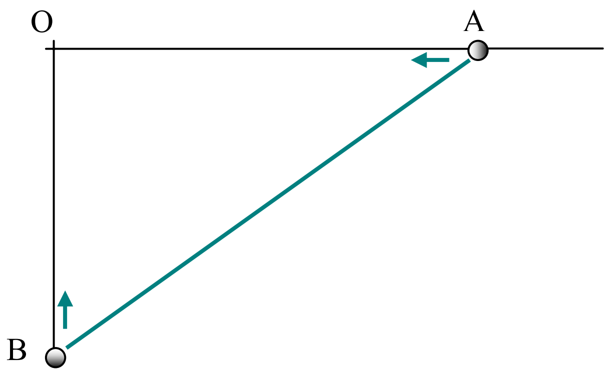
4Α11. Ένα σακί περιέχει άμμο η οποία διαφεύγει από μια τρύπα έτσι ώστε μετά από $t\ sec$ η ποσότητα που βρίσκεται στο σακί να είναι $s(t)=50(1-\frac{t^2}{15})^3$ κιλά. Να βρείτε πόση άμμο περιέχει αρχικά το σακί, με ποιόν ρυθμό τρέχει η άμμος μετά από $1sec$ και σε πόσο χρόνο περίπου θα αδειάσει το σακί.

4Α12.



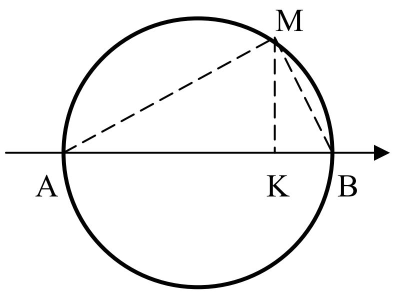
Όταν $OK=s$ τότε είναι $\frac{ds}{dt}=V$. Βρείτε την ίδια χρονική στιγμή το $\frac{d\theta}{dt}$. Δεδομένα θεωρείστε τα s,V,H

4Α13.



Τα κινητά *Α,Β* κινούνται προς το *Ο* χωρίς να έχουν αλλάξει φορά. Την στιγμή που *ΟΑ=4Km* και *ΟΒ=3Km* οι ταχύτητες τους είναι αντίστοιχα *8Km/h , 4Km/h*. Να βρεθεί την ίδια στιγμή ο ρυθμός μεταβολής του μήκους *ΑΒ*, του εμβαδού του τριγώνου *ΟΑΒ,* καθώς και οι ρυθμοί μεταβολής των γωνιών του τριγώνου.

4Α14.

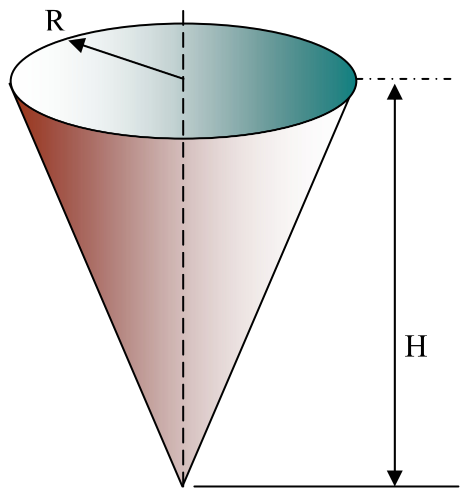


Είναι *ΑΒ=2m* και το *Κ* κινείται με σταθερή ταχύτητα *0.1m/s* από το *Α* προς το *Β*. Υπολογίστε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας *ΜΑΒ* σε συνάρτηση με τον χρόνο.

4Α15. Αν $\frac{dx}{dt}=e^t+e^{-t}$, $\frac{dy}{dt}=e^t-e^{-t}$ και το σημείο *M(x,y)* στην αρχή των χρόνων βρίσκεται στο *(0,2),* τότε να δείξετε ότι το *M* διαγράφει τόξο υπερβολής και να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της υπερβολής στο *M* με τον άξονα *χ΄χ* την στιγμή κατά την οποία $y=e+\frac{1}{e}$

4Α16. Βλήμα *B(x,y)* εκτοξεύεται από το σημείο *O* και η εξίσωση τροχιάς του είναι $y=2x-x^2$. Είναι γνωστό ότι $x(0)=0, \frac{dx}{dt}=A=$σταθερό. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του *y* όταν *x=β* και η επιτάχυνση του βλήματος την ίδια χρονική στιγμή. Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η *OB* με τον άξονα *x* την ίδια χρονική στιγμή ?

4Α17.



Ο κώνος γεμίζει με υγρό με σταθερή παροχή $0.1m^3/s$,$H=1m$, $R=0,4m$. Βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο ανεβαίνει η στάθμη του υγρού την στιγμή που έχει φθάσει στο μισό ύψος του κώνου.

4Α18. Σε μια Α.Α.Τ να δείξετε ότι : ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ως προς την απομάκρυνση είναι ίσος με την δύναμη επαναφοράς, ενώ ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας ως προς την ταχύτητα είναι ίσος με την ορμή του σωματιδίου που εκτελεί την ΑΑΤ. Βρείτε ακόμη το πηλίκο των στιγμιαίων ρυθμών μεταβολής της δυναμικής και κινητικής ενέργειας

4Α19. Να βρεθεί η επιτάχυνση κινητού που κινείται ευθύγραμμα όταν ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ως προς την απομάκρυνσή είναι $2sec^{-1}$ και η ταχύτητά του την ίδια στιγμή είναι $5m/sec$

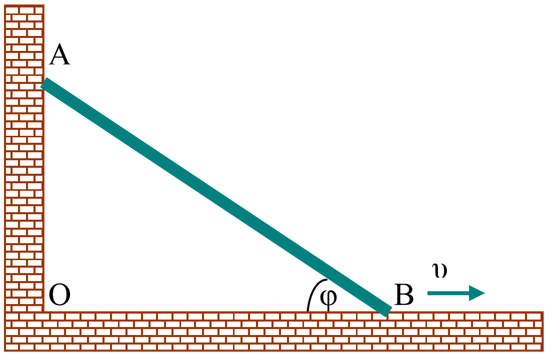
4Α20. Ένα κωνικό παγόβουνο αναδύεται με ταχύτητα *0,1m/μήνα* Η γωνία του κώνου είναι 60^0 και το ύψος του *100m* Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της κυκλικής βάσης που είναι ορατή στην επιφάνεια της θάλασσας καθώς και τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής του όγκου που εξέχει την στιγμή κατά την οποία έχει αναδυθεί σε ύψος *25m*

Β ΟΜΑΔΑ

4Β1. Ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται το μήκος μιας χορδής AB κύκλου είναι A την στιγμή που το μήκος της είναι $Δ$. Βρείτε την ίδια στιγμή τον ρυθμό μεταβολής του μικρότερου κυκλικού τμήματος .(Θεωρείστε ότι ακτίνα του κύκλου είναι R)

4Β2. Ο όγκος του κορμού ενός δέντρου είναι ανάλογος του κύβου της διαμέτρου του και η φλούδα του κορμού αυξάνει ομοιόμορφα από χρόνο σε χρόνο. Δείξτε ότι ο ρυθμός αύξησης του όγκου, όταν η διάμετρος είναι *90 cm,* είναι *25* φορές τον ίδιο ρυθμό, όταν η διάμετρος είναι *18 cm.*

4Β3.



Η σκάλα ΑΒ μήκους d γλιστράει όπως στο σχήμα, ώστε η ταχύτητα του άκρου Β να είναι σταθερή και ίση με υ. Αρχικά ήταν κατακόρυφη. Αν t η διάρκεια κίνησης πριν το Α να φτάσει στο έδαφος, τότε

ι)Να εκφράσετε τα OA , OB συναρτήσει του t και να αποδείξετε ότι το μέτρο της ταχύτητας του Α δίνεται από την σχέση $\upsilon_A = \dfrac{\upsilon^2 t}{\sqrt{d^2 - \upsilon^2 t^2}}$

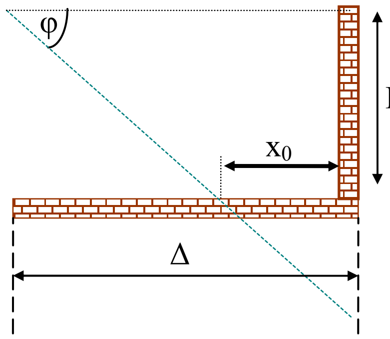
ιι)Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAB συναρτήσει του t

ιιι)Να βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης του άνω άκρου της σκάλας

ιv)Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας φ. *

4Β4. Σημείο Μ κινείται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $9x^2 + 16y^2 = 25$ και σε κάθε θέση ισχύει $\frac{dx}{dt} = 2$. Βρείτε το $\frac{dy}{dt}$ όταν $x=5/3$ και όταν $x=0$. Ακόμη όταν $x=y=1$ βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$ και δείξτε ότι είναι ίδιος με τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης στο ίδιο σημείο.

4Β5.



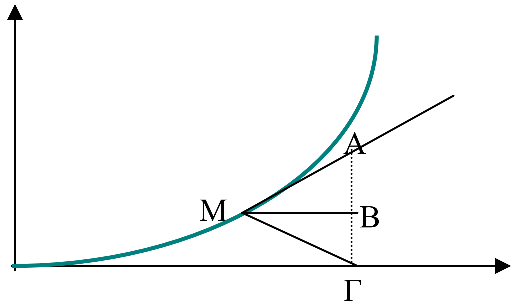
Ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας φ είναι ίσος με ω όταν το μήκος της σκιάς είναι x_o. Βρείτε με τι ταχύτητα αυξάνεται η σκιά εκείνη τη στιγμή. *(Η,Δ* δεδομένα)

4Β6. Η καμπύλη έχει εξίσωση $y=x^2$ και η συντεταγμένη $x_M=t/2$ με $0<t<1$.

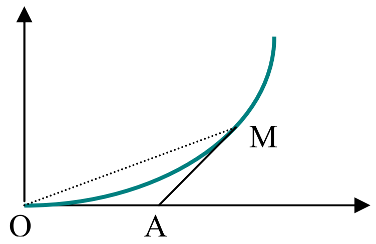
i) Να βρεθούν οι ρυθμοί μεταβολής των γωνιών $A\hat{M}B$, $B\hat{M}\Gamma$

ii) Να βρεθούν οι ρυθμοί μεταβολής των μηκών MA, MB, $M\Gamma$

iii) Να βρεθεί και ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $MA\Gamma$ (η MA είναι εφαπτομένη της καμπύλης και $\Gamma(1/2,0)$)

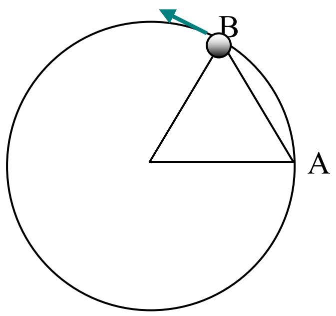


4B7.



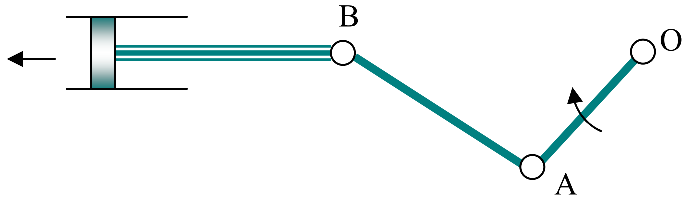
Η καμπύλη έχει εξίσωση $y=x^2$.Όταν η γωνία $O\hat{M}A$ παίρνει την μέγιστη τιμή της ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του A είναι ίσος με $3/2$ όπου MA είναι εφαπτομένη της καμπύλης. Βρείτε τότε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας $M\hat{O}A$

.**4B8.**



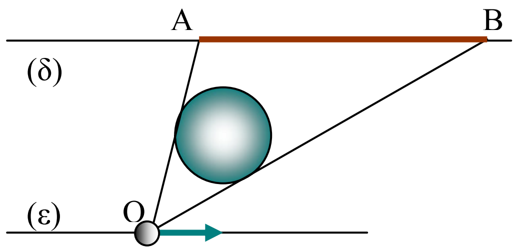
Ένα κινητό ξεκινά από το A και κινείται πάνω στον κύκλο. Όταν φθάνει στο B μετρήθηκε ότι η επίκεντρη γωνία είναι 60^0 και το μέτρο της ταχύτητας του κινητού $2m/sec$. Να βρείτε την ίδια στιγμή τον ρυθμό μεταβολής του μήκους της χορδής AB.

4Β9. Η ράβδος *ΟΑ* περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω και έχει μήκος l ενώ η *ΑΒ* έχει μήκος d. Να βρεθεί η ταχύτητα του εμβόλου συναρτήσει του χρόνου t



4Β10. Έστω $y=lnx$. Η εφαπτομένη της στο σημείο της $A(a,f(a))$ τέμνει τον άξονα x στο σημείο B Αν ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του y είναι *4m/sec* όταν $a=e$ να βρεθεί την ίδια στιγμή ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του B

4Β11. Το κινητό Ο κινείται με σταθερή ταχύτητα *2m/sec* κατά μήκος της ευθείας *(ε)*. Κυκλικό εμπόδιο έχει το κέντρο του στην μεσοπαράλληλη των ευθειών *(ε)* , *(δ)*, έχει διάμετρο *2m* ίση με το μισό της απόστασης των *(ε)* , *(δ)* και δημιουργεί την «σκιά» *ΑΒ*. Να βρεθεί ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του μήκους *ΑΒ* την στιγμή κατά την οποία το τρίγωνο *ΟΑΒ* γίνεται ορθογώνιο για πρώτη φορά



5 ROLLE , Θ.Μ.Τ

Α ΟΜΑΔΑ

5Α1. Έστω $f(x)=ax^4+x^2-ax+1$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(0,1)$: $f'(\xi)=2\xi$

5Α2. Δείξτε ότι μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών ενός πολυωνύμου υπάρχει ρίζα της παραγώγου του

5Α3. Αν $f(x)=-x^3+x^2+2x+2$ δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(-1,0)$: η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον $x'x$.

5Α4. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $f(a)=b$, $f(b)=a$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο (a,b) : η εφαπτομένη της C_f στο ξ να είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-x$

5Α5. Έστω f συνεχής στο $[2,3]$, παραγωγίσιμη στο $(2,3)$ και $f(3)=f(2)+5$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(2,3)$: $f'(\xi)=2\xi$

5Α6. Έστω f συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b) και $f(a)-f(b)=a^2-b^2$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο (a,b): $f'(\xi)=2\xi$

5Α7. Έστω f συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b) και $f(a)=b^2$, $f(b)=a^2$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο (a,b): $f'(\xi)=2\xi-2(a+b)$

5Α8. Έστω f συνεχής στο $[1,3]$, παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ και $f^2(3)=f^2(1)+8$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(1,3)$: $f'(\xi)f(\xi)-\xi=0$

5Α9. Έστω f συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f(1)=0$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(0,1)$: $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$

5Α10. Έστω f συνεχής στο $[0,b]$, παραγωγίσιμη στο $(0,b)$ και $f(0)=0$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(0,b)$: $2f'(\xi)f(\xi)=\dfrac{f^2(b)}{b}$

5Α11. Έστω f παραγωγίσιμη στο R, $m \le f'(x) \le M$ $\forall x \in R$. Δείξτε ότι υπάρχει K : $|f(x) - f(y)| \le K|x - y|$ $\forall x, y \in R$.

Αν 0<K<1 η f ονομάζεται συνάρτηση συστολής

5Α12. Έστω f παραγωγίσιμη στο R και $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in R$. Δείξτε ότι η f είναι 1-1 συνάρτηση. Ισχύει το αντίστροφο?

5Α13. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\alpha+2b]$, παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\alpha+2b)$ και k ο αριθμός που ορίζεται από την ισότητα

$k = \dfrac{f(a) - 2f(a+b) + f(a+2b)}{b^2}$ Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο

$(0,b)$: $f'(a+2\xi)-f'(a+\xi)=k\xi$

5Α14. Έστω ότι f' συνεχής στο $[0,2]$ και $f(0)+f(2)=f(1)$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(0,2)$: $f(1) = 2f(2) - 2f'(\xi)$

5Α15. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο (α,b) και υπάρχουν ξ_1, ξ_2, $t_1>0, t_2>0$: $t_1 f'(\xi_1)+t_2 f'(\xi_2)=0$. Δείξτε ότι υπάρχει ρίζα της f' στο (α,b).

5Α16. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,b]$, παραγωγίσιμη στο (α,b) και $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) \in R$.Δείξτε ότι η $f'(x)$ είναι συνεχής στο (α,b). Το x_0 είναι οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος (α,b).

(Αυτή είναι μια σημαντική ιδιαιτερότητα που παρουσιάζει κάθε f ΄)

5Α17. Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και $2f(3)=f(1)+f(5)$. Δείξτε ότι η $f'(x)$ δεν είναι 1-1 συνάρτηση και ότι η $f''(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα

5Α18. Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και $f(0)=f(1)=1$, $f(-1)=-1$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(-1,1)$: $f''(\xi) = 6\xi - 2$

5A19. Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και $a<b<c$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου . Αν και τα $f(a),f(b),f(c)$ είναι και αυτά διαδοχικοί όροι αριθμητικής μιας άλλης προόδου, τότε δείξτε ότι η $f''(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα

5A20. Έστω $f: R \to R$ τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε $f(1)=f(0)=f'(0)=f''(0)=0$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(0,1)$: $f'''(\xi)=0$.

5A21. $f:R\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η εφαπτομένη της C_f σε τυχαίο σημείο της C_f έχει για μοναδικό σημείο τομής με την C_f το σημείο επαφής όταν f'' έχει σταθερό πρόσημο.

5A22. Δείξτε ότι αν στην γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης υπάρχουν τρία ή και περισσότερα συνευθειακά σημεία. τότε η παράγωγός της δεν μπορεί να είναι *1-1*

5A23. Έστω f συνεχής στο $[3,5]$, παραγωγίσιμη στο $(3,5)$ και $f(3)=6$, $f(5)=10$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(3,5)$: η εφαπτομένη της f στο ξ να διέρχεται από το $(0,0)$. **(υπ)**

5A24. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,b]$, παραγωγίσιμη στο (α,b) και $f(a)=f(b)=0$, $a>0$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ : η εφαπτομένη της f στο ξ να διέρχεται από το $(0,0)$.

5A25. Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν υπάρχει «χορδή» της C_f που διέρχεται από το $(0,0)$ τότε υπάρχει και εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το $(0,0)$

5Α26. Έστω *f* συνεχής στο *[α,b]* , παραγωγίσιμη στο *(α,b)* και *2f(a)=f(b)*. Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-2a+b}$. Δείξτε ότι υπάρχει *ξ :* *g΄(ξ)=0* και στην συνέχεια η εφαπτομένη της f στο *ξ* να διέρχεται από το *(2α-b,0)*.

5Α27. Έστω *f* συνεχής στο *[1,2]* , παραγωγίσιμη στο *(1,2)* και *f(2)=4f(1)*. Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$. Δείξτε ότι υπάρχει *ξ* στο *(1,2) : g΄(ξ)=0*. Δείξτε στην συνέχεια ότι υπάρχει σημείο $A \in C_f$: η διάμεσος *ΑΜ* του τριγώνου *ΟΑΒ* να είναι εφαπτομένη της C_f. *Β* είναι η προβολή του *Α* στον *xx΄* και *Ο* η αρχή των αξόνων .

5Α28. Έστω *f* παραγωγίσιμη στο *R* και η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει σε δυο τουλάχιστον σημεία την πρώτη διχοτόμο των αξόνων . Δείξτε ότι υπάρχει εφαπτομένη της συνάρτησης που σχηματίζει με τον άξονα *x* γωνία 45^0

5Α29. Έστω *f* συνεχής στο *[α,b]* , παραγωγίσιμη στο *(α,b)* και *f(a)=f(b)* Αν *A(a,f(a)) , B(b,f(b))* δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$: η $\varepsilon\varphi(\widehat{MAB})$ να είναι τριπλάσια της $\varepsilon\varphi(\widehat{MBA})$ όπου *M(ξ, (ξ))*

5Α30. Έστω $f : R \to R$ τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν υπάρχει εφαπτομένη *(ε)* της C_f που εφάπτεται της C_f και σε ένα άλλο σημείο εκτός του σημείου επαφής τότε υπάρχει *ξ* $f'''(\xi)=0$

5Α31. Έστω $f : [0,1] \to [0,1]$ παραγωγίσιμη συνάρτηση : $f(0)=0$, $f(1)=1$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1) : f(\xi)=1-\xi$ και στην συνέχεια ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 : f'(\xi_1)f'(\xi_2)=1$

5Α32. Έστω f συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$, παραγωγίσιμη στο $(-\alpha,\alpha)$ και $f(-\alpha)=f(\alpha)=0, f(0)=a$. Δείξτε ότι υπάρχουν δυο εφαπτόμενες της C_f κάθετες μεταξύ τους.

5Α33. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,3\alpha]$, παραγωγίσιμη στο $(\alpha,3\alpha)$ και $f(a)=2\alpha, f(3a)=a>0$ δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(a,3\alpha)$ $:2f(\xi)=\xi+\alpha$. Μετά δείξτε ότι υπάρχουν αριθμοί y_i του διαστήματος $(\alpha,3\alpha) : f'(y_1)f'(y_2)=1/4$.

5Α34. Αν f παραγωγίσιμη στο $[a,a+1]$, $f(a)=a+1$, $f(a+1)=a-2$, δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(a,a+1) : f(\xi)=3\xi-2(\alpha+1)$. Μετά δείξτε ότι υπάρχουν αριθμοί y_i του διαστήματος $(\alpha,\alpha+1)$: $f'(y_1)f'(y_2)=9$.

5Α35. Έστω f,g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες στο (α,β) και $g'(x) \neq 0$ στο (α,β) Δείξτε ότι $g(a) \neq g(\beta)$ και ότι υπάρχει ξ στο (a,β) : $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(\beta)-f(a)}{g(\beta)-g(a)}$ Ποιο θεώρημα προκύπτει αν $g(x)=x$

5Α36. Έστω f,g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες στο (α,β) και $f(x) \neq 0$ στο $[\alpha,\beta]$ Δείξτε ότι αν $g(a)-g(b)=\ell n\dfrac{f(a)}{f(b)}$ τότε υπάρχει ξ στο (a,β) : $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)} = g'(\xi)$

5Α37. Έστω f,g συνεχείς στο $[0,1]$, παραγωγίσιμες στο $(0,1)$, $f(x)g(x) \neq 0 \ \forall x \in (0,1)$ και $f(0)=g(1)=0$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(0,1)$: $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \dfrac{g'(\xi)}{g(\xi)} = 0$

5Α38. Έστω f,g συνεχείς στο $[a,b]$, παραγωγίσιμες στο (a,b), $a>0$, $f(x)g(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$ και $bf(a)g(a) = af(b)g(b)$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο (a,b) : $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = \frac{1}{\xi}$

5Α39. Έστω f,g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες στο (α,β) και $f(x)g(x) \neq 0$ στο $[\alpha,\beta]$. Αν $f(\alpha)g(\beta) = g(\alpha)f(\beta)$..Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο (α,β) : $f'(\xi)g(\xi) = g'(\xi)f(\xi)$

5Α40. Έστω f,g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες στο (α,β) και $f(a) = g(b) = 0$ Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο (α,β) : $f'(\xi)g(\xi) + g'(\xi)f(\xi) + a + b = 2\xi$

5Α41. Έστω f,g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες στο (α,β) και $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$, $g(\alpha)g(\beta) \neq 0$, $f'(x)g(x) \neq g'(x)f(x) \ \forall x \in (\alpha,\beta.)$ Δείξτε ότι δεν είναι δυνατόν να ισχύει $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in (\alpha,\beta)$.

5Α42. Έστω f,g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες στο (α,β) και $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$ Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο (α,β)

$$\frac{f'(\xi)}{f(a) - f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(b) - g(\xi)} = 1$$

Β ΟΜΑΔΑ

5Β1. Έστω f συνεχής στο $[0,\pi/2]$, παραγωγίσιμη στο $(0,\pi/2)$ και $f(0)=0$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(0,\pi/2)$: $f'(\xi) = f(\xi)\varepsilon\varphi\xi$

5Β2. Έστω f παραγωγίσιμη στο R , $f(0)=0$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(0,\pi/4)$: $f'(\xi) = \frac{1+\varepsilon\phi\xi}{1-\varepsilon\phi\xi} f(\xi)$

5Β3. Έστω $f : [0,1] \to [0,+\infty)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $0<a<b<1$: $f(a)=0=f(0)$, $f(b)=b$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(0,1)$: $f'(\xi)=c$ όπου c τυχαίο σημείο του $(0,1)$.

5B4. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,b]$, παραγωγίσιμη στο (α,b) και $f(a)=f(b)=0$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο (a,b) : $f'(\xi)=k f(\xi)$

5B5. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, $f(0)=0$, $f(x) \neq 0$ $\forall x \in (0,1]$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(0,1)$:

$$\frac{2f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

5B6. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,b]$, παραγωγίσιμη στο (α,b) και $f(x) \neq 0$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο (a,b) :

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{1}{b-\xi} + \frac{1}{a-\xi}$$

5B7. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,b]$, παραγωγίσιμη στο (α,b) Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο (a,b) : $f'(\xi) = \dfrac{1}{b-\xi} - \dfrac{1}{\xi-a}$

5B8. Έστω $f : [1,4] \to (0,+\infty)$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $f(1)f(2)=f(3)f(4)$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(1,4)$: $f'(\xi) = 0$

5B9. f παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με συνεχή παράγωγο και $f'(0)>0$, $f(1)-f(0)=1/2$ Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(0,1)$: $f'(\xi)=2\xi$

5B10. Αν f παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$ με συνεχή παράγωγο και $f'(-1)<3$, $f(1)-f(-1)>3$ Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(-1,1)$: $f'(\xi)=3\xi^2$

5B11. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,b]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,b) και $f(a)=f(b)=0$. Είναι

$k = \dfrac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}$, $c \in (a,b)$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο (a,b) : $f''(\xi)=k$

5B12. Έστω $f:[1,4]\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με f'' συνεχή και $f(2)<f(1)<f(4)<f(3)$ Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(1,4)$: $f''(\xi)=0$

5B13. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,b]$, παραγωγίσιμη στο (α,b) και $f(a)=f(b)=0$, $c<a$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ : η εφαπτομένη της f στο ξ να διέρχεται από το $(c,0)$.

5B14. Έστω $f:(k,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν υπάρχει χορδή της C_f που διέρχεται από το $(m,0)$ με $m<k$ τότε υπάρχει και εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το $(m,0)$

5B15. Έστω f: $f(x)=x^{2v}$. Δείξτε ότι μοναδικό σημείο τομής των C_f και της εφαπτομένης είναι το σημείο επαφής. ($v\in N^*$)

5B16. Έστω f τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και η ευθεία $y=ax+b$ είναι εφαπτομένη της C_f στα ξ_1,ξ_2 . Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο (ξ_1,ξ_2) : $f'(\xi)=a$. Δείξτε στην συνέχεια ότι υπάρχει w : $f'''(w)=0$.

5B17. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,b]$, παραγωγίσιμη στο (α,b) και $f(a)=b,f(b)=a>0$ Δείξτε ότι υπάρχουν ξ_1,ξ_2 στο (α,b) : $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=1$.

5B18. Αν $f:[0,1]\to R$ $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ να δείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 στο $(0,1)$ $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=2$ να δείξετε ότι υπάρχουν τώρα $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ στο $(0,1)$:$f(a_1)=1/n$, $f(a_2)=2/n$, ... ,$f(a_n)=n/n=1$ $(a_0=0)$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής δείξτε ότι υπάρχουν αριθμοί y_i του διαστήματος

$(0,1)$: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f'(y_i)} = n$

(Η διαμέριση εδώ έγινε στον άξονα yy΄)

5B19. Αν $\exists f'(x) \neq 0, \forall x \in [a,b]$ και η f είναι γνήσια μονότονη δείξτε ότι : Υπάρχουν μοναδικά $c,d \in (a,b)$ και πραγματικός αριθμός κ :

$f(c) - f(a) = 2k$
$f(d) - f(c) = k$
$f(b) - f(d) = 3k$

Στην συνέχεια δείξτε ότι υπάρχουν αριθμοί ξ_1, ξ_2 και ξ_3 στο

(α,b) : $\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} + \frac{3}{f'(\xi_2)} = \frac{6(b-a)}{f(b)-f(a)}$

5B20. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,b]$, παραγωγίσιμη στο (α,b) και $f(a)=f(b)$ Δείξτε ότι υπάρχουν ξ_1,ξ_2 στο (α,b) : $f'(\xi_1)+3f'(\xi_2)=0$. Εξηγείστε γεωμετρικά

5B21. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,b]$, παραγωγίσιμη στο (α,b) ,$f(a)=f(b)$ και $k,l,m>0$ Δείξτε ότι υπάρχουν ξ_1,ξ_2, ξ_3 στο (α,b) : $kf'(\xi_1)+lf'(\xi_2)+mf'(\xi_3)=0$.

5B22. Αν f παραγωγίσιμη στο (α,b) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = k \in R$, δείξτε ότι η $f'(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,b).

(Γενίκευση του Rolle για ανοικτό διάστημα)

5B23. Αν f παραγωγίσιμη στο (α,b) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$, δείξτε ότι η $f'(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,b).

5B24. Έστω f παραγωγίσιμη στο R, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $f(0)=0$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο R : $f'(\xi)=0$

5Β25. Έστω *f* συνεχής στο $[\alpha, +\infty)$, παραγωγίσιμη στο $(\alpha, +\infty)$ $f(a)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ Δείξτε ότι η $f\,'(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(\alpha, +\infty)$.

5Β26. Έστω *f* παραγωγίσιμη στο $(\alpha, +\infty)$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Δείξτε ότι η $f\,'(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(\alpha, +\infty)$.

(και άλλες γενικεύσεις του Rolle)

5Β27. Έστω *k* ο αριθμός που ορίζεται από την ισότητα $f(b)=f(a)+\dfrac{b-a}{1!}f'(a)+\dfrac{(b-a)^2}{2!}k$,όπου *f* στο $[\alpha,b]$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο (a,b)

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(\xi)$$

*(Το συμπέρασμα είναι εξαιρετικό! Ανοίγει ολόκληρο κεφάλαιο παραπέρα στην ανάλυση με τίτλο : **Σειρές Taylor!!** Κάντε λίγο υπομονή. Μήπως μπορείτε να το γενικεύσετε ;)*

Γ ΟΜΑΔΑ

5Γ1. Έστω *f* παραγωγίσιμη στο $[\alpha,b]$, $f\,'(a)=f\,'(b)=0$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο (a,b) : $f\,'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$.

(θεώρημα Flett)

5Γ2. Έστω *f* δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,b]$, $f(x)f\,'(x)\neq 0$ $\forall x\in[a,b]$ και $f(\alpha)f\,'(\beta)=f\,'(\alpha)f(\beta)$ Δείξτε ότι υπάρχουν ξ_1,ξ_2 : $f(\xi_1)f\,''(\xi_2)+f(\xi_2)f\,''(\xi_1)>0$

5Γ3. Αν $\exists f'', f'$ γνήσια αύξουσα στο $[a,b] : f(a)=f(b)=0$

Δείξτε ότι $\forall x \in (a,b)$ υπάρχουν $\xi_1<\xi<,\xi_2$ στο (α,b) :

$$f'(\xi_1)-f'(\xi_2) \leq \frac{4f(x)}{b-a} \ , \ f(x) \geq -f''(\xi)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

5Γ4. Αν f παραγωγίσιμη με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $[a,b]$ τότε $\exists \xi \in (a,b) : |f'(\xi)|=1$

(Αν ερμηνεύσετε γεωμετρικά τα πράγματα γίνονται απλά)

<u>Δ ΟΜΑΔΑ</u>

5Δ1. Έστω ότι f παραγωγίσιμη για $x>0$, $f(1)=0$, $f(x)=f(1/x)$ για κάθε $x>0$ Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι υπάρχουν τρεις θετικοί αριθμοί a,b,c διαφορετικοί μεταξύ τους ώστε

$$f'(a)+f'(b)+f'(c)+f(x)=0, \forall x \in (1,+\infty)$$

5Δ2. Αν f,g παραγωγίσιμες στο $[a,b]$, $g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in [a,b]$ και $\frac{f'(a)}{g'(a)}=\frac{f'(b)}{g'(b)}$ τότε να δειχθεί ότι

$$\exists \xi \in (a,b) : \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

(γενίκευση Flett για απλούστευση θεωρείστε ότι g' = συνεχής. Το θ. Flett έχει μια πολύ εντυπωσιακή γεωμετρική ερμηνεία:. Υπάρχει χορδή που είναι και εφαπτομένη της C_f όταν υπάρχουν δυο // εφαπτόμενες, η οποία όμως χρειάζεται την έννοια της κυρτότητας για να κατανοηθεί, λίγο αργότερα)

5Δ3. Αν f' συνεχής στο R και $f(x+f'(x))=f(x), \forall x \in R$ τότε

1.Δείξτε ότι η f' έχει ρίζα

2.Δώστε παράδειγμα μη σταθερής συνάρτησης

3.Αν η f' έχει τουλάχιστον δυο ρίζες δείξτε ότι η f είναι σταθερή στο R

5Δ4. Έστω $f : R \to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη με $f(0)=2, f(1)=1, f'(0)=-2$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1): f(\xi)f'(\xi)+f''(\xi)=0$.

5Δ5. Έστω συνάρτηση $f:[0,1] \to [0,1]$, μη σταθερή και συνεχής . Να αποδείξετε πως υπάρχουν $\xi_1 \neq \xi_2 \in [0,1]$ στο $[0,1]: |f(\xi_1)-f(\xi_2)| = (\xi_1-\xi_2)^2$

6 ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΩΝ ΜΕ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

Α ΟΜΑΔΑ

6Α1. Έστω ότι οι συναρτήσεις *f, g* είναι παραγωγίσιμες και $f'(x)+g'(x)f(x)=0 \quad \forall x \in R$. Δείξτε ότι η συνάρτηση με τύπο $f(x)e^{g(x)}$ είναι σταθερή.

(Από εδώ μπορείτε να βρείτε τον τύπο της f)

6Α2. Έστω ότι οι συναρτήσεις *f, g,h* είναι παραγωγίσιμες και $f'(x)+g'(x)f(x)=h(x) \ \forall x \in R$. Αν $h(x)e^{g(x)} = w'(x)$ και $f(a)=A$ βρείτε τον τύπο της *f.*

(είναι γενίκευση της προηγούμενης. Αργότερα θα έχετε μεγαλύτερη βοήθεια για την εύρεση της w με ολοκληρώματα)

6Α3. Έστω $f:(0,+\infty) \to R : f(1)=e \ , \ x^2 f'(x)+f(x)=0$.

Δείξτε ότι η συνάρτηση με τύπο $g(x)=e^{\frac{-1}{x}} f(x)$ είναι σταθερή και έτσι βρείτε τον τύπο της *f.*

6Α4. Αν $f : R \to R: f(1)=e^2, f'(x)=-4f(x)$, βρείτε τον τύπο της *f(x)*

6Α5. Αν $f:(0,+\infty) \to R : f(1)=e \ , \ xf'(x)=5f(x)$, βρείτε τον τύπο της *f(x)*

6Α6. Αν $f'(x)+f(x)=1 \quad \forall x \in R$, $f(0)=e$, βρείτε τον τύπο της $f(x)$

6Α7. Αν $f'(x)=af(x)+b \quad \forall x \in R$, $f(0)=c$ βρείτε τον τύπο της $f(x)$ όταν $abc \neq 0$

6Α8. Αν $xf'(x)+2f(x)=3x \ \forall x>0$, $f(1)=1$ βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

6Α9. Αν $4f'(x)=\left(f(x)\right)^5 \neq 0$, $\forall x<1$, $f(0)=1$ βρείτε τον τύπο της $f(x)$

6Α10. Αν $f(x)+x^2+\eta\mu x=f'(x)+2x+\sigma\upsilon\nu x \quad \forall x \in R$, $f(0)=1$, βρείτε τον τύπο της $f(x)$

6Α11. Αν $xf'(x)+f(x)=e^x \quad \forall x \in R$, βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

6Α12. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης h στο $(0,+\infty)$ αν είναι γνωστό ότι ισχύουν $e^{h(x)}=\dfrac{1}{h'(x)}$, $h(1)=0$, $x>0$

6Α13. Αν $f(x)f'(x)=2x^3 \quad \forall x \in R$, $f(0)=1$ βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

(Δεν είναι τόσο απλή όσο φαίνεται)

6Α14. Η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R, $f(x)>0$, $f(1)=15$, $f'(x)=f(x)ln[f(x)]$. Βρείτε τον τύπο της.

