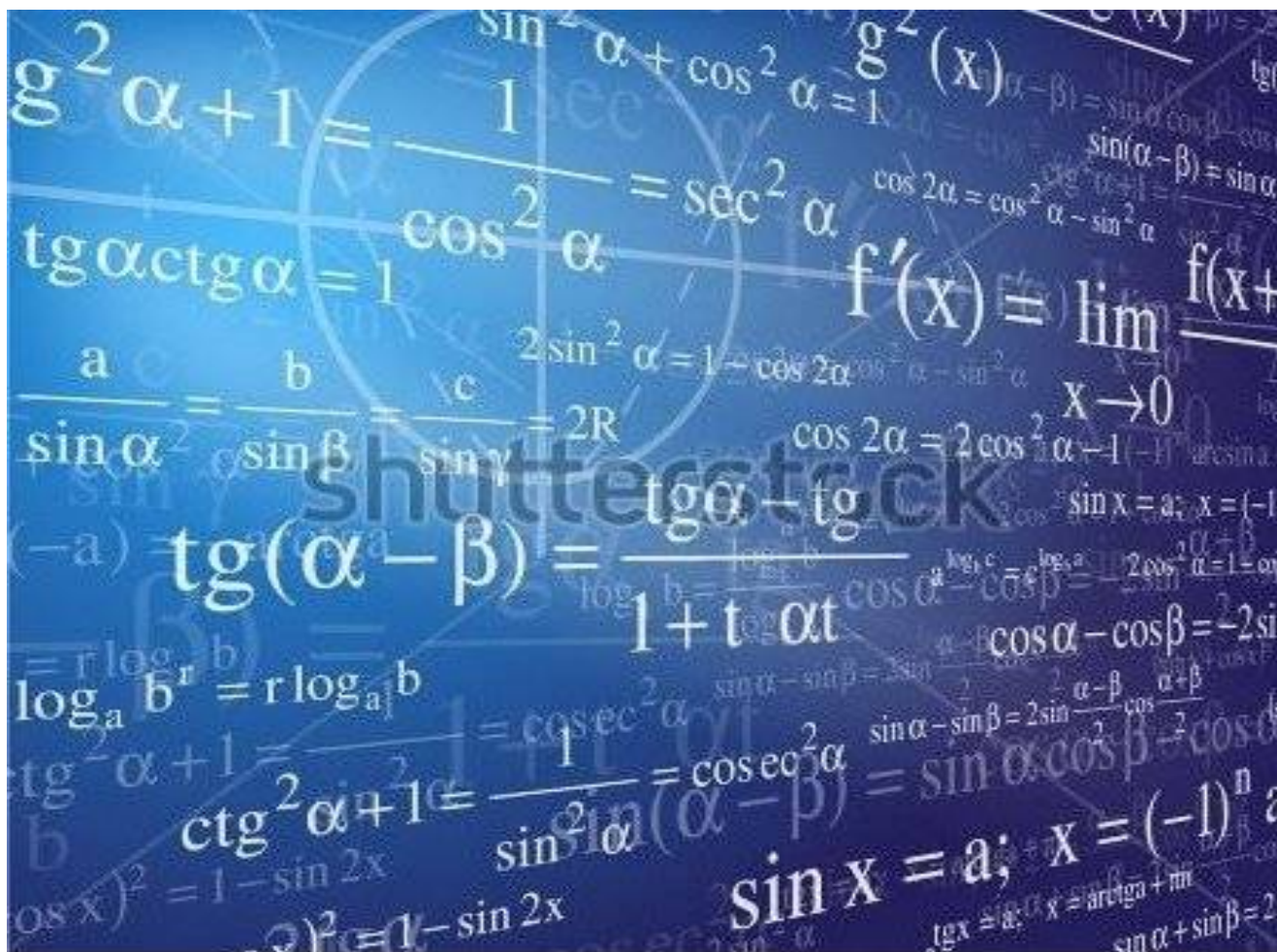


**ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ  
ΛΥΚΕΙΩΝ**



www.shutterstock.com : 82500427

**ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ: 2011-2012**

**ΝΟΜΟΣ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΟΥ**

**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ-ΣΧΟΛΙΚΟΣ ΣΥΜΒΟΥΛΟΣ**

**ΡΟΔΟΣ  
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2012**

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος.....	3
<b>1. ΘΕΜΑΤΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ</b>	
1.1. ΑΛΓΕΒΡΑ.....	4
1.2. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.....	39
<b>2. ΘΕΜΑΤΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ</b>	
2.1. ΑΛΓΕΒΡΑ.....	70
2.2. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.....	96
2.3. ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ.....	127
<b>3. ΘΕΜΑΤΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ</b>	
3.1. ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ.....	155
3.2. ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ.....	185

## Πρόλογος

Η παρούσα συλλογή θεμάτων εξετάσεων είναι αποτέλεσμα της συνεργασίας μου με τους συναδέλφους μαθηματικούς που υπηρετούν σε σχολεία του Νομού Δωδεκανήσου τους οποίους και θερμά ευχαριστώ.