6Α15. Αν $f'(x)=[4-f(x)]^2 \quad \forall x>-1$ $f(0)=3$, $f(x)\neq 4 \quad \forall x>-1$ βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

6Α16. Αν $f'(x)=g(x)$, $f(x)=g'(x)$, $f(0)=1$, $g(0)=0$, $g(2)=1 \quad \forall x \in R$,

i) Δείξτε ότι $f^2(x)-g^2(x)=c \ \forall x \in R$,

ii) Αν $kf(x)+mg(x)=0 \Rightarrow k=m=0$

6Α17. Αν $f'(x)=f(x)+g(x)$, $g'(x)=g(x)-f(x)$, $\forall x \in R$ και $f(0)=0, g(0)=1$ να δείξετε ότι η συνάρτηση

$[e^{-x}f(x)-\eta\mu x]^2+[e^{-x}f'(x)-\sigma\upsilon\nu x]^2$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο των $f(x),g(x)$

6Α18. Αν $2f'(x)f''(x)=\left(f'(x)-f(x)\right)^2$ και $f(0)=f'(0)=0$ να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{-x}\left([f(x)]^2+[f'(x)]^2\right)$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της $f(x)$

6Α19. Αν $xf''(x)+f'(x)=0 \quad \forall x\in R \quad f(0)=1$. Βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

6Α20. ι)Να δείξετε την ισοδυναμία

$f'(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=ce^x \ ,\forall x\in R$

ιι)Αν $g''(x)-2g'(x)+g(x)=0$, $g'(0)=g(0)=1 \ \forall x\in R$, βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $g(x)$

6Α21. Αν $f'(x)=g(x)$, $f(x)=-g'(x)$, $f(0)=0$, $g(0)=1 \ \forall x\in R$,

i) Δείξτε ότι $f^2(x)+g^2(x)=1 \ \forall x\in \mathrm{R}$,

*ii)*Αν οι συναρτήσεις $F(x),G(x)$ ικανοποιούν τις ίδιες συνθήκες με τις $f(x),g(x)$ δείξτε ότι η συνάρτηση $[F(x)-f(x)]^2+[G(x)-g(x)]^2$ είναι σταθερή.

iii) Δείξτε ότι $F(x)=f(x)$, $G(x)=g(x)$

iv) Δείξτε ότι $f(x)=\eta\mu x$, $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$

v) Βρείτε τον τύπο μιας συνάρτησης $h:h''(x)+h(x)=0$, $h(0)=0$, $h'(0)=1$

(Η άσκηση αυτή είναι ένας τρόπος να εξάγετε την εξίσωση της μετατόπισης της Α.Α.Τ. στην φυσική στην ειδική περίπτωση που ω=1 rad/sec. Μπορείτε όμως πάντα με αλλαγή της κλίμακας χρόνου να θεωρήσετε ότι ω=1 rad/sec.Ρωτήστε καλύτερα τους φυσικούς σας)

6Α22. Αν $f(x+y)=f(y)+f(x)+2xy \quad \forall x,y\in R \ ,f'(0)=2$

δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R και βρείτε τον τύπο της.

6Α23. Αν $f(x+y)=f(y)+f(x)+3xy(x+y), \forall x,y\in R$ και $\exists f'(x), \forall x\in R, f(1)=1$ βρείτε τον τύπο της.

6Α24. Αν $f(xy)+x+y=f(y)+f(x)+xy+1 \forall x,y>0, f'(1)=2$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $(0,+\infty)$ και βρείτε τον τύπο της

6Α25. Αν $f(x+y)=f(y)\sigma\upsilon\nu x+f(x)\sigma\upsilon\nu y$ $f'(0)=1$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R και βρείτε τον τύπο της

6Α26. Αν $f(xy)=xf(y)+yf(x)$ $\forall x,y\in(0,+\infty)$ $, f'(1)=2$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $(0,+\infty)$ και βρείτε τον τύπο της

6Α27. Αν $f(x+y)=f(x).f(y)$ $\forall x,y\in R$, $f(x)=1+xg(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$ βρείτε τον τύπο της.

6Α28. Αν $f(x+y)=e^x f(y)+e^y f(x)$ $\forall x,y\in R$ $, f'(0)=2$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R και βρείτε τον τύπο της.

6Α29. Αν $f(x+y)=e^x f(y)+e^y f(x)+2xye^{x+y}, \forall x,y\in R$ με $f'(0)=2$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R και βρείτε τον τύπο της.

6Α30. Αν $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$ $\forall x,y\in R$ και η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R, βρείτε τον τύπο της όταν $f'(0)=2$ $, f(0)=1$. Χρησιμοποιείστε το προηγούμενο συμπέρασμα ή άλλον τρόπο για να βρείτε στην συνέχεια τον τύπο μιας συνάρτησης. $g(x)$ όταν
ισχύουν:

$$g(\frac{x+y}{2})=\sqrt{g(x)g(y)} \quad , \quad g(x)>0 \quad ,g(0)=g'(0)=e$$

$\forall x,y\in R$, με την g να είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R *

6Α31. Αν $f(x+y)+e^{x+y}=e^x f(y)+e^y f(x) \quad \forall x,y\in R \quad ,f$ παραγωγίσιμη σε όλο το R βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

6Α32. Αν $|f(x)-f(y)|\le 1-\sigma\upsilon\nu(x-y) \quad \forall x,y\in R$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R και βρείτε τον τύπο της.

6Α33. Αν $|f(x)-f(y)|\le (x-y)^2 \quad \forall x,y\in R$ και ,$f(0)=5$ βρείτε τον τύπο της $f(x)$

6Α34. Σε μια καλλιέργεια βακτηριδίων παρατηρήσαμε ότι αρχικά ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού τους ήταν σταθερός και ίσος με 1 (εκατομμύρια βακτηρίδια ανά ώρα)

Η καλλιέργεια αναπτύσσεται ομοιόμορφα πάνω σε μια γυάλινη πλάκα ακτίνας R_0. Μετά από χρόνο $t_1=2$ ώρες εκτιμήσαμε ότι ο αριθμός των βακτηριδίων ήταν $N_1=11$(εκατομμύρια) και μετρήσαμε ότι η καλλιέργεια κατελάμβανε μια κυκλική επιφάνεια που είχε ακτίνα

$$R=\frac{1}{2^{5/2}}R_0$$

α)Να βρείτε τον αρχικό αριθμό βακτηριδίων

Στην συνέχεια παρατηρήθηκε ότι ο αριθμός αύξησης έπαψε να είναι σταθερός και προέκυψε ανάλογος του πληθυσμού σε κάθε χρονική στιγμή μετά την t_1 Εκτιμήσαμε επίσης ότι ο πληθυσμός διπλασιάστηκε σε χρόνο 3 ώρες μετά την t_1

Δεχόμαστε ακόμη ότι η επιφάνεια που καταλαμβάνει η καλλιέργεια είναι ανάλογη του αριθμού των βακτηριδίων.

β)Να υπολογίσετε τον τελικό αριθμό βακτηριδίων και τον απαιτούμενο χρόνο όταν η καλλιέργεια έχει εξαπλωθεί σε όλη την γυάλινη πλάκα

γ)Να γράψετε τον τύπο μιας συνάρτησης $N(t)$ η οποία θα δίνει τον πληθυσμό των βακτηριδίων σε κάθε χρονική στιγμή μέχρις ότου η καλλιέργεια καταλάβει όλη την γυάλινη πλάκα Να εξηγήσετε γιατί η συνάρτηση αυτή οφείλει να είναι συνεχής

Β ΟΜΑΔΑ

6Β1. Αν $xf\,'(x)-f(x)=x^2 \quad \forall x \in R$, $f(1)=3$, βρείτε τον τύπο της $f(x)$

6Β2. Αν $f\,''(x)\eta\mu x+f(x)\eta\mu x=\eta\mu 2x$ στο $(0,\pi)$, $f(0)=0$, $f(\pi/2)=\pi/2$, $f\,'$ συνεχής στο $[0,\pi]$ Βρείτε τον τύπο της $f(x)$ στο $[0,\pi]$ *(Μην απλοποιήσετε με ημx)*

6Β3. Αν $xf\,'(x)=2f(x) \quad \forall x \in R$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$ τότε δείξτε ότι

$f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, $f'(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$, $f\,''(0)=4$, $f\,'$ παραγωγίσιμη $\forall x \in R$, $xf\,''(x)=f'(x) \quad \forall x \in R$, $f\,''$ συνεχής $\forall x \in R$, $f\,''$ παραγωγίσιμη $\forall x \in R^*$, Με την βοήθεια του Θ-Μ-Τ δείξτε $f\,''(x)=4 \quad \forall x \in R$, και βρείτε τον τύπο της $f(x)$

6Β4. Αν $f\,'(x)f(1-x)=1 \quad \forall x \in R$, $f(1)=e$ βρείτε τον τύπο της $f(x)$

6Β5. Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η εφαπτομένη *(ε)* της C_f στο σημείο της A τέμνει τον άξονα x στο σημείο B και Γ είναι η προβολή του A στον άξονα x . Αν το σημείο *(0,0)* είναι το μέσον του *ΒΓ* και *f(1)=1* να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης

6Β6. Έστω $f : R \to R$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η εφαπτομένη *(ε)* της C_f στο σημείο της *Α* τέμνει τον άξονα *x* στο σημείο *Β* και *Γ* είναι η προβολή του *Α* στον άξονα *x* . Αν $εφ(Β\hat{Α}Γ) = \frac{1}{4}$ και *f(1)=2* να βρεθεί ο τύπος της

6Β7. Έστω $f : R \to R$ συνεχής συνάρτηση και παραγωγίσιμη στο R^*. Η εφαπτομένη *(ε)* της C_f σε κάθε σημείο της $Α(x_0, f(x_0))$, $x_0 \neq 0$ διέρχεται από το σημείο *(0,0)* και είναι *f(1)=1, f(-1)=1* να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης

6Β8. Έστω $f : (0,+\infty) \to R^*$ παραγωγίσιμη συνάρτηση $f'(x) < 0$. Η εφαπτομένη *(ε)* της C_f στο σημείο της *Α* τέμνει τον άξονα *x* στο σημείο *Β* και *Γ* είναι η προβολή του *Α* στον άξονα *x* . Αν *(ΑΒΓ)=1/2* και *f(1)=1* να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης

6Β9. Έστω *f* παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f σε τυχαίο σημείο της τέμνει τον άξονα *x* στο $(x_A,0)$ και $(x_B,0)$ είναι η προβολή του σημείου επαφής στον άξονα *x*. Αν είναι $x_B-x_A=1$ και *f(0)=1*, βρείτε τον τύπο της *f*.

6Β10. Αν $f:(0,+\infty) \to (0,+\infty)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση, ώστε το σημείο τομής της εφαπτομένης της C_f με τον άξονα *y'y* να είναι πάντοτε το μέσον των σημείων επαφής και του σημείου που η εφαπτομένη τέμνει τον *x'x* και επιπλέον *f(1)=1* τότε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης *f*.

6Β11. Βρείτε τον τύπο μιας συνάρτησης w : $w''(x)+w(x)=A$, $w(0)=A$, $w'(0)=1$.

(Χρησιμοποιείστε προηγούμενη άσκηση.)

6Β12. Έστω $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(1)=1$, $xf(\frac{1}{x})=\frac{1}{f'(x)}$.

Δείξτε ότι $\frac{f''(x)}{f'(x)}=-\frac{1}{x}+\frac{f'(x)}{f(x)}$ και βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$

6Β13. Αν $f''(x)=f(x),\ \forall x\in R, f'(0)=0\ , f(0)=0$ βρείτε τον τύπο της. Όμοια

αν $f''(x)=9f(x),\ \forall x\in R, f'(0)=3, f(0)=1$

6Β14. Έστω $y=f(x)$ συνάρτηση που ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις :

$$x-y^2+2xy\frac{dy}{dx}=0, y(\frac{1}{e})=\frac{1}{\sqrt{e}}, x>0$$

(θυμηθείτε ότι : $f'(x)=\frac{dy}{dx}=y'$*)*

α)Με τον μετασχηματισμό $y^2=u$ να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης u

β)Να δείξετε ότι $x\in(0,1]$

γ)Να δείξετε ότι η συνάρτηση y διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,1)$ και

δ)Να βρείτε τον τύπο της y

ε)Έστω $g(x)=\begin{cases} y(x), 0<x<1 \\ K, x=1 \end{cases}$.Αν η g είναι συνεχής βρείτε το K

6Β15. Αν $f(x+y)=f(x)f(a-y)+f(y)f(a-x)$ $f(a)=0$, $f'(0)=1, f'(a)=0,$ δείξτε ότι *i) f(0)=0,f(2a)=0,f(x+2a)=f(x)f(-a),*

ii) f(x+4na)=f(x)

iii) f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το *R* και περιττή

$f'(x)=f(a-x)$, $f'(a-x)=f(x)$, $f^2(x)+f^2(a-x)=1$

iv) $f''(x)+f(x)=0$

6B16. Αν $f(x)-f(y)=(y-x)f(x)f(y)$ στο R^*, f συνεχής στο R^* δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R^* και βρείτε τον τύπο της όταν $f(1)=1$, $f(-1)=-1$

6B17. $f(x)-f(y)=(x-y)f'(\frac{x+y}{2})$. Αν η $f(x)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη βρείτε τον τύπο της όταν

$f(1)=f'(1)=f''(1)=2$

(Υπάρχει εδώ ένα αξιοσημείωτο γεωμετρικό περιεχόμενο που αξίζει να το ερμηνεύσετε)

6B18. Αν $yf(x)-xf(y)\le(x-y)^2xy \quad \forall x,y\in(0,+\infty)$, $f(1)=2$ και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη Βρείτε τον τύπο της

6B19. Αν $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty):2xf(y)\le xf(x)+yf(y)$ δείξτε ότι:

$\frac{2y-x}{y}f(x)\le f(y)\le\frac{x}{2x-y}f(x)$ με $2x>y$ και

$\frac{f(x)}{y}\le\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\le\frac{f(y)}{x}$ με $x>y$

Να συμπεράνετε ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη και έτσι να βρείτε τον τύπο της.

6B20. Αν $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$ $f'(0)=2$, δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το *R* και περιττή .Στην συνέχεια να θέσετε $g(x)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$, $f(x)\neq \pm 1$ και να βρείτε έτσι τον τύπο της $g(x)$.

6Β21. Αν $f(x+y)+f(x-y)=f(x).f(y)$ $\forall x,y\in R$ με f να είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R, να δείξετε τότε ότι η f είναι άρτια και έτσι να θέσετε $f(x)=g(x)+g(-x)$, g παραγωγίσιμη σε όλο το R. Να βρείτε τα : $f(0),g(0)$ και στην συνέχεια έναν τύπο για τις ,g , f.

6Β22. Να βρεθεί η f όταν $f(0)=1, f(x)\neq 0\ \forall x>-1$ και

$$f'(x)=xf^2(x)+\frac{x}{x^2+1}f(x), x>-1$$

6Β23. Να βρεθεί η f όταν $f(\pi/4)=\pi/4$ και

$$xf'(x)-f(x)=x^2+f^2(x)\ , \forall x\in(0,\pi/2)$$

Γ ΟΜΑΔΑ

6Γ1. Αν $h'(x)=e^{2x}h(-x)$, $h(0)=1$ $\forall x\in R$, βρείτε τον τύπο της

6Γ2. $w'(x)=w(x)+w(-x)$, $w(0)=1$ $\forall x\in R$, βρείτε τον τύπο της

6Γ3. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f που να ικανοποιεί ταυτόχρονα τις παρακάτω συνθήκες:

$$f(f(x)).f'(x)=f(x)\neq 0 \quad \forall x\in R\ , f'(1)=1$$

6Γ4. Αν $f''(x)=e^{2f(x)}, f'(0)=1, f(0)=0, \forall x<1$ βρείτε την f

6Γ5. Αν $f''(x)+[f'(x)]^2=4$ $\forall x\in R$, βρείτε την $f(x)$

(Εδώ λοιπόν θέλει φαντασία)

6Γ6. Αν $f(2x)=[f(x)]^4$, $f(x)>0$, f συνεχής $\forall x\in R$,βρείτε τον τύπο της

(Είναι μια δύσκολη άσκηση)

6Γ7. Να Βρείτε την παραγωγίσιμη *f* στο *R* όταν *f(1)=0* και ισχύει

$f'(x)=\sqrt{1+f^2(x)}\ ,\ \forall x\in R$

6Γ8. Αυτή η άσκηση είναι μια κλασική άσκηση συναρτησιακών τύπων χωρίς να παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες. Ας είναι λοιπόν *f, g* δυο όχι σταθερές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού όλο το *R* που ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις:

$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)-g(x)\cdot g(y)$ και

$g(x+y)=f(x)\cdot g(y)+f(y)\cdot g(x)$ με

$f'(0)=0\ ,\ g'(0)=k>0$. Μάλλον θα πρέπει να αναγνωρίσατε ήδη για ποιες μιλάμε! Προκειμένου να το αποδείξετε μπορείτε να ακολουθήσετε τα παρακάτω βήματα

Α) Δείξτε ότι $f(0)=1\ ,\ g(0)=0$

Β) Κατόπιν δείξτε ότι οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο *R* και ικανοποιούν τις σχέσεις:

$f'(x)=-k\cdot g(x)\ ,\ g'(x)=k\cdot f(x)\quad \forall x\in R$

Γ) Δείξτε ακόμη ότι η συνάρτηση με τύπο

$\left(f(x)-\sigma\upsilon\nu kx\right)^2+\left(g(x)-\eta\mu kx\right)^2$ είναι σταθερή

Δ) Βρείτε την τιμή της σταθεράς και έτσι θα συμπεράνετε ποιοι είναι οι τύποι των *f,g*

Ε) Τώρα, αν ξέρετε λίγα πράγματα για διαφορικές εξισώσεις, τα προηγούμενα ερωτήματα μπορεί να χρησιμεύσουν ώστε να βρείτε τον τύπο της *h* η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες: $h''(x)+k^2\cdot h(x)=0\ ,\ h(0)=1\ ,\ h'(0)=k$.

(Η ιδέα που κρύβεται εδώ είναι ότι μια γραμμική διαφορική εξίσωση ανωτέρας τάξεως διασπάται σε σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως.)

6Γ9. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις f που είναι δυο φορές παραγωγίσιμες και ικανοποιούν την σχέση :

$f^2(x) - f^2(y) = f(x+y)\cdot f(x-y)$, $\forall x, y \in R$

6Γ10. Βρείτε όλες τις

$$f:(0,+\infty)\to(0,+\infty) : f'(\frac{a}{x}) = \frac{x}{f(x)} \quad , \ a > 0$$

6Γ11. Να βρείτε όλες τις δυο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις f για $x>0$ έτσι ώστε

$f(x) + 2x^3 f'(x) + x^4 f''(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(xf(x)) = 1$

6Γ12. Έστω ότι $f(x+y)=f(x)+f(y)$ $\forall$ x,y στο R και υπάρχει $F : F'(x) = f(x), \forall x \in R$ Βρείτε την f όταν $f(1)=A$

6Γ13. Να βρείτε τα πολυώνυμα p(x), n βαθμού με $n \geq 2$, για τα οποία υπάρχουν $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$ έτσι ώστε

$p(r_k) = 0$, $k = 1,2,\ldots,n$ και επιπλέον

$$p'\left(\frac{r_k + r_{k+1}}{2}\right) = 0 \quad , \ k = 1,2,\ldots,n-1$$ [27]

Δ ΟΜΑΔΑ

6Δ1. Αν $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$:2xf(y)$\leq xf(x) + yf(y)$ να βρείτε τον τύπο της.

7 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

Α ΟΜΑΔΑ

Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις f με τύπους:

7Α1. $f(x)=x^4-2x^2-3$ **(υπ)**

7Α2. $f(x)=\dfrac{ln\,x}{x^2}$

7Α3. $f(x)=x\,ln\,x$

7Α4. $f(x)=1+x+\ell n\left(1+x^2\right)$

7Α5. $f\left(x\right)=2\ell n\left|x\right|+\dfrac{1}{x}-x$

7Α6. $f(x)=x^2e^x$

7Α7. $f(x)=(x^3-x^2-x+1)e^x$

7Α8. $f(x)=e^{2x}+3e^x-5x+1$

7Α9. $f\left(x\right)=\dfrac{e^x}{1+x^2}$

7Α10. $f(x)=3x^2-x^3-2+\sqrt{1-x^2}(x^2-1)$

7Α11. $f\left(x\right)=\sqrt{2x-x^2}$

7Α12. $f\left(x\right)=\begin{cases} x, & x<0 \\ \eta\mu^2\dfrac{\pi x}{2}, & 0\le x\le 1 \\ 1+\dfrac{\ell nx}{x} & ,x>1 \end{cases}$

7Α13. $f\left(x\right)=\left|x+1\right|+\dfrac{2}{x}$

7Α14. $f(x)=\dfrac{a^x+b^x}{a^{-x}+b^{-x}}\ ,\ 1<a<b$

7Α15. Να εξετάσετε στο $(0,4)$ την μονοτονία της f όπου:

$$f\left(x\right)=\frac{2-x}{\pi}\sigma\upsilon\nu\left(\pi\left(x+3\right)\right)+\frac{1}{\pi^2}\eta\mu\left(\pi\left(x+3\right)\right)$$

7A16. Να δείξετε ότι η f: $f\left(x\right)=\begin{cases}1-\sqrt{1-x}, & x\leq 1\\ e^{x-1}, & x>1\end{cases}$ είναι γνήσια αύξουσα. Βρείτε την f^{-1}.

7A17. Δείξτε ότι η f: $f(x)=x^5+2x+3$ είναι 1-1. Βρείτε και το σύνολο τιμών της f.

7A18. Αν $e^{\alpha}+\alpha=e^{\beta}+\beta$, δείξτε ότι $\alpha=\beta$.

Βρείτε την $f: e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x$

Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις f με τύπους:

7A19. $f\left(x\right)=\dfrac{\ell nx}{x-1}$ $\quad x>1$

7A20. $f\left(x\right)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ $\quad x\in(0,\pi/2)$

7A21. $f(x)=e^x-e^{-x}-2x-\dfrac{x^3}{3},\ x\in R$

7A22. $f(x)=x^2-\sigma\upsilon\nu x\ ,\ x\in R$

7A23. $f(x)=3x^2+8\eta\mu x-\dfrac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x\ ,\ x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$

7A24. $f(x)=3x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu^3 x\ ,\ x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$

7A25. $f(x)=x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\ln(1+x)-x\ ,\ x>0$

7A26. $f\left(x\right)=\dfrac{\ell nx}{\ell n\left(x-1\right)},\ x>2$

7Α27. $f(x)=2\sqrt{x}-\dfrac{\ell nx}{\sqrt{x}}$

7Α28. Για ποιες τιμές του λ η f $f(x)=x^3+2\lambda x^2+x-2$ είναι γνήσια αύξουσα.

7Α29. Για ποιες τιμές του λ η f $f(x)=\dfrac{x-\lambda}{1+x^2}$ είναι γνήσια φθίνουσα

7Α30. Για ποιες τιμές του λ η f $f(x)=e^{2x}+\lambda e^x+x$ είναι γνήσια αύξουσα.

7Α31. Αν $f(x)=\dfrac{\lambda e^x-(1+\lambda)e^{-x}}{1+e^x}$,βρείτε για ποιες τιμές του λ f είναι γνήσια μονότονη.

Β ΟΜΑΔΑ

7Β1. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in R$ μελετήστε τη μονοτονία της f: $f(x)=\lambda x+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$

7Β2. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in R$ μελετήστε τη μονοτονία της f: $f(x)=e^{\lambda x}(x^2-2x)$

7Β3. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in(0,+\infty)$ μελετήστε τη μονοτονία της f: $f(x)=2\lambda\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu 2x$.

7Β4. $f(x)=\pi x-x^2-\dfrac{\pi^2}{4}\eta\mu x, x\in[0,\pi]$ μελετήστε τη μονοτονία

7Β5. Αν $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$, δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και στο 0. Κατόπιν αποδείξτε ότι δεν υπάρχει διάστημα $(-\delta,\delta)$, $\delta>0$ στο οποίο η f να είναι γνήσια μονότονη.

7Β6. Να εξετάσετε την μονοτονία της f : $f(x)=\dfrac{\eta\mu(x+\alpha)}{\eta\mu(x+\beta)}$,

$\alpha\cdot\beta\neq 0$

7Β7. Έστω $f\colon I\to R$ (I διάστημα) παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(x)\geq 0$ $\forall x\in I$. Αν δεν υπάρχει διάστημα $\Delta\subseteq I$ ώστε $f'(x)=0$ για κάθε $x\in\Delta$, δείξτε ότι f γνησίως αύξουσα στο I.

(Πρόκειται για θεώρημα που ξεκαθαρίζει τα πράγματα για το «γνησίως»)

7Β8. Αν $x^2 f'(x)=f^2(x)$ $\forall x\in[1,+\infty)$, $f(1)=1$ δείξτε ότι $f(x)\geq 1$ $\forall x\in[1,+\infty)$ και βρείτε την $f(x)$.

7Β9. Αν $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$, $f'''(x)>0$ $\forall x\in[0,+\infty)$ μελετείστε ως προς την μονοτονία την $f(x)$, $x\in[0,+\infty)$

7Β10. Έστω f: $f^{(3)}(x)>0$, $\forall x\in R$ και

$g(x)=f(x)-xf'(x)+\dfrac{x^2}{2}f''(x)$. Μελετήστε τη μονοτονία της g στο R και δείξτε ότι:

$$f(x)-xf'(x)+\frac{x^2}{2}f''(x)>f(0),\forall x>0$$

7Β11. Είναι: $f(0)=0$, f συνεχής στο R , f' γνησίως αύξουσα στο R^*_+. Μελετήστε τη μονοτονία της $g(x)=f(x)/x$ στο R^*_+

7Β12. Έστω f: $f''(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και $g(x)=\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$.

Μελετήστε τη μονοτονία της g στο (α,β).

7Β13. Αν $f''(x)<0 \quad \forall x\in R,\ \lim\limits_{x\to\alpha+} f'(x)=+\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to\beta-} f'(x)=-\infty$.

Μελετήστε την f ως προς την μονοτονία στο (α,β).

7Β14. Αν $f''(x)<0 \quad \forall x\in R\ ,a<b,\ f(a)=f(b)$. Μελετήστε τη μονοτονία της f στο $[\alpha,\beta]$.

7Β15. Αν $f'(x)\neq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό ενός διαστήματος Δ και η f είναι συνεχής στο Δ τότε να δείξετε ότι η f είναι *1-1* στο Δ

7Β16. Αν $f'(x)\neq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό ενός διαστήματος Δ και η f είναι συνεχής στο Δ τότε να δείξετε ότι f είναι γνήσια μονότονη στο Δ

(Δεχθείτε ότι αν είναι 1-1 και συνεχής τότε είναι γνήσια μονότονη)

7Β17. Αν $f'(x)\neq 0$ για κάθε x ενός διαστήματος Δ, τότε η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ

(οι τρεις προηγούμενες ασκήσεις είναι βασικά θεωρήματα αλλά αν θέλετε να τα χρησιμοποιήσετε πρέπει πρώτα να τα αποδείξετε)

<u>Γ ΟΜΑΔΑ</u>

7Γ1. Αν $y=f(x)$ θεωρούμε την εξίσωση

$-4+\dfrac{dy}{dx}=(y-4x)^4$ με $x\geq 0\ ,y(0)=1$

α)Με τον μετασχηματισμό $y\text{-}4x=u$ να δείξετε ότι $\dfrac{du}{dx}=u^4$

β)Δείξτε ότι $u(x)\geq 1$ εξετάζοντας την μονοτονία της γ)Δείξτε ότι $x < \frac{1}{3}$

δ)Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης y

7Γ2. Έστω f παραγωγίσιμη στο R, $f(a)=f(b)=0, \alpha<b$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο R: $f'(\xi) \geq f(\xi)$

Δ ΟΜΑΔΑ

7Δ1. Αν $f:[a,b] \to R$, $f(a)=0$ με f' συνεχή και $|f'(x)| \leq m|f(x)|$ με $m>0$, $\forall x \in [a,b]$ δείξτε ότι $f(x)=0$, $\forall x \in [a,b]$

7Δ2. Βρείτε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$, n βαθμού με $n \geq 4$ έτσι ώστε, το $P''(x)$ να είναι παράγοντας του $P(x)$ και επιπλέον να ισχύει: $P(a)=P'(a)=0$

7Δ3. Έστω συνάρτηση f ώστε να ισχύουν: $f(0)=f(4)=2-f(2)=0$ και επιπλέον είναι $0 > f''(x) \geq -1$, $\forall x \in [0,4]$ τότε βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

(Αν τα χρειαστείτε δίνονται τα παρακάτω βοηθητικά ερωτήματα

Α)Αν $g(x)=\frac{1}{2}x(4-x)$ θα δείξουμε ότι $g(0)=g(4)=2-g(2)=0$, $g'(0)=2$, $g'(4)=-2$ και $g''(x)=-1$ στο $[0,4]$ προσπαθώντας να βρούμε μια συνάρτηση στην οποία η ανίσωση της εκφώνησης γίνεται ισότητα

Β)Θέτουμε $h(x)=f(x)-g(x)$ για ευνόητους λόγους και θα δείξουμε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (0,2), \xi_2 \in (2,4)$: $h'(\xi_1)=h'(\xi_2)=0$

Γ)Θα δείξουμε ότι h΄ αύξουσα και έτσι δείξτε ότι h΄(x)=0 στο $[\xi_1,\xi_2]$

Δ)Θα δείξουμε ότι και η h(x)=0 στο $[\xi_1,\xi_2]$

Ε)Θα δείξουμε ότι h φθίνουσα στο $[0, \xi_1]$ και αύξουσα στο $[\xi_2,4]$

ΣΤ)Θα δείξουμε έτσι ότι η h είναι σταθερή και θα βρούμε τον τύπο της f.)

7Δ4. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f : R \to (0,+\infty)$ έτσι ώστε να ισχύει $f'(x) = f(f(x))$, $\forall x \in (0,+\infty)$

7Δ5. Έστω ότι : $f(x) = e^{f'(x)}$ $\forall x \in [a,b]$, $f(a) = f(b) = 1$ τότε βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

7Δ6. Αν $f''(x) > 0$, $\forall x \in [0,+\infty)$ γνήσια αύξουσα και συνεχής και $m = -\dfrac{(f'(0))^2}{2f''(0)}$ δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) - m\ln x$ είναι γνήσια αύξουσα για $x>0$

7Δ7. Αν $f'(x) \geq M > 0, \forall x \in [0,1]$ να δείξετε ότι υπάρχει διάστημα $I \subset [0,1]$ με πλάτος ¼ έτσι ώστε $|f(x)| \geq M/4$, $\forall x \in I$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Α ΟΜΑΔΑ

Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων *f* όπου:

8Α1. $f(x) = \dfrac{x^2}{9 + x^2}$

8Α2. $f(x)=\dfrac{e^x}{2+x}$

8Α3. $f(x)=\dfrac{ln\,x}{x^3}$

8Α4. $f(x)=e^{3x}+3e^{2x}-9e^x+6$

8Α5. $f(x)=x-2\,ln|x|+2\,ln|1+x|$

8Α6. $f(x)=2x\,\ell nx\,-x^2+1$

8Α7. $f(x)=x^{\nu}e^x$, $\nu\in N$

8Α8. $f(x)=\sqrt{|x|}$

8Α9. $f(x)=x+\eta\mu 2x$

8Α10. $f(x)=3\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu 3x$

8Α11. $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x-3 & ,0\le x\le 3\\ x^2-16 & ,3<x<4\\ 5-x & ,4\le x<5\end{cases}$

8Α12. $f(x)=(x^2-x+1)(1+x^2)^{-2}e^{-x}$

8Α13. Δείξτε ότι όταν a^2-$4b+4<0$ τότε η $f(x)=e^x(x^2+ax+b)$ δεν παρουσιάζει ακρότατα.

8Α14. Αν $f(x)=x^m(x-2)^n$, $m\ge 2, n\ge 2, m,n\in N^*$ τότε δείξτε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει ένα τοπικό ελάχιστο

8Α15. Έστω $x^2f''(x)+3f'(x)+f^2(x)+e^{-x}=0$. Αν το $f(1)$ είναι ακρότατο να βρεθεί αν είναι τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο.

(Αν θέλετε κριτήριο Β΄ παραγώγου)

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου *α*.

8Α16. $f(x)=e^{ax}(x^2-a)$

8Α17. $f(x)=\dfrac{ax^2+a+2}{x-1}$

8Α18. $f(x)=\dfrac{ln(ax)}{x}$, $a>0$

8Α19. Αν $f(x)=x+\dfrac{1}{x+a}$ Να βρεθεί το a ώστε το τοπικό ελάχιστο της f να γίνει διπλάσιο από το τοπικό μέγιστο της

(Αν θέλετε κριτήριο Β΄ παραγώγου)

8Α20. Αν $f(x)=a^2-\dfrac{ln(ax)}{x}$, $a>0$ Να βρεθεί το a ώστε το ελάχιστο της f να γίνει μέγιστο

8Α21. Αν $f(x)=(x+2)e^{-ax}, a>0$ Να βρεθεί το a ώστε το μέγιστο της f να γίνει ελάχιστο.

8Α22. $F(x)=x^a e^{2a-x}$ $a>0$, $x>0$. Βρείτε το a ώστε το μέγιστο της F να γίνει ελάχιστο.

8Α23. Αν $f(x)=\ell n(e^x+me^{-x}), m>0$ να βρεθεί ο τόπος των σημείων $(x_0, f(x_0))$ στα οποία η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο

8Α24. Δείξτε ότι ένα πολυώνυμο νιοστού βαθμού έχει το πολύ ν-1 ακρότατα

8Α26. Αν $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$ τότε δείξτε ότι το $p(x)$ δεν μπορεί να έχει μόνον ένα ακρότατο. Στην συνέχεια δείξτε ότι αν ρ_1 , ρ_2 είναι οι ρίζες του $p'(x)$ τότε $p''(\rho_1)+p''(\rho_2)=0$ και αν ξ θέση τοπικού ακροτάτου της p τότε θα ισχύει

$\frac{1}{\xi - r_1} + \frac{1}{\xi - r_2} + \frac{1}{\xi - r_3} = 0$ όπου r_1, r_2, r_3 οι ρίζες του πολυωνύμου

8Α27. Αν $p(x)=2x^2+2x-2\alpha x-\alpha$ να βρεθεί το α ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών του να είναι ελάχιστο.

Β ΟΜΑΔΑ

Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων f όπου:

8Β1. $f(x) = x\sigma\upsilon\nu(\pi x)$, $x \in [0,2]$

8Β2. $f(x) = x^3 \sqrt[3]{(x-1)^2} \quad -2 \le x \le 2$

8Β3. $f(x)=x^2 lnx-x.$

8Β4. Δείξτε ότι η εξίσωση : $x + 4\sigma\upsilon\nu\, x = 0$ δεν είναι αδύνατη και βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης

$f(x) = \frac{x^2}{8} + x\sigma\upsilon\nu\, x + \sigma\upsilon\nu 2x$

8Β5. Δείξτε ότι αν $f^2(x) + \left(f'(x)\right)^2 = e^x + x^3$, $\forall x \in R$ όπου f δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

8Β6. $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + c}$. Αν η συνάρτηση έχει δύο διαφορετικά ακρότατα δείξτε ότι το μέγιστό της είναι μικρότερο από το ελάχιστό της

8Β7. $f(x) = \frac{4(a-1)x + 2a + 2}{4x^2 - 1}$ Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης για τις διάφορες τιμές του α.

8Β8. $f(x)=a\eta\mu x+b\eta\mu 3x$, $\alpha>0, b>0$. Να βρεθεί η συνθήκη μεταξύ των α,β ώστε η f να έχει τρία ακριβώς ακρότατα στο $(0,\pi)$.

8Β9. Η f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b) και παρουσιάζει στα $c,d\in(a,b)$ ίδιο τοπικό ελάχιστο. Δείξτε τότε ότι έχει τοπικό μέγιστο σε κάποιο σημείο ανάμεσα στα c,d

8Β10. Αν υπάρχει f παραγωγίσιμη στο R :

$f'(x)=1+xe^{-f(x)}, \forall x\in R$ να βρείτε τον τύπο όλων των $f(x)$ και να δείξετε ότι $f(1)>\ell n(e-2)$

8Β11. Δείξτε ότι ένα πολυώνυμο αρτίου βαθμού έχει ένα τουλάχιστο ακρότατο

8Β12. Αν ισχύει $P''(x)\neq 0$, $\forall x\in R$ όπου το $P(x)$ είναι πολυώνυμο δείξτε ότι το $P(x)$ έχει ακριβώς ένα ολικό ακρότατο

Γ ΟΜΑΔΑ

8Γ1. Αν $p(x)$ πολυώνυμο : $p(x)\,p(-x)=x^{4n}$ $n\in N^*$ να δείξετε ότι $p(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} p(x)$, $p(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R^*, $p'(0)=0$, $p(x)=x^2q(x)$ όπου q πολυώνυμο .

8Γ2. Αν $f''(x)=g(x)f(x)$ $\forall x\in[a,b]$, $f(a)=f(b)=0$, $g(x)>0$ g συνεχής στο $[a,b]$. Ασχοληθείτε με ακρότατα και το κριτήριο της β΄ παραγώγου για να δείξετε ότι η f είναι η μηδενική συνάρτηση

8Γ3. Έστω $f:[0,1]\to[0,+\infty)$ τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και $0<a<b<1$: $f(a)=f(b)=0$. Δείξτε ότι υπάρχει $c\in(a,b)$: η f να παρουσιάζει μέγιστο στο c. Δείξτε στην συνέχεια ότι υπάρχει ξ : $f'''(\xi)=0$

8Γ4. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, M σημείο της C_f και $K \notin C_f$. Ονομάζουμε με $d(x)=\left|\vec{KM}\right|$ τότε

ι)Δείξτε ότι $d(x)$ παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$

ιι)Δείξτε ότι η $d(x)$ έχει και μέγιστο και ελάχιστο στο $[\alpha,\beta]$

ιιι)Αν ένα από τα προηγούμενα ακρότατα υπάρχει στη θέση x_0 με $x_0 \in (\alpha,\beta)$ και $M_0(x_0,f(x_0))$ δείξτε ότι : $\vec{KM_0} \perp (\varepsilon)$ όπου (ε) είναι η εφαπτομένη της f στο σημείο M_0.

8Γ5. Έστω $3f(x)-2f(1)-f(2) \geq 3g(x)-2g(1)-g(2)$. Αν υπάρχουν οι f''',g''' στο R δείξτε ότι υπάρχει $\xi : f'''(\xi)=g'''(\xi)$

Δ ΟΜΑΔΑ

8Δ1. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[a,b]$. Αν $f'(a)<K<f'(b)$ δείξτε ότι υπάρχει ξ στο (a,b) : $f'(\xi)=K$

(Αυτό είναι ένα πολύ σημαντικό ***θεώρημα του DARBOUX*** *που μοιάζει με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών χωρίς όμως η f' να είναι συνεχής !!)*

8Δ2. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=f'(1)=0$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $[0,1]$: $|f'(\xi)| \geq 4$

(προσέξτε δεν είναι εύκολο! Υπάρχουν πολλοί τρόποι , ένας από αυτούς είναι με φυσική!!!)

8Δ3. Αν f'' συνεχής στο R και

$|f(x)| \leq 1 \ \forall x \in R$, $f^2(0)+[f'(0)]^2=4$ δείξτε ότι υπάρχει ξ στο R : $f(\xi)+f''(\xi)=0$

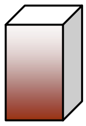
9 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Α ΟΜΑΔΑ

9Α1. Βρείτε δυο αριθμούς με άθροισμα *8* και ελάχιστο άθροισμα κύβων.

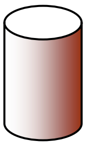
9Α2. Να διαιρεθεί ο αριθμός *8* σε δύο μέρη ώστε το γινόμενο των δύο μερών επί την διαφορά τους να γίνεται μέγιστο.

9Α3.



Ο όγκος του κουτιού είναι $72m^3$ και η πρόσθια πλευρά του έχει λόγο διαστάσεων *1* προς *2*. Βρείτε τις διαστάσεις του κουτιού ώστε να έχει την ελάχιστη επιφάνεια.

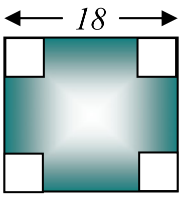
9Α4.

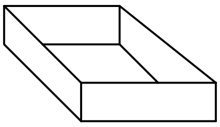


Ένας κύλινδρος έχει όγκο V. Ποια η ακτίνα της βάσης του και ποιο το ύψος του ώστε να παρουσιάζει την ελάχιστη δυνατή επιφάνεια.

(Χρήσιμο σε κουτάκια αναψυκτικών)

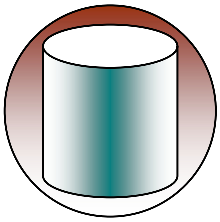
9Α5.





Από ένα ορθογώνιο χαρτόνι *18* επί $18\ cm^2$ κόβουμε *4* μικρά τετράγωνα με πλευρά $x\ cm$ το καθένα και φτιάχνουμε το διπλανό κουτί χωρίς οροφή. Να βρείτε το x ώστε ο όγκος του κουτιού να είναι ο μέγιστος δυνατός.

9Α6.



Σε δοσμένη σφαίρα να εγγραφεί ορθός κύλινδρος μέγιστου όγκου

9Α7. Δίνονται τα σημεία $A(4,0)$, $B(-4,0)$ και η ευθεία $(\varepsilon){:}4x+5y-2$

i)Να βρεθεί σημείο M της (ε) $(MA)+(MB)=min$

ii)Να βρεθεί η εξίσωση έλλειψης με εστίες τα A,B που εφάπτεται της (ε)

9Α8. Έστω x ο αριθμός τεμαχίων ενός προϊόντος. Ο ρυθμός μεταβολής της τιμής μονάδος είναι $\frac{dP}{dx}=\frac{3}{176}(54x-8x^2)$,

ενώ το κόστος των x τεμαχίων με $x<7$ είναι $K=x^3-18x^2+105x$

(x σε εκατομμύρια)

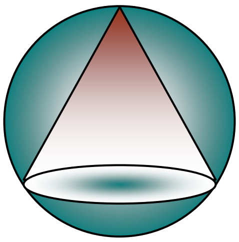
i) Να βρεθεί ο αριθμός τεμαχίων που μεγιστοποιεί την τιμή μονάδος

ii) Να βρεθεί ο αριθμός τεμαχίων που μεγιστοποιεί το κόστος

iii) Να βρεθεί ο αριθμός τεμαχίων που μεγιστοποιεί τις πωλήσεις

iv) Να δειχθεί ότι ο αριθμός τεμαχίων που ελαχιστοποιεί τα κέρδη είναι $x=$

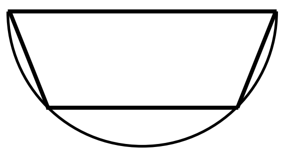
9Α9.



Σε δοσμένη σφαίρα να εγγραφή ορθός κώνος μέγιστου όγκου.

9Α10. Ένα βιβλιοπωλείο αγοράζει ένα βιβλίο από τον εκδότη *3 ευρώ* το καθένα .Όταν το διαθέτει στην αγορά με *15 ευρώ* τότε πουλά *200* αντίτυπα τον μήνα. Εκτιμήθηκε τώρα ότι αν η τιμή πώλησης μειωθεί, τότε για κάθε *1 ευρώ* μείωσης θα πωλούνται *20* περισσότερα αντίτυπα τον μήνα. Να βρείτε την τιμή πώλησης που μεγιστοποιεί τα κέρδη.

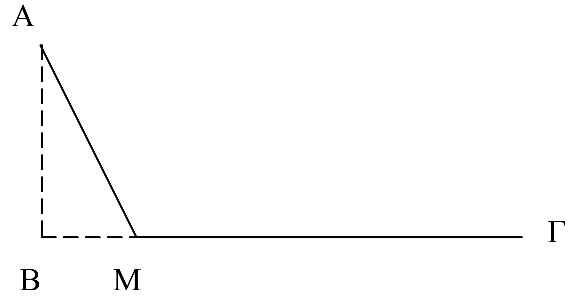
9Α11.



Σε δοσμένο ημικύκλιο διαμέτρου *2R* να εγγραφεί τραπέζιο όπως στο σχήμα με μέγιστο εμβαδό.

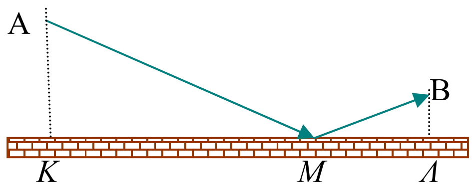
<u>Β ΟΜΑΔΑ</u>

9Β1.



Κινητό ξεκινά από το σημείο *Α* και κινείται με σταθερή ταχύτητα *2m/sec* ως το σημείο *Μ*. Στην συνέχεια κινείται με ταχύτητα *4m/sec* κατά μήκος της *ΜΓ* ως το *Γ*. Αν είναι *ΑΒ =5m* και *ΒΓ=12m* όπου *Β* η προβολή του *Α* στην ευθεία *ΒΜΓ* να βρεθεί η απόσταση *ΒΜ* : ο χρόνος κίνησης να είναι α) ελάχιστος β) μέγιστος

9B2.



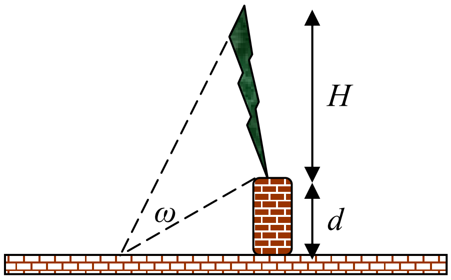
Οι αποστάσεις είναι $AK=\alpha$, $B\Lambda=\beta$, $K\Lambda=\gamma$. Ένα κινητό ξεκινά από το A, φτάνει στο M και καταλήγει στο B. Αν κινείται με την ίδια σταθερή ταχύτητα V προσδιορίστε την θέση του M πάνω στην $K\Lambda$, ώστε η διάρκεια κίνησης να είναι η ελάχιστη δυνατή. Σ αυτήν την περίπτωση δείξτε ότι οι γωνίες $A\hat{M}K, B\hat{M}\Lambda$ είναι ίσες. Τώρα στο ίδιο πρόβλημα αν η ταχύτητες στις διαδρομές AM και MB είναι αντίστοιχα V_1,V_2 προσδιορίστε το πηλίκο $\dfrac{\eta\mu\, A\hat{M}K}{\eta\mu\, B\hat{M}\Lambda}$ συναρτήσει των V_1,V_2.

Αρχή του Fermat , νόμος Snell στην διάθλαση)

9B3. Μια κυκλική λίμνη έχει διάμετρο *2km*. Ένας άνθρωπος βρίσκεται σε κάποιο σημείο της περιφέρειας και θέλει να φθάσει όσο το δυνατόν γρηγορότερα στο αντιδιαμετρικό σημείο του *A*. O άνθρωπος κωπηλατεί με ταχύτητα *2km/h* και περπατά με ταχύτητα *4km/h*. Βρείτε την καταλληλότερη πορεία .

9B4. Τα έξοδα καυσίμων ανά ώρα ενός ατμόπλοιου είναι ανάλογα του κύβου της ταχύτητας του. Στην ταχύτητα των *10Kn* τα έξοδα αυτά είναι *30$/h,* ενώ τα υπόλοιπα έξοδα είναι *600$/h*. Να βρείτε την οικονομικότερη ταχύτητα για ταξίδι *50miles*. (*Kn* σημαίνει *κόμβοι=miles/h* Η τιμή *30$/h* ήταν την εποχή που το πετρέλαιο ήταν φτηνό)

9Β5.



Σε πόση απόσταση πρέπει να σταθεί ένας άνθρωπος από το βάθρο ενός έργου τέχνης ώστε να έχει την καλύτερη οπτική εντύπωση ?($\omega=max$). Δίνονται το ύψος του βάθρου d και του έργου τέχνης H.

10 ΡΙΖΕΣ

Α ΟΜΑΔΑ

Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία ακριβώς λύση

10Α1. $2^{x+1}+53^{x-1}-9^x=0$

10Α2. $a^x+b^x=(a+b)^x$, $a>0,b>0$

10Α3. $3^x+4^x=5^x$

(τι θυμίζουν τα 3,4,5?)

10Α4. $xe^x=e^x-1$

10Α5. $x+e^x=0$

10Α6. $e^x=ax+2$

Μπορεί να χρειαστείτε τον κανόνα του De l' Hospital για την εύρεση κάποιου ορίου

10Α7. $\ln x+e^{x-1}=2-x$

10Α8. $\ln x=e-x$

10Α9. $e^x\cdot\left[x+1+\ell n\left(x^2+1\right)\right]=1$

10Α10. $συνx=2x-\pi$

10Α11. $a_1^2(b_1-x)+a_2^2(b_2-x)+\ldots+a_n^2(b_n-x)=x+x^3+\ldots+x^{2n+1}$

10Α12. Αν f,g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο R με , $f(a)=g(b)$, $f(b)=g(a)$, $a<b$ και $f'(x)\neq g'(x)$, $\forall x\in R$ δείξτε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο

10Α13. Αν f συνεχής και γνήσια αύξουσα συνάρτηση σε όλο το R και ισχύουν $f(1)=1, f(-1)=-1$ τότε δείξτε ότι η εξίσωση $f^3(x)+x^5=0$ έχει μοναδική λύση

10Α14. $f(x)=x$ όπου $f:[0,1]\to[0,1], f'(x)\neq 1 \quad \forall x\in[0,1]$

10Α15. Αν f, g παραγωγίσιμες στο R, $f'(x)\neq g'(x)\ \forall x\in R$, $f(R)=[0,4]$, $g(R)=[1,3]$ τότε να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g τέμνονται ακριβώς σε ένα σημείο *

10Α16. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots+\frac{x}{1}+1=0$ έχει μία ακριβώς λύση $(n\in N^*)$

10Α17. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ακριβώς λύση όταν $f(x)$ πολυώνυμο με $f'(x)\neq 0\ \forall x\in R$

10Α18. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό x ώστε $\vec{a}\perp\vec{b}$ όπου $\vec{a}=(x,1)$, $\vec{b}=(e^x,1-e^x)$

10Α19. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό x ώστε $(1,\ell nx)=\vec{v}\ //\ \vec{u}=(1,1-x)$

10Α20. Αν f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, $f(x)e^{f(x)}=x\ \forall x\in[0,+\infty)$ να βρεθούν οι τιμές $f^{-1}(1), f^{-1}(e)$ και να δειχθεί ότι η εξίσωση $2f(x)=e$ έχει μια ακριβώς λύση στο $[e,e^{e+1}]$

10Α21.Έστω $f(x)=e^{(x-p)^2}$ Θεωρούμε τις εφαπτόμενες της f στα σημεία $A(0,f(0))$, $B(2p,f(2p))$ οι οποίες τέμνονται στο $Γ$. Δείξτε ότι $ΑΓ=ΒΓ$ και ότι υπάρχει μοναδικό p στο $(0,1)$ ώστε $ΓΑ$ να είναι κάθετη στην $ΓΒ$

10Α22.Να δείξετε ότι η εξίσωση x^{3n}-$3nx+n=0$ έχει μία ακριβώς λύση στο διάστημα (01) $(n \in N^*)$

Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον λύση στα διαστήματα που αναγράφονται δίπλα

10Α23.$(1-x)συνx=ημx$,στο R

10Α24.$9xlnx+e=0$ στο $(0,+\infty)$

10Α25.$5x^4+2kx=k+1$ στο $[0,1]$

10Α26. $k(3x^2-1)=ln(1+x)+\dfrac{x-1}{x+1}$ στο $[0,1]$

10Α27. $x(x-2)συνx=2(1-x)(a+ημx)$ στο $[0,2]$

10Α28. $(1+e^{x-k})(e^{-kx}-1)=ke^{-kx}(e^{x-k}+x-k-1)$ $,k\neq 0$ στο $[0,k]$

10Α29.$2(x^3$-$2)=3k(x$-$1)$ στο $(0,2)$

10Α30. $2\ln x=k-e^x$ στο $(0,+\infty)$

10Α31.Για ποιες τιμές του $α$ η εξίσωση $\sqrt{x-2}+\sqrt{8-2x}=a$ έχει μία τουλάχιστον λύση?

10Α32.Έστω $f(x)$, $g(x)$ πολυώνυμα

$$f(x)=\frac{g(a)}{12}x^4+\frac{g(b)}{2}x^2+g(b)x+6 \ ,a<b \ ,g(a)\neq 0$$. Αν

το f έχει τρεις ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους να δείξετε ότι το g έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[a,b]$.

10Α33. Αν $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $\frac{a_n}{n+1} + \ldots + \frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{1} = 0$

να δείξετε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα του πολυωνύμου στο $(0,1)$.

Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν το πολύ λύση στα διαστήματα που αναγράφονται δίπλα

10Α34. $x^3-3x+k=0$ στο $(-1,1)$

10Α35. $\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x + k = \eta\mu 2x$ στο R

10Α36. Αν $f'(x)<1$ $\forall x \in R$ να δείξετε ότι υπάρχει το πολύ ένα $\xi>1/2$ $: f(\xi)=\xi^2$

10Α37. $x+f(x)=a$ όταν $-1< f'(x)$ $\forall x \in R$ στο R

10Α38. $\varepsilon\varphi(x)=x+\lambda$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

10Α39. Αν $f'(x)<0$ $\forall x \in R$ να δείξετε ότι υπάρχει το πολύ ένα ξ : $f(\xi)-\xi^3=m$.

10Α40. Αν η f είναι γνήσια αύξουσα και η g είναι γνήσια φθίνουσα να δείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται το πολύ σε ένα σημείο. (Δεν ξέρετε τίποτε για την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα των f, g)

Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις είναι αδύνατες

10Α41. $\sqrt[n]{x-1} = 1 + x^n$, $n \in N^*$

10Α42. $\ln x = e^x$

10Α43. $\ln(\ln(x))=x$

10Α44. $x^4 + 4 = (x+1)^2$

10Α45. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x=ax^2+bx+c$ έχει τρεις το πολύ λύσεις.

10Α46. Αν $P(x)$ πολυώνυμο νιοστού βαθμού να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x = P(x)$ έχει το πολύ $\nu+1$ λύσεις.

10Α47. Να δείξετε ότι αν η εξίσωση $x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, $a > \frac{3}{4}$ έχει 4 λύσεις τότε δυο τουλάχιστον είναι ίσες μεταξύ τους

10Α48. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)= x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ δεν μπορεί να έχει όλες τις ρίζες της πραγματικές και άνισες, αν είναι γνωστό ότι ισχύει : $2a^2 < 5b$

10Α49. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^n=ax+b$ έχει τρεις το πολύ λύσεις.

10Α50. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $f(x) = 0$ έχει το πολύ δύο λύσεις όταν είναι: $f''(x) \neq 0 \ \forall x \in R$

10Α51. Να δείξετε ότι η εξίσωση $7^x + 9^x = 3x + 5$ δεν μπορεί να έχει τρεις ή και περισσότερες λύσεις.

10Α52. Είναι: $f''(x) \neq 0 \ \forall x \in R$. Να δείξετε ότι στην γραφική παράσταση της f δεν υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία.

Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν δυο ακριβώς λύσεις διαστήματα που αναγράφονται δίπλα

10Α53. $x^2=\sigma\upsilon\nu x$ στο R

10Α54. $x^4-32x+40=0$ στο R

10Α55. $e^x+e^{-x}=4-x^2$ στο R

10Α56. $x^4 = 16 + (x-2)^2$ στο R

10Α57. $x^4 = 1 + (x+14)^2$ στο R

10Α58. $3(x-1)^4 = 24 + x^3$ στο R

10Α59. $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 16 = 0$ στο R

10Α60. $x^3 = 1 + \dfrac{2}{x-1}$ στο $R - \{1\}$

10Α61. Αν η εξίσωση $x^4 - 5x^3 + ax^2 + 5x - 6 = 0$ έχει τέσσερις διαφορετικές λύσεις δείξτε ότι $8a < 75$.

Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν δυο τουλάχιστον λύσεις διαστήματα που αναγράφονται δίπλα

10Α62. $x^3+ax^2+b=0$, $b>0$, $1+a+b<0$ στο $(-1,1)$

10Α63. $(3x^2-1)(k+\sigma\upsilon\nu x)=(x^3-x)\eta\mu x$ στο $(-1,1)$

10Α64. $(x^2-1)\sigma\upsilon\nu x + 2x\eta\mu x = 0$ στο $(-1,1)$.

10Α65. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\varepsilon\phi x = ax$, $a > 0$ έχει άπειρες λύσεις

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

10Α66. $5^x=1+4x$

10Α67. $x^{2n+1}+a^{2n+1}=(x+a)^{2n+1}$ $a>0$, $n \varepsilon N^*$

10Α68. $e^x = ex + 1 - x$

10Α69. $2^{x+1} = x^2 + x + 2$

10Α70. $32^{2+x} = x^3 + 3x^2 + 8x + 12$

10Α71. $2(x-1) = (e^2 - 1)\ln x$

10Α72. $e(x-1) = (e-1)x\ln x$

10Α73. $x = e\ln x$

10Α74. $1 + x^{2n} = (1+x)^{2n}$ $n \varepsilon N^*$

10Α75. $2x + \ln^2(x+1) = 2\ln(x+1)$

10Α76. $\frac{x^2-a^2}{2ax}=\ln x-\ln a\ ,\ a>0$

10Α77. $2x+\ln x=2$

10Α78.Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+xf(0)=xf(1)+f(0)$ όταν

είναι: $f''(x)\neq 0\ \forall x\in R$

10Α79.Να βρεθούν οι μη αρνητικές ρίζες

της $f(x)=6e^x-(6+6x+3x^2+x^3)$

Σε πολλές από τις επόμενες κάποια όρια θα βρείτε με De l' Hospital»

10Α80.Να βρεθεί το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της

συνάρτησης $f(x)=2x^3-6x+k\ ,|k|<4\ ,\ x\in[-1,1]$

10Α81.Να βρεθεί το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της

συνάρτησης $f(x)=e^x+\ln(x-1)-\sqrt{3}$

Βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου *m*.

10Α82. $x\ln x=m$

10Α83. $mxe^{-x}=1$

10Α84.x^3-x=m

10Α85.$x^2e^x=m$

10Α86.$m^x=x$

10Α87.$x=m\ln x$

10Α88. $\ln|x|=\frac{m}{2x}$

10Α89.$2x(e^x-1)+(1-m)e^x+m=0$.

Β ΟΜΑΔΑ

10Β1. Για ποιες του *α/b* η εξίσωση $ax^3 + be^x = 0$, $ab \neq 0$ έχει μία ακριβώς λύση

(Μπορεί να χρειαστείτε τον κανόνα του De l' Hospital για την εύρεση κάποιου ορίου)

10Β2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $3x^4\text{-}x^2\text{-}2x\text{+}4\text{=}0$ είναι αδύνατη.

10Β3. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$m_1 a_1^{b_1 x + c_1} + m_2 a_1^{b_2 x + c_2} + \ldots + m_n a_1^{b_n x + c_n} = P(x)$, όπου το *P(x)* είναι, πολυώνυμο *k βαθμού* ,και όλοι οι αριθμοί m_i ,b_i είναι θετικοί , έχει *k+1* το πολύ λύσεις

10Β4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \ldots + \frac{1}{x-667} = 0$ έχει *666* ακριβώς λύσεις

10Β5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2^x + 2^{-x} = x^2 - \frac{1}{2}x + a$, $a > 2$ έχει δύο ακριβώς λύσεις

10Β6. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^2 = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$ έχει δύο ακριβώς πραγματικές λύσεις .

10Β7. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2\text{=}\sigma\upsilon\nu x\text{+}x\eta\mu x$ έχει δύο ακριβώς λύσεις.

10Β8. Αν $f(x)\text{=}x^2\text{-}3\sigma\upsilon\nu x\text{+}2x\eta\mu x$ και ισχύει $f(q)\text{=}0$ δείξτε ότι $|q| \leq 3$.

Στη συνέχεια δείξτε ότι η εξίσωση $f(x)\text{=}0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.

10Β9. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{x}$ έχει άπειρες λύσεις

10Β10. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{-x} - \eta\mu x = 0$ έχει άπειρες λύσεις για $x \in [0, +\infty)$

10B11. Να δείξετε ότι η εξίσωση x^3-$7x+2=0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές λύσεις και αν f παραγωγίσιμη στο R ώστε $f^3(x)+2=7f(x)$ τότε η f είναι σταθερή.

10B12. Να λυθεί η εξίσωση $x^x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

10B13. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$a^x = 1+(a-1)x^2 \ , \ 1 < a < 3$

10B14. Για ποιες τιμές του m υπάρχει $\kappa>0$: η εξίσωση $x^2+m=2klnx$ να έχει μοναδική λύση.

10B15. Βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $m^x=log_m x$ για τις διάφορες τιμές του m.

10B16. Βρείτε το πλήθος των θετικών ριζών της εξίσωσης

$a^x = x^b \quad , \quad a > 1, b \neq 0$

10B17. Να λυθεί η εξίσωση $x^{x+2} = (x+2)^x$

10B18. Αφού βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων με τύπους

$f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ και $g(x) = 2 + ex\ln x$,να λύσετε την εξίσωση

δύο μεταβλητών $\dfrac{2z}{1+z^2} = 2 + ey\ln y$

Χρησιμοποιήστε αυτή την τεχνική για να λύσετε τις εξισώσεις δύο μεταβλητών

10B19. $\dfrac{e\ln y}{y} = z + \dfrac{1}{z}$

10B20. $\dfrac{1}{x} + 2\sqrt{x} = 3y(1-\ln y)$

10B21. $4^x + 1 = 2^{x+1}\eta\mu y$

10B22. $\dfrac{\ln x}{x} = e^{\sigma\upsilon\nu\, y}$

Να λύσετε τα συστήματα

10Β23. $2+\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu y=z^2+1$

10Β24. $4x^3+3x^4+2=1-|y|=-ze^{z+1}$

Γ ΟΜΑΔΑ

10Γ1. Να λυθεί η εξίσωση $3^x+6^x=4^x+5^x$

(Ξεφεύγει από τα συνηθισμένα)

10Γ2. Αν το πολυώνυμο $x^3-kx^2+12x-8$ έχει τρεις θετικές ρίζες να βρεθούν οι ρίζες του καθώς και το k.

10Γ3. Αν $f''(x)+xf'(x)=f(x),\forall x\in[a,b],f(a)=f(b)=0$ με $\alpha>0$ τότε η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (a,b).

10Γ4. Αν $p(x)=a(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$ τότε να δείξετε ότι αν όλα τα a_k είναι διαφορετικά μεταξύ τους, τότε το $[p'(x)]^2-p(x)p''(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες

10Γ5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^8+3x^6-5x^3-4x+6=0$ είναι αδύνατη στο R

10Γ6. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^8+3x^6-3x^3-2x+9=0$ είναι αδύνατη στο R

10Γ7. Να δείξετε ότι οι εξισώσεις $\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)=x,\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)=x$ έχουν μία μόνον λύση στο $(0,\pi/2)$ με τη πρώτη μικρότερη της δεύτερης

10Γ8. Έστω πολυώνυμο f βαθμού $n\geq 1$ με όλες του τις $k\leq n$ πραγματικές ρίζες απλές και $f(0)\neq 0$

Να δείξετε ότι το πολυώνυμο

$g(x)=(1-x^2)f(x)f'(x)+x\left((f'(x))^2-f^2(x)\right)$ έχει

τουλάχιστον *2k-1* ρίζες

Δ ΟΜΑΔΑ

10Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots+\frac{x}{1!}+1=0$ έχει μία μόνον λύση αν *η* περιττός και καμία αν *η* άρτιος

(Μην ξεχνάτε την επαγωγή. Δεν φτάνει όμως μόνον αυτό)

10Δ2. Έστω *p* πολυώνυμο αρτίου βαθμού. Αν $q(x)=p(x)+p(x+1)+\ldots+p(x+k)$, $k\in N^*$ να δείξετε ότι υπάρχει τιμή του φυσικού *κ* ώστε το πολυώνυμο *q* να μην έχει ρίζα στο *R*

10Δ3. Έστω ότι *α* ακέραιος, *b* πραγματικός και *n* φυσικός. Πως πρέπει να επιλεγούν τα *a,b* ώστε η εξίσωση $x^n=2ax+b$ να έχει μια τουλάχιστον λύση για κάθε *n*

10Δ4. Αν *a,b* περιττοί πρώτοι, $c,n>1$ ακέραιοι να δείξετε ότι η εξίσωση $(\frac{a+1}{2})^b+(\frac{a-1}{2})^b=c^n$ δεν μπορεί να έχει δυο λύσεις $a\neq b$

11 ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

Α ΟΜΑΔΑ

Να δειχθούν οι παρακάτω ανισώσεις

11Α1. $\frac{a-b}{a}\leq ln(\frac{a}{b})\leq\frac{a-b}{b}\ \forall, a>0, b>0$

11Α2. $\frac{a-b}{\sigma\upsilon\nu^2 b}<\varepsilon\phi\, a-\varepsilon\phi\, b<\frac{a-b}{\sigma\upsilon\nu^2 a}$ όταν $0<b<a<\pi/2$

11Α3. $\nu\beta^{\nu-1}(\alpha-\beta)<\alpha^{\nu}-\beta^{\nu}<\nu\alpha^{\nu-1}(\alpha-\beta)$ όταν $\alpha,\beta>0$

11Α4. Αν $0<a<b \Rightarrow ln\dfrac{a}{b}>\dfrac{a^2-b^2}{2ab}$

11Α5. $ae^{-bx}-be^{-ax}\geq a-b$ όταν $x>0,\ 0<a<b$

11Α6. $\dfrac{\varepsilon\phi\, a}{\varepsilon\phi\, b}>\dfrac{b}{a}$ όταν $0<b<a<\pi/2$

11Α7. $\dfrac{a-1}{a}\leq ln\, a\leq a-1 \quad \forall, a>0$

11Α8. $1+x\leq e^x\leq\dfrac{1}{1-x} \quad \forall x\in(-1,1)$

11Α9. $\dfrac{1}{1+a}<ln(1+\dfrac{1}{a})<\dfrac{1}{a}\ \forall a>0$

11Α10. $f(x)=\dfrac{1-ln\,x}{x^2}, 0<a<b<e\Rightarrow f(b)<\dfrac{b\,ln\,a-a\,ln\,b}{ab(a-b)}<f(a)$

Να βρείτε το a στις παρακάτω περιπτώσεις

11Α11. Αν $x^4+2x^3+ax-a-3\geq 0\ \forall x\in R$ τ

11Α12. Αν $ln(\dfrac{x}{a})\leq x-a\ ,\ \forall x\in(0,+\infty)\ ,\ a>0$

11Α13. Αν $ae^x\geq x+a\ ,\forall x\in R$

11Α14. Αν $a^x-b^x\geq x\ \forall x\in R\Rightarrow a=be$

11Α15. Αν $f'(x)\neq 0, f(a)=0, x\in R, e^{f(x)}\geq mf(x)+1, \forall x\in R$ να βρεθεί το m

11Α16. $f(x)\leq ax^2+bx+c\ ,\ \forall x\in R\ ,\ f(0)=c\ ,\ f$ παραγωγίσιμη. Δείξτε ότι $f'(0)=b$

11Α17. Αν $a^x\geq 1+x \quad \forall x\in R\ ,\ a>0$ δείξτε ότι $a=e$

11Α18. $a_1^x+a_2^x+\ldots+a_n^x\geq n \quad \forall x\in R\ ,\ a_k>0\Rightarrow a_1a_2\ldots a_n=1$ *

11Α19.Έστω f παραγωγίσιμη και

$1+(x-2)f(1)+f(x)\geq e^{a(x-1)}$ $\forall x\in R$. Αν επιπλέον ισχύει

$f(1)+f\,'(1)=2$ βρείτε την τιμή του a.

11Α20.Να δειχτεί ότι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός x_0 και να βρεθεί, ώστε $4^x\geq x_0\cdot x+1$ για κάθε $x\in R$.

11Α21.Να δειχτεί ότι: $\ell n\left(x^2+1\right)\leq x$, για κάθε $x\geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα $\ell n\left(x^2+1\right)=x$;

11Α22.Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{\ell nx}{x^2}$, $x>0$.

i) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να δειχτεί ότι $x^2\geq 2e\cdot\ell nx$, $x>0$.

11Α23.Αν $x>0$ τότε είναι: $n(1-x^{\frac{-1}{n}})\leq ln\,x\leq n(x^{\frac{1}{n}}-1),n\in N^*$

Βρείτε το $\lim\limits_{n\to\infty}[n(\sqrt[n]{x}-1)]$

(αυτή η τελευταία ακολουθία αποτελεί έναν τρόπο ορισμού του lnx)

Δείξτε ότι

11Α24. $ln\,x>\dfrac{2x-2}{x+1}$ για $x>1$

11Α25. $2a\,ln\,a\leq(a+1)(a^2+1)\ ,\forall a\geq 1$

11Α26. $e^x\geq 1+x+\dfrac{x^2}{2}$ $\forall x\geq 0$

11Α27. $(1+a)^x\geq 1+ax$, $\forall x\geq 1$, $a>-1$

(Μοιάζει με Bernoulli αλλά δεν είναι το x ακέραιος.)

11Α28.Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του $m: e^x\geq mx^2$, $\forall x>0$

Να δειχθεί ότι:

11Α29. $x^x \geq e^{x-1} \quad , \forall x > 0$

11Α30. $x^a e^{-x} \leq \left(\frac{a}{e}\right)^a \quad \forall x, a \in [0, +\infty)$

11Α31. $\left(\frac{ea}{b}\right)^a < e^b$ όταν $0 < a < b$

11Α32. $e^{\pi} > \pi^{e}$

11Α33. $e^e \pi^\pi > e^{2\pi}$

11Α34. $e^x + e^{-x} \geq 2 + x^2 \quad , \forall x \in R$

11Α35. $\pi \eta\mu x \geq 2x \ , \forall x \in (0, \pi/2)$

11Α36. $\eta\mu(a+b) < \eta\mu a + b\sigma\upsilon\nu a$ όταν $0<\alpha<\alpha+\beta<\pi/2$

11Α37. $\frac{3x}{\eta\mu x} > 4 - \sigma\upsilon\nu x \ , \forall x \in (0, \pi/2)$

11Α38. $\eta\mu x + \varepsilon\varphi x > 2x \quad \forall x \in (0, \pi/2)$

11Α39. $\eta\mu\, x > x - \frac{x^3}{6} \quad \forall x > 0$

11Α40. Αν $\alpha > \frac{1}{2}$, τότε για κάθε $x \in R$.

11Α41. $\varepsilon\phi\, x < \frac{\pi x}{\pi - 2x} \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

11Α42. $x^{\frac{1}{x}} < 1 + \frac{3}{2\sqrt{x}} \quad \forall x \in [1, e]$

11Α43. $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x} \quad , \forall x > 1$

11Α44. Αν $x|f'(x)| \leq 1 \ , \forall x \geq 1 \ , \ f(1) = 1$ δείξτε

$$1 - \ln x \leq f(x) \leq 1 + \ln x \quad , \forall x \geq 1$$

11Α45. Αν είναι $x.f'(x) \geq 1+x\ \forall x \in [1,e]$, $f(1)=1$, $f(e)=1+e$ τότε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f στο $[1,e]$

11Α46. Να δειχθεί ότι, αν $f''(x)<0\ \forall x \in [a,b]$, $f(a)=f(b)=0$, τότε θα ισχύει $f(x)>0\ \forall x \in (a,b)$

*(**Βασική άσκηση** που θα χρησιμεύσει στα επόμενα.. Π.χ στην κυρτότητα κ.ο.κ)*

11Α47. Αν $f''(x)<0$, $\forall x \in [1,3], f(2)=0. f(3)=1$. Δείξτε $f(x)<x-2\ \forall x \in (1,2)$ ενώ $f(x)>x-2\ \forall x \in (2,3)$

11Α48. Να δειχθεί ότι, αν $f''(x)<0$, $f(0)=0$, $f(v)=v$, τότε $f(x) \geq x \forall x \in [0,v]$

11Α49. Αν $f''(x)>0$, $\forall x \in R$ δείξτε ότι $6f(7)<5f(6)+f(12)$

11Α50. Αν $f''(x)>0$, $\forall x \in R$ δείξτε ότι

$3f(5a)<f(3a)+2f(6a)$, $\forall a>0$

Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις

11Α51. $e^{x^2+x+1}-e^{x+1}+x^2 \geq 0$

11Α52. $(x^2+e)^{x^4+e} \geq (x^4+e)^{x^2+e}$

11Α53. $(3^x+4^x)^3-5^x>125^x-3^x-4^x$

11Α54. $2\sqrt{x-e^4}>\sqrt{ln(x-1)}$

11Α55. $x>1+e^{2-x}$

11Α56. $\pi\eta\mu\sqrt{x}>4\sqrt{x}$

11Α57. $ln^2 2+e^x+e^{-x}>x^2+\frac{5}{2}$

<u>Β ΟΜΑΔΑ</u>

11Β1. Να δείξετε ότι $(a+b)ln(\frac{a+b}{2}) \le a\,ln\,a + b\,ln\,b \quad \forall a,b>0$

11Β2. Αν $a>0$, $b>0$, $a+b=1$, $x>0$, $y>0$ δείξτε ότι $x^a y^b \le ax+by$

11Β3. Δείξτε ότι $(x+y)ln(\frac{x+y}{a+b}) < x\,ln(\frac{x}{a}) + y\,ln(\frac{y}{b})$

11Β4. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a},\vec{b}$: $0 < \vec{a}.\vec{b} \ne 1$, $|\vec{a}|.|\vec{b}| = 2$.

Αν ισχύει : $\log_{\vec{a}.\vec{b}} x - \frac{x}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} \le 0 \qquad \forall x>0$ δείξτε ότι :

$\vec{a},\vec{b}$ ομόρροπα

11Β5. Δείξτε ότι $e^x \ge 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ $,\forall x \ge 0$

(Μπορεί να αποδειχθεί, αλλά πολύ αργότερα ότι :

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + . \;.\;.\; + \frac{x^n}{n!} + . \;.\;.\; ,\forall x \in R$*)*

11Β6. Αν $f(x) = \eta\mu x$ $,0 < x \le 1$ τότε δείξτε ότι

$f(x) + f^{-1}(x) > 2x ,\forall x \in (0,1]$

11Β7. Αν $f'(x) > \sigma\upsilon\nu x \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $f(0)=0$ δείξτε ότι

$f(x) + f(-x) > 2\eta\mu x \quad \forall x \in (0,\frac{\pi}{2})$

11Β8. Δείξτε ότι $\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3 > \sigma\upsilon\nu x \quad \forall x \in (0,\pi/2)$

11Β9. Δείξτε ότι $4x \ge 4x^2 + \eta\mu(\pi x) \quad \forall x \in [0,1]$.