Αποτελεί μια πρώτη προσπάθεια να δημιουργηθεί μια ολοκληρωμένη τράπεζα θεμάτων που θα μπορεί να διευκολύνει τους συναδέλφους, αφού εύκολα θα μπορεί ο οποιοσδήποτε να αναζητήσει θέματα.

Τα θέματα των εξετάσεων δημοσιεύονται χωρίς να αναφέρεται η σχολική μονάδα, ο εισηγητής και ο διευθυντής του σχολείου για λόγους δεοντολογίας. Άλλωστε η ουσία είναι η συλλογή των θεμάτων και τίποτα άλλο. Πολλά σχολεία βέβαια έχουν αναρτήσει τα θέματα στην ιστοσελίδα τους αλλά αυτό γίνεται με δική τους ευθύνη.

Η προσπάθεια αυτή θα συνεχιστεί ώστε να φτιαχτεί μια συλλογή θεμάτων διαχρονική και μεθοδικά τακτοποιημένη κατά τάξη και μάθημα.

Σημειώνω βέβαια ότι τα θέματα μεταφέρθηκαν όπως δόθηκαν στις σχολικές μονάδες από τους εισηγητές, χωρίς καμία παρέμβαση στο περιεχόμενο τους, εκτός από κάποιες μορφοποιήσεις κειμένων και σχημάτων που έγιναν για λόγους ομοιομορφίας.

Κ α ρ α γ ι ᾶ ν ν η ς Ι ω ᾶ ν ν η ς  
Σ χ ο λ ι κ ὸ ς Σ ύ μ β ο υ λ ο ς Μ α θ η μ α τ ι κ ῶ ν  
Ν ο μ ο ὗ Δ ω δ ε κ α ν ῆ σ ο υ

**Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΑΛΓΕΒΡΑ**

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι ισχύει  $|α + β| ≤ |α| + |β|$ , για κάθε  $α, β ∈ ℝ$ .

**A2.** Τι ονομάζουμε νιοστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού  $α$ ;

**A3.** Να χαρακτηρίσεις τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο φύλλο των απαντήσεων σας την λέξη

**Σωστό** ή **Λάθος**, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Αν  $α > 0$  και ο  $ν$  είναι περιττός φυσικός, τότε η εξίσωση  $x^ν = α$ , έχει λύση την

$$χ = \sqrt[ν]{α}.$$

2. Για κάθε  $α, β ∈ ℝ$  ισχύει ότι  $α < β ⇔ α^2 < β^2$ .

3. Για κάθε  $ρ ∈ ℝ$  ισχύει ότι  $|x| ≤ ρ ⇔ -ρ ≤ x ≤ ρ$ .

4. Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης μπορεί να τέμνει τον άξονα  $y'y$  σε παραπάνω από ένα σημείο.

5. Αν μία η εξίσωση  $αx^2 + βx + γ$ , με  $α ≠ 0$  έχει ρίζες τις  $x_1$  και  $x_2$ , τότε

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{β}{α}.$$

*Μονάδες 10+5+10=25*

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται τα σημεία  $A(λ^2+1, λ+2)$  και  $B(λ-3, λ^2+2λ)$ , με  $λ ∈ ℝ$ .

**B1.** Αν τα  $A, B$  είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα  $y'y$ , να βρείτε τις τιμές του  $λ$ .

**B2.** Βρείτε τις τιμές του  $λ$ , ώστε το σημείο  $B$  να βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο του ορθοκανονικού συστήματος.

**B3.** Για  $λ = 0$ ,

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ( $ε$ ) που διέρχεται από τα σημεία  $A$  και  $B$ , καθώς και το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ( $ε$ ) με τον άξονα  $x'x$ .

ii. Αν η ευθεία ( $ε$ ) είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = (κ^3 + \frac{17}{2}) \cdot x - 7$ , να βρείτε την τιμή του  $κ ∈ ℝ$ .