(Καλή εξάσκηση στον πίνακα μονοτονίας και όχι μόνον)

11Β10. *Αν* $na_n = 1 - x^n$, $0 < x < 1$, $n \in N^* \Rightarrow a_{n+1} < a_n$

11B11. Έστω $f : R \to R \quad : \left| f(x) \right| \le axe^{x} + e^{2x} - e^{3x} \quad \forall x \in R$. Τότε να δείξετε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 θα ισχύει: $f(0) = f'(0) = 0 \ , \ a = 1$

11B12. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[1,a]$, $f(1)=a$, $f(a)=1+2a$.Τότε να βρεθούν οι τιμές του a εάν είναι: $1 \le f'(x) \le 2 \ , \ x \in (1,a)$

11B13. Αν $f''(x) > 0 \ , \forall x \in R \ , a < b$ δείξτε ότι

$f(x) < f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ και

$f(x) < f(b) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b)$ όταν $x \in (a,b)$. Δείξτε ακόμη ότι οι προηγούμενες ανισότητες γίνονται ισότητες για $x = a \, , x = b$. Τέλος δείξτε ότι αλλάζουν φορά όταν $x \not\in [a,b]$.

11B14. Αν $f''(x) > 0 \quad \forall x \in R \ , \ f(0) = 3 \ , \ f(3) = 6$ τότε δείξτε ότι : $f(x) > x + 3 \ \forall x > 3$ ενώ $f(x) < x + 3 \ \forall x \in (0,3)$

11B15. Αν $f''(x) < 0 \quad \forall x \in [-1,2] \, , f(-1) = -2 \ , \ f(1) = 0$ τότε δείξτε ότι : $f(0) > -1$ ενώ $f(2) < 1$

11B16. Αν $f : [a,b) \to R, \lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty, f'(x) \le (f(x))^{2}$, f αύξουσα, η f έχει συνεχή παράγωγο και ακόμη $f(a)=1$, τότε δείξτε ότι $b - a \ge 1$

11B17. Αν $f''(x) > 0 \quad \forall x \in R$, $a<b<c<d$, $a+d=b+c$, δείξτε ότι $f(a)+f(d)>f(b)+f(c)$

11B18. Αν $f''(x) > 0 \quad \forall x \in R$ τότε οποιαδήποτε «χορδή» ΑΒ βρίσκεται «επάνω» από το αντίστοιχο τμήμα της C_f

(Διάσημο συμπέρασμα που θα μπορούσε να ορίσει τις κυρτές συναρτήσεις.)

11Β19. Αν $f''(x)>0$, $\forall x \in R$ δείξτε $3f(1)<f(-3)+f(0)+f(6)$

11Β20. Αν $f''(x)>0$, $\forall x \in R$ δείξτε ότι

$$(a+b)f(\frac{b-a}{b+a})<af(-1)+bf(1) \ , \ \forall a,b>0$$

11Β21. Αν $f(x)>0, f'(x)<0, f''(x)\geq 0$, $\forall x \in [0,+\infty)$, δείξτε ότι

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$$

11Β22. Αν f'' συνεχής , $f(x) \geq 0$ στο (a,b) , $f(x_0)=f'(x_0)=0$, x_0 στο (a,b). Τότε να δείξετε ότι $f''(x_0)$ είναι μη αρνητικός αριθμός. Στη συνέχεια δείξτε ότι αν ισχύει

$1+\sigma\upsilon\nu(ax)\geq \sigma\upsilon\nu(bx)+\sigma\upsilon\nu(cx)$ $\forall x \in R$ τότε θα είναι

$b^2+c^2 \geq a^2$

11Β23. Αν $f''(x)>0$, $f(x)=f(a+b-x)$, $\forall x \in [a,b]$ να μελετήσετε το πρόσημο της συνάρτησης

$$f(x)-f(b)-2\frac{f(\frac{a+b}{2})-f(a)}{b-a}(x-a) \ , \ \forall x \in [a,b]$$

Γ ΟΜΑΔΑ

11Γ1. Αν $a,b \in (0,1) \Rightarrow a^b+b^a>1$

11Γ2. Αν $a,b>0$ τότε $(8a^2+b^2)^2>16a^3b$

11Γ3. Να δειχθεί ότι $(1+\frac{1}{x^2})x\eta\mu\frac{1}{x}>1, \forall x \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$

11Γ4. Αν $f''(x)>0$ $\forall x \in R$ δείξτε ότι οποιοδήποτε σημείο της C_f

βρίσκεται "ψηλότερα" από το σημείο της εφαπτομένης της με την ίδια τετμημένη. Αν τώρα

$x_0 \in [a,b] \Rightarrow \exists m,n > 0, m+n=1 : x_0 = ma+nb$. Δείξτε έτσι ότι $f(ma+nb) \le mf(a)+nf(b)$. Γενικεύστε την πιο πάνω πρόταση δείχνοντας ότι :Αν

$k,\lambda,m > 0 \ , \ k+\lambda+m=1 \Rightarrow$
$f(kx+\lambda y+mz) \le kf(x)+\lambda f(y)+mf(z)$

Πρόκειται για τις ***διάσημες ανισότητες Jensen****.Θα τις δείτε και αργότερα .*

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα ή άλλον τρόπο να δείξετε ότι αν $f''(x) > 0, \forall x \in R$

i) $3f(5) \le f(2)+f(3)+f(10)$

ii)Αν $a,b,c > 0 \Rightarrow a^a b^b c^c \ge (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$

(Θυμηθείτε την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου)

11Γ5. Αν K εσωτερικό σημείο τριγώνου ABC και D,E,F οι προβολές του K στις πλευρές να βρεθεί το μέγιστο της παράστασης $\dfrac{KD.KE.KF}{KA.KB.KC}$

11Γ6. Κυρτό τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 1 και ισχύει $ΑΒ.ΒΓ.ΓΔ.ΔΑ \ge 4$ τότε να δείξετε ότι το $ΑΒΓΔ$ είναι τετράγωνο

11Γ7. Σε κάθε τρίγωνο $\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \ge ημA + ημB + ημΓ$. Η τιμή $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, είναι η μέγιστη τιμή του αθροίσματος $ημA+ημB+ημΓ$?

11Γ8. Δείξτε ότι

$$\frac{a^{n+2}}{(b+c)^n}+\frac{b^{n+2}}{(c+a)^n}+\frac{c^{n+2}}{(a+b)^n} \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{2^n}, a,b,c > 0$$

11Γ9. Αν $a,b,c>0$ να δειχθεί ότι

$$b^a c^b a^c \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^a \left(\frac{b+c}{2}\right)^b \left(\frac{c+a}{2}\right)^c \le a^a b^b c^c$$

11Γ10. $x,y,z \ne 1, xyz=1 \Rightarrow \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{y}{y-1}\right)^2 + \left(\frac{z}{z-1}\right)^2 \ge 1$

11Γ11. Αν $x,y,z \in [0,\frac{1}{2}]$, $x+y+z=1$ τότε να δείξετε ότι

$$x^3+y^3+z^3+4xyz \le \frac{9}{32}$$

11Γ12. $x,y,z>0$, $x+y+z=1$, $S=xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$

να δείξετε ότι $S<1/4$

11Γ13. Να βρείτε το ελάχιστο της παράστασης

$(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})(a+1)(b+1)(c+1)$ για $a,b,c>0$

11Γ14. Αν $x>0$, $y>0$ για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών a , b

υπάρχει σταθερά $K>0$: $x^a \cdot y^b \le K\cdot(x+y)$, $\forall x,y \in (0,+\infty)$

Δ ΟΜΑΔΑ

11Δ1. Δείξτε ότι $\varepsilon\varphi(\eta\mu x)>\eta\mu(\varepsilon\varphi x)$ $\forall x \in (0,\frac{\pi}{2})$

11Δ2. Έστω $f:[a,b] \to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη με

$f(x)>0$ $\forall x \in (a,b)$, $f(a)=f(b)=0$, $f(x)+f''(x)>0$

$\forall x \in [a,b]$ Να δείξετε ότι $b-a \ge \pi$

11Δ3. Αν $f'''(x)$ γνήσια αύξουσα στο R τότε

$f(x+1)-2f(x)+f(x-1)>f''(x), \forall x \in R$

(Ψάξτε λίγο το θεώρημα Taylor έχει ξανά αναφερθεί)

11Δ4. Αν $f : R \to R$ με συνεχή $f'''(x)$ έτσι ώστε να ισχύουν σε όλο το R $f(x)>0, f'(x)>0, f''(x)>0, f'''(x)>0$ και επιπλέον $f'''(x) \le f(x)$, $\forall x \in R$ τότε δείξτε ότι :

$f'(x) < 2f(x)$, $\forall x \in R$

(θα φανεί χρήσιμο εδώ το θεώρημα Taylor)

11Δ5. Αν $|f(x)| \le A, |f''(x)| \le B, \forall x \in [-a,a] \Rightarrow |f'(x)| \le \frac{A}{a} + Ba$

Για ποιο α έχουμε το ελάχιστο άνω φράγμα της $|f'(x)|$

(Υπάρχει σχετικά σύντομη λύση με το θεώρημα Taylor)

11Δ6. Έστω $f : R \to R$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη . Να δείξετε ότι αν c>0 δεν υπάρχει συνάρτηση f

: $f^{(n+1)}(x) > f^{(n)}(x) + c$, $\forall x \in R$, $\forall n \in N$ και να υπάρχει το

$\lim\limits_{x \to -\infty} f^{(n)}(x)$, $\forall n \in N$

12 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

Α ΟΜΑΔΑ

Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα τις παρακάτω συναρτήσεις

12Α1. $f(x) = \frac{1}{2x} - \ln x$

12Α2. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{(x+1)^2}$

12Α3. $f(x) = \frac{x^3 - x + 3}{x^2 + 2x}$

12Α4. $f(x) = \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right), a > b > 0$

12Α5. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 3\alpha^2}$ *(α>0).*

12Α6. Το $(1,3)$ είναι σημείο καμπής της f: $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2$. Βρείτε τα α, β.

12Α7. Βρείτε τις τα α , b έτσι ώστε η $f(x)=e^{ax}(x^2+b)$ να έχει ακρότατο στο 0 και σημείο καμπής για $x=1$

12Α8. Για ποιες τιμές του α η $f(x)=x^4-6a^2x^2+5ax$ έχει σημεία καμπής? Είναι δυνατόν τα σημεία καμπής και η αρχή των αξόνων να είναι συνευθειακά σημεία?

12Α9. Δείξτε ότι τα σημεία καμπής της f όπου:

$f(x)=\lambda x^3+3\lambda x^2-(6\lambda+5)x-8\lambda+3$ $(\lambda>0)$ είναι ανεξάρτητα του λ.

12Α10. Για ποια λ η f: $f(x)=\lambda e^x+x^2+2x+2$ έχει σημεία καμπής ;

12Α11. Δείξτε ότι τα σημεία καμπής της $f(x)=\dfrac{1+x}{1+x^2}$ είναι συνευθειακά.

12Α12. Βρείτε τα σημεία καμπής της $f(x)=\alpha\eta\mu^2 x+\beta\sigma\upsilon\nu^2 x$, $\alpha>\beta>0$.

12Α13. Έστω $p(x)$ πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Να δείξετε ότι έχει μοναδικό σημείο καμπής $(x_0, p(x_0))$. Αν τώρα το p έχει ακρότατα στις θέσεις x_1, x_2 τότε δείξτε ότι $2x_0=x_1+x_2$ Τέλος αν το $p'(x)$ έχει διπλή ρίζα το ρ θα είναι $\rho=x_0$

12Α14. Δείξτε ότι τα σημεία καμπής της $f(x)=x^2\ln(ax)$, $a>0$ βρίσκονται πάνω σε μια παραβολή

12Α15. Δείξτε ότι τα σημεία καμπής της $f(x)=xe^{ax}$, $a\neq 0$ βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία

12Α16. Για ποιες τιμές του m η $f(x)=x^4+mx^3+3x^2+1$ είναι κυρτή

12Α17. Έστω f,g παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε όλο το R με $f'(x)g'(x)\neq 0$ και κυρτές Αν η f είναι γνήσια αύξουσα τότε δείξτε ότι η fog είναι κυρτή

12Α18. Δείξτε ότι στην γραφική παράσταση μιας κοίλης συνάρτησης δεν υπάρχουν τρία ή και περισσότερα συνευθειακά σημεία.

(αυτή η άσκηση υπήρχε και πιο πριν)

12Α19. f είναι κυρτή στο R και έχει τοπικό ελάχιστο. Δείξτε ότι είναι ολικό

12Α20. $f:(a,b)\to R$ κυρτή. Δείξτε ότι δεν έχει μέγιστο. Αν το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο τότε x_0 μοναδικό.

12Α21. Αν f κυρτή και g κοίλη στο R δείξτε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται το πολύ σε δυο σημεία

12Α22. Δείξτε ότι η εφαπτομένη μιας κυρτής συνάρτησης βρίσκεται πάντοτε κάτω από την γραφική της παράσταση στο αντίστοιχο διάστημα. Για $x>x_0$,όπου x_0 το σημείο επαφής, η κατακόρυφη απόσταση της f από την εφαπτομένη της αυξάνει.

<u>**Β ΟΜΑΔΑ**</u>

12Β1. Δείξτε ότι τα σημεία καμπής της f_0: $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ ανήκουν στην καμπύλη με εξίσωση $y^2(4+x^4)=4$.

12Β2. Δείξτε ότι τα σημεία καμπής της f: $f(x)=x\eta\mu x$ βρίσκονται πάνω στην καμπύλη c: $y^2(4+x^2)=4x^2$.

12Β3. Έστω *f*: $f_\lambda(x)=\dfrac{x}{x^2+\lambda^2}$, $\lambda>0$. Δείξτε ότι τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει ακρότατα και καμπή εκτός του $(0,0)$ είναι κορυφές παραλληλογράμμου. Δείξτε ακόμη ότι οι εφαπτόμενες της f στα σημεία που η C_f παρουσιάζει καμπή τέμνονται σε σταθερή υπερβολή.

12Β4. Αν $f''(x)$ συνεχής στο R και η f δεν είναι σταθερή σε κανένα διάστημα τότε να δείξετε ότι μεταξύ ενός τοπικού μεγίστου και ενός τοπικού ελαχίστου υπάρχει σημείο καμπής

12Β5. Αν f παραγωγίσιμη δύο φορές στο $[\alpha,\beta]$ και $x_0 \in (\alpha,\beta)$, δείξτε ότι δεν είναι δυνατόν η f να παρουσιάζει ταυτόχρονα ακρότατο και καμπή στο x_0. Θεωρήστε ότι η f δεν είναι σταθερή σε κανένα διάστημα

12Β6. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση σε όλο το R και είναι : $f''(x)>4\{f'(x)-f(x)\}$ στο R. Αν είναι : $g(x)=e^{-2x}f(x)$ στο R και η συνάρτηση f έχει ακρότατο στο x_0 το $f(x_0)=0$ τότε:

ι)Δείξτε ότι η g δεν έχει σημεία καμπής

ιι)Μελετήστε την μονοτονία της g

ιιι)Δείξτε ότι $f(x)\geq 0\ \forall x\in R$

12Β7. Έστω $f,g:[0,1]\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις με την f κυρτή την g κοίλη και $f(0)=0, f(1)=0, g(0)=1, g(1)=0$. Δείξτε ότι:

$g(x)-f(x)\geq 1-x, \forall x\in[0,1]$,

$g'(0)>f'(0)-1, g'(1)<f'(1)-1$

12Β8. Έστω $f:R\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη με

$\left(f'(x)\right)^3+\left(f'(x)\right)^2+\left(f'(x)\right)=e^x-x-1+x^2 \ , \ \forall x\in R$.

Δείξτε ότι η f δεν έχει ακρότατα αλλά έχει ένα σημείο καμπής.

12Β9. Αν $f:R\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη και

$\left(f'(x)\right)^5+f'(x)=2x+\eta\mu x$ για κάθε τιμή του x τότε να

δείξετε ότι η συνάρτηση έχει μοναδικό ακρότατο στο R,

αλλά δεν έχει κανένα σημείο καμπής.

12Β10. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $e^x=f(x)$ είναι αδύνατη όταν:

$f(1)=0, f'(1)=1$ και επιπλέον $f''(x)<0 \ , \ \forall x\in R$

12Β11. Αν $f'(x)=af^2(x)+bf(x)+c, \forall x\in R$ με

$a>0 \ , \ \Delta=b^2-4ac<0$ τότε

1) Δείξτε ότι η f δεν έχει ακρότατα

2) Δείξτε ότι η $f(x)-mx$ είναι αύξουσα στο R όπου

$m=-\dfrac{\Delta}{4a}$

3) Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \ , \ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ και βρείτε το σύνολο τιμών

4) Δείξτε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής

12Β12. Αν $f:R\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη δείξτε ότι δεν είναι δυνατόν να ισχύει $f(x)f''(x)<0 \ , \ \forall x\in R$

12Β13 Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f:R\to R$, κυρτή :

$f(x)<M \ , \ \forall x\in R$

12Β14 $f(x)>0 \ , \ f''(x)\le 0 \ \ \forall x\in R \ , \ f(2)=1, f''$ συνεχής

,βρείτε τον τύπο της f

12Β15. Αν $f''(x)=5f(x)$, $\forall x\in R$ και στην C_f δεν υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα τότε η f έχει το πολύ μια ρίζα, ένα σημείο καμπής ένα ακρότατο

12Β16. Να λυθεί η εξίσωση $x^4-4x+4=0$

12Β17. Αν $f''(x)>f(x)$, $\forall x\geq 0, f(0)=f'(0)=0$ να δειχθεί ότι f κυρτή στο $[0,+\infty)$

Γ ΟΜΑΔΑ

12Γ1. Αν $f\,'$ συνεχής και γνήσια μονότονη στο R και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\in R$ τότε να δειχθεί ότι υπάρχει το πολύ ένα ξ: $f'(\xi)=f(\xi)$

12Γ2. f κοίλη στο R Δείξτε ότι

$f(x+1)-f(x)<f'(x)<f(x)-f(x-1)$. Αν

$\ell im\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-ax-b\big)=0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=a$

12Γ3. $\ell im\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax-b]=0$, $a>0$, f κοίλη στο R. Δείξτε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της συνάρτησης παράλληλη της $y=ax+b$

12Γ4. Αν f κυρτή στο Δ και $x,y\in\Delta$, $k,\lambda>0$ δείξτε ότι

το $z=\dfrac{kx+\lambda y}{k+\lambda}$ βρίσκεται μεταξύ των x,y

και $f(\dfrac{kx+\lambda y}{k+\lambda})\leq\dfrac{kf(x)+\lambda f(y)}{k+\lambda}$ $,x,y\in\Delta$ ενώ αν f κοίλη

στο Δ τότε θα ισχύει

$$f(\frac{kx+\lambda y}{k+\lambda})\geq\frac{kf(x)+\lambda f(y)}{k+\lambda}\ ,\ k,\lambda>0\ ,x,y\in\Delta.$$

Τις προηγούμενες ανισότητες έχουμε ξαναδεί ως ***ανισότητες Jensen,*** *ισότητα ισχύει για x=y. Γενικότερα*

$$f\left(\frac{k_1x_1+k_2x_2+\ldots+k_nx_n}{k_1+k_2+\ldots+k_n}\right)\leq\frac{k_1f(x)+k_2f(x_2)+\ldots+k_nf(x_n)}{k_1+k_2+\ldots+k_n}$$

με $k_i>0, x_i\in\Delta, f$ κυρτή *.Τις αναφέρουμε εδώ επειδή έχουν άμεση σχέση με την έννοια της κυρτότητας περιμένοντας και ακόμη έναν άλλον τρόπο απόδειξής τους*

12Γ5. Χρησιμοποιώντας κατάλληλα τις ανισότητες Jensen δείξτε ότι

1) $3(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2$

2) $\frac{x^n+y^n}{2}\geq\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad n\in N^*, x,y\in[0,+\infty)$

3) $(a+b)ln(\frac{a+b}{2})\leq a\,ln\,a+b\,ln\,b\ ,\ \forall a,b>0$

12Γ6. Αν $f''(x)<0\ \forall x\in[a,b]\ ,\ f'(a)f'(b)<0$ τότε δείξτε ότι η συνάρτηση έχει μέγιστο έστω σε κάποιο μοναδικό *c*. Το $c\in(a,b)$. Αν $f'(a)>k>m$ με $g(x)=k(x-a)+f(a)$ και $m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ τότε δείξτε ότι $m>f'(b)$ και ότι οι γραφικές παραστάσεις των *f,g* έχουν μοναδικό κοινό σημείο στο $(a,b]$, έστω $(d,f(d))$.

Τέλος να δείξετε ότι θα ισχύει $f(x)<g(x)\ \forall x\in(d,b)$ ενώ $f(x)>g(x)\ \forall x\in(a,d)$

<u>Δ ΟΜΑΔΑ</u>

12Δ1. *f* δυο φορές παραγωγίσιμη

$$\exists c:\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\neq f'(c),\forall x\neq y\Rightarrow f''(c)=0$$

13 DE L’ HOSPITAL

Α ΟΜΑΔΑ

Υπολογίστε τα όρια:

13A1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{e^{x}}$, $\alpha>0$

13A2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{x}$

13A3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x - x}{x^{3}}$

13A4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{2}-\ln x\right)$

13A5. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x\ln x-1}{(x-1)\ln x}$

13A6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^{2}(1+x)-\ln^{2}x}{\ln x}$

13A7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\eta\mu x}$

13A8. $f(x)=\begin{cases} g(x)\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ όταν $g(0)=g'(0)=0$. Εξετάστε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

13A9. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|2\eta\mu x-1|+e^{x}-2}{x}, & x\neq 0\\ -1, & x=0\end{cases}$. Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη .

Βρείτε τις τιμές των παραμέτρων ώστε

13A10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+\varepsilon\phi x}{x^3}=b\in R$

13A11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x+\alpha x}{x^3}=\beta\in R$.

13A12.να υπάρχει η $f\,'(1)$ όπου: $f(x)=\begin{cases}\alpha x+\beta, x\le 1\\ \dfrac{lnx}{x-1}, x>1\end{cases}$

13A13.η $f(x)=\begin{cases} ae^x+b\ ,\ x\ge 0\\ cx^2+x+1, x<0\end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο R

13A14.Έστω f: $f(x)=\begin{cases}(x+\lambda)ln(1-x), x\le 0\\ (x-\lambda)ln(1+x), x>0\end{cases}$. Αφού δείξετε ότι υπάρχει η $f\,'(0)$ για κάθε λ $\in R$/R, βρείτε το λ ώστε να υπάρχει και η $f\,''(0)$.

13A15.Εξετάστε αν υπάρχουν τιμές των παραμέτρων α , b ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο μηδέν

$$f(x)=\begin{cases}(x+a)ln(e+x), x\ge 0\\ (x+b)ln(e-x), x<0\end{cases}$$

13A16.Αν $f(x)>0$, $f(0)=1$, $f\,'$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ δείξτε ότι:

$$\lim\limits_{x\to 0+}\{f(x)\}^{1/x}=e^{f'(0)}.$$

13A17.Αν $\exists f'''(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f''(x)}{xf'''(x)}=1$ τότε να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{xf'(x)}$

13A18.Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)-2f(0)}{x^2}$ όταν υπάρχει η $f''(0)$

13Α19. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)+f(1-x)-2f(1)}{x^4}$ όταν η $f'''(x)$

είναι συνεχής

13Α20. Έστω $f''(x)$ συνεχής στο R. Να δείξετε τότε ότι θα ισχύει :

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)f'(a)}\right)=-\frac{f''(a)}{2\left(f'(a)\right)^2}$$

13Α21. Αφού μελετήσετε την μονοτονία της *f*: $f(x)=\dfrac{e^{\lambda x}}{x^2+\lambda^2}$,

$\lambda\in R^*$ υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(\dfrac{1+\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\right)^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2}$ όπου *α, β* ρίζες της $f\,'$.

13Α22. Να δειχτεί η εξίσωση *συνx* = *x* έχει ακριβώς μια λύση x_0 στο

διάστημα $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Στη συνέχεια να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\eta\mu x-\frac{x^2}{2}\right)-\left(\eta\mu x_0-\frac{x_0^2}{2}\right)}{\left(x-x_0\right)^2}$$

<u>Β ΟΜΑΔΑ</u>

13Β1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

13Β2. Αν $P(x)$ πολυώνυμο να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{P(x)}{e^x}\right)$

13Β3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}\right)$

13Β4. Θα λέμε ότι η συνάρτηση *f* είναι «πιο ισχυρή» από την *g*

κοντά στο +άπειρο όταν το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)=0$. Τοποθετείστε κατά σειρά ισχύος στο +άπειρο τις παρακάτω συναρτήσεις και δικαιολογείστε την απάντησή σας

Τριγωνομετρικές (*ημx,συνx)*

Λογαριθμικές ($ln_a(x)$, $a>1$)

Ριζικά ($\sqrt[n]{x}$, $n\in N^*-\{1\}$)

Πολυωνυμικές

Εκθετικές (a^x , $a>1$)

13Β5. Το αντίστροφο του κανόνα de l' Hospital δεν ισχύει και η παρακάτω άσκηση, σας προσφέρει ένα παράδειγμα:

Έστω $f(x)=x\eta\mu\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\dfrac{ln(1+x)}{x}$, $h(x)=\dfrac{x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}}{ln(1+x)}$.

Δείξτε ότι: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=0$.

Δείξτε τώρα ότι το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)'}{\left(\ell n(1+x)\right)'}$, δεν υπάρχει.

13Β6. Έστω *p(x)* πολυώνυμο νιοστού βαθμού και

$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$. Δείξτε ότι: $\ell im_{x\to 0}\left\{p(x)e^{-1/x^2}\right\}=0$ και

αν και η *f* δεν είναι σταθερή σε κανένα διάστημα ισχύει

$f^{(\kappa)}(0)=0$, $\kappa\in N^*$.

13Β7. Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to 1}\{lnx\cdot ln(1-x)\}$.

13Β8. Αν $g(0)=g'(0)=0$, $g''(0)=17$ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{g(x)}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$ βρείτε

την $f'(0)$.

13Β9. Βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(a+x)+f(a-x)-2f(a)}{x^2}$ υπάρχει η $f''(x)$

στο R

13Β10. Έστω f, g δυο φορές παραγωγίσιμες στο R και

$g(x) \neq 0 \ \ \forall x \in R$. Θέτουμε $A=\dfrac{f(a)}{g(a)}$, $B=\dfrac{f'(a)-Ag'(a)}{g(a)}$

και ορίζουμε την συνάρτηση w στο R-$\{a\}$ από την σχέση

$\dfrac{f(x)}{(x-a)^2 g(x)}=\dfrac{A}{(x-a)^2}+\dfrac{B}{(x-a)}+\dfrac{w(x)}{g(x)}$. Να βρείτε το

$\lim\limits_{x \to a} w(x)$

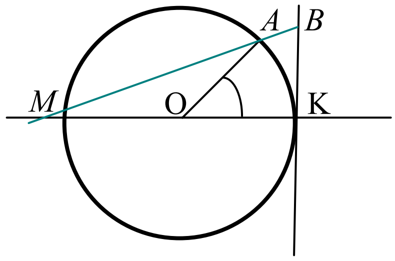
13Β11. Έστω f' συνεχής στο R και

$\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

13Β12. Για ποια λ η f: $f(x)=e^x+\lambda x^3$ έχει σημεία καμπής;

<u>Γ ΟΜΑΔΑ</u>

13Γ1. Το μήκος του «μικρού» τόξου AK είναι ίσο με το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος KB. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\omega \to 0} OM$ και να εξετάσετε αν το μέγιστο του *OM* είναι το *2R* όπου *R* είναι η ακτίνα του κύκλου και ω η γωνία ΚΟΑ .



13Γ2. Έστω *f* παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\{f'(x)+f(x)\}=\lambda\in R$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lambda$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

Θα χρειαστεί μια βελτίωση του κανόνα de l' Hospital για μορφή ∞/∞ την οποία δεν θα βρείτε στην ύλη του Λυκείου, αλλά αξίζει να το ψάξετε και αλλού, όπως πχ στο παράρτημα

<u>Δ ΟΜΑΔΑ</u>

13Δ1. *Αν* $f:(0,+\infty)\to R$ *με συνεχή* f'' *και*

$\left|f''(x)+2xf'(x)+(x^2+1)f(x)\right|\le 1,\forall x>0$ *τότε δείξτε ότι*

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

13Δ2. *Αν* $f''(x)$ *συνεχής στο R και ισχύει*

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f''(x)+af'(x)+bf(x)\right)=c$ όπου a,b,c πραγματικοί αριθμοί : $a>0,b>0,a^2>4b$ τότε να βρεθούν τα παρακάτω όρια : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)$

14 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

Α ΟΜΑΔΑ

Να βρείτε τις ασύμπτωτες των συναρτήσεων *f.*

14Α1. $f(x)=\dfrac{x^3+4x^2+3}{x^2+2x-1}$

14Α2. $f(x)=\dfrac{x^2-|x+6|}{|x^2-5|-4}$

14Α3. $f(x)=\sqrt{x^2-6x-1}+\dfrac{3}{1+x}-x$

14Α4. $f(x)=\sqrt{4x^2-3x}-\sqrt{x^2+x}$

14Α5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x-1} & x>1\\ \dfrac{2}{x} & 0<x\le 1\\ 2x+3 & x\le 0\end{cases}$

14Α6. $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-2},\ \ 0\le x\le 1$

14Α7. Βρείτε μια ρητή και όχι πολυωνυμική συνάρτηση που να έχει για ασύμπτωτο την ευθεία *(ε)* με εξίσωση $y = 1+x$.

14Α8. Έστω φ: $R \to R$ φραγμένη συνάρτηση που έχει μοναδική ασύμπτωτο. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)\in R$ $\mathbb{R}$.

14Α9. Αποδείξτε ότι αν $\varphi(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση τουλάχιστον 2^{ου} βαθμού τότε η φ δεν έχει ασύμπτωτους.

Το ίδιο συμβαίνει για πλάγιες αν φ ρητή με βαθμό αριθμητή τουλάχιστον μεγαλύτερο κατά δυο του παρονομαστή

14Α10. Έστω $\varphi: R \to R$ περιττή συνάρτηση που έχει μοναδική πλάγια ασύμπτωτο έστω *(ε)*. Δείξτε ότι η *(ε)* διέρχεται από την αρχή των συντεταγμένων.

14Α11. Αν η $f: R \to R$ είναι άρτια συνάρτηση και έχει μοναδική πλάγια ασύμπτωτο *(ε)* τότε δείξτε ότι η *(ε)* είναι οριζόντια ευθεία.

14Α12. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu x$ δεν έχει ασύμπτωτους.

(Είναι μια καλή ευκαιρία για να δείξετε ότι το $\lim\limits_{x\to+\infty}(\eta\mu x)$ δεν υπάρχει , χωρίς την χρήση ακολουθιών)

14Α13. Εξετάστε αν μια περιοδική συνάρτηση μπορεί να έχει ασύμπτωτους.

Β ΟΜΑΔΑ

14Β1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f^2(x)x^2+g^2(x)\right]=0$ βρείτε την ασύμπτωτη της $h(x)=f(x)+g(x)$ στο $+\infty$

14Β2. Η f είναι κοίλη αύξουσα και έχει οριζόντια ασύμπτωτο για $x>0$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x f'(x))=0$

14Β3. Η f είναι κυρτή για $x>0$ και έχει οριζόντια ασύμπτωτο. Δείξτε ότι η f είναι φθίνουσα

Γ ΟΜΑΔΑ

14Γ1. Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να δείξετε ότι: Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το (0,0) είναι να $\exists x_0 \in \Delta : x_0 f'(x_0) = f(x_0)$. Στην συνέχεια δείξτε ότι: Αν η f έχει ασύμπτωτο δ της μορφής $y = \lambda x$, και η C_f τέμνει την δ τότε υπάρχει εφαπτομένη που διέρχεται από το $(0,0)$

14Γ2. Έστω $f:(0,+\infty) \to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη, με f'' συνεχή συνάρτηση και η C_f δεν έχει κανένα ευθύγραμμο τμήμα. Υπάρχει εφαπτομένη που διέρχεται από το $(0,0)$ και ταυτίζεται με την ασύμπτωτο της C_f. Τότε η C_f έχει δυο τουλάχιστον σημεία καμπής.

15 ΜΕΛΕΤΗ

Α ΟΜΑΔΑ

Να γίνει η μελέτη και η χάραξη της γραφικής παράστασης των παρακάτω συναρτήσεων:

15Α1. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$

15Α2. $f(x) = \dfrac{|x-1|}{|x^2-4|-5}$

15Α3. $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-3}$

15Α4. $f(x) = \sqrt[3]{x^3-3x+2}$

15Α5. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

15Α6. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

15Α7. $f(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x}$

15Α8. $f(x)=xe^{-x}$

15Α9. $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$

15Α10. $f(x)=\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu\, x$

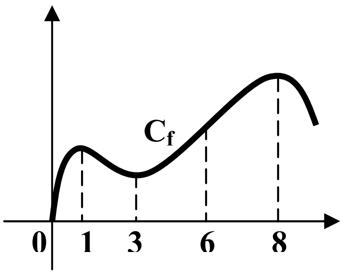
Να γίνει η μελέτη και η χάραξη της γραφικής παράστασης των παρακάτω συναρτήσεων για τις διάφορες τιμές του m

15Α11. $f(x)=(x+m)e^{mx}$

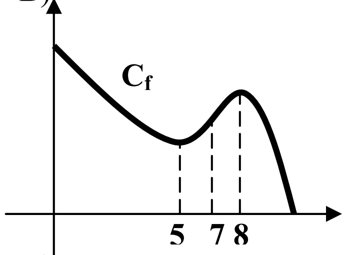
15Α12. $f(x)=(x-m)e^{\frac{1}{x}}$

15Α13. Στα παρακάτω σχήματα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f και ζητείται μια πρόχειρη γραφική παράσταση της παραγώγου της (ποιοτικά).

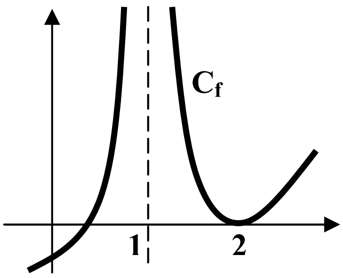
Α)



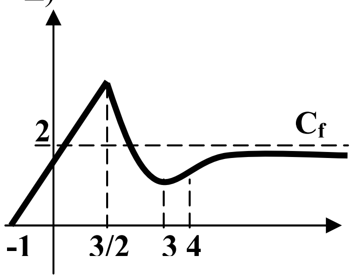
Β)



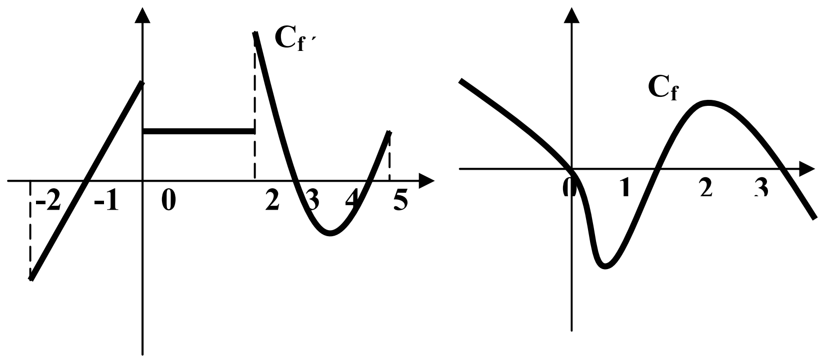
Γ)



Δ)



15Α14. Στα επόμενα σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της παραγώγου $f'(x)$ μιας συνεχούς συνάρτησης f και η πληροφορία ότι $f(0)=0$. Ζητείται μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης (ποιοτικά)



15Α15. Να γίνει η μελέτη και η χάραξη της γραφικής παράστασης της παρακάτω συνάρτησης $f(x)=x^5-2x^3+x$. Στην συνέχεια, για τις διάφορες τιμές του λ να μελετήσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\lambda$.

15Α16. Να γίνει η μελέτη και η χάραξη της γραφικής παράστασης της παρακάτω συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$. Στην συνέχεια, για τις διάφορες τιμές του λ να /μελετήσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\lambda$.

15Α17. Να γίνει η μελέτη και η χάραξη της γραφικής παράστασης της παρακάτω συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$.

Στην συνέχεια, για τις διάφορες τιμές του λ να μελετήσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης

$\eta\mu^3x-(4+\lambda)\eta\mu^2x+2(4+\lambda)\eta\mu x-(4+\lambda)=0$

<u>ΟΜΑΔΑ Γ</u>

15Γ1. Έστω $0<a<b<c, a+b+c=7, abc=9$. Να βρείτε το σύνολο τιμών για κάθε μια από τις μεταβλητές a,b,c.

Δ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1 ΑΟΡΙΣΤΑ

Α ΟΜΑΔΑ

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

1Α1. $\int \left(\sqrt{x} + x\sqrt[4]{x} + \frac{2}{x} \right) dx$

1Α2. $\int \frac{\left(\sqrt{x} - 1\right)^2}{x} dx$

1Α3. $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) dx$

1Α4. $\int xe^x dx$

1Α5. $\int e^x \eta\mu x dx$

1Α6. $\int x^4 ln x dx$

1Α7. $\int x ln^3 x dx$

1Α8. $\int x^2 ln(1+x) dx$

1Α9. $\int \frac{lnx}{x^3} dx$

1Α10. $\int \sqrt{x} ln x dx$

1Α11. $\int x^2 \eta\mu 3x dx$

1Α12. $\int \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$

1Α13. $\int \frac{4}{\eta\mu^2 x} dx$

1Α14. $\int (\eta\mu\alpha x)(\sigma\upsilon\nu\beta x) dx \quad \alpha \cdot \beta \neq 0$

1Α15. $\int \eta\mu x \sigma\upsilon\nu^4 x\, dx$

1Α16. $\int \sigma\upsilon\nu x\, \eta\mu^3 x\, dx$

1Α17. $\int \varepsilon\phi^2 x\, dx$

1Α18. $\int \frac{x^2+1}{2x+3} dx$

1Α19. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1} dx$

1Α20. $\int \frac{x+4}{x^3+x^2-2x} dx$

1Α21. $\int x e^{-x^2} dx$

1Α22. $\int \frac{1}{x^2} e^{1/x} dx$

1Α23. $\int \frac{1}{4+e^x} dx$

1Α24. $\int \frac{1}{e^{-x}+e^x} dx$

1Α25. $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$

1Α26. $\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx$

1Α27. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}} dx$

1Α28. $\int \frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}} dx$

1Α29. $\int e^x \sqrt{e^x-1}\, dx$, $x>0$

1Α30. $\int \varepsilon\phi\, x\, dx$

1Α31. $\int \eta\mu^5 x\, dx$

1Α32. $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}dx$

1Α33. $\int \frac{\eta\mu x}{5+\sigma\upsilon\nu x}dx$

1Α34. $\int \frac{\eta\mu x}{3\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu x - 5}dx$

1Α35. $\int \left(\varepsilon\phi^2 x + \varepsilon\phi^4 x\right)dx$

1Α36. $\int \frac{lnx}{x}dx$

1Α37. $\int \frac{1}{xlnx}dx$

1Α38. $\int \frac{\sqrt{lnx}}{x}dx$

1Α39. $\int \frac{ln\left(lnx\right)}{xlnx}dx$

1Α40. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$

1Α41. $\int x\sqrt[4]{1+x}dx$

1Α42. $\int \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[4]{1+x}}dx$

1Α43. $\int \frac{x^2+2}{\left(x-1\right)^6}dx$

1Α44. $\int \frac{4^x+1}{2^x+1}dx$

1Α45. $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}dx$

1Α46. $\int e^{3x}\eta\mu^2 4x\,dx$

1Α47. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$

1Α48. $\int ln\left(4+\frac{3}{x}\right)dx$

1Α49. $\int \eta\mu x \cdot ln\left(\eta\mu 2x\right)dx$

1Α50. $\int \eta\mu\left(\sqrt[3]{x}\right)dx$

1Α51. $\int \frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}dx$

1Α52. $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2x+\eta\mu^2 x}dx$

1Α53. $\int \frac{1}{3+5\eta\mu x}dx$

1Α54. $\int \frac{\eta\mu 2x}{1+\eta\mu^2 x}dx$

1Α55. $\int \frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}dx$

1Α56. $\int \eta\mu\left(lnx\right)dx$

1Α57. $\int \eta\mu\left(\sqrt{x+1}\right)dx$

1Α58. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$

1Α59. $\int xln\left(\sqrt{1+x^2}\right)dx$

1Α60. $\int \frac{ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx$

1Α61. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

Β ΟΜΑΔΑ

Να υπολογίσετε τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα βρίσκοντας μια αρχική με το «μάτι» αφού προηγουμένως κάνετε και λίγες πράξεις.

1Β1. $\int \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}dx$

1Β2. $\int \frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}e^x dx$

1Β3. $\int \frac{2x+\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

1Β4. $\int \frac{1-x}{e^x}dx$

1Β5. Να υπολογιστεί το $\int \varepsilon\varphi 2x\, \varepsilon\varphi 3x\, \varepsilon\varphi 5x\, dx$

1Β6. Αν $f(x)=e^x+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+2x$ να βρεθούν σταθερές $a,b: \eta\mu x+x-1=af(x)+bf'(x)$ και στην συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{\eta\mu x+x-1}{e^x+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+2x}dx$

2 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Α ΟΜΑΔΑ

Να βρείτε την $f'(x)$ όταν:

2Α1. $f(x)=\int_1^x \frac{t^3}{1+t^2}dt$.

2Α2. $f(x)=\int_0^x |t|dt$.

2Α3. $f(x)=\int_{2x}^{x^2} ln^2 t dt$, $x>0$.

2Α4. $f(x)=\int_0^{\varepsilon\varphi x}\frac{1}{1+t^2}\,dt$, $x\in[0,\pi/2)$.

2Α5. $f(x)=\int_x^{x+\pi}\frac{1}{1+\eta\mu^2 t}\,dt$.

2Α6. $f(x)=\int_0^{\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt}\frac{1}{1+y^2}\,dy$.

2Α7. $f(x)=\int_0^{x^2}\frac{1}{1+t^4}\,dt$.

2Α8. $f(x)=\int_0^x t^2\cdot\left(\int_0^t e^{y^2}\,dy\right)dt$.

2Α9. Αν *f, g, h* παραγωγίσιμες στο *R* βρείτε την *w΄(x)* όπου

$w(x)=\int_{g(x)}^{h(x)}f(t)dt$.

(Το συμπέρασμα αυτό να το θεωρήσετε σαν θεώρημα)

Να βρείτε την *f ΄(x)* όταν:

2Α10. $f(x)=\int_0^x \eta\mu(x-t)dt$.

2Α11. $f(x)=\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu(x-t)dt$.

2Α12. $f(x)=\int_{1-x}^{x}\ln(xt)dt$, $0<x<1$.

2Α13. Δείξτε ότι *f* σταθερή στο *(0, +∞)* όπου

$f(x)=\int_1^x\frac{1}{1+t^2}dt+\int_1^{1/x}\frac{1}{1+t^2}dt$

2Α14. Να δείξετε ότι

$$\int_1^x \frac{ln(1+t^2)}{t}dt + \int_1^{1/x} \frac{ln(1+t^2)}{t}dt = ln^2(x)\ ,\ x \in (0,+\infty)$$

2Α15. Δείξτε ότι : $\int_{-x}^{x} (1+\frac{\eta\mu t}{t^2+e^{\sigma\upsilon\nu t}})dt = 2x\ ,\ \forall x \in R$

2Α16. Εξετάστε αν η f: $(0, \pi/2) \to R$ με $f(x) = \int_{-\sigma\upsilon\nu x}^{\eta\mu x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$ είναι σταθερή συνάρτηση

2Α17. Αν $g(x)$ είναι πολυωνυμική 2^{ου} βαθμού βρείτε την σταθερά λ ώστε η συνάρτηση με τύπο $g(x) - \lambda \int_{x-1}^{x+1} g(t)dt$ να είναι σταθερή στο R.

2Α18. Έστω $f{:}R \to R$ συνεχής και $g : g(x) = \int_{x}^{x+T} f(t)dt$ $(T \in R^*)$. Δείξτε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η f να είναι περιοδική συνάρτηση είναι : η συνάρτηση g να είναι σταθερή

2Α19. Αν $f(x) = \int_1^x \frac{lnt}{1+t}dt$, $x \in (0, +\infty)$ δείξτε ότι:

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}ln^2 x\ .$$

2Α20. Να δείξετε ότι : $\int_{-x}^{x} \frac{e^t + \sigma\upsilon\nu t}{1+e^t}dt = x + \eta\mu x$

2Α21. Ονομάζουμε $cosh\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $sinh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\forall x \in R$.

Τότε να δείξετε ότι: $\int_1^{cosh\, x} \sqrt{t^2 - 1}dt = \frac{(cosh\, x \cdot sinh\, x) - x}{2}$.

2Α22. Έστω $g(x)=\int_{\alpha-x}^{\alpha+x} f(t)dt$ όπου f συνεχής, τότε δείξτε ότι:

$g'(x)=f(\alpha-x)+f(\alpha+x)$.

2Α23. Δείξτε ότι : $g(x)=\int_0^x (x-t)f'(t)dt$ με $f'(x)$ συνεχή συνάρτηση στο R τότε $g'(x)=f(x)-f(0)$

2Α24. Έστω $g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$ όπου f συνεχής. Δείξτε ότι η g είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και $g''(x)=f(x)$.

2Α25. Αν $g(x)=\int_0^x f(t)dt$, $h(x)=\int_0^x g(t)dt$ με f συνεχή, δείξτε ότι θα ισχύει $h(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$, $\forall x\in R$

2Α26. Έστω f, g συνεχείς στο R και

$\int_x^y f(t)dt=g(x)-g(y), \int_x^y g(t)dt=f(y)-f(x)$ $\forall x,y\in R$ δείξτε

ότι: $f''(x)+f(x)=0$, $g''(x)+g(x)=0$

2Α27. Αν $f(x)f(y)=\int_{x-y}^{x+y} f(t)dt$ $\forall x,y\in R$ όπου f συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη δείξτε ότι: $f''(x)f(y)=f''(y)f(x)$ $\forall x,y\in R$.

Β ΟΜΑΔΑ

2Β1. Αν $g(x)=\int_0^x f(t)|x-t|dt+\int_x^1 f(t)|x-t|dt$ με f συνεχή, δείξτε ότι: $g''(x)=2f(x)$ $\forall x\in[0,1]$.

2Β2. Αν $g(x)=\int_0^1 max\{x,t\}f(t)dt$ όπου f συνεχής. Δείξτε ότι: $g''(x)=f(x)$ $\forall x\in[0,1]$.

2Β3. Αν $g(x)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)|x-t|dt$ με *f* συνεχή, δείξτε ότι:$g''(x)=2f(x)$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$.

2Β4. Αν

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}\ ,\ F(x)=\int_1^x f(t)dt\ ,\ G(x)=\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}dt\ ,\ \forall x>0$$

να δείξετε ότι η $h(x)=F(\varepsilon\varphi x)+G(\sigma\varphi x)$ είναι σταθερή στο $(0,\pi/2)$. Ποια είναι η τιμή της?

2Β5. Έστω $f(x)=\int_0^x (x-t)e^{\alpha(x-t)}g(t)dt$ $\alpha\neq 0,\ x>0$ και *g* συνεχής.

Να δείξετε ότι: $f''(x)-2\alpha f'(x)+\alpha^2 f(x)=g(x)$.

2Β6. Έστω $f(x)=\frac{1}{\omega}\int_0^x R(t)\eta\mu(\omega(x-t))dt$ $(\omega\in R^*)$ και *R* συνεχής συνάρτηση. Να δείξετε ότι : $f''(x)+\omega^2 f(x)=R(x)$.

(Αυτή είναι μια λύση του εξαναγκασμένου αρμονικού ταλαντωτή χωρίς απόσβεση)

2Β7. Έστω $f(x)=\int_0^x \frac{e^{(x-t)}-e^{(t-x)}}{2}g(t)dt$ όπου *g* συνεχής να δείξετε ότι: $f''(x) - f(x) = g(x)$

(και αυτή η άσκηση σας δίνει έναν έτοιμο τύπο για να λύνετε κάποιες διαφορικές εξισώσεις 2ας τάξεως.)

2Β8. Έστω *f, g, h* παραγωγίσιμες στο R_+^* συναρτήσεις και είναι:

$f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x (h(x)-h(t))dt$, $g(x)=\int_x^{\alpha}\frac{f(t)}{t}dt$ $(\alpha\in R^*)$ τότε να

δείξετε ότι : $f(x)=h(x)+g(x)-\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} h(t)dt$

2Β9. Αν *f* συνεχής δείξτε ότι: $\int_0^x f(t)(x-t)dt=\int_0^x\left(\int_0^t f(y)dy\right)dt$.

Γ ΟΜΑΔΑ

2Γ1. Αν *f* συνεχής δείξτε ότι:

$$\int_0^x f(t)(x-t)^2 dt = 2!\int_0^x\left(\int_0^{\upsilon_2}\left(\int_0^{\upsilon_1} f(t)dt\right)d\upsilon_1\right)d\upsilon_2$$

2Γ2. Έστω *f* συνεχής. Αν $g^{(\nu+1)}(x)=f(x)$ όπου $g^{(\kappa)}(0)=a_\kappa$, $\kappa=0, 1, 2, \ldots, \nu$. Να δείξετε ότι

$$g(x)=\sum_{\kappa=0}^{\nu}\frac{\alpha_\kappa x^\kappa}{\kappa!}+\frac{1}{\nu!}\int_0^x f(t)(x-t)^\nu dt$$

(χρειάζεστε τα συμπεράσματα και προηγούμενης άσκησης και μια πιθανή γενίκευση.)

2Γ3. Αν $f(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt$ $x\in(0,+\infty)$. Να δείξετε ότι *f* αντιστρέψιμη και $f'\left(f^{-1}(x)\right)=\frac{1}{\left(f^{-1}(x)\right)'}$. Στην συνέχεια να δείξετε ότι: $\left(f^{-1}(x)\right)''=\kappa\left(f^{-1}(x)\right)^2$ όπου κ μια σταθερά την οποία και να προσδιορίσετε.

3 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ Κ.Λ.Π

Α ΟΜΑΔΑ

3Α1. Έστω $f: f(x)=\int_0^{x^2}\frac{dt}{1+t^2}$. Να μελετήσετε την *f* ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

3Α2. Έστω $f: f(x)=\int_0^x (t-2)\eta\mu(\pi t)dt$. Να μελετήσετε την *f* ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα στο διάστημα $[0,2\pi)$.

3Α3. Έστω *f*: $(1,+\infty)\to R$ με $f(x)=\int_e^x \frac{ln(lnt)}{t}dt$. Να μελετήσετε την *f* ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

3Α4. Είναι $f(x)=\int_0^x\left(\int_0^{t^2+1}\frac{e^u}{u^2+1}du\right)dt$.Να μελετήσετε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης $f(x)$.

(Το ολοκλήρωμα αυτό καθώς και τα δυο επόμενα δεν υπολογίζονται στοιχειωδώς. Αυτό όμως δεν ενοχλεί. σε ότι ζητείται)

3Α5. Είναι $f(x)=\int_1^{2x}e^{t-x}\ln t dt\ ,\ x>0$ Δείξτε ότι: $xf''(x)=xf(x)+2e^x$ και κατόπιν ότι η $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στην θέση $x_0=1/2$. Στην συνέχεια να προσδιοριστεί το $\int_{\frac{1}{2}}^{1}g(t)dt$,όπου

$$g(x)=\frac{f'(x)+f''(x)}{e^x}$$

(Χρησιμοποιείστε το κριτήριο της β΄ παραγώγου)

3Α6. Είναι $f(x)=\int_1^x\left(\int_2^y e^{t-y}\ln t dt\right)dy\ ,\ x,y\in(1,+\infty)$ Δείξτε ότι:

$f''(x)+f'(x)=lnx$ και κατόπιν ότι η $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στην θέση $x_0=2$.

(Χρησιμοποιείστε το κριτήριο της β΄ παραγώγου)

3Α7. Έστω $f:f(x)=\int_0^{x^2}g(t)dt$, g παραγωγίσιμη στο R , $g(0)=1$ δείξτε ότι η *f* έχει ένα τουλάχιστον ακρότατο με τιμή μηδέν.

(Χρησιμοποιείστε το κριτήριο της β΄ παραγώγου)

3Α8. $f(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}dt$. Δείξτε ότι $\frac{1}{1+2x} \le \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$ $\forall x \ge 0$

κατόπιν ότι $f(x) \ge \frac{1}{2}\ell n(1+2x)$ και βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3Α9. Αν $f(x)=\int_{-1}^x \sqrt{1+t^3}dt$, $x \in [-1,+\infty)$ μελετήστε την f ως προς την μονοτονία , την κυρτότητα και βρείτε το σύνολο τιμών

<u>Β ΟΜΑΔΑ</u>

3Β1. Έστω f συνεχής και $f(x)>0$ $\forall x \in R$. Να μελετήσετε την μονοτονία της g στο $(0,+\infty)$ όπου: $g(x)=\frac{\int_0^x t^\nu f(t)dt}{\int_0^x t^{\nu-1} f(t)dt}$

3Β2. Αν f, g, h συνεχείς συναρτήσεις ώστε $f(x)>0, g(x)>0, h(x)>0$ και $\frac{g}{h}$ αύξουσα τότε να μελετήσετε την μονοτονία της $w(x)$ στο $(0,+\infty)$ όπου $w(x)=\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x f(t)h(t)dt}$.

3Β3. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία, το πρόσημο και την κυρτότητα η συνεχής συνάρτηση

$$f: f(x)=\int_0^x [f^2(t)+e^t-t+1]dt \quad , \quad x \in R$$

3Β4. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(x)>0$, $f'(x)<-1$ $\forall x \in [0,1]$.Θέτουμε $g(x)=\int_a^b f(t)dt \cdot \int_c^x f(t)dt + \int_a^c f(t)dt \cdot \int_x^b f(t)dt$.Ακόμη επιπλέον ισχύουν

$0<a<b<c<1$, $\int_b^c f(t)dt=1$.

Δείξτε ότι $g(x)=-\int_a^x f(t)dt<\frac{f^2(x)}{2}$

3Β5. Αν *f* συνεχής συνάρτηση και $f(x)>\int_0^x f(t)dt$, $\forall x\geq 0$ τότε θα ισχύει $f(x)\geq 0$, $\forall x\in[0,+\infty)$

3Β6. Αν $f(x)=\int_1^x \frac{e^t}{1+t^2}dt$, $x\in[1,+\infty)$ να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία , την κυρτότητα και αφού δείξετε ότι $f(x)>\frac{1}{2}ln(\frac{1+x^2}{2})$ βρείτε το σύνολο τιμών

3Β6. Αν $f(x)=\int_1^x \frac{ln(1+t^2)}{t}dt$, $x\in[1,+\infty)$ να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία , δείξτε ότι έχει σημείο καμπής και δείξτε ότι $f(x)\geq f(x_0)+ln(\frac{x}{x_0})$ για κάποιο $x_0>1$. Βρείτε το σύνολο τιμών και αν υπάρχουν βρείτε και τις ασύμπτωτές της

3Β7. Έστω f: $(0,+\infty)\to R$ με $f(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία τα ακρότατα και τα σημεία καμπής. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$ και αφού δείξετε ότι $f(x)\geq lnx$ $\forall x\in[1,+\infty)$ να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Ακόμη δείξτε $f(x)\leq x-1+lnx$, $\forall x\in(0,1]$ βρείτε τις ασύμπτωτες της f και σχεδιάστε πρόχειρα την γραφική της παράσταση

Γ ΟΜΑΔΑ

3Γ1. Έστω $f(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2\eta\mu^2 t}}dt$, $\kappa\in(0,\ 1)$, $T=f(\pi/2)$.

α) Δείξτε ότι f ένα προς ένα και περιττή.

β) Δείξτε ότι η $f(x+\pi)-f(x)$ είναι σταθερή συνάρτηση και εκφράστε την τιμή της συναρτήσει του T.

γ) Δείξτε ότι $f(x)\geq 2\left(\sqrt{1+x}-1\right)$ $\forall x\geq 0$ και βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(Το προηγούμενο ολοκλήρωμα ονομάζεται ελλειπτικό ολοκλήρωμα 1^{ης} τάξεως και δεν υπολογίζεται στοιχειωδώς, αλλά υπάρχουν πίνακες τιμών του στην βιβλιογραφία.)

3Γ2. Αν $f(x)=\int_1^x \frac{lnt}{1+t}dt$, $x\in(0,\ +\infty)$

α) Να μελετήσετε την μονοτονία της f στο $(0,+\infty)$

β) Δείξτε ότι: $f(x)>f\left(\frac{1}{x}\right)$ $\forall x\in(1,+\infty)$

γ) Δείξτε ότι: $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}ln^2 x$ και βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(Το $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας μιγαδικές συναρτήσεις!! ή σειρές Fourrier!? και βγαίνει ίσο προς $-\pi^2/12$. Υπάρχει όμως και τρίτη λύση, σχεδόν παραμυθένια , χωρίς τα προηγούμενα !! χρησιμοποιώντας σχεδόν λυκειακή ύλη)

4 ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΩΝ ΜΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Α ΟΜΑΔΑ

4Α1. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \int_0^x f(t)dt = x^2 - 1$?

4Α2. Δείξτε ότι δεν υπάρχει, συνεχής συνάρτηση f ώστε

$\int_1^x f(t)dt = 1 + f^2(x), \forall x \in R$

4Α3. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση f ώστε $\int_0^x f(t)dt = |x|$?

4Α4. Δείξτε ότι δεν υπάρχει, συνεχής συνάρτηση f ώστε

$\int_0^x f(t)dt = \sqrt[5]{x^2}, \forall x \in R$

4Α5. Δείξτε ότι δεν υπάρχει, συνεχής συνάρτηση f ώστε

$\int_0^x t^2 f(t)dt = x^2, \forall x \in R$

4Α6. Δείξτε ότι αν υπάρχει, συνεχής συνάρτηση f ώστε

$\int_a^x f(t)dt = g(x), \forall x \in R$ πρέπει η συνάρτηση g να έχει

συνεχή παράγωγο στο R και ρίζα το α.

4Α7. Να βρεθεί, αν υπάρχει, συνεχής συνάρτηση f ώστε

$\int_1^x tf(t)\,dt = x^2 + x - 2$.α) $\forall x \in R$ και β) $\forall x \in R_+^*$.

4Α8. Έστω f: $(0,2\pi) \to R$ ώστε $\frac{1}{x}f'(x) - \frac{1}{x^2}f(x) = \eta\mu x$.Βρείτε

τον τύπο όλων των f.

4Α9. Αν f: $[0,+\infty)$ παραγωγίσιμη ώστε $x + \int_0^x f(t)\,dt = (x+1)f(x)$

βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

4Α10. Αν f συνεχής ώστε: $\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 t^2 f(t)dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}-1}{9}$ να

βρείτε τον τύπο της f.

4Α11. Βρείτε όλες τις συνεχείς $f : \int_0^x tf(t)dt = x^2 + x^3$.

4Α12. Έστω $f : [0,+\infty) \to R$ συνεχής ώστε

$x^2 + 4x = \int_0^x (1+t)f(t)dt$. Βρείτε τον τύπο της f

4Α13. Να βρείτε τον τύπο μιας παραγωγίσιμης και μη μηδενικής συνάρτησης, f στο R, αν ισχύει : $\int_0^x f(t)\dfrac{\eta\mu t}{2+\sigma\upsilon\nu t}dt = f^2(x)$.

4Α14. Αν f συνεχής, στο R^* ώστε: $\int_1^2 xf(x)dx = \dfrac{x+1-xf(x)}{x}$. Βρείτε την f.

4Α15. Έστω $f : (0,+\infty) \to R$ συνεχής ώστε

$2\int_1^x f(t)dt = x^2 - \ell n^2 x - k \;,\; x > 0$. Βρείτε το k τον τύπο και τα ακρότατα της f.

4Α16. Έστω f: $R \to R$ συνεχής ώστε $f(x) = \int_0^x f(t)dt$. Βρείτε τον τύπο της f.

4Α17. Όμοια βρείτε την $f: R \to R$ συνεχή ώστε $1 + \int_0^x f(t)dt = f(x)$ $\forall x \in R$.

4Α18. Βρείτε την συνεχή συνάρτηση f αν ισχύει:

$$f(x) = (1+x^2)\left\{1 + \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt\right\} \qquad \forall\, x \in R .$$

4Α19. $\int_1^{x^2} f(\sqrt{t})dt = f(x) \;,\; \forall x > 0$ βρείτε τον τύπο της συνεχούς f.

4Α20. Έστω $f: (0,+\infty) \to R$ συνεχής ώστε: $f(x) = 1 + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$.

Βρείτε τον τύπο της f.

4Α21. Έστω $f: R \to (0,+\infty)$ συνεχής ώστε

$f(x)(x^2+1) = 2\int_1^x tf(t)dt + 2$, $\forall x \in R$. Βρείτε τον τύπο της

4Α22. Αν f συνεχής ώστε $\forall x>0$ να είναι $f(x) \geq 0$ και

$2x\int_1^x f(t)dt = f(x)$ να βρείτε τον τύπο της f.

4Α23. Έστω $f: (0,+\infty) \to R$ συνεχής ώστε

$f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^x \frac{tf(t)}{x^2}dt, \forall x \in (0,+\infty)$. Βρείτε τον τύπο της f.

4Α24. Αν f συνεχής στο R, $2\int_0^x f(t)dt = x(f(x)+4)$ βρείτε τον

τύπο της f. ώστε $f(1)=3$, $f(-1)=4$

4Α25. Έστω f συνεχής στο R ώστε $f(x) = \int_0^x e^{t-f(t)}dt$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x)e^{f(x)} = e^x$.

β)Να βρείτε το $f(0)$ και τον τύπο της συνάρτησης f.

4Α26. Έστω $f: (0,+\infty) \to R$ συνεχής ώστε

$f(x) + \int_1^x tf(t)dt = 2$, $\forall x \in R$. Βρείτε τον τύπο της f

4Α27. Έστω f αντιστρέψιμη και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και

$\int_e^{f(x)} f^{-1}(t)dt = x - e$. Βρείτε τον τύπο της f.

4Α28. Να βρεθεί το κ και η συνεχής συνάρτηση $f: [-\pi,\pi] \to R$

$$\int_0^x f(t)dt + \int_0^{-x} f(-t)dt = \eta\mu x + kx \;,\; \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{\pi}{4}$$

4Α29. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση στο R ώστε

$$f(x)=x+\int_0^x e^{-t}f(x-t)dt$$

4Α30. Έστω $f\colon R\to R$ συνεχής ώστε

$f(x)=\dfrac{e^{1+x}}{2}+\int_0^x e^{-t}f(x-t)dt\ ,\ \forall x\in R$. Βρείτε τον τύπο της

4Α31. Έστω $f\colon R\to R$ συνεχής ώστε

$0\neq f(x)=1-2x^2\int_0^1 tf^2(xt)\,dt\,,\forall x\in R$. Βρείτε τον τύπο της

(Προσέξτε! δεν είναι $x\neq 0$ εδώ)

4Α32. Έστω $f:[0,+\infty)\to R$ συνεχής ώστε

$f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\int_{1/2}^{0} 2xf(2xt)dt\,,\forall x\in[0,+\infty)$. Βρείτε τον τύπο της f

4Α33. Έστω $f\colon R\to R$ συνεχής ώστε

$f(x)=x\int_0^{1/2} f(2xt)e^x dt\ ,\ \forall x\in R$. Βρείτε τον τύπο της f.

4Α34. Έστω $f\colon (0,+\infty)\to R$ συνεχής ώστε:

$\int_1^x (1+f(t))dt = x\int_1^{1/x} f(xt)\ln t\,dt$. Να βρείτε τον τύπο της f.

4Α35. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f στο $[\alpha,\beta]$ ώστε

$\int_\alpha^\beta f^2(x)dx=0$.

4Α36. Έστω f συνεχής στο $[1,2]$ ώστε:

$1+\int_1^2 t^2f^2(t)\,dt=2\int_1^2 tf(t)\,dt$. Να βρείτε τον τύπο της f.

4Α37. Έστω ότι η f' είναι συνεχής στο $[0,\alpha)$ και $f(\alpha)=0$.Αν

$2\int_0^x \left(1+tf'(x)\right)e^{f(x)}dx = f'(x)$ δείξτε ότι:

α) $2xe^{f(x)} = f'(x)$,

β) ονομάστε $g(x)=e^{f(x)}$ και εξηγείστε γιατί $\dfrac{g'(x)}{g^2(x)} = 2x$

γ) βρείτε όλες τις συναρτήσεις g και f που ικανοποιούν τα προηγούμενα

Β ΟΜΑΔΑ

4Β1. Έστω $f:[0,+\infty)\to R$ συνεχής ώστε

$\int_0^{x^2} tf(t)dt = 2x^3\eta\mu x, \forall x\in[0,+\infty)$. Βρείτε τον τύπο της f

4Β2. Βρείτε την συνεχή συνάρτηση f και την σταθερά α αν $\forall x\in R$.

ισχύει: $\int_\alpha^x tf(t)dt = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x - \dfrac{x^2}{2}$

4Β3. Να βρεθεί η συνάρτηση f και η σταθερά α, αν είναι γνωστό ότι ισχύουν: f' συνεχής και

$2f(x)+\int_0^x \left(tf(t)-2f'(t)\right)dt = x^3+\alpha x \quad \forall x\in R.$

4Β4. Έστω $f(x)\neq 0$ στο R^* και f συνεχής στο R βρείτε τον τύπο της f

αν ισχύει: $f(x)\int_0^x f(t)dt = x \quad \forall x\in R.$

4Β5. Έστω $f:R\to R$ παραγωγίσιμη :

$4f(x)+f'(x)=\int_a^b f(t)dt = k\ , \forall x\in R$. Βρείτε τον τύπο της

4Β6. Έστω f συνεχής στο R και $x^2 = \int_x^1 f(t)dt + xf(x)$ βρείτε τον τύπο της f.

4B7. α) Αν *f* συνεχής και $g(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$ βρείτε την $g'(x)$ συναρτήσει της *f*.

β) Αν γνωρίζετε ότι η g' είναι φθίνουσα στο *R* δείξτε ότι $f(x)=0 \ \forall x\in R_+$.

4B8. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση με *x* στο R_+ ,ώστε :

$f(x)=e^{-\int_0^x f(t)dt}$

4B9. Έστω $f,g:[a,b]\to R$ συνεχείς :

$g(x)\neq 0\ ,\ f(a)=f(b)\ ,\ f(x)=\int_a^x \frac{f^4(t)}{g^3(t)}dt$ Βρείτε τον τύπο της *f*

4B10. Έστω $f{:}A=[0,\alpha)\to R$ συνεχής ώστε

$f(x)=-1-2\int_0^x f^2(x-t)dt\ ,\forall x\in A$. Βρείτε τον τύπο της *f* και το α

4B11. Έστω *f* με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο *R* ,

$f(0)=0, f'(0)=2$ Αν επιπλέον είναι

$\int_0^x (t^2+1)f''(t)dt=2\int_x^0 tf'(t)dt-4\int_0^1 xtf(x)dt$ να δείξετε ότι ο τύπος της είναι $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$

4B12. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση στο *R* ώστε

$f(x)+\int_0^x tf(x-t)dt=0$, δείξτε πρώτα ότι η συνάρτηση $(f(x))^2+(f'(x))^2$ είναι σταθερή

4B13. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση στο *R* ώστε

$f(x)=6x+\int_0^x f(x-t)\eta\mu t dt$

4Β14. Αν $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f^2(t)dt = 1$. Να δείξετε ότι $f(x)=1$ για κάθε $x \in [0,1]$.

4Β15. Αν f συνεχής ώστε $\int_0^1 f^2(x)dx \le \frac{1}{3} \le \int_0^1 xf(x)dx$. Να δείξετε ότι $f(x)=x$ για κάθε $x \in [0,1]$.

4Β16. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ώστε: $0 \le f(x) \le \int_\alpha^x f(t)dt$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$. Να δείξετε ότι $f(x)=0$ στο $[\alpha,\beta]$.

4Β17. Αν $f''(x)f(x) - 2\left(f'(x)\right)^2 = af^3(x) \neq 0$, $\forall x \in [0,1)$ με $g(x) = \frac{f(x)-1}{f(x)}$ και $g(0) = \frac{3}{2}$ τότε να βρεθεί το α ώστε η x-$g'(x)$ να είναι σταθερή και στην συνέχεια να βρεθούν οι τύποι των g , f

4Β18. Έστω $f, g : [1,+\infty) \to R$ συνεχείς :

$f(x) = \int_x^1 e^{g(t)}dt$, $g(x) = \int_x^1 e^{f(t)}dt$. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις είναι ίσες και βρείτε τους τύπους τους

4Β19. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις

$f, g : [0,+\infty) \to R^*$:

$1 + \int_0^x f(t)dt = \frac{1}{g(x)}$, $1 + 5\int_0^x g(t)dt = \frac{5}{f(x)}$. Τότε δείξτε ότι

$f(x) = 5g(x)$ και βρείτε τους τύπους τους.

Γ ΟΜΑΔΑ

4Γ1. Αν $f(x) = 1 + \int_0^x \left(\int_0^t f(u)du \right) dt$ όπου f συνεχής συνάρτηση στο R να βρείτε τον τύπο της f

4Γ2. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση στο R ώστε

$$f(x)=x^2+\int_0^x (x-t)f(t)dt$$

4Γ3. Αν $f\,'$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει

$2(\beta-\alpha)f'(x)\geq 2f^2(\alpha)+2f^2(\beta)+1$ για κάθε x στο $[\alpha,\beta]$ βρείτε τον τύπο της f.

4Γ4. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

α) f συνεχής στο $[0,1]$,

β) $f(x)\geq 0\ \ \forall x\in[0,1]$,

γ) $\int_0^1 x^2 f(x)dx=\alpha^2$, $\int_0^1 xf(x)dx=\alpha$ $\int_0^1 f(x)dx=1$.

4Γ5. α) Δείξτε ότι όταν f συνεχής μη μηδενική και $f(x)\geq 0$ στο $[\alpha,\beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt>0$.

β) Αν τώρα f συνεχής, f^2 παραγωγίσιμη και $f(x)\neq 0$ δείξτε ότι η ίδια η f είναι παραγωγίσιμη.

γ) Βρείτε όλες τις συνεχείς f σε κανένα διάστημα σταθερές ώστε $3\int_0^x f^2(t)dt=f^3(x)$.

4Γ6. Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις στο R που ικανοποιούν την $\int_0^x |f(t)|\dfrac{t}{1+t^2}dt=f^2(x)$ και δεν είναι σταθερές σε κανένα διάστημα

4Γ7. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση στο R ώστε:

$$f(0)=0,\ f'(x)>0\ \ \forall x\in R\ ,\ \int_0^{f(x)} f(t)dt=xf(x)-\int_0^x f(t)dt$$

4Γ8. Έστω f συνεχής στο $[0,1]$ και

$0 < f(x) = f(1) + \int_0^x ln(f(t))dt, \forall x \in [0,1]$ τότε

αν $f(1) = 1$ δείξτε ότι f σταθερή

4Γ9. Έστω f' συνεχής στο R και

$f'(x) = 2 + f(c)\int_0^x e^{tf(t)}dt, \forall x \in R$ τότε να βρείτε την f και

την σταθερά c όταν $f(0)=3$, $f(1)=5$

4Γ10. Να βρεθούν οι συνεχείς στο R συναρτήσεις με την ιδιότητα

$f(ax + b\int_0^x f(t)dt) = ax + b$, $a \neq 0$

4Γ11. Να βρείτε όλες τις συνεχείς στο R συναρτήσεις :

$\int_a^b f(t)dt = (b-a)f\left(\int_a^b f(t)dt\right), \forall a,b \in R$

4Γ12. Αν $f:(0,+\infty) \to (0,+\infty), f(x) = x + \int_x^{f(x)} \frac{\eta\mu t}{2t}dt$ τότε να

βρείτε τον τύπο της f

4Γ13. Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση με σύνολο ορισμού το R, και

για όλους τους διαφορετικούς μεταξύ τους, πραγματικούς

αριθμούς x,y ισχύει $\dfrac{\int_x^y f(t)dt}{y-x} \geq f(x)$

Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή

<u>Δ ΟΜΑΔΑ</u>

4Δ1. Έστω $f:[0,+\infty) \to R$ συνεχής συνάρτηση που δεν

μηδενίζεται σε διάστημα $[0,\alpha]$ για οποιοδήποτε $\alpha>0$ και

$f^2(x) = \int_0^x f(t)(2t+2)dt$, $\forall x \in [0,+\infty)$.

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης

4Δ2. Έστω $f:[0,a]\to R^{+}$ συνεχής συνάρτηση. Θέτουμε *O(0,0)* , *A(a,0)* ,*M(a,f(a))* , *B(0,f(0))* και *P(f,a)* την περίμετρο της κλειστής καμπύλης *OAMBO,* ενώ *E(f,a)* το εμβαδό που περικλείει.

Να δείξετε ότι $\alpha>2$

Δίνονται επιπλέον ότι : Η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και ότι το μήκος *L(f,a),* της καμπύλης C_f, δίνεται από την σχέση : $L(f,a)=\int_0^a\sqrt{1+\left(f'(t)\right)^2}\,dt$. Να βρείτε τον τύπο όλων των f στην περίπτωση όπου *P(f,a) - E(f,a)=Ω* για κάθε τιμή του $a\geq 0$ όπου *Ω* μια σταθερά και να αποδείξετε ότι $\Omega\geq 4$

4Δ3. Έστω $f:R\to R$ ώστε

$$f'(x)=(2-f(x))e^{f(x)},\forall x\in R,f(0)=1$$

Δείξτε ότι $f^{-1}(x)=\int_1^x\frac{e^{-u}}{2-u}du,\forall x\in(-\infty,2)$

(Η άσκηση αυτή είναι εξαιρετικά δύσκολη και απαιτεί μεγάλο αριθμό πρωτοβουλιών)

5 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ

Α ΟΜΑΔΑ

Να βρείτε την $f'(x)$ όταν:

5Α1. $f(x)=\int_1^x \ell n(x+t)dt$, $x\geq 0$.

5Α2. $f(x)=\int_{-x}^{x}\varepsilon\varphi(x+t)dt$.

5Α3. $f(x)=\int_0^x \eta\mu(x\cdot t)dt$, $x\in R^*$.

5Α4. $f(x)=\int_0^2 e^{xt}dt$.

Θεωρήστε ότι παρακάτω οι συναρτήσεις f όπου αναφέρονται είναι συνεχείς και δείξτε ότι:

5Α5. $\int_{-\alpha}^{+\alpha} f(x)dx=\int_0^{\alpha}\left(f(x)+f(-x)\right)dx$.

5Α6. $\int_{\alpha}^{-\alpha} f(x)dx=\int_{+\alpha}^{-\alpha} f(-x)dx$.

5Α7. Αν f άρτια $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=2\int_0^{\alpha} f(x)dx$.

5Α8. Αν f περιττή $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=0$.