*Μονάδες 6+6+8+5=25*

**Θέμα Γ**

Έστω τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  δειγματικού χώρου  $Ω$ . Αν γνωρίζουμε ότι  $|3P(A) - 2| + |2P(B) - 1| = 0$  τότε:

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $P(A) = \frac{2}{3}$  και  $P(B) = \frac{1}{2}$ .

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι τα  $A$  και  $B$  δεν είναι ασυμβίβαστα.

**Γ3.** Αν  $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ , να βρείτε:

i. Τις πιθανότητες των ενδεχομένων  $A \cup B$  και  $(A \cap B)'$ .

- ii. Την πιθανότητα του ενδεχομένου να πραγματοποιείται το A και να μην πραγματοποιείται το B.

*Μονάδες: 6+6+8+5=25*

### ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = (\lambda - 2)x^2 - 2|\lambda|x + \lambda + 2$  με  $\lambda \in \mathbb{R} - \{2\}$ .

**Δ1.** Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$ , ώστε η συνάρτηση να έχει ελάχιστο στο  $x_0 = 2$

**Δ2.** Για  $\lambda = 4$ :

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f(x)$  και τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .
- ii. Να λυθεί η εξίσωση  $|f(x)| = 2x - 2$ .
- iii. Ναδειχτεί ότι ο αριθμός  $A = \frac{\sqrt[4]{f(5)}}{\sqrt{f(4)-1}} - \frac{2}{\sqrt{f(0)+1}}$  είναι ρητός.
- iv. Για ποιες τιμές του  $x$ , με  $x \in \mathbb{R}$ , η γραφική παράσταση της  $f$  είναι πάνω από τη διχοτόμο της 2ης και 4ης γωνίας των αξόνων.

*Μονάδες: 6+7+7+5=25*

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Α΄  
ΤΑΞΗΣ  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

**Όνοματεπώνυμο:**.....  
**Α.Κ.**.....

**ΘΕΜΑ Α**

1. Η δευτεροβάθμια εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $\alpha \neq 0$  (I) έχει ρίζες τους αριθμούς  $x_1, x_2$ .

Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ριζών της (I) δίνεται από το τύπο:  $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ .

**Μονάδες 10**

2. Τι ονομάζουμε συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B με  $A, B \neq \emptyset$ ;

**Μονάδες 5**

3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**Μονάδες 2x5=10**

α. Το σημείο  $M(x, y)$  με  $x > 0$  και  $y < 0$  βρίσκεται στο 2<sup>ο</sup> τεταρτημόριο.

β. Η εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  με  $\alpha \neq 0$  έχει δυο άνισες ρίζες όταν  $\Delta \leq 0$ .

γ. Η εξίσωση  $x^v = \alpha$ , με  $v$  περιττό και  $\alpha$  αρνητικό είναι αδύνατη.

δ. Για οποιουσδήποτε ομόσημους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  ισχύει  
 $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ .

ε. Αν δυο αριθμοί  $x_1, x_2$  έχουν άθροισμα S και γινόμενο P, τότε η εξίσωση δευτέρου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς  $x_1$  και  $x_2$  είναι η:  $x^2 - Sx + P = 0$ .

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:  $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 2x}$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

2. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f.

3. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .

4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:  $\Pi = \frac{2014^3 - 4 \cdot 2014}{2014^2 + 2 \cdot 2014}$ .

**Μονάδες 7+6+6+6=25**

### ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε το δειγματικό χώρο  $\Omega = \{-5, -4, -3, \dots, 10\}$ , που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα, και τα ενδεχόμενα του:

$$A = \{x \in \Omega / |x - 4| \leq 2\}$$

$$B = \{x \in \Omega / x^2 - 4 \cdot x + 3 \geq 0\}$$

$$\Gamma = \{\lambda \in \Omega / \text{η εξίσωση } x^2 + (1 - \lambda) \cdot x + 1 = 0, \text{ έχει διπλή ρίζα}\}.$$

1. Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$ .
2. Δείξτε ότι το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα  $A$  και  $B$  είναι το βέβαιο ενδεχόμενο.
3. Να αποδείξετε ότι:  $P(\Gamma - B) = 0$ .

**Μονάδες 15+5+5=25**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 + \kappa \cdot x - 2 \text{ και}$$

$$g(x) = (\lambda^5 - 32) \cdot x + 4 \text{ με } \kappa, \lambda \in \mathbb{R}.$$

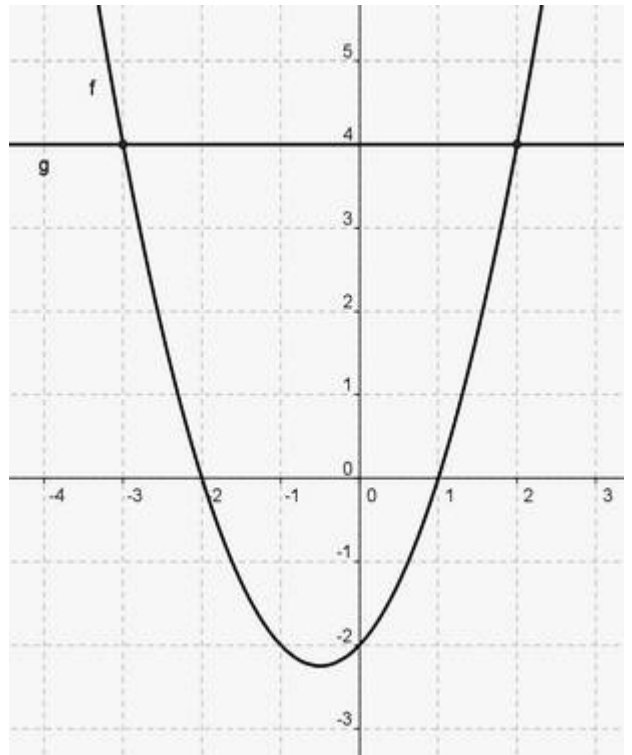
1. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει το άξονα  $x'x$  σε δύο διαφορετικά σημεία για κάθε τιμή του  $\kappa \in \mathbb{R}$ .
2. Να βρείτε την τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε η γραφική παράσταση της  $g$  να είναι παράλληλη προς τον άξονα  $x'x$ .
3. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των  $f$  και  $g$ , για  $\kappa=1$  και  $\lambda=2$ .

Να βρείτε:

i. Την τιμή της παράστασης:

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{f(3)} - g(x)} - \frac{1}{\sqrt{f(3)} + g(x)}.$$

ii. Τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της  $g$  (να αποδείξετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας).



**Μονάδες 6+6+(7+6)=25**



**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Α΄ ΤΑΞΗΣ  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ**

**ΘΕΜΑ Α**

1. Να αποδείξετε ότι  $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$  για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta \geq 0$  και για κάθε θετικό ακέραιο  $n$ .

**Μονάδες 10**

2. Τι λέγεται γεωμετρικός μέσος δύο αριθμών  $\alpha$  και  $\gamma$ ;

**Μονάδες 5**

3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν  $\alpha > \beta$  τότε  $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ , για κάθε πραγματικό αριθμό  $\gamma$ .

**β.** Ισχύει  $|x| \geq x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**γ.** Το συμμετρικό του σημείου  $M(\alpha, \beta)$  ως προς τον άξονα  $y'y$  είναι το  $M'(\alpha, -\beta)$  για κάθε  $\alpha, \beta$ .

**δ.** Αν η εξίσωση  $ax^2 + bx + \gamma = 0$  με  $a \neq 0$  έχει δύο άνισες ρίζες  $x_1, x_2$  τότε  $ax^2 + bx + \gamma = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ .

**ε.** Ο  $n$ -οστός όρος  $a_n$  μιας αριθμητικής προόδου ισούται με  $a_n = a_1 + (n-1)\omega$ , όπου  $a_1$  ο πρώτος όρος και  $\omega$  η διαφορά της προόδου.

**Μονάδες 5x2=10**

**ΘΕΜΑ Β**

Έστω η ευθεία ( $\epsilon$ ) με εξίσωση  $y = \alpha \cdot x + \beta$ , η οποία έχει κλίση 3 και τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο με τεταγμένη -1.

1. Να υπολογίσετε τα  $\alpha, \beta$ .

2. Να χαράξετε την γραφική παράσταση της ευθείας  $\epsilon$ .

3. Να υπολογιστεί το  $\lambda$  έτσι ώστε η ευθεία ( $\epsilon$ ) να είναι παράλληλη με την ευθεία ( $\zeta$ ) που έχει εξίσωση  $y = |\lambda - 2| \cdot x + \lambda$ .