5Α9. Αν f περιττή, περιοδική με περίοδο $T>0$,

$\int_{\alpha}^{\alpha-\mathrm{T}} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\alpha+\mathrm{T}} f(x)dx$.

5Α10. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha+\gamma}^{\beta+\gamma} f(x-\gamma)dx$

5Α11. $\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-t)dt=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$.

5Α12. $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2}$, $(x>0)$.

5Α13. Έστω $g(x)=\int_0^1 f(tx)dt$ με $x\in(0,\ 1)$ τότε δείξτε ότι

$xg'(x)+g(x)=f(x)$. Θεωρήστε ότι f συνεχής

5Α14. Δείξτε ότι : $\int_{-1}^{1} f'(x-t)dt=f(x+1)-f(x-1)$ αν $f'(x)$ συνεχής συνάρτηση

5Α15. Αν $L(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt$, $x>0$ χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα δείξτε ότι: $L(xy)=L(x)+L(y)$, $\forall x,y\in R_+^*$

5Α16. Δείξτε ότι: $\int_0^1 x^{\nu}e^x dx=\int_1^e (lnx)^{\nu}\,dx$, $\nu\in N$.

5Α1. Υπολογίστε το $I=\dfrac{\int_0^{\alpha} x^{\nu}(2\alpha-x)^{\nu}\,dx}{\int_0^{\alpha/2} x^{\nu}(\alpha-x)^{\nu}\,dx}$, θέτοντας $x=2t$.

5Α17. Αν $f(2\alpha-x)=f(x)$ τότε

$\int_0^{2a} xg(f(x))dx=a\int_0^{2a} g(f(x))dx$.

5Α18. Αν $f(2\alpha-x)=-f(x)$ τότε $\int_0^{2\alpha} f(x)dx=0$.

5Α19. Δείξτε ότι : $\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx$.

5Α20. Δείξτε ότι: $\int_0^{\pi/2} f(\eta\mu x)dx=\int_0^{\pi/2} f(\sigma\upsilon\nu x)dx$.

5Α21. Υπολογίστε το $\int_0^2 f(x)dx$ αν είναι γνωστό ότι ισχύει

$f(1+x)+f(1-x)=2$, $\forall x\in R$.

5Α22. Αν η f' είναι συνεχής στο R και $f(0)=0, f(1)=\sqrt{2}$ τότε να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος

$\int_0^1 f(t)e^{2t}[f'(t)+f(t)]dt$

Β ΟΜΑΔΑ

5Β1. Δείξτε ότι g σταθερή στο $(0, +\infty)$ όπου $g(x)=\int_0^{a\cdot x}\frac{x}{x^2+t^2}dt$

5B2. Αν $f'(x)$ συνεχής στο $[0,2]$ και $f'(x)=f'(2-x)$ τότε

δείξτε ότι $\int_0^2 f(t)dt = f(0)+f(2)=2f(1)$ *

5B3. Αν $f(x)=\int_1^x \frac{\ell nt}{1+t}dt$, $x>0$ υπολογίστε το

$f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)$, $a>0$.

5B4. Αν η f έχει συνεχή παράγωγο στο R και

$g(x)=\begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x}, x\neq 0 \\ f'(0) \ , \ x=0 \end{cases}$ τότε να δείξετε ότι

$g(x)=\int_0^1 f'(xt)dt$

5B5. Αν $f(\alpha+\beta-x)=f(x)$, $\forall x\in R$ δείξτε ότι

$\int_\alpha^\beta xf(x)dx=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\int_\alpha^\beta f(t)dt$.

5B6. Έστω $f(x)=f(\alpha-x)$, $(\alpha\in R^*)$ και $g(x)+g(\alpha-x)=\lambda$. Τότε

να δείξετε ότι: $\int_0^\alpha f(t)g(t)dt=\frac{\lambda}{2}\int_0^\alpha f(t)dt$.

5B7. Αν f άρτια και $\int_{-\alpha}^\alpha g(f(x))dx=\lambda$, δείξτε ότι:

$\int_{-\alpha}^\alpha \frac{g(f(x))}{1+e^x}dx=\frac{\lambda}{2}$.

5B8. Έστω $f(\alpha-x)+f(\alpha+x)=2\beta$, $(\alpha\beta\neq 0)$. Δείξτε ότι:

$\int_0^{2\alpha} f(x)dx=2\alpha\beta$.

5B9. Έστω $\alpha f(x)+\beta f(-x)=\gamma$, $(\alpha+\beta\neq 0)$. Υπολογίστε το

$\int_{-\delta}^\delta f(x)dx$.

5B10. Αν $f(x)+f(\alpha-x)\neq 0$, $\forall x\in R$. Να υπολογίσετε το

$$\int_0^{\alpha}\frac{f(x)}{f(x)+f(\alpha-x)}dx$$

5B11. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 \frac{1}{1+e^{\sqrt{1-t}-\sqrt{t}}}dt$

5B12. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 \frac{x^4}{x^4+(1-x)^4}dx$

5B13. Να υπολογίσετε το $\int_0^2 \frac{e^{t^2}}{e^{t^2}+e^{4-4t+t^2}}dt$

5B14. Αν $f(x-\alpha)+f(\beta-x)\neq 0$, $\forall x\in R$. Να υπολογίσετε το

ολοκλήρωμα: $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f(x-\alpha)}{f(x-\alpha)+f(\beta-x)}dx$

5B15. Αν $f(x)f(-x)=1$, $\forall x\in[-1, 1]$ να υπολογίσετε το

$\int_{-1}^{1}\frac{|x|}{1+f(x)}dx$.

5B16. Αν f άρτια, g περιττή, $\alpha>0$, $\alpha\neq 1$. Να δείξετε ότι:

$\int_{-\beta}^{\beta}\frac{f(x)}{\alpha^{g(x)}+1}dx=\int_0^{\beta}f(x)dx$. *

5B17. f παραγωγίσιμη, $f(0)=0$, f ένα προς ένα. Δείξτε

$\int_0^x f(t)dt+\int_0^{f(x)}f^{-1}(t)dt=xf(x)$.

5B18. Αν $f'(x)>0$, δείξτε ότι:

$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx+\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)}f^{-1}(x)dx=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)$ και δώστε μια

γεωμετρική ερμηνεία.

(Βασική πρόταση-θεώρημα)

5B19. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 \sqrt{e^t - 1}dt + \int_0^{\sqrt{e-1}} ln(1+t^2)dt$

5B20. Να υπολογίσετε το $\int_0^2 \sqrt{1+t^3}dt + \int_1^3 \sqrt[3]{t^2-1}dt$

5B21. Να υπολογίσετε το $\int_0^{e^x-e^{-x}} \frac{1}{\sqrt{4+t^2}}dt$

5B22. Έστω $f(x) = \frac{(4-m)x^2+2x-m}{(2x+1)(x^2+1)}$. Να βρεθούν

$a,b \in R:\ f(x) = \frac{ax}{x^2+1} + \frac{b}{2x+1}$ και στην συνέχεια να βρεθεί

το $m:\ \lim\limits_{k\to+\infty}\int_0^k f(x)dx \in R$

Να υπολογιστούν τα :

5B23. $\int_0^{\pi} x\eta\mu x(3+\sigma\upsilon\nu^2 x)dx$

5B24. $\int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}dx$

5B25. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{ln(\varepsilon\varphi x)}{\eta\mu^2 x}dx$

5B26. $\int_0^{\pi/2} \frac{1+\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}dx$

5B27. Έστω $I = \int_\alpha^x \frac{e^{2t}}{t-1}dt$, $\alpha = 1+\ell n2$ και $Li(x) = \int_2^x \frac{1}{\ell nt}dt$ $(x \geq 2)$.

Να εκφράσετε το I συναρτήσει του $Li(x)$.

Το Li(x) κάνει συχνή την παρουσία του στην θεωρία των πρώτων ακέραιων αριθμών και δεν υπολογίζεται στοιχειωδώς.

5Β28. Αν $Li(x)=\int_2^x \frac{1}{lnt}dt$, *(x≥2)* να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά *λ:*

$$\int_\lambda^{\ln x}\frac{e^t}{t}dt = Li(x).$$

Έστω f : $f(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$ $x\in(0,+\infty)$. Να εκφράσετε συναρτήσει της f τα παρακάτω ολοκληρώματα

5Β29. $\int_1^x \frac{e^t}{t+\alpha}dt$ $\alpha>0,$

5Β30. $\int_1^x \frac{e^{\alpha t}}{t}dt$

5Β31. $\int_1^x \frac{e^t}{t^2}dt$

5Β32. $\int_1^x e^{1/t}dt$

Γ ΟΜΑΔΑ

5Γ1. Δείξτε ότι : $\int_0^x e^{-t}t^{\nu}dt = \nu!\,e^{-x}\left\{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^{\nu}}{\nu!}\right\}$.

7 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΥΠΑΡΞΗΣ ΜΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Α ΟΜΑΔΑ

6Α1. Αν $f(x)=\int_0^x \frac{a^t\ln a + b^t\ln b}{a^t+b^t}dt$ και είναι :

$f(x)\geq x$, $\forall x\in R$ τότε να δείξετε ότι $ab=e^2$

(Σκεφθείτε ότι έχετε μια ανισότητα και θέλετε τελικά μια ισότητα)

6Α2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει :

$\int_0^{x^2} f(t)dt \geq a^x - x - 1 \;\; x \in R$, $a>1$ δείξτε ότι $a=e$

6Α3. Η f είναι συνεχής στο R και ισχύει

$(1+x)\int_0^x f(t)dt \leq a\ln(1+x^2)+\eta\mu x \quad \forall x \in R$ δείξτε τότε ότι

$f(0)=1+a$

6Α4. Η f είναι συνεχής στο R και ισχύει

$\int_x^{2x} f(t)dt \leq x^2+x$, $\forall x \in R$ δείξτε τότε ότι $f(0)=1$

6Α5. Η f είναι συνεχής στο R και ισχύει

$e^x + \int_0^x f(t)dt \geq 1+mx$, $\forall x \in R$. Βρείτε την τιμή του m

6Α6. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)>0$. Αν ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx<0$

δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$: $f(\xi)=0$.

6Α7. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$:

$\int_\alpha^\xi f(x)dx = \int_\xi^\beta f(x)dx$.

6Α8. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$:

$\int_\alpha^\xi f(x)dx = k\int_a^\beta f(x)dx$ όπου $k \in (0,1)$

6Α9. Έστω $f: R \to [2,+\infty)$ συνεχής ώστε

$g(x)=x^2-5x+1-\int_0^{x^2-5x} f(t)dt$, $\forall x \in R$. Δείξτε ότι η g έχει

μοναδική ρίζα στο $[-3,0]$

6Α10. Έστω f, g συνεχείς και $\int_1^a f(x)dx = \int_1^a g(x)dx$ δείξτε τότε ότι

οι C_f, C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο

6A11. Έστω $f:[0,1]\to R$ συνεχής : $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$: $f(\xi)=3\xi^2$.

6A12. Έστω $f:[0,1]\to R$ συνεχής: $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{\pi}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$: $f(\xi)=\frac{2\xi}{\pi}$.

6A13. Έστω f συνεχής στο $[0,1]$: $3\int_0^1 f(x)dx = 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$: $f(\xi)=\xi^2$.

6A14. Έστω f συνεχής στο $[0,1]$: $\int_0^1 f(x)dx = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$: $f(\xi)=\frac{1-\xi^3}{1-\xi}$.

6A15. Έστω f συνεχής στο $[0,1]$: $6\int_0^1 f(t)dt = 2\alpha+3\beta+6\gamma$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$: $f(\xi)=\alpha\xi^2+\beta\xi+\gamma$.

6A16. Έστω f συνεχής στο $[0,1]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$:

$(1-\xi)f(\xi)=\int_0^{\xi} f(t)dt$.

6A17. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$:

$f(\xi)=\frac{1}{\beta-\xi}\int_{\alpha}^{\xi} f(x)dx$.

6A18. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $\int_a^b f(t)dt = \int_c^d f(t)dt$ με $b-a=d-c$ και ακόμη $b<c$ δείξτε ότι η παράγωγος της $g(x)=\int_x^{x+b-a} f(t)dt$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα ανάμεσα στα a , c. Ακόμη δείξτε ότι και η $f'(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα ανάμεσα στα x_0, x_0+b-a όπου $g'(x_0)=0$

6Α19. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει

$\int_0^1 f(t)dt = \int_2^3 f(t)dt$ Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0,3)$: $f'(\xi) = 0$

6Α20. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, $f(\alpha)=0$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$

τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi)=0$

6Α21. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$: $\int_\alpha^\beta f(t)dt = 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν

$\xi_1, \xi_2 \in [\alpha,\beta]$: $f(\xi_1)\cdot f(\xi_2) \leq 0$.

6Α22. Έστω $f'(x) < 0$, $\forall x \in R$, $f(a)f(b) < 0$ Δείξτε τότε ότι

πάντα υπάρχουν ξ_1 , $\xi_2 \in R$: $\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(t)dt = 0$

6Α23. Έστω ότι $f''(x) = f(x)$, $\forall x \in R$ και η f παρουσιάζει

ακρότατο στο b. Τότε δείξτε ότι

$\int_a^b (2-t^2)f(t)dt + 2bf(b) = 0$

6Α24. Αν η f'' είναι συνεχής στο $[0,\pi/2]$ και

$\int_0^{\pi/2} (f(t)+f''(t))\sigma\upsilon\nu t dt = f(0)$ δείξτε ότι υπάρχει ξ στο

$[0,\pi/2] : f''(\xi) = 0$

6Α25. Έστω ότι

$xf''(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$, $f'(b) = f(a)$, $f'(a) = f(b)$

Τότε δείξτε ότι υπάρχει ξ

$:(b-a)f(\xi) = (b+1)f(a) - (a+1)f(b)$

6Α26. Αν η f' είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και

$\int_0^\pi (f(t)+f''(t))\eta\mu t dt = 2f(0)$ δείξτε ότι η $f(x)$ δεν μπορεί

να είναι να είναι *1-1* συνάρτηση

Β ΟΜΑΔΑ

6Β1. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\alpha+1]$: $\int_a^{a+1} f(t)dt = 1$ και

$g : [a, a+1] \to R$ συνάρτηση με τύπο

$g(x) = \int_a^x f(t)dt \cdot \int_x^{a+1} f(t)dt$. Αφού δείξετε ότι

$g(x) = \frac{1}{4} - \left(\int_a^x f(t)dt - \frac{1}{2} \right)^2$ να δείξετε ότι g έχει μέγιστο το

οποίο και να βρείτε

6Β2. Έστω f συνεχής και $f(\alpha)>\alpha$. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx < \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$ δείξτε

ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $f(\xi)=\xi$.

6Β3. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)>\alpha^2$. Αν ισχύει

$3\int_\alpha^\beta f(x)dx < \beta^3 - \alpha^3$ δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $f(\xi)=\xi^2$.

6Β4. Έστω $f'(x) > 0$, $g'(x) = x\int_1^x f'(xt)dt \quad \forall x \in R$ Να

μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία και να δείξετε ότι

υπάρχει ξ : $2\xi f'(\xi^2) = f'(\xi)$

6Β5. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β)

με $\alpha\beta<0$ και ισχύει $\int_a^b f(a+b-t+x)dt \geq \int_a^b f(t)dt \quad \forall x \in R$.

Τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $f'(\xi)=0$

6Β6. Έστω f συνεχής: $\int_\alpha^\beta f(t)dt = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$:

$\int_\alpha^\xi f(x)dx = f(\xi)$.

6Β7. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = 0$ με $0<\alpha<\beta$, τότε δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$:

$\int_{\alpha}^{\xi} f(x)dx = \xi f(\xi)$.

6Β8. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Δείξτε ότι υπάρχει

$\xi \in [\alpha,\beta]$: $\int_{\alpha}^{\xi} f(t)dt - \int_{\xi}^{\beta} f(t)dt = (\alpha + \beta - 2\xi)f(\xi)$.

6Β9. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο (α,β). Δείξτε ότι υπάρχει

$\xi \in (\alpha,\beta)$: $\int_{\alpha}^{\xi} f(x)dx + (\xi - \alpha)g(\xi) = \int_{\xi}^{\beta} g(x)dx + (\beta - \xi)f(\xi)$.

6Β10. f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$ και $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \neq 0$. Δείξτε ότι

υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$: $\int_{\alpha}^{\xi} f(x)dx = \frac{f(\xi)(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}{(\alpha+\beta-2\xi)}$.

6Β11. Έστω f συνάρτηση γνήσια μονότονη και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

Θέτουμε $g(x) = (x-\alpha)\int_{x}^{\beta} f(t)dt + (x-\beta)\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$. Δείξτε ότι

η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (α,β).

6Β12. Αν f παραγωγίσιμη στο $[0,1] : f(0) = 0$. Να δείξετε ότι

υπάρχει ξ στο $(0,1)$: $f'(\xi) = 2\int_{0}^{1} f(t)dt$

6Β13. Έστω f, g συνεχείς στο $[0,1]$: $g(0)=0$, $g(1) = \int_{0}^{1} f(x)dx$. Να

δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$: $f(\xi)=g'(\xi)$.

6Β14. Έστω $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$: $\frac{\alpha}{10} + \frac{\beta}{6} + \frac{\gamma}{3} + \delta = 0$ δείξτε

ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$: $f(\xi)=0$.

6Β15. Έστω f συνεχής στο $[0,1]$. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο $[0,1]$:

$\int_{0}^{1} f(t)dt - \frac{1}{2} \leq f(\xi) - \xi$

6Β16. Αν f παραγωγίσιμη: $\int_0^1 f(x)dx = 1$, $\int_2^3 f(x)dx = 5$. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο $(0,3)$: $f'(\xi) = 2$

6Β17. Αν f' παραγωγίσιμη: $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$: $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει και ξ : $f''(\xi)=f'(\xi)$.

6Β18. Έστω $\alpha<\beta$, $\gamma<\delta$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx \cdot \int_\gamma^\delta f(x)dx < 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 : $\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)dx = 0$

6Β19. Εστω f' συνεχής και $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο $(0,1)$: $\xi f'(\xi) = f(1)$

6Β20. Αν η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$

$\int_0^1 tf'(t)dt = A, \int_0^1 f(t)dt = f(0), f'(0) = A+2$ Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο $(0,1)$: $f'(\xi) = A+1$

6Β21. Αν η f'' είναι συνεχής στο $[0,1]$ και

$2f(x+1) - 2f(x) = x^2$, $\forall x \in [0,1]$ τότε δείξτε ότι η $f''(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα και

$\int_0^1 f''(t)(t-2006)dt = f'(0)$

6Β22. f'' συνεχής και $\int_0^1 xf''(x)dx = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$: $f'(\xi)=f'(1)$.

6Β23. f'' συνεχής $f(\beta)=0$, $f'(\beta)=0$ τότε δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$:

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \frac{\beta-\alpha}{2}(\xi-\alpha)^2 f''(\xi).$$

Γ ΟΜΑΔΑ

6Γ1. Αν *f,g* συνεχείς με $g(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$ (ή $g(x)\leq 0$) τότε δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $\int_a^b g(x)f(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

Ένα σπουδαίο ΘΜΤ ολοκληρωμάτων , μπορείτε να το χρησιμοποιήσετε στις 3 επόμενες ασκήσεις

6Γ2. Αν $f\,'$ συνεχής στο $[0,1]$ τότε: υπάρχει $\xi\in(0,1)$:

$$\int_0^1(1-x)f'(x)dx=\frac{1}{2}f'(\xi)$$

6Γ3. Αν $f\,'$ συνεχής στο $[0,1]$υπάρχει $\xi\in(0,1)$:

$$\int_0^1 f(x)dx=f(1)-\frac{1}{2}f'(\xi).$$

6Γ4. Αν f''' συνεχής τότε δείξτε ότι υπάρχει ξ ανάμεσα στα α και b έτσι ώστε να είναι

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(a)+\frac{(b-a)^3}{6}f'''(\xi)$$

6Γ5. Εστω f' συνεχής , $f'(1)<1$ και

$x\int_1^x f(xt)dt\leq x^3-x$, $\forall x\in R$ τότε υπάρχει ξ : $f'(\xi)=\xi$

(δεν είναι απαραίτητη η συνέχεια της f ΄αλλά...)

6Γ6. Εστω *f* συνεχής και $\int_0^1 f(t)dt=ln(1+\sqrt{2})$ τότε υπάρχει

$$x_0\in(0,1):\frac{1}{\sqrt{2}}<f(x_0)<\frac{\sqrt{2}}{1+x_0}$$

Δ ΟΜΑΔΑ

6Δ1. Έστω $f:R\to R$ παραγωγίσιμη:

$$\int_x^y f(t)dt\leq f'(x)-f'(y)\ \ \forall x,y\in R\quad f(0)=0,f'(0)=1$$

Δείξτε ότι η *f* έχει τουλάχιστον μια ρίζα $\xi>0$

6Δ2. Αν f συνεχής και μη μηδενική στο R : $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 tf(t)dt$

τότε δείξτε ότι

Α) υπάρχει a στο $[0,1]$: $f(a) = \int_0^a f(t)dt$

Β) υπάρχει b στο $[0,1]$: $bf(b) = \int_0^b tf(t)dt$

6Δ3. Αν f δυο φορές παραγωγίσιμη με πεδίο ορισμού το [a,b] και επιπλέον $f'(a) = f'(b) = 0$ τότε

$$\exists \xi \in (a,b) : |f''(\xi)| \geq \frac{2(f(b) - f(a))}{(b-a)^2}$$

7 ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

Α ΟΜΑΔΑ

Να δείξετε ότι :

7Α1. $-2 \leq \int_{-1}^{1} \frac{t^5}{t+2} dt \leq \frac{2}{3}$.

7Α2. $\frac{\pi}{2e} \leq \int_{-\pi/4}^{\pi/4} e^{\varepsilon\varphi x} dx \leq \frac{\pi e}{2}$.

7Α3. $\int_{-1}^{2} \frac{t}{e^t} dt \leq \frac{3}{e}$.

7Α4. $\frac{1}{4} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sigma\upsilon\nu t}{t} dt \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

7Α5. $\int_0^{3\pi} \frac{1}{2 + \sigma\upsilon\nu^2 t} dt \geq \pi$.

7Α6. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ $m = \min_{x \in [\alpha,\beta]} f(x)$, $M = \max_{x \in [\alpha,\beta]} f(x)$, $\alpha > 0$

τότε δείξτε ότι $m\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \leq \int_\alpha^\beta \frac{f(t)}{t} dt \leq M\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

7Α7. α) $\forall x \in [0,1]$ δείξτε ότι $x - x^2 \leq ln(1+x) \leq x$,

β) δείξτε τώρα ότι: $\frac{1}{6} \leq \int_0^1 ln(1+t)\,dt \leq \frac{1}{2}$.

7Α8. Αν $\alpha > 0$ και $x \in [0,1]$ δείξτε ότι $1 - x^\alpha \leq \sqrt{1-x^\alpha} \leq 1 - \frac{1}{2}x^\alpha$

και στην συνέχεια δείξτε ότι: $\frac{\alpha}{1+\alpha} \leq \int_0^1 \sqrt{1-x^\alpha}\,dx \leq \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{\alpha+1}$.

Ποιο το $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \int_0^1 \sqrt{1-x^\alpha}\,dx$.

7Α9. Δείξτε ότι: $\frac{\pi^2}{64} \leq \int_0^{\pi/4} \frac{xdx}{1+\varepsilon\phi^2 x} \leq \frac{\pi^2}{32}$.

Θεωρήστε κατάλληλες συναρτήσεις και ασχοληθείτε με την μονοτονία και τα ακρότατά τους, ώστε να δείξετε τις παρακάτω προτάσεις.

7Α10. $2\int_1^x e^{t^2}\,dt \leq e^{x^2} - e \quad \forall x \in R.$

7Α11. Αν $1 < \alpha < \beta$ τότε : $0 \leq \int_\alpha^\beta \frac{dt}{lnt} - ln\left(\frac{\beta - 1}{\alpha - 1}\right) \leq \beta - \alpha$.

7Α12. Αν f αύξουσα και συνεχής στο $[\alpha,b]$ τότε:

$\int_\alpha^b tf(t)\,dt \geq \frac{\alpha+b}{2}\int_\alpha^b f(t)\,dt$.

7Α13. Έστω $f'(x)$ συνεχής στο $[1,+\infty)$ με $f(1) = 2$ και

$xf'(x) > f(x), \forall x \geq 1$ Δείξτε ότι $\int_a^b f(t)dt \geq b^2 - a^2$ όταν

$1 \leq a < b$. Ακόμη δείξτε : $2\int_a^b f(t)dt < bf(b) - af(a)$

7Α14. Έστω $f'(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0)=0$ και

$f(x) > \dfrac{f'(x)}{2} > 0$, $\forall x \in (0,+\infty)$ Να δείξετε ότι

$$n\left(\int_0^a (f(t))^n dt\right)^2 \geq \int_0^a (f(t))^{2n} dt \ , \ a > 0 \ , \ n \in N^*$$

7Α15. Έστω $f, g : [1,+\infty) \to R$ συνεχείς:

$x\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(xt)dt + xg(x) < xf(x) + \int_1^x g(t)dt$. Να δείξετε ότι

$f(x) > g(x) \ , \forall x \in [1,+\infty)$

7Α16. Αν f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$,κυρτή, $f(0)=1, f'(0)=1$.

Να δείξετε ότι $f(x) > 1$ στο $(0,+\infty)$,η συνάρτηση

$\int_1^x f(t)dt - \int_1^x ln(f(t))dt$ είναι κυρτή και γνήσια αύξουσα

7Α17. Αν f' είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$

$f(1)=0 \ , \ ln x \leq f'(x) \leq x-1 \ , \ \forall x \in (0,+\infty)$ τότε να μελετήσετε την μονοτονία και τα ακρότατα της f Να δείξετε ότι η f δεν έχει ασύμπτωτους και ότι η εξίσωση $f(x) = m \geq 1$ έχει μοναδική λύση

7Α18. Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα

$\left(f(x) - \eta\mu x\right)^2 + \left(f(x) - \sigma\upsilon\nu x\right)^2 \geq 0$ και με δεδομένο ότι

$\int_0^1 f(x)\eta\mu x dx = \int_0^1 f(x)\sigma\upsilon\nu x dx = 1$ δείξτε ότι για την συνεχή συνάρτηση f ισχύει: $\int_0^1 f^2(x)dx \geq \dfrac{3}{2}$.

7Α19. Αν $f(0)=0 \ , \ 0 \leq \dfrac{x}{2} \leq f(x) \leq xf'(x) \ , \forall x \in [0,+\infty)$ δείξτε ότι

θα ισχύει : $\dfrac{1}{4} \leq \int_0^1 f(t)dt \leq \dfrac{1}{2} f(1)$

7Α20. Έστω $f(x)\geq 0$, $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=1$ και η συνεχής συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω τότε δείξτε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \frac{1}{2}(\beta-\alpha)$$

$$\int_\alpha^\beta f^2(x)dx \leq \frac{\beta-\alpha}{3}.$$

Β ΟΜΑΔΑ

7Β1. Δείξτε ότι: $\int_0^1 e^{t^2}\,dt \geq \frac{4}{3}$.

7Β2. Δείξτε ότι: $\int_0^1 \frac{ln(2+t^2)}{1+t^2}dt \leq 1$.

7Β3. Με μια γεωμετρική ερμηνεία της υπόθεσης $f''(x)>0$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$ δείξτε ότι: $\int_\alpha^\beta f(t)dt \leq \frac{1}{2}(\beta-\alpha)(f(\beta)+f(\alpha))$.

7Β4. Και πάλι με γεωμετρικό τρόπο μπορείτε να δείξετε ότι αν $f''(x)<0$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$ τότε

$$\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}f'(\alpha)\geq \int_\alpha^\beta f(x)dx-(\beta-\alpha)f(\alpha).$$

7Β5. Αν f παραγωγίσιμη : $f(0)=0$, $0\leq f'(x)\leq 1$, $\forall x\in[0,+\infty)$ τότε να δείξετε ότι ισχύει $\int_0^x f^3(t)dt \leq \left\{\int_0^x f(t)dt\right\}^2$ $\forall x\in[0,+\infty)$.

7Β6. Έστω $f(x)=\int_\alpha^x g(t)dt$ όπου g συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Αν $g(\xi_2)$ η ελάχιστη και $g(\xi_1)$ η μέγιστη τιμή της g στο $[\alpha,\beta]$ τότε να δείξετε ότι ισχύει :

$$g(\xi_2)\frac{(\beta-\alpha)^2}{2} \le \int_\alpha^\beta f(t)dt \le g(\xi_1)\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}.$$

7Β7. Έστω $f''(x)\ge 0 \ \forall x\in[\alpha,\beta]$ δείξτε ότι:

$$\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx - \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta f(x)dx \le \frac{\beta-\alpha}{2}\left(f(\alpha)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right).$$

7Β8. Έστω $f(x)=\int_x^{2x}\frac{dt}{t-lnt}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού.

β) Να δείξετε ότι f γνήσια φθίνουσα στο $[2,+\infty)$.

γ) Δείξτε ότι $f(x)\le x,\ \forall x>0$.

δ) Δείξτε ότι $f(x)\ge ln2,\ \forall x\ge 1$.

7Β9. Δείξτε ότι: $\frac{1}{2}\le(\nu+1)\int_0^1\frac{x^\nu}{1+x^2}dx\le 1 \ (\nu\in N^*)$

7Β10. Έστω $f_\nu(x)=\int_0^1 s^\nu \eta\mu(x\cdot s)ds \ \ x>0 \ ,\ \nu\in N^*$.

α) Να δείξετε ότι : $f_\nu(x)=\frac{1}{x^{\nu+1}}\int_0^x t^\nu \eta\mu t dt$.

β) Αν $g(x)=\begin{cases} f_\nu(x), & x>0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$ τότε δείξτε ότι g συνεχής.

γ) Δείξτε ότι: $g'(0^+)=\frac{1}{2+\nu}$.

δ) Δείξτε ότι: $xg'(x)+(\nu+1)g(x)=\eta\mu x$.

7Β11. Έστω $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ παραγωγίσιμη ώστε

$f'(x)+2xf(x)=0 \ ,\ f(1)=1$

α)Να δείξετε ότι $f'(x)$ είναι συνεχής και να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$.

β) Να δείξετε ότι $\frac{x-1}{2x^2}f(x)<\int_1^x \frac{f(t)}{2t^2}dt<\frac{x-1}{2}\quad \forall x\in(1,+\infty)$

γ) Να βρείτε τον τύπο της $F(x)=\int_1^x(1+\frac{1}{2t^2})f(t)dt\ ,\ x>1$

δ) Να δείξετε ότι $2e\int_1^x e^{-t^2}dt<1\ ,\ \forall x>1$

7Β12. Αν η συνεχής συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω στο $[\alpha,\beta]$ δείξτε ότι:

α) $f(x)\le\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}f(\beta)+\frac{x-\beta}{\alpha-\beta}f(\alpha)$

και $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\le\frac{1}{2}\{f(x)+f(a+\beta-x)\}$

β) $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\le\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx\le\frac{1}{2}(f(\alpha)+f(\beta))$.

7Β13. Αν $f: R\to R$ συνεχής , γνήσια αύξουσα και $g(x)=\int_k^x f(t)dt$ τότε να δείξετε ότι για κάθε $m\in[0,1]$ ισχύει $g(ma+(1-m)b)\le mg(a)+(1-m)g(b)$

7Β14. Έστω f παραγωγίσιμη και $f(0)=0, f(1)=1$ τότε $\int_0^1|f'(x)-f(x)|dx\ge\frac{1}{e}$.

7Β15. Έστω $f'(x)>0, f'$ αύξουσα και $f(0)=0$ δείξτε ότι: $f'(x)\ge f(x), x\in[0,1]$, $\int_0^1 f(x)dx\le f(1)$.

7Β16. Έστω f αύξουσα και συνεχής, $\alpha\in[0,1]$ τότε δείξτε ότι: $\int_0^\alpha f(x)dx\le\alpha\int_0^1 f(x)dx$.

7Β17. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Ονομάζουμε με

$I_f=\int_\alpha^\beta\left(f^2(x)-2xf(x)\right)dx$. Βρείτε την ελάχιστη τιμή του I_f

καθώς και την αντίστοιχη f που ελαχιστοποιεί το I_f.

7Β18. Έστω f παραγωγίσιμη κυρτή και $\uparrow$, $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=1$. Δείξτε ότι:

α) $f(x)\le 1+(x-\beta)f'(x)\ \ \forall x\in[\alpha,\beta]$,

β) $f^2(x)\le f(x)+\frac{1}{2}(x-\beta)\left(f^2(x)\right)'$,

γ) $\int_\alpha^\beta f^2(x)dx\le\frac{2}{3}\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

7Β19. Έστω f' αύξουσα και συνεχής δείξτε ότι:

$f(x)\le f(-1)+(x+1)f'(x)\ \ \forall x\in[-1,1]$,

$\int_{-1}^{1}f(x)dx\le f(-1)+f(1)$.

7Β20. Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις ώστε $f(x)g(y)>1\ \ \forall x,y\in R$ τότε

δείξτε ότι: $\int_\alpha^\beta f(t)dt\cdot\int_\alpha^\beta g(t)dt\ge(\beta-\alpha)^2$.

7Β21. Αν $f\uparrow$ και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε να δείξτε ότι $\forall x\in(\alpha,\beta)$

ισχύει: $\frac{1}{x-\alpha}\int_\alpha^x f(t)dt\le\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(t)dt\le\frac{1}{\beta-x}\int_x^\beta f(t)dt$.

7Β22. Έστω $f'\uparrow$ στο $[-1,1]$. Να δείξετε ότι:

$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)dx\le f(-1)+f'(1)$.

Το θεώρημα μέσης τιμής για παραγώγους και μια γεωμετρική παρατήρηση δίνει μεγάλη βοήθεια για την λύση της προηγούμενης άσκησης.

7Β23. Έστω $f(x)>0$, f συνεχής και $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{f(x)}<\beta-\alpha$ τότε □ ξ : $f(\xi)>1$.

Γ ΟΜΑΔΑ

7Γ1. *Έστω* $f(x)>0$, f φθίνουσα συνεχής και $I_{\nu}=\int_{1}^{\nu}f(t)dt$.

Α) Δείξτε ότι $\int_{\nu}^{\nu+1}f(t)dt\leq f(\nu)\leq\int_{\nu-1}^{\nu}f(t)dt$ $(\nu\in N^{*})$.

Β) Αν $\alpha_{\nu}=f(1)+f(2)+\ldots+f(\nu)$ δείξτε ότι υπάρχουν αριθμοί c_1, c_2 ανεξάρτητοι του ν ώστε: $I_{\nu+1}-c_{1}<\alpha_{\nu}-c_{2}<I_{\nu}$.

Γ) Βρείτε το $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$, $n\in N^{*}$

7Γ2. *Η παρακάτω άσκηση αφορά μια από τις πιο διάσημες ανισότητες για τα ολοκληρώματα και θυμίζει εσωτερικό γινόμενο! Λέγεται ανίσωση* ***Bouniakofski-Cauchy-Swartz*** *(B-C-S) και η αντίστοιχη ταυτότητα για αριθμούς είναι* $\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_{k}\beta_{\kappa}\right)^{2}\leq\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_{\nu}^{2}\right)\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu}\beta_{\nu}^{2}\right)$.

Έστω λοιπόν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$. Θεωρείστε παρακάτω ότι $I_{\lambda}=\int_{\alpha}^{\beta}(\lambda f(x)-g(x))^{2}dx$ $\lambda\in R$. Διατυπώστε το I_{λ} ως τριώνυμο του λ και εξηγείστε γιατί $I(\lambda)\geq 0$ $\forall\lambda\in R$. Συμπεραίνετε έτσι ότι:

$\left(\int_{\alpha}^{\beta}f(x)g(x)dx\right)^{2}\leq\int_{\alpha}^{\beta}f^{2}(x)dx\cdot\int_{\alpha}^{\beta}g^{2}(x)dx$. Εξετάστε πότε ισχύει το «=» στην προηγούμενη. Αν θέλετε μπορείτε να λύσετε την άσκηση και συναρτησιακά θέτοντας π.χ όπου β το x κ.ο.κ

Με την βοήθεια της ανισότητας Cauchy-Swartz (B-C-S) για τις 8 επόμενες ασκήσεις δείξτε ότι ισχύει :

7Γ3. $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx < \frac{\sqrt{5}}{2}$

7Γ4. Αν f' συνεχής στο $[0,+\infty)$ και $f(0)=0$ δείξτε ότι:

$\int_0^x |f'(x)|dx \geq \sqrt{|f(x)|}$.

7Γ5. Αν $f(1)$-$f(0)=1$, f' συνεχής τότε δείξτε ότι : $\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 1$.

7Γ6. Αν $f(1)=0$, f' συνεχής τότε δείξτε ότι :

$\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 3\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$.

7Γ7. Αν f συνεχής $\int_0^1 f(x)dx = 1$ τότε $\int_0^1 \frac{f^2(x)}{1+x^2}dx \geq \frac{3}{4}$.

7Γ8. Έστω f συνεχής , $f(x)\geq 0$ και $I_\nu = \int_0^1 f^\nu(x)dx$ τότε

$I_{\nu-1}^2 \leq I_\nu I_{\nu-2}$.

7Γ9. Δείξτε ότι :

$\left(\int_\alpha^\beta f(x)\eta\mu x dx\right)^2 + \left(\int_\alpha^\beta f(x)\sigma\upsilon\nu x dx\right)^2 \leq (\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta f^2(x)dx$

όταν βέβαια η f είναι συνεχής.