**Μονάδες 8+7+10= 25**

### ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι αριθμοί  $4, x - 1, 3x - 11$  οι οποίοι είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου  $(a_n)$  με λόγο  $\lambda \neq 1$ .

1. Να υπολογιστεί το  $x$  και το  $\lambda$  της προόδου.
2. Αν ο τέταρτος όρος της είναι το 4 τότε:

α) Να αποδείξετε ότι  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ .

β) Να υπολογιστεί το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.

γ) Να αποδείξετε ότι  $\kappa^{\frac{3}{16}} = 2\sqrt{2}$ , όπου  $\kappa = \alpha_{10}$ .

**Μονάδες 6+(6+7+6)=25**

### ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{(2x^2 + 7x - 15)(4x - 4)}{8x - 12}$

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$  και να αποδειχθεί ότι  $f(x) = x^2 + 4x - 5$ .
2. Για ποιες τιμές του  $x$  η  $C_f$  βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'x$ ;
3. Να αποδείξετε ότι  $\frac{\sqrt{f(3)} + \sqrt[3]{8f(4)}}{\sqrt{f(2)} - 3} = -5(\sqrt{7} + 3)$ .

**Μονάδες 8+8+9=25**

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ****ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ****ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Αν  $x_1, x_2$  οι ρίζες της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$  με  $\alpha \neq 0$  να αποδείξετε ότι το άθροισμά τους  $S = x_1 + x_2$  δίνεται από τη σχέση  $S = -\frac{\beta}{\alpha}$ .

Μονάδες 10

**A2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  τότε  $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ .
- Αν  $\alpha \geq 0$  τότε  $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu+\nu]{\alpha}$ , όπου  $\mu, \nu$  θετικοί ακέραιοι.
- Αν τρεις μη μηδενικοί αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε ισχύει:  $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$ .
- Η εξίσωση  $x^\nu = \alpha$  με  $\alpha > 0$  και  $\nu$  άρτιο φυσικό αριθμό έχει ακριβώς δύο λύσεις τις  $\sqrt[\nu]{\alpha}$  και  $-\sqrt[\nu]{\alpha}$ .
- Αν  $\alpha = 0$  και  $\beta \neq 0$  τότε η εξίσωση  $\alpha x + \beta = 0$  έχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 10

**A3.** Πότε μια ακολουθία  $(\alpha_n)$  λέγεται αριθμητική πρόοδος.

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι παραστάσεις:  $A = \frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$  και  $B = \sqrt[3]{\sqrt{28} - 1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{28} + 1}$ .

**B1.** Να απλοποιήσετε την παράσταση  $A = \frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$  αν  $0 < x < 3$ .

Μονάδες 9

**B2.** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $B = \sqrt[3]{\sqrt{28} - 1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{28} + 1}$ .

Μονάδες 7

**B3.** Αν  $A = 2$  και  $B = 3$  να λύσετε την ανίσωση:  $\frac{|\omega - 3| - 4}{A} + \frac{5}{B} < \frac{|3 - \omega|}{B}$ .

Μονάδες 9

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι αριθμοί  $\alpha = 3x + 5$ ,  $\beta = x - 1$ ,  $\gamma = x + 3$ .

Γ1. Να βρείτε την τιμή του  $x$  ώστε οι αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 10

Γ2. Αν  $x = -5$  και  $\alpha_{17} = \alpha$  να βρείτε τη διαφορά  $\omega$  τον πρώτο όρο ( $\alpha_1$ ) και τον πέμπτο όρο ( $\alpha_5$ ) της αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 15

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 6x - 8}}$ .

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

Μονάδες 8

Δ2. Να απλοποιηθεί η συνάρτηση  $h(x) = [f(x)]^2 \cdot (4 - x^2)$ .

Μονάδες 8

Δ3. Αν  $h(x) = \frac{2+x}{x-4}$ , να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες

$$x_1 = h(3) \text{ και } x_2 = \frac{1}{h(3)}.$$

Μονάδες 9

**ΓΡΑΠΤΕΣ – ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ/ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ  
ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ :** ..... **ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ :**  
.....

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- A. Να λυθεί η εξίσωση  $ax + \beta = 0$ , για τις διάφορες τιμές των  $a$  και  $\beta$ .  
(Μονάδες 13)
- B. Πότε δυο ενδεχόμενα λέγονται ασυμβίβαστα; (Μονάδες 4)
- Γ. Να