7Γ10. Αν $f(x)\geq x$, f συνεχής τότε $\int_0^1 e^x f(x)dx \cdot \int_0^1 e^{-x} f(x)dx \geq \frac{1}{4}$.

7Γ11. Έστω $0<\beta<f(\alpha)$, $f(0)=0$, f γνήσια αύξουσα και παραγωγίσιμη.

Να δείξετε ότι: $\int_0^{\alpha} f(t)dt + \int_0^{\beta} f^{-1}(t)dt \geq \alpha\beta$.

7Γ12. Έστω $f, g : [a,b] \to R^+$ συνεχείς

ώστε $f(x) \leq A + \int_a^x f(t)g(t)dt, \forall x \in [a,b]$ με $A>0$ Δείξτε

ότι $f(x) \leq Ae^{\int_a^x g(t)dt}, \forall x \in [a,b]$

<u>Δ ΟΜΑΔΑ</u>

7Δ1. Να δείξετε ότι $ln2<7/10$

7Δ2. Έστω συνάρτηση $f : f''(x)=p(x)f(x)$, $p(x)>0$ και συνεχής στο R. Τότε αν η f έχει δυο ρίζες a ,b δείξτε ότι : $f(x)=0$ $\forall x \in [a,b]$

Τώρα υποθέστε ότι : η f δεν είναι σταθερή σε κανένα διάστημα , $f(a)=0$, $x_0>a$, $f(x_0)>0$ και δείξτε ότι : $f(x)>0$ $\forall x \in (a,+\infty)$

Αν $f'(k).f(m)=f'(m).f(k)$ δείξτε ότι υπάρχει ξ με $k<\xi<m$:

$$\sqrt{p(\xi)} \geq \frac{ln f(m) - ln f(k)}{m-k}$$

7Δ3. Έστω $f : R \to R$ συνεχής και κυρτή. Δείξτε ότι

$$f(1/2) \leq 12\int_0^1 t^2 f(t)dt - 6\int_0^1 tf(\frac{1+t}{2})dt \ [1]$$

7Δ4. Αν f' συνεχής στο $[0,1]$ και $f(\frac{1}{2})=0$ να δειχθεί ότι

$$\int_0^1 (f'(t))^2 dt \geq 12\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2$$

7Δ5. Αν f συνεχής και $f(x-1)+f(x+1)\geq x+f(x)$,$\forall x\in R$ ποια η ελάχιστη τιμή του $\int_0^{2005} f(x)dx$ και για ποια συνάρτηση f συμβαίνει αυτό?

7Δ6. Αν $f'(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ και $\int_0^1 f(t)dt=0$ να δείξετε ότι

$$\left|\int_0^x f(t)dt\right|\leq \frac{1}{8}\max_{x\in[0,1]}\left|f'(x)\right| \text{ , } \forall x\in[0,1]$$

Την έχετε ξαναδεί σε άλλη μορφή

7Δ7. Έστω $f:(a,b)\to R$ συνεχής. Αν

$f(x)\leq \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)dt$ για κάθε διάστημα

$[x-h,x+h]\subset(a,b)\Leftrightarrow f$ κυρτή

8 ΟΡΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Α ΟΜΑΔΑ

8Α1. Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_{x+1}^{x+2}\frac{e^t}{t}dt$.

8Α2. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_{x}^{x+1}\frac{t^2}{e^t}dt=0$.

8Α3. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lambda\in R$, $\alpha>0$ και f συνεχής δείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\int\limits_{x}^{x+\alpha} f(t)dt=\lambda\alpha.$$

8Α4. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lambda$ και f συνεχής υπολογίστε το:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)dt.$$

8Α5. Αν $g(x_0)=0,\ \exists g'(x),\ g'(x_0)\neq 0,\ f$ συνεχής υπολογίστε το

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}{g(x)}$$

8Α6. Υπολογίστε το $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{e^t}{1+t}dt}{x}$.

8Α7. Υπολογίστε το $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \varepsilon\varphi^4 t dt}{x^5}$.

8Α8. Υπολογίστε το $\lim_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x \frac{\ln t}{1+\ln^2 t}dt}{(x-1)^2}$.

8Α9. Υπολογίστε το $\lim_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi x\int_0^x \frac{\eta\mu t}{1+t}dt}{x^3}$.

8Α10. Αν $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x}{x}, x\neq 0\\ 1\ ,\ x=0\end{cases}$ να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R

και κατόπιν να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^3}$

8Α11. Αν $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1}, 0<x\neq 1\\ 1\ ,\ x=0\end{cases}$ να δείξετε ότι η f είναι συνεχής

στο R και κατόπιν αν υπάρχει να υπολογίσετε το

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x f(t)dt}{\ln^3 x}$$

8Α12. Να υπολογίσετε το : $\lim_{x\to +\infty}\int_x^{x+1}\dfrac{1}{\sqrt{1+2t^2}}dt$

8Α13. Να υπολογίσετε το: $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2}\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}dt$

8Α14. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2}\frac{\ln(1+t)}{\ln t}dt$

8Α15. Να υπολογίσετε το : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+4}\frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}}dt$

8Α16. Να υπολογίσετε το : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^{x}\frac{e^t}{t}dt$ αφού πρώτα μελετήσετε την

μονοτονία της $f(x)=\frac{e^x}{x}$, $x>0$

8Α17. Να υπολογίσετε το : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{1}{(\ln t)^2}dt$ αφού πρώτα μελετήσετε

την μονοτονία της $f(x)=\frac{1}{\ln^2 x}$, $x>1$

8Α18. Να υπολογίσετε το : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\ln t}{1+t}dt$ αφού πρώτα μελετήσετε

την μονοτονία της $f(x)=\frac{\ln x}{1+x}$, $x>0$

8Α19. Αν $g(x)=\int_0^1 f(tx)dt$ όπου f συνεχής να υπολογίσετε το

$\lim\limits_{x\to 0}g(x)$

8Α20. Να υπολογίσετε το : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x}^{2x}\frac{1}{1+t^2}dt$ αφού πρώτα μελετήσετε την μονοτονία της $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$ Κατόπιν να υπολογίσετε και το $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_{x}^{2x}\frac{x}{1+t^2}dt}{lnx}$

Β ΟΜΑΔΑ

8Β1. Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{t^2}dt$ και κατόπιν το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}+x^2}$.

8Β2. Να υπολογίσετε το: $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x\sqrt{1+t^3}\,dt\,,x>0$ και κατόπιν το $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}\int_0^x\sqrt{1+t^3}\,dt)$

8Β3. Να υπολογίσετε το: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{x^3e^{-3x}\int_0^x e^{2t}\sqrt{1+3t^2}\,dt\right\}$.

8Β4. Να υπολογίσετε το: $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_2^x\frac{1}{lnt}dt$ $(x\geq 2)$.

8Β5. Έστω f συνεχής στο $[0,\alpha]$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\left\{x^3\int_x^{\alpha}\frac{|f(t)|}{t^2}dt\right\}$

8Β6. Αν $|f'(x)|\leq\frac{1}{1+x^2}$ $\forall x\in R$ και $f(0)=0$, f' συνεχής. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

8Β7. Έστω $f: f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + f^2(x)}$ $\forall x \in R$ και $f(1)=1$. Να δείξετε ότι για $x \geq 1$ ισχύει $f(x) \geq 1$ και στην συνέχεια θέτοντας $u=\varepsilon\varphi x$ δείξτε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < 1 + \dfrac{\pi}{4}$.

8Β8. Να υπολογίσετε το : $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^1 e^{(x-t)^2} dt$ αφού πρώτα μελετήσετε την μονοτονία της $f(x) = e^{x^2}$

8Β9. Έστω $g(x) = \int_{\alpha - x}^{\alpha + x} f(t) dt$ όπου f συνεχής στο R.

Αν f παραγωγίσιμη στο α, να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 f(a) - \int_0^x g(t) dt}{x^3}$$

8Β10. Να υπολογίσετε το : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\int_1^x f(t) dt}{(x-1)^2}$ αν είναι γνωστό ότι η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και ότι

$2\ell n x \leq f(x) \leq 2(x-1)$, $\forall x \in (0,+\infty)$

8Β11. Έστω $f: (0,+\infty) \to R$ συνεχής και ισχύει :

$\ln x \leq f(x) \leq x - 1$, $\forall x > 0$. Δείξτε ότι

α) $f'(1) = 1$

β) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2\int_1^x f(t) dt + x^2 + 1 - 2e^{x-1}}{(x-1)^2} = 1$

γ) Η εξίσωση $1 + \int_1^x f(t) dt = \ln x + \dfrac{x^2}{2}$ έχει μοναδική λύση στο $(1,e)$

8Β12. α)Δείξτε ότι $e^t > t \ \forall t \in R$

β) Είναι $f'(x) = e^{x^2}$ Δείξτε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

γ) Βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xf(x)}{e^{x^2}}$

δ)Βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x\int_0^x e^{t^2 - x^2} dt + \dfrac{xf(0)}{e^{x^2}} \right)$ *

8Β13. Αν f συνεχής στο R, γνήσια αύξουσα

και $\exists x_0 : f(x_0) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt = +\infty$

<u>Γ ΟΜΑΔΑ</u>

8Γ1. Έστω $f(x) = \int_x^{x^2} \dfrac{dt}{lnt}$ $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$.

α) Μελετήστε την f ως προς την μονοτονία.

β) Δείξτε ότι $\lim\limits_{x \to 1} \left\{ f(x) - \int_x^{x^2} \dfrac{dt}{t-1} \right\} = 0$ και $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = ln\, 2$.

γ) Δείξτε ότι $\lim\limits_{x \to 0_1^+} \left\{ f(x) - \int_x^{x^2} \dfrac{dt}{tlnt} \right\} = 0$ και βρείτε το

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

δ) Αν $g(x) = \begin{cases} f(x) & x > 0. x \neq 1 \\ ln2 & x = 1 \end{cases}$ εξετάστε αν υπάρχει η $g'(1)$.

8Γ2. $f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_\pi^{2\pi} \frac{\eta\mu\left(\frac{xt}{\pi}\right)dt}{t} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

Δείξτε ότι f συνεχής, παραγωγίσιμη.

8Γ3. Έστω f συνεχής στο R και $\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt = A \in R$ τότε αν το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Δ ΟΜΑΔΑ

8Δ1. Να δειχθεί ότι η $f(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R και $f'(x)=-2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$. Κατόπιν να δειχθεί ότι η συνάρτηση g με

$g(x)=\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2+f(x)$ είναι σταθερή και έτσι να δείξετε

ότι το $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι διάσημο και η άσκηση αυτή δίνει έναν τρόπο υπολογισμού με λυκειακή ύλη!!!)

8Δ2. α)Αν $f(x)=\int_a^b e^{xg(t)}dt, \forall x \in R$ όπου g μη αρνητική γνήσια μονότονη και συνεχής στο [a,b], η οποία έχει μέγιστο θετικό Α ,να δειχθεί ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

β)Αν είναι γνωστό ότι : $f'(x)=\int_a^b g(t)e^{xg(t)}dt$ να δείξετε ότι :

$f'(x)\le Af(x), \forall x \in R$ Δείξτε ότι : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}=A$ Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{ln(f(x))}{x}$

(Η άσκηση αυτή αποτελείται από δυο τμήματα και είναι μια πραγματικά δύσκολη άσκηση)

9 ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

Α ΟΜΑΔΑ

Βρείτε μια αναδρομική σχέση για τα

9Α1. $I_\nu = \int_0^1 x^\nu e^x dx \;\; \nu \in N$.

9Α2. $I_\nu = \int_0^1 x^\nu e^{-x} dx \;\; \nu \in N$

9Α3. $I_\nu = \int_1^e (\ell n x)^\nu dx \;\; \nu \in N,$

(και δείξτε ότι: $I_\nu = (-1)^\nu \cdot \nu! \left\{ e \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{(-1)^\kappa}{\kappa!} + e - 1 \right\}$).

9Α4. $I_\nu = \int_1^e t(\ell n t)^\nu dt \;\; \nu \in N$

9Α5. $\alpha > 0$ και $I_\nu = \int_0^1 x^\nu e^{\alpha x} dx \;\; (\nu \in N),$

9Α6. $I_\nu = \int_1^2 \frac{e^x}{x^\nu} dx \;\; \nu \in N^*$

Β ΟΜΑΔΑ

9Β1. Βρείτε μια αναδρομική σχέση για το

$I_\nu = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^\nu} dx \; (\nu \in N^*).$

9Β2. Έστω $I_\nu = \int_0^{\pi/4} \varepsilon\phi^\nu x dx \;\; (\nu \in N^* - \{1\})$: δείξτε ότι

α) $I_{\nu+1} < I_\nu$

β) $I_{\nu+1} + I_{\nu-1} = \frac{1}{\nu}$

γ) $\frac{1}{\nu+1} < 2I_\nu < \frac{1}{\nu-1}$.

9Β3. Υπολογίστε το $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^\nu}{\left(1+x^2\right)} dx$.

9Β4. Βρείτε μια αναδρομική σχέση για το

$I_\nu = \int \sigma\upsilon\nu(\nu t)dt \ , \ \nu \in N^*$.

9Β5. Έστω $I_\nu(x) = \int_0^x \eta\mu^\nu(t)dt \ (\nu \in N)$.

α) Βρείτε αναδρομικούς τύπους για τα $I_\nu(x)$, $I_\nu(\pi/2)$.

β) Υπολογίστε τα $I_{2\nu-1}(\pi/2)$, $I_{2\nu}(\pi/2)$ ως συνάρτηση του ν.

(Γινόμενα Wallis)

γ) Δείξτε ότι $(\nu+1)\cdot I_\nu(\pi/2)\cdot I_{\nu+1}(\pi/2) = \pi/2$.

δ) Έστω g η συνάρτηση με τύπο

$g(\alpha) = (\alpha+1)I_\alpha(\pi/2)I_{\alpha+1}(\pi/2)$ $\alpha>0$. Δείξτε ότι είναι περιοδική.

9Β6. Έστω $I_\nu = \int_0^1 \left(1-x^2\right)^\nu dx$ $\nu \in N$, βρείτε αναδρομικό τύπο για το I_ν και δείξτε ότι $0 \le I_{\nu+1} \le I_\nu$.

9Β7. $I_\nu = \int_0^1 x^\nu \sqrt{1-x^2}\, dx \Rightarrow (2\nu+3)I_\nu = 2\nu \cdot I_{\nu-1}$.

<u>Γ ΟΜΑΔΑ</u>

9Γ1. Έστω $I_{\mu,\nu} = \int_0^1 x^\mu (1-x)^\nu dx$ $\mu,\nu \in N^*$. Δείξτε ότι:

α) $I_{\mu,\nu} = I_{\nu,\mu}$

β) $I_{\mu+1,\nu} = \frac{\mu+1}{\nu+1} I_{\mu,\nu+1}$

γ) $I_{\mu,\nu+1} + I_{\mu+1,\nu} = I_{\mu,\nu}$

δ) $I_{\mu,\nu+1} = \dfrac{\nu+1}{\mu+\nu+2} I_{\mu,\nu}$

ε) υπολογίστε το $I_{\mu,0}$ και δείξτε ότι

$$I_{\mu,\nu} = \frac{\nu!}{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+\nu+1)}.$$

(Το προηγούμενο ολοκλήρωμα έχει άμεση σχέση με μια διάσημη συνάρτηση που ονομάζεται «Βήτα».)

10 ΑΠΟΛΥΤΑ-ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

Α ΟΜΑΔΑ

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα.

10Α1. $\int_{-3}^{3} \left|x^3 - 3x + 2\right| dx$

10Α2. $\int_{-1}^{1} |x|(x-3)dx$

10Α3. $\int_{-1}^{1} (|x| + |x^2 - x|)dx$

10Α4. $\int_{0}^{x} (t + |t|)dt$

10Α5. $\int_{0}^{x} (|t-1| + |t-2| + \ldots + |t-\nu|)dt$

10Α6. $\int_{1/2}^{2} |2x - 2 + \ell nx| dx$

10Α7. $\int_{0}^{3} \left|3^x + 4^x - 5^x\right| dx$

10Α8. $\int_{-4}^{4} \left|x^2 - \sigma\upsilon\nu(\pi x) - 2\right| dx$

Μέση τιμή ενός μεγέθους *y* στο διάστημα *[α,β]* όπου *y=f(t)* ,

F συνεχής συνάρτηση, **ορίζουμε το** $\overline{y}=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ και **ενεργό τιμή του** ***y*** **ορίζουμε το** $y_{\varepsilon\nu}=\sqrt{\left(\overline{y^2}\right)}$. Βρείτε το $\overline{y}$ και $y_{\varepsilon\nu}$ των παρακάτω συναρτήσεων *y=f(x)*.

(Η ενεργός τιμή συμβολίζεται και με $\boldsymbol{y_{R.M.S}}$*)*

10Α9. *f(t)=α* στο *[0,2π]*

10Α10. $f(t)=\alpha\eta\mu\frac{2\pi t}{T}$ στο *[0,T]* *α* , *T* σταθερές $\in R_{+}^{*}$

10Α11. *f(t)=β+αημ(ωt+φ)* στο $[0,\frac{2\pi}{\omega}]$ *α, β, ω, φ* σταθερές $\in R_{+}^{*}$

10Α12. Δείξτε ότι $\overline{y_1+y_2}=\overline{y_1}+\overline{y_2}$, $\overline{\lambda y}=\lambda\overline{y}$ (*λ* σταθερά)

Β ΟΜΑΔΑ

10Β1. $\int_0^3 \frac{1}{|x-\alpha|+1}dx$

10Β2. Δείξτε ότι $y_{\varepsilon\nu}^2=\left(\overline{y^2}\right)\geq\left(\overline{y}\right)^2$ και βρείτε αν υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις *y=f(t)* για τις οποίες θα ισχύει: $\left(\overline{y^2}\right)=\left(\overline{y}\right)^2$.

Κατόπιν να συγκρίνετε τα $\left(\overline{\frac{1}{y}}\right)$ και $\left(\frac{1}{\overline{y}}\right)$ όπου *y=f(t)>0* στο *[0,T]*.

11 ΕΜΒΑΔΑ

Α ΟΜΑΔΑ

Χωρίς να είναι απαραίτητο ένα σχήμα μπορεί να σας βοηθήσει. Χρειάζονται λίγες γνώσεις αναλυτικής γεωμετρίας καθώς και προσοχή στις πράξεις σας όταν λύνετε εξισώσεις. Να υπολογίσετε λοιπόν τα εμβαδά των χωρίων του επιπέδου που περικλείονται από τις καμπύλες με εξισώσεις:

11Α1. $2y=x^2,\ x^2+y^2=8$

11Α2. $y^2=2x+1,\ x-y-1=0$

11Α3. $y^2=6x,\ x^2+y^2=16$

11Α4. $y=2x^2e^x,\ y=-x^3e^x$

11Α5. $y=\ell nx\ ,\ y=\ell n^2x$

11Α6. $y=\dfrac{\ell nx}{4x},\ y=x\ell nx$

11Α7. $2|x|+|y|=2$

11Α8. $y=x^3,\ y=x$

Στις παρακάτω ασκήσεις να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα xx΄ όταν:

11Α9. $f(x)=x^2-1\ \alpha=-2,\ \beta=2$

11Α10. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu 2x\ \ \alpha=0,\ \beta=\dfrac{5\pi}{3}$

11Α11. $f(x)=\dfrac{2\ell nx-1}{x^2}\ \ \alpha=1/2,\ \beta=2$

11Α12. $f(x)=x+\dfrac{4}{(1+x)^2}$ $a=-\lambda,\ \beta=\lambda,\ 0<\lambda<1$

11Α13. $f(x)=\dfrac{\ell nx}{x}$ $a=\dfrac{1}{e},\ \beta=e$

11Α14. $f(x)=\dfrac{2x^2}{x-1}$ $a=2,\ \beta=4$

11Α15. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+\lambda^2}}$ $a=-1,\ \beta=\lambda>0$

11Α16. $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$ $a=0,\ \beta=\lambda>0$

11Α17. $f(x)=5|x|-x^2$ $a=-1,\ \beta=1$

11Α18. $f(x)=x-e\ell nx$ $a=1,\ \beta=e$

11Α19. $f(x)=\dfrac{2x-\ell nx}{2\sqrt{x}}$ $a=1,\ \beta=2$

11Α20. Να βρείτε ευθεία που διέρχεται από το $(0,0)$ και χωρίζει σε 2 ισεμβαδικά χωρία το εμβαδόν που περικλείεται από την $y=x-x^2$ και τον άξονα xx'.

11Α21. Να βρείτε ευθεία που διέρχεται από το $(a,0)$ και χωρίζει σε δυο ισεμβαδικά χωρία το χωρίο που περικλείεται από τον άξονα x και την γραφική παράσταση της $f(x)=(x-a)(x-b), 0<a<b$

11Α22. Να βρείτε ευθεία της μορφής $x=x_0$ ώστε τα εμβαδά που περικλείονται από τις: $y=x^5$, $y=f(2)$, $x=x_0$ και $y=x^5$, $x=x_0>0$, $y=f(1)$ να είναι ίσα.

11Α23. Βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f:

$f(x)=e^{-x}(x^2+3x+1)+e^2$ και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ όπου στο α,β η f παρουσιάζει ακρότατα.

11Α24. Βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f: $f(x)=(1-x)e^{4x}$ και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ όπου στο α η f παρουσιάζει ακρότατο και στο β καμπή.

11Α25. Βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f: $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ και τις ευθείες $y=f(\alpha)$, $f=f(\beta)$ όπου στο α η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $[0,2\pi]$ και στο β η f παρουσιάζει μέγιστο στο $[0,2\pi]$.

Βρείτε το εμβαδόν (ως κάποιο όριο ή αν χρειαστεί και ως δύο όρια) που περικλείεται μεταξύ της C_f και της ή των ασύμπτωτων της. Αν μπορείτε κάντε ένα σχεδιάγραμμα θα βοηθήσει κατά πολύ την διασαφήνιση του τι ακριβώς ζητείται , όπου C_f είναι:

11Α26. $f(x)=\frac{1}{x^2}, x\geq 1$

11Α27. $f(x)=xe^{-x^2/2}$

11Α28. $f(x)=\sqrt{\frac{8-4x}{x}}$

Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις εφαπτόμενες της στα α, β στις παρακάτω περιπτώσεις:

11Α29. $f(x)=-x^2+4x-3$, $\alpha=3$, $\beta=0$

11Α30. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, $\alpha=-3\sqrt{3}$, $\beta=3\sqrt{3}$

11Α31. $f(x)=\eta\mu(2x)$ $x\in[0,\pi/2]$, $\alpha=0$, $\beta=\pi/2$

11Α32. Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f: $f(x)=e^x$, την εφαπτομένη της C_f στο 0 και την $y=e^2$.

11Α33. Έστω $f(x)=\dfrac{3}{9x^2-3x-2}$ $x\geq 1$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την εφαπτομένη της C_f στο 1 και τις ευθείες $x=1, x=2, y=0$.

<u>Β ΟΜΑΔΑ</u>

11Β1. $f(x)=\dfrac{1+x^2}{e^{1/x}}+\dfrac{1-x^3}{xe^{1/x}}$ $\quad a=1, \beta=e$

11Β2. Αν f παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ γνήσια φθίνουσα και θετική να βρείτε $x_0\in(a,b)$ ώστε το εμβαδό που περικλείεται από τις (ε): $y=f(x_0)$ την C_f και την $x=a$ συν το εμβαδό που ορίζεται από την (ε) την C_f και την $x=b$ να είναι ελάχιστο

11Β3. Έστω $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha<0$ και ρίζες ρ_1, ρ_2: $\rho_1<\rho_2$. Αν m=το μέγιστο της y και E το εμβαδόν που περικλείεται από την C_y και τον άξονα xx' δείξτε ότι: $3E=2m(\rho_1-\rho_2)$.

11Β4. Έστω $f(x)=x^\alpha$, $x>0$, $0<\alpha<1$ και η εφαπτόμενη ε της C_f στο $x_0>0$. Να δείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την ε και τον yy' είναι

$$E=\frac{\alpha(1-\alpha)}{2(1+\alpha)}x_0\cdot f(x_0).$$

11Β5. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $y=\ell nx$, $y=-\dfrac{1}{ex}$ και την $x=1$. *

11Β6. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^5 x}, x\in[0,\dfrac{\pi}{2}) \\ a \quad , \quad x=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

α)$α=?$ ώστε f συνεχής στο $[0,π/2]$.

β) Δείξτε ότι: $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^5 x}{\sigma\upsilon\nu^5 x+\eta\mu^5 x} \quad \forall x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$

γ) Υπολογίστε $\int_0^{\pi/2} f(x)dx$.

δ) Βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f, και τους άξονες

11Β7. Βρείτε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από $x=0$, $x=\pi/2$ *και* C_f: $f(x)=\dfrac{1}{1+\eta\mu x}$.

11Β8. Από ένα σημείο Μ της παραβολής $y=x^2$ φέρνουμε κάθετη στην εφαπτομένη της παραβολής που επανατέμνει την παραβολή στο Ν. Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή του εμβαδού του παραβολικού χωρίου που ορίζεται από τα Μ, Ν, και Ο.

11Β9. Αν $f(0)=0$ $f(1)=1$, f γνήσια αύξουσα, $x\in[0,+\infty)$, παραγωγίσιμη ώστε το εμβαδόν που περικλείεται από C_f, $x=x_0$, xx' να είναι το $1/3$ του εμβαδού που περικλείεται από C_f, yy' και $y=f(x_0)$ βρείτε τον τύπο της f.

11Β10. Αν f κοίλη $f(1)=1$, $f(x)>0$ $\forall x\in(0,+\infty)$ και f συνεχής στο $[0,+\infty)$,με $f(0)=0$ τότε να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης όταν: Το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f και οποιαδήποτε χορδή της OA, όπου O η αρχή των αξόνων είναι πάντοτε το ένα τέταρτο του εμβαδού που ορίζεται από την C_f, τον *x'x* και την κατακόρυφη ευθεία από το *A*. (Η *OA* παραμένει πάντοτε κάτω από την C_f).

11B11. Από σημείο *A* της C_f, φέρνουμε εφαπτομένη που κόβει τον *x'x* στο *B*. Αν *Γ* είναι η προβολή του *A* στον *x'x* και το εμβαδόν του τριγώνου *ΑΒΓ* είναι διπλάσιο από το εμβαδόν που ορίζεται από την C_f, τον *x'x* και την ευθεία *AB*, τότε να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης όταν:

$f(0)=0$, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$ στο $[0,+\infty)$

11B12. Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού που περικλείεται από την C_f τον άξονα *y'y* και οποιαδήποτε τμήμα *OA,* όπου *O* η αρχή των αξόνων, είναι σταθερός *2τμ/sec* όταν η τετμημένη του *A* κινείται με σταθερή ταχύτητα *4μ/sec,* τότε να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης όταν: $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f(x)\geq 0$ στο $[0,+\infty)$ και η *OA* παραμένει πάντα κάτω από την C_f.

12 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Α ΟΜΑΔΑ

12A1. Ένα κινητό κινείται ευθύγραμμα με επιτάχυνση *a(t)* όπου

$$a(t)=\begin{cases} 2-6t & ,0\leq t\leq 2 \\ -12+t & ,2\leq t\leq 12 \\ 0 & ,12\leq t \end{cases}$$

. Αν αρχικά (*t=0*) η ταχύτητα του κινητού ήταν *0* και η μετατόπισή του από την αρχή του άξονα επίσης *0,* βρείτε τους τύπους που δίνουν την ταχύτητα, την μετατόπιση και το διάστημα.. Μονάδες S.I

12A2. Ένα μη γραμμικό ελατήριο έχει «σταθερά» *κ* που δίνεται από την σχέση $\kappa=3x^2+5$ *Nt/m,* όπου *x* είναι η συσπείρωση από το φυσικό μήκος. Να υπολογίσετε το έργο που πρέπει να του προσφέρουμε ώστε να συσπειρωθεί α)από *0* έως *0,2m* και β)από *0,2m* έως *0,4m*.

12Α3. Σε μια ευθύγραμμη κίνηση η επιτάχυνση a και η ταχύτητα υ συνδέονται μέσω της σχέσης $a=k-\beta\upsilon$ όπου k , β θετικές σταθερές. Αν η αρχική ταχύτητα του κινητού ήταν υ_0, t η διάρκεια κίνησης και x η μετατόπιση του να δείξετε ότι: $\upsilon(t)=\upsilon_0+kt-\beta x(t)$.

12Α4. Η ροπή M ενός κινητήρα είναι ανάλογη της ρίζας των στροφών N όταν $0\leq N\leq N_0$. με σταθερά αναλογίας λ. Σε αυτή την περιοχή στροφών οι στροφές είναι ανάλογες της παροχής καύσιμου *Π Kg/sec*. Βρείτε το έργο που καταναλώνει ο κινητήρας με σταθερή παροχή για να φθάσει τις N_0 στροφές. (Ισχύς = ροπή x γωνιακή ταχύτητα)

Β ΟΜΑΔΑ

12Β1. Σε μια ευθύγραμμη κίνηση η συνισταμένη δύναμη F αντιτίθεται στην ταχύτητα και είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας. Αν η μάζα του κινητού είναι $m=1Kgr$, η αρχική ταχύτητα $\upsilon_0=20m/sec$ και αρχικά η τιμή της F είναι $F_0=40Nt$, να βρείτε το διάστημα που θα έχει διανύσει το κινητό όταν η ταχύτητα γίνει η μισή της αρχικής. (Να δείξετε πρώτα ότι ισχύει $a=-\upsilon\dfrac{d\upsilon}{dx}$ και να διατυπώσετε κατάλληλη εξίσωση)

12Β2. Σε ένα οριζόντιο επίπεδο που παρουσιάζει συντελεστή τριβής n σέρνουμε ένα παγάκι με σταθερή ταχύτητα υ_0 που λιώνει γιατί όλη η θερμότητα που αναπτύσσεται λόγω του έργου τριβής μεταδίδεται στο παγάκι με σταθερή θερμοκρασία Αν η αρχική μάζα του πάγου είναι m_0 δείξτε ότι μετά από χρόνο t και πριν λιώσει ολόκληρο, η μάζα του θα δίνεται από τον τύπο $m=m_0e^{-\kappa t}$, όπου κ μια σταθερά. ($Q_{\theta\varepsilon\rho\mu\iota\kappa\acute{o}}=m\cdot c\cdot \Delta\theta$)

12Β3. Ένα ημισφαίριο είναι γεμάτο νερό και η οριζόντια βάση του βρίσκεται στο άνω μέρος. Ανοίγουμε μια τρύπα στο κατώτατο σημείο εμβαδού S_0. Η ταχύτητα εκροής υ είναι: $\upsilon=\sqrt{2gh}$ όπου h η υπερκείμενη στήλη υγρού. Αν η ακτίνα του ημισφαιρίου είναι R_0 βρείτε σε πόσο χρόνο θα αδειάσει το ημισφαίριο.

12Β4. Στην ειδική σχετικότητα ορίζεται η ορμή J ενός κινούμενου σωματιδίου ως $J=m\upsilon$ όπου υ η ταχύτητα του και $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$, m_0=μάζα ηρεμίας και c η ταχύτητα του φωτός. Η δύναμη F ορίζεται από την σχέση $F=\dfrac{dJ}{dt}$, και έργο της F, πάντα για μονοδιάστατη κίνηση, το $W=\int_0^x F dx$. Δείξτε ότι από $\upsilon=0$ έως $\upsilon=\upsilon_0<c$ το έργο δίνεται από την σχέση: $W=\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\upsilon_0^2/c^2}}-m_0c^2$ (Μην ξεχνάτε τον κανόνα της αλυσίδας).

12Β5. Ένα κυλινδρικό σύρμα μάζας m, ειδικής θερμότητας c και αντίστασης R_0 στους 0^oC συνδέεται με πηγή σταθερής τάσης V_0. Ένα ποσοστό $\lambda\%$ της ενέργειας που προσφέρει η πηγή απορροφάται από το σύρμα και αυξάνει την θερμοκρασία του. Να βρείτε τον τύπο που συνδέει την θερμοκρασία του σύρματος με τον χρόνο. Για $t=0$ θερμοκρασία σύρματος είναι θ_0.

Ε. ΓΕΝΙΚΕΣ

ΘΕΜΑΤΑ

ΜΕ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

ΜΕ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΜΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΓΕΝΙΚΕΣ

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1

Έστω $g : A \to A = [-a, a]$, $a > 0$, $g(A) = A$ μια συνεχής συνάρτηση.

1. Να δείξετε ότι για κάθε $y \in A$ η εξίσωση $g(-x) = y$ έχει μία τουλάχιστον λύση.
2. Να δείξετε ότι υπάρχει x_0 στο A : $g(x_0)=x_0$
3. Να δείξετε ότι σύνολο τιμών της $g(-x)$ είναι το A
4. Θέτουμε $w(x)=g(x)+g(-x)$. Να δείξετε ότι w άρτια
5. Να δείξετε ότι η w δεν μπορεί να έχει σταθερό πρόσημο.
6. Να δείξετε ότι $w(A) \subseteq [-2a, 2a]$ και βρείτε μια περίπτωση : $w(A) = [-2a, 2a]$
7. Να βρείτε το MAX και το MIN της g.
8. Έστω τώρα και μία ακόμη συνεχής συνάρτηση $f : A \to A$ περιττή. Αν η g είναι γνήσια μονότονη στο A να βρείτε τις θέσεις στις οποίες η g παρουσιάζει τα ακρότατά της και να δείξετε ότι η εξίσωση $f(g(x))+g(x)+f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση.
9. Να δείξετε και πάλι ότι η εξίσωση $f(g(x))+g(x)+f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση χωρίς η g να είναι μονότονη.
10. Η εξίσωση $g(f(x))+f(x)=0$ έχει πάντοτε λύση ;

ΘΕΜΑ 2

Έστω ότι : $f(f(x)) + f(x) = x + c$ για κάθε x στο R , $f(R)=R$

1. Δείξτε ότι $f: 1\text{-}1$
2. Δείξτε ότι $f(c)=c$
3. Αν $f(a)=b$ δείξτε ότι : $f(b)=a-b+c$

   Υποθέστε τώρα ότι f συνεχής
4. Δείξτε ότι f γνήσια μονότονη
5. Αν $a<b$ και $c<2b-a$ δείξτε ότι : f γνήσια φθίνουσα
6. Δείξτε ότι : $a<c$

ΘΕΜΑ 3

1. Να δείξετε ότι: $\dfrac{1}{1+x} < x^2 - x + 1 \quad , \quad \forall x > 0$
2. Να δείξετε ότι: $ln(1+x) < x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} \quad , \ \forall x > 0$
3. Να δείξετε ότι:

   $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x} < 1 + x + x^2 + 2x^3 \quad , \quad \forall x \in (0, \frac{1}{2})$$
4. Να δείξετε ότι: $-ln(1-x) < x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{2} \quad , \quad \forall x \in (0, \dfrac{1}{2})$
5. Να συμπεράνετε ότι: $ln(\dfrac{1+x}{1-x}) < 2(x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4}) \quad , \quad \forall x \in (0, \dfrac{1}{2})$
6. Να δείξετε ότι: $ln 2 < 0.7$

ΘΕΜΑ 4

1. Αν $f''(x)>0 \quad \forall x \in R$ τότε οποιαδήποτε «χορδή» ΑΒ της C_f βρίσκεται «επάνω» από το αντίστοιχο τμήμα της C_f .

2. Δείξτε ότι : $f(a+b-x)+f(x) \geq 2f(\frac{a+b}{2}) \quad \forall x \in [a,b]$

3. Δείξτε ότι : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(a+b-t)dt$

4. Δείξτε ότι : $(b-a)f(\frac{a+b}{2}) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$

ΘΕΜΑ 5

Έστω ότι : $f(x)=e^{f'(x)} \quad \forall x \in [a,b] \quad , \quad f(a)=f(b)=1$

1. Δείξτε ότι : f δύο φορές παραγωγίσιμη.

2. Δείξτε ότι : $f'(x)=f(x)f''(x)$

3. Δείξτε ότι οποιαδήποτε συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ δεν μπορεί να έχει ταυτόχρονα στο ίδιο σημείο ακρότατο και καμπή.

4. Βρείτε τον τύπο της f . (Δεχθείτε ότι αν η f είναι σταθερή σε $U(x_0,\delta) \cap [a,b]$ για οποιοδήποτε $x_0 \in [a,b]$ τότε η f είναι σταθερή στο $[a,b]$)

ΘΕΜΑ 6

Έστω $f:[1,+\infty) \to R \; : f(1)=3 \; , \; x^4 f'(x)=f^2(x)$

1. Να δείξετε ότι η f είναι αύξουσα.

2. Να δείξετε ότι $f(x) \geq 3, \forall x \in [1,+\infty)$

3. Να βρείτε τον τύπο της f.

4. Αν Ω είναι το χωρίο που ορίζεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=3$ να βρεθεί ευθεία $x=m$ που να χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία..

ΘΕΜΑ 7

Έστω συνάρτηση f ώστε να ισχύουν: $f(0)=f(4)=2-f(2)=0$ και επιπλέον είναι

$0 > f''(x) \geq -1 \ , \ \forall x \in [0,4]$

1. Να δείξετε ότι $f(x) > 0 \ , \ \forall x \in (0,4)$

2. Να δείξετε ότι $f'(0) \leq 2 \ , \ f'(4) \geq -2$

3. Αν $g(x) = \frac{1}{2}x(4-x)$ να δείξετε ότι $g(0)=g(4)=2-g(2)=0$, $g'(0)=2$, $g'(4)=-2$ και $g''(x)=-1$ στο $[0,4]$

4. Να θέσετε $h(x)=f(x)-g(x)$ και να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (0,2) \ , \ \xi_2 \in (2,4) : h'(\xi_1)= h'(\xi_2)=0$

5. Να δείξετε ότι h' αύξουσα και έτσι δείξτε ότι $h'(x)=0$ στο $[\xi_1,\xi_2]$

6. Να δείξετε ότι και η $h(x)=0$ στο $[\xi_1,\xi_2]$

7. Να δείξετε ότι h φθίνουσα στο $[0, \xi_1]$ και αύξουσα στο $[\xi_2,4]$

8. Να δείξετε έτσι ότι η h είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f.

ΘΕΜΑ 8

Έστω $f(x) = 2^{x+1} - x^2 - x - 2 \ , \ x \in R$

1. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$

2. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία..

3. Να βρεθεί το πρόσημο της f.

4. Να γίνει η γραφική παράσταση των:

$g(x)=2^{x+1}$, $h(x)=x^2+x+2$, $x\in R$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

5. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις g,h.

ΘΕΜΑ 9

Έστω $f'(x)=\dfrac{2}{1+e^{f(x)}}$ $\forall x\in R$, $f'(0)=1$

1. Μελετείστε την μονοτονία της f.

2. Λύστε την εξίσωση $f(x)=0$

3. Δείξτε ότι η f στρέφει τα κοίλα κάτω και ότι στην γραφική παράσταση της f δεν υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία.

4. Δείξτε ότι η $y=x$ είναι εφαπτομένη της f στο σημείο 0

5. Δείξτε ότι $f(x)\le x$,$\forall x\in R$

6. Δείξτε ότι $f(x)+e^{f(x)}=2x+1$, $\forall x\in R$

7. Δείξτε ότι $f(x)<2x+1$, $\forall x\in R$

8. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

9. Δείξτε ότι $f(x)\ge ln(x+1)$, $\forall x>-1$

10. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

11. Βρείτε το σύνολο τιμών της f.

12. Δείξτε ότι η f δεν έχει κατακόρυφες ασυμπτώτους.

13. Βρείτε την ασύμπτωτο της f στο $-\infty$

14. Δείξτε ότι η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτο στο $+\infty$

15. Δείξτε ότι $f(\dfrac{e}{2})=1$

16. Υπολογίστε το : $\int_0^{e/2} f(t)dt$ χρησιμοποιώντας την συμμετρία των f, f^{-1}

ΘΕΜΑ 10

Αν $f'(x) \le \dfrac{|x|}{1+|x|} \quad \forall x \in R$ τότε

1. Δείξτε ότι $f(x) \le x - ln(1+x) + f(0) \quad \forall x \ge 0$
2. Δείξτε ότι $f(x) \ge x + ln(1-x) + f(0) \quad \forall x \le 0$
3. Η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μοναδική λύση

   Αν τώρα η g' είναι συνεχής και

ισχύει $g'(x) \ge \dfrac{e^x}{1+e^x} + 4 \quad \forall x \in R$ Τότε

4. Υπολογίστε το $\int_0^x \dfrac{e^t}{1+e^t}dt$
5. Δείξτε ότι η g έχει μοναδική ρίζα

ΘΕΜΑ 11

1. Αν $f'(x)>0$, δείξτε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$
2. Να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία της προηγούμενης σχέσης.
3. Να υπολογίσετε το άθροισμα : $\int_1^e e^{t^2}dt + \int_e^{e^{e^2}} \sqrt{ln\,t}\,dt$
4. Αν τώρα g είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση σε όλο το R και ισχύει $g^3(x)+g(x)+2=x$ σε όλο το R τότε να λύσετε την εξίσωση $g(x)=0$
5. Να δείξετε ότι $g^{-1}(x)=x^3+x+2$
6. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_2^4 g(t)dt$

ΘΕΜΑ 12

Έστω E_ν συναρτήσεις που ορίζονται στο R από τις παρακάτω σχέσεις:

$$E_0(x)=1, E_{\nu+1}(x)=1+\int_0^x E_\nu(t)dt, \nu\in N$$

1. Να βρείτε τον τύπο όλων των E_ν συναρτήσει των ν , x
2. Να δείξετε ότι τα πολυώνυμα : $E_{\nu+1}(x)$, $E_\nu(x)$ δεν είναι δυνατόν να έχουν κοινή ρίζα..
3. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ ώστε $E_{2\nu-1}(\xi)=0$ για κάθε ν στο N.*
4. Να συμπεράνετε ότι $E_{2\nu}(\xi)>0$
5. Τώρα να δείξετε επαγωγικά ότι $E_{2\nu}(x)>0$ για κάθε ν στο N και x στο R.
6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $E_\nu(x)=0$ είναι αδύνατη αν ν άρτιος ενώ έχει μοναδική λύση αν ν περιττός.

ΘΕΜΑ 13

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$:

$$2f(x)+f^2(x)=2\int_0^x e^{-f(t)}dt \quad \text{και } f(0)=0$$

1. Να δείξετε ότι : $1+f(x)\neq 0$, $f\uparrow$ και $f(x)>0 \quad \forall x\in(0,+\infty)$
2. Να δείξετε ότι $f(x)e^{f(x)}=x$ στο $[0,+\infty)$
3. Αφού δείξετε ότι $lny<y$, $\forall y>0$ δείξτε ότι $2f(x)>lnx$, $\forall x>0$
4. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ καθώς και το σύνολο τιμών της f.
5. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y=x$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο 0.

6. Να δείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα κάτω και επιπλέον ισχύει $f(x) \le x, \forall x \ge 0$

7. Αφού εξηγήσετε γιατί η f είναι αντιστρέψιμη, να βρείτε τον τύπο της $f^{-1}(x)$.

8. Να κατασκευάσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f.

9. Να υπολογίσετε τα: $f(e), f(e^{e+1})$.

10. Να βρείτε την τιμή του αθροίσματος: $\int_0^e f(t)dt + \int_0^1 f^{-1}(t)dt$

11. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου $E(\lambda)$ που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της στο 0 και την ευθεία $x=\lambda\ e^{\lambda} > 0$ *

12. Να βρείτε το : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$

ΘΕΜΑ 14

Έστω η συνάρτηση f με: $f(x) = \begin{cases} \int_0^x e^t dt, x \ge 0 \\ \int_0^x \frac{2+\eta\mu\, t}{t-1} dt, x < 0 \end{cases}$

1. Να μελετήσετε την f ως προς την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα..

2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία .

3. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

5. Να δείξετε ότι για κάθε x στο R^* υπάρχει μοναδικό y στο R^* με $xy<0$: $f(x)=f(y)$.

ΘΕΜΑ 15

Εστω ότι f, g παραγωγίσιμες στο R και $\int_1^x f(t)dt + \int_x^1 g(t)dt = (x-1)^2 \quad \forall x \in R$

Επίσης ισχύει: $f(a) = f(b) = 0 \;\; , \;\; a < 1 < b$

1. Δείξτε ότι η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (a,b).
2. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(a,b) : g'(\xi)=-2$
3. Αν επιπλέον η g είναι κυρτή δείξτε ότι και η f είναι κυρτή .
4. Δείξτε ακόμη ότι η f παρουσιάζει ένα μόνον ελάχιστο στο ξ.
5. Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f, C_g και τον άξονα $y'y$.

ΘΕΜΑ 16

1. Αν $P(x)=a_n x^n+\ldots+a_1 x+a_0$, $n \in N$, $a_n \neq 0$ δείξτε ότι $P^{(n)}(x)=a_n n!$
2. Βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{e^x}$
3. Αν $P'(x)<P(x) \;\; \forall x \in R$ και $f(x)=e^{-x}P(x)$ μελετήστε την μονοτονία της f.
4. Βρείτε το σύνολο τιμών της f.
5. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει καμία πραγματική ρίζα.
6. Αν ισχύουν όλα τα προηγούμενα εξετάστε αν υπάρχουν σταθερές a,b ώστε να ισχύει : $P(x) = a + \int_b^x (t^2+1)^k\, dt \quad \forall x \in R \;\; , \;\; k \in N^*$

ΘΕΜΑ 17

1. Να δειχθεί ότι $t - \ell nt \geq 1 \ \forall t > 0$

2. Έστω $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t - lnt} dt$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

3. Να μελετήσετε την μονοτονία της f

4. Να δείξετε ότι $0<f(x) \leq x$ για κάθε $x>0$

5. Να δείξετε ότι $ln 2 < f(x)$ για κάθε $x \geq 1$

6. Να δείξετε ότι η f δεν έχει κατακόρυφες ασυμπτώτους.

ΘΕΜΑ 18

Έστω $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{1+t^2} dt$

1. Μελετήστε την f ως προς την μονοτονία .

2. Βρείτε τις θέσεις τοπικών ακροτάτων .

3. Βρείτε τις ρίζες της .

4. Η f έχει σημεία καμπής?

5. Βρείτε το $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

6. Δείξτε ότι η f είναι περιττή ,

7. Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $t=εφu$ δείξτε ότι:

   $$εφ(f(x)) = \frac{x}{1+2x^2}$$

8. Εξηγήστε γιατί το σύνολο τιμών της f είναι διάστημα που

   περιέχει το 0 και τελικά δείξτε ότι: $-\frac{\pi}{6} < f(x) < \frac{\pi}{6}$

ΘΕΜΑ 19

Έστω $f : R \to R$ παραγωγίσιμη συνάρτηση :

$\int_x^y f(t)dt \le f'(x) - f'(y)\ \ \forall x, y \in R$ και $f(0) > 0$

1. Δείξτε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x) = -f(x), \forall x \in R$

2. Δείξτε ότι η συνάρτηση : $\left(f(x)\right)^2 + \left(f'(x)\right)^2 = a^2 > 0$ όπου α μια σταθερά

3. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)$

4. Δείξτε ότι η f τέμνει την ευθεία με εξίσωση $y=x$

5. Δείξτε ότι η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα ξ

6. Αν δοθεί η f δείξτε ότι μπορούμε να βρούμε αριθμούς A , φ : $f(0)=A\eta\mu\varphi$ $f'(0)=A\sigma\upsilon\nu\varphi$ και έτσι βρείτε τον τύπο της f . Θα ισχύει τότε $A=\alpha$?

ΘΕΜΑ 20

Έστω $f(x) = \int_1^x \dfrac{\ln t}{1+t}dt$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

3. Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό $x>1$ ισχύει $f(x)>f(1/x)$

4. Να δείξετε ότι για κάθε θετικό πραγματικό x ισχύει $f(x) + f(1/x) = (1/2)\ln^2 x$

5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

6. Για κάθε $\alpha \in (0,1)$ να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $b>1$ ώστε $f(a)=f(b)$

ΘΕΜΑ 21

Θέτουμε :

$$f(x)=\int_0^a e^{-t}t^{x-1}dt \quad , \quad a>0 \ , \ x\in[1,+\infty)$$

1. Για $\alpha=1$ να δείξετε ότι : η f είναι φθίνουσα
2. Για $\alpha=1$ να δείξετε ότι : $f'(x+1)=x f'(x)+f(x)$
3. Για $\alpha=1$ αφού δείξετε ότι $1-t\le e^{-t}\le 1 \ , \ \forall t\ge 0$ να δείξετε ότι :

   $$\frac{1}{x^2+x}\le f(x)\le\frac{1}{x}$$
4. Για $\alpha=1$ να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
5. Για $\alpha>0$ να δείξετε ότι : $f(n+1)=n f(n)-\dfrac{a^n}{e^a} \ , \ \forall n\in N^*$
6. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{a\to+\infty}\dfrac{a^n}{e^a}$
7. Ονομάζουμε με $\Gamma(n)$ το όριο : $\Gamma(n)=\lim\limits_{a\to+\infty} f(n) \ , \ n\in N^*$.Να

   δείξετε ότι $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$ και να συμπεράνετε ότι :

   $\Gamma(n+1)=1.2.3.\,.\,.\,n=n!$
8. Να γενικεύσετε το ερώτημα 5) για πραγματικούς
9. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{a\to+\infty}\dfrac{a^x}{e^a} \ , \ x\ge 1$
10. Ονομάζουμε με $\Gamma(x)$ το όριο : $\Gamma(x)=\lim\limits_{a\to+\infty} f(x) \ , \ x\ge 1$ το οποίο

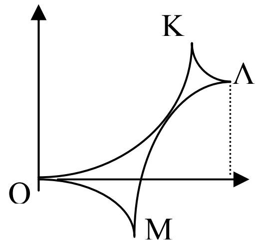
    ξέρουμε ότι είναι πραγματικός αριθμός. Να δείξετε ότι

    $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

    (Μόλις γενικεύσατε την έννοια του παραγοντικού στους πραγματικούς!!! Το Γ(x) είναι μια διάσημη συνάρτηση στα μαθηματικά και ονομάζεται Gamma function)

ΘΕΜΑ 22

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $A(x)=2x^2$, $B(x)=2x^2-4x+3$, $C(x)=-2x^2+4x-1$,$D(x)=-2x^2$, $x\in[0,1]$.Ονομάζουμε με K,Λ,M τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των A και B,B και C,C και D αντιστοίχως όπως στο σχήμα:



Να βρεθούν οι συντεταγμένες των K,Λ,M.

2. Να βρεθεί το εμβαδό του καμπυλόγραμμου χωρίου *(ΟΚΛΜ)*.
3. Να δείξετε ότι οι $A(x)$, $C(x)$ τέμνονται μόνο σε ένα σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.
4. Αν για την συνάρτηση f ισχύουν : $|f''(x)|\le 4 \ \ \forall x\in[0,1]$ $f(0)=0$, $f(1)=1$,

   $f'(0)=0$, $f'(1)=0$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f
βρίσκεται εντός του

   χωρίου *(ΟΚΛΜ)*.
5. Δείξτε ότι $f(1/2)=1/2$
6. Δείξτε ότι $-\dfrac{1}{8}\le f(x)\le\dfrac{9}{8}$
7. Με την βοήθεια του σχήματος βρείτε τον τύπο μιας h ώστε το $\int_0^1 h(t)dt$ να γίνεται μέγιστο. Θεωρείστε ότι $h:[0,1]\to R$ και ότι η h βρίσκεται εντός του χωρίου *(ΟΚΛΜ)*. Είναι δυνατόν $h=f$ στο $[0,1]$;

8. Κινητό κινείται πάνω σε άξονα. Την στιγμή $t=0$ βρίσκεται στην αρχή του άξονα και έχει ταχύτητα $0\ m/sec$. Μετά από $1sec$ η μετατόπισή του είναι $1m$ και η ταχύτητα του $0\ m/sec$. Να δείξετε ότι κατά την διάρκεια της κίνησής του υπάρχει μια χρονική στιγμή t_0 στην οποία το μέτρο της επιτάχυνσης του να είναι τουλάχιστον $4\ m/sec^2$.

ΘΕΜΑ 23

Έστω η συνάρτηση f με: $f(x)f''(x)=A\neq 0 \ \ \forall x\in R$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο 1, το 1 τότε :

1. Να δείξετε ότι $f(x)>0$ στο R

2. Να δείξετε ότι $A>0$

3. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

4. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)$ και βρείτε το σύνολο τιμών της f

5. Να αποδείξετε ότι : $f'(x)=\begin{cases}\sqrt{2A\ln(f(x))}\ , \ x\geq 1\\ -\sqrt{2A\ln(f(x))}\ , \ x<1\end{cases}$

6. Να υπολογίσετε τα όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$

7. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία $y=x$ σε δυο σημεία ακριβώς

8. Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

9. Να δείξετε ότι : $\sqrt{2A}(x-1)=2\int_0^{\sqrt{\ln(f(x))}} e^{t^2}\,dt\ ,\ \forall x\geq 1$

10. Αν $w(x)w''(x)=B\neq 0\ \ \forall x\in R\ ,\ w(1)=1\ ,\ w'(1)=0$ τότε να δείξετε την ισοδυναμία

$B>A\Leftrightarrow w(x)\geq f(x)$, στο διάστημα $[1,+\infty)$

ΘΕΜΑ 24

1. ΄Εστω συνάρτηση $f : f''(x)=p(x)f(x)$, $p(x)>0$ και συνεχής στο R. Τότε αν η f έχει δυο ρίζες a ,b δείξτε ότι : $f(x)=0 \ \forall x \in [a,b]$

   (Υποθέστε ότι η f έχει μια τουλάχιστον θετική τιμή, εξασφαλίστε ακρότατο στο $[a,b]$ και καταλήξτε σε άτοπο χρησιμοποιώντας το κριτήριο της β΄ παραγώγου)
2. Τώρα υποθέστε ότι : η f δεν είναι σταθερή σε κανένα διάστημα , $f(a)=0$, $x_0>a$, $f(x_0)>0$ και δείξτε ότι : $f(x)>0 \ \ \forall x \in (a,+\infty)$
3. Συμπεράνετε ότι : f κυρτή $\forall x \in (a,+\infty)$
4. Να αποδείξετε ότι : $f'(a) \geq 0$ και f γνήσια αύξουσα $\forall x \in (a,+\infty)$
5. Δείξτε ότι : η f βρίσκεται κάτω από τον άξονα χ`χ και στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα $(-\infty,a)$. Εξετάστε στη συνέχεια αν το σημείο $(a,0)$ είναι σημείο καμπής της f.
6. Δείξτε ότι : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και βρείτε το σύνολο τιμών της f.
7. Δείξτε ότι αν $f'''(x)>0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = +\infty$
8. $\forall x \in (a,+\infty)$ δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $w>a$: $f'(w) = \dfrac{f(x)}{x-a}$
9. Αν $A(a,0)$, $B(x,f(x))$, $x>a$, δείξτε ότι η κλίση της χορδής AB είναι μεγαλύτερη από την κλίση της εφαπτομένης της f στο A.
10. Αποδείξτε ότι στην γραφική παράσταση της f υπάρχουν πάντοτε 3 συνευθειακά σημεία.
11. Δείξτε ότι : $\displaystyle\int_k^m p(x)dx = \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]_k^m + \int_k^m \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \quad \forall m > k > a$
12. Αν $f'(k).f(m)=f'(m).f(k)$ δείξτε ότι υπάρχει ξ με $k<\xi<m$:

   $\sqrt{p(\xi)} \geq \dfrac{\ln f(m) - \ln f(k)}{m-k}$

ΘΕΜΑ 25

Αν $f : R \to R, f''(x) = f(x), \forall x \in R$

1. Να δείξετε ότι η $\left(f'(x)\right)^2 - \left(f(x)\right)^2$ είναι σταθερή στο R

2. Να δείξετε ότι $f(x) = \dfrac{f(0)+f'(0)}{2}e^{x} + \dfrac{f(0)-f'(0)}{2}e^{-x}$

Θέτουμε $a = \dfrac{f(0)+f'(0)}{2}$, $b = \dfrac{f(0)-f'(0)}{2}$

3. Αν $ab \geq 0$,$|a|+|b| \neq 0$ δείξτε ότι η συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο, είναι είτε κοίλη είτε κυρτή

4. Αν $ab > 0$ τότε, έχει ακριβώς ένα ακρότατο, έστω στο r, ίσα όρια στα $\pm\infty$ και είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $x=r$

5. Αν $ab < 0$ έχει μοναδική ρίζα. Σχεδιάστε τότε μια πρόχειρη γραφική παράσταση διακρίνοντας δυο περιπτώσεις

6. Εξηγείστε γιατί μπορούμε να έχουμε $f(x) = f(0)g(x) + f'(0)h(x)$ όπου οι h, g να ικανοποιούν την αρχική σχέση της εκφώνησης

7. Αν $w''(x) = k^2 w(x)$, $k > 0$ να θέσετε $x = \dfrac{y}{k}$ να αποδείξετε ότι

$\dfrac{d^2 w}{d^2 x} = k^2 \dfrac{d^2 w}{d^2 y}$ και να βρείτε τον τύπο της w

ΘΕΜΑ 26

1)Δείξτε ότι ότι υπάρχει συνάρτηση

$f : (0,+\infty) \to (0,1) : 4f^3(x) = 2xf(x) = x+1, x > 0$

2)Δείξτε ότι $\dfrac{x+1}{2x+4} < f(x) < \dfrac{x+1}{2x}$ και ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$

3)Δείξτε ότι $|f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{2x_0}|x-x_0|, \forall x_0>0$ και ότι f

συνεχής

4)Δείξτε ότι $f(x)>\frac{1}{2}, \forall x \in (0,+\infty)$

5)Δείξτε ότι f παραγωγίσιμη και γνήσια φθίνουσα

6)Δείξτε ότι $f((0,+\infty))=(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt[3]{4}})$

7)Βρείτε την f^{-1}

ΘΕΜΑ 27

1. Α) Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της $f(t)=\frac{\ln t}{t}$.

Β) Για ποιους αριθμούς *x,y* ισχύει η ιδιότητα : $\forall x \in A \cap D_f$ $\exists$ μοναδικό $y \in A \cap D_f$ τέτοιο ώστε *f(x)=f(y)?* Βρείτε το σύνολο αυτό και αποδείξτε τον προηγούμενο ισχυρισμό

Στη συνέχεια δεχθείτε ότι το *y* είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του *x* με τύπο *y=y(x)* . Παρακάτω σας ζητείται να ασχοληθείτε με μερικά χαρακτηριστικά αυτής της συνάρτησης. Έτσι αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της:

Γ1) Δείξτε ότι η *y* είναι *1-1.*

Γ2) Δείξτε ότι η *y* είναι γνήσια φθίνουσα.

Γ3) Βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ4) Λύστε την εξίσωση : *y(x)=e.*

Γ5) Βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της *y* στην θέση *x=e.*

Γ6) Εξετάστε αν η *y* έχει ασύμπτωτους.

ΜΕ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

1. Να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός $z : Rez>0$, $Imz=1$ και επιπλέον $z^2 + \frac{1}{z} \in R$

2. Έστω $K=\left|z^3 - z + 2\right|$, όπου $z \in \mathbb{C}$, με $|z| = 1$. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της παράστασης K.

3. Δίνονται οι μιγαδικοί z και u, με $|z| = 1, z = x + iy, x > 0, y \neq \pm 1$ και $u = \bar{z}^2 + iz$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου του u ως προς το $Im(z)$ Να βρεθεί ο μιγαδικός z,για τον οποίο το $|u|$ γίνεται μέγιστο.

4. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες στο (α,b) και επιπλέον $g(x).g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$.Αν $z_1=f(\alpha)+i.g(\beta)$, $z_2=g(\alpha)+i.f(\beta)$ και ισχύει : $\left|z_1 + \bar{z}_2\right| = \left|\bar{z}_1 - z_2\right|$ τότε να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο (α,β) τέτοιο ώστε : $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = 0$

5. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν $f(x) + f'(x)=0$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0)=i^{-2000}$. Να βρείτε την καμπύλη στην οποία κινείται η εικόνα Μ του μιγαδικού

$z = f(\alpha)+f(-\alpha)\cdot i,\ \alpha \in R\mathbb{R}$.

6. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμες στο (α, β) και $g(x)\cdot g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Έστω οι μιγαδικοί $w = 2f(\alpha)-ig(\beta)$ και $z = g(\alpha)-2if(\beta)$ για τους οποίους ισχύει: $\left|2w + \bar{z}\right| = \left|2\bar{w} - z\right|$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ώστε:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} + \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = 0.$$

7. Α) Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει η ισότητα:

$\left||z_1|-|z_2|\right|=|z_1+z_2|$. Να δειχθεί ότι: $Im\left(z_1\cdot\overline{z}_2\right)=0$.

Β) Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z_1 = f(\alpha)+i\cdot f(\beta)$ και $z_2 = f(\beta)+i\cdot f(\alpha)$, για τους οποίους ισχύει η ισότητα του προηγουμένου ερωτήματος και $f(\beta)+\cdot f(\alpha)\neq 0$. Να δειχθεί ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in(\alpha, \beta)$, με $\xi_1\neq\xi_2$, ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.

8. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = 1+i\alpha^{\eta\mu x}$, $\alpha>0$ και $w = 1+\eta\mu x+i$, για τους οποίους ισχύει: $|2w+\overline{z}|\leq|2w-\overline{z}|$. Να δειχθεί ότι $\alpha = e$.

9. Α) Να δειχθεί ότι για κάθε ζεύγος μιγαδικών z_1, z_2 ισχύει:

$|z_1|^2+|z_2|^2=|z_1-z_2|^2$ αν και μόνο αν $Re\left(z_1\cdot\overline{z}_2\right)=0$.

Β) Έστω μία συνάρτηση $f: [\alpha, \beta]\to R$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha^2+i\cdot f(\alpha)$, $w = f(\beta)+i\cdot\beta^2$, $\alpha\cdot\beta\neq 0$. Αν $|w|^2+|z|^2=|w-z|^2$ Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

10. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta]\to R$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha+\beta i$, $z_1 = \alpha+i\cdot f(\alpha)$, $z_2 = \beta+i\cdot f(\beta)$. Αν ισχύει $3\left(z^2-\overline{z}^2\right)-4iz\overline{z}=4i\,Re\left(z_1\cdot\overline{z}_2\right)$, να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $[\alpha, \beta]$.

11. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0,+\infty)\to R$, με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha^2+i\cdot f(\alpha)$,

$z_2=\dfrac{1}{\beta^2}+i\dfrac{1}{f(\beta)}$, $\alpha, \beta>0$. Αν ισχύει: $|z_1+\overline{z}_2|=|z_1-\overline{z}_2|$, Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha, \beta)$ ώστε $\xi\cdot f'(\xi)=2f(\xi)$.

12. $f{:}R\to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη και τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$, $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$, της γραφικής παράστασης, με $\alpha<\beta<\gamma$.

Θέτουμε: $w = z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_3 + z_3\overline{z}_1$, όπου

$z_1 = \alpha+i\cdot f(\alpha), z_2 = \beta+i\cdot f(\beta), z_3 = \gamma+i\cdot f(\gamma)$. Αν $w\in R$, Να δειχθεί ότι :

i) Τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

ii) Υπάρχει $x_0\in R$, τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$.

13. Έστω $z = x+\psi i$, x, ψ στο R και f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, με $f(\alpha)\neq f(\beta)$.

Αν ισχύει: $\left|\dfrac{z-f(\alpha)}{z-f(\beta)}\right| = \left|\dfrac{z+f(\alpha)}{z+f(\beta)}\right| = 1$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση

$f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο (α, β).

14. Έστω $z = x+\psi i$, $x, \psi\in R$ και f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$,

$p(z) = z^3 + f(a)z^2 + f(b)z + 1,\ p(1+i) = 0$ Να δείξετε ότι f η

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (a,b)

15. Έστω $z = a+bi$, $a,b\in R$ και $f(x) = |z|x^3 + |w|x^2 - |z+w|$ Να

δείξετε ότι f η έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[-1,1]$.

16. Έστω $z = x+\psi i$, $x, \psi\in$ αι f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Αν ισχύει,

$|z| = 1,\ z + \dfrac{1}{z} = f(a)\ ,\ z^2 + \dfrac{1}{z^2} = f(b)$ τότε να δείξετε ότι η

εξίσωση: $x^3 f(a) + f(b) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[-1,1]$

17. Έστω $z = a+bi\neq 0$, a, $b\in R$ και f συνεχής στο R. Αν ισχύει

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|zf(x)-3|-3}{x}\in R,\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|zf(x)+1|-1}{x-1}\in R$, Να δείξετε ότι η f

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0,1]$.

18. Έστω $z = x+f(x)i \neq 0$, $x, f(x) \in \mathbb{R}$ $a>0$ και f συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν ισχύει $f(\frac{a}{2}) = \frac{a}{2}, f(\frac{3a}{2}) = -\frac{a}{2}$ και για κάποιο $x_0 \in (0,2a)$ $|z-a| < a$, $|2z-a| \geq a$, $|2z-3a| \geq a$ δείξτε ότι $f(a)=0$

19. Έστω P πολυώνυμο n βαθμού με μιγαδικούς συντελεστές και ρίζες απλές, διαφορετικές μεταξύ τους να ανήκουν όλες στον μοναδιαίο κύκλο. Να δείξετε ότι οι εικόνες των ριζών του $Q(z)=2zP'(z)-nP(z)$ ανήκουν και αυτές όλες στον μοναδιαίο κύκλο.

ΜΕ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1. Έστω δειγματικός χώρος Ω με $\Omega=\{2r / r \in Z, 1 \leq r \leq 50\}$ όπου για κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο ω του Ω είναι

: $P(\omega) = m + \int_{\omega}^{\omega+2} f(t)dt$ με m σταθερά και f συνεχή συνάρτηση.

Να δείξετε ότι υπάρχει κ πραγματικός αριθμός ώστε να ισχύει

: $f(k) = \frac{1-50m}{100}$

2. Έστω συναρτήσεις f,g για τις οποίες ισχύουν

: $f(x) = \begin{cases} x^3 g(x) + ax, x > 0 \\ 2bx, x \leq 0 \end{cases}$ και $|g(x)| \leq K$, $\forall x \in R$. Τα a,b επιλέγονται τυχαία μέσα από τον δειγματικό χώρο Ω όπου $\Omega=\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$.Αν A το ενδεχόμενο η f να είναι συνεχής στο 0 και B το ενδεχόμενο η f να είναι παραγωγίσιμη στο 0 να δείξετε ότι $P(A)=P(B')$.

3. Σε κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο x ενός δειγματικού χώρου $\Omega \subset R$ αντιστοιχίζουμε την πιθανότητα $P(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$. Αν Γ και Δ ενδεχόμενα του Ω για τα οποία ισχύει $P(\Gamma)=P(\alpha)$ και $P(\Delta)=P(\beta)$ όπου $\alpha , \beta \in [1,3]$, τότε να δείξετε ότι τα Γ και Δ δεν μπορεί να είναι ασυμβίβαστα.

4. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^a e^{2a-x}$ $a>0$, $x>0$. Έστω τώρα ο δειγματικός χώρος $K=\{e^{-n} \quad n \in N^*, n \leq 20\}$ Διαλέγουμε στην τύχη ένα στοιχείο του K και το τοποθετούμε στην θέση του α. Να βρεθεί η πιθανότητα το μέγιστο της f να γίνεται ελάχιστο. Αν Ω δειγματικός χώρος και A ενδεχόμενό του και για $\alpha=1$ η εξίσωση $f(x)=e+P(A)$ έχει λύση τότε να βρεθεί η πιθανότητα $P(A)$. Ποιο το Α αν τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα ?

5. Έστω $\Omega=\{1,2,...,100\}$, φ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $P(\kappa)=\varphi(\kappa+1)-\varphi(\kappa)$ $\kappa \in \Omega$ όπου $P(k)$ είναι οι πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του Ω Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi>0$: $\varphi'(\xi)=1/100$

6. Έστω συνάρτηση f με $f(0)=0, f(n)=n>3$ $n \in N^*$ και $f''(x)<0$ στο R

i)Δείξτε ότι $f(x) \geq x$, $\forall x \in [0,n]$

ii)Αν η ευθεία με εξίσωση $y=x+1$ εφάπτεται της C_f τότε $f(x) \leq x+1$

iii)Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{x_1,x_2,...,x_n\} \subset R$.Θεωρούμε τους αριθμούς

$P(x_{k+1})=\int_{k}^{k+1}(f(t)-t)dt$, $k=0,1,...,n-1$ και γνωρίζουμε ότι

$\int_{0}^{n}f(t)dt=1+\frac{n^2}{2}$

Να δείξετε ότι τα $P(x_{k+1})$ μπορούν να θεωρηθούν ως οι πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του Ω.

iv)Εξετάστε αν τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του Ω είναι ισοπίθανα.

7. Αν $A=\{1,2,\ldots,n\}$ διαλέγουμε στην τύχη και με επανατοποθέτηση δυο στοιχεία a,b του A και γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα ώστε να ισχύει $|f(b)-f(a)|\leq|b-a|$ είναι 8% όταν $f(x)=x^2-7x+\ln x$. Να βρείτε το n

ΜΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1. Έστω f,g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το R : $f\,'(x)=g(x)$, $g'(x)=f(x)$,$f^2(1)\neq g^2(1)$ και το σημείο $M(f(x),g(x))$. Να δείξετε ότι το M κινείται σε ισοσκελή υπερβολή.

2. Έστω f συνεχής στο R και ισχύει $f(x)=\left|\vec{a}\,x-\vec{b}\right|$, $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$, $x\in R$.

Αν είναι: $\int_{1}^{x}f(t)dt\geq 2x-2\quad \forall x\in R$ να δείξετε ότι τα διανύσματα είναι ίσα και να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης.

ΓΕΝΙΚΕΣ

Οι παρακάτω δυο ασκήσεις είναι εκτός ύλης πανελληνίων Εξετάσεων ,συνοδεύονται από βοηθητικά ερωτήματα και αφορούν γνωστά *μαθηματικά αποτελέσματα. Σίγουρα όμως είναι απολαυστικές!!*

ΓΕΝ 1

Για να υπολογίσουμε το $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt = \lim_{x\to 0^+}\left\{\int_x^1 \frac{\ln t}{1+t}dt\right\}$ χρειαζόμαστε

πρώτα το άπειρο άθροισμα $r = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots$ Τα παρακάτω

ερωτήματα βοηθούν αυτόν τον σκοπό

Α) Αν η f έχει συνεχή παράγωγο στο $[a,b]$ και $\omega>0$ τότε ισχύει:

$\lim_{\omega\to+\infty}\int_a^b f(t)\eta\mu(\omega t)dt = 0$

Β) Αν $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ τότε η ακολουθία Sn είναι γνήσια αύξουσα και άνω

φραγμένη, άρα θα συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό. Λέμε

τότε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ είναι συγκλίνουσα και γράφουμε $r = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

Αποτέλεσμα που δίνει μετά από πολύ κόπο(*τον οποίο σας*

προτείνουμε να καταβάλετε) ότι $r = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots = \frac{\pi^2}{6}$

αποδείξτε το(*και χαρείτε το)*

Γ) Να υπολογίσουμε τώρα το $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt = \lim_{x\to 0^+}\left\{\int_x^1 \frac{\ln t}{1+t}dt\right\}$!!

ΓΕΝ 2

Έστω συνάρτηση φ με συνεχή 2^η παράγωγο. Να δείξετε ότι η φ'

είναι φραγμένη στο $[\alpha,\beta]$

1. Ονομάζουμε $\alpha_\nu = \int_\alpha^\beta \phi(x)\eta\mu\nu x dx$ Δείξτε ότι η ακολουθία (α_ν)

   είναι μηδενική

2. Θέτουμε $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\phi(x)-\phi(0)}{x}, x\neq 0\\ \phi'(0) \quad , \quad x=0\end{cases}$ Δείξτε ότι g είναι παραγωγίσιμη
3. Δείξτε ότι η g' είναι συνεχής
4. Ονομάζουμε $b_\nu=\int_0^b g(x)\eta\mu\nu x dx$ Δείξτε ότι η ακολουθία (b_ν) είναι μηδενική
5. Δείξτε τώρα ότι $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_0^b \dfrac{\phi(x)}{x}\eta\mu\nu x dx-\phi(0)\int_0^{\nu b}\dfrac{\eta\mu y}{y}dy\right)=0$

   και τροποποιήστε κατάλληλα την ισότητα στην περίπτωση όπου το $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\nu b}\dfrac{\eta\mu y}{y}dy=C\in R$. Μπορείτε να γράψετε τότε ότι

   $\int_0^{+\infty}\dfrac{\eta\mu y}{y}dy=C$
6. Για να δείξουμε ότι το προηγούμενο όριο είναι πραγματικός αριθμός χρησιμοποιήστε το κριτήριο Cauchy ,παραγοντική ολοκλήρωση και ιδιότητες απολύτων τιμών

   (αν δεν τα καταφέρατε θεωρείστε το δεδομένο και προχωρήστε παρακάτω στα επόμενα)

   Για να βρείτε την τιμή του C τώρα
7. Δείξτε ότι αν f συνεχής τότε

$$I_\nu=\int_0^\pi f(x)\frac{\eta\mu(2\nu+1)x}{\eta\mu x}dx=\int_0^{\pi/2}\big(f(x)+f(\pi-x)\big)\frac{\eta\mu(2\nu+1)x}{\eta\mu x}dx$$

8. Να υποθέσετε ότι η f έχει συνεχή 2^{η} παράγωγο και να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει για τις

$$k(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\eta\mu x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}\quad,\quad h(x)=\begin{cases}\big(f(x)+f(\pi-x)\big)\dfrac{x}{\eta\mu x}, x\neq 0\\ f(0)+f(\pi), x=0\end{cases}$$

9. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = C(f(0)+f(\pi))$

10. Αποδείξτε ότι $\dfrac{\eta\mu(2\nu+1)x}{\eta\mu x}=1+2\sum\limits_{k=1}^{\nu}\sigma\upsilon\nu 2kx$

11. Υπολογίστε το $\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu 2kx dx,\ k\in N$

12. Δείξτε ότι $\int_0^{\pi}\dfrac{\eta\mu(2\nu+1)x}{\eta\mu x}dx=\pi$

13. Επιλέξτε $f(x)=1$ και συμπεράνετε ότι $C=\pi/2$. Τελικά δείξτε ότι

$$\lim_{\nu\to+\infty}\int_0^{\pi} f(x)\frac{\eta\mu(2\nu+1)x}{\eta\mu x}dx=\frac{\pi}{2}\big(f(0)+f(\pi)\big)$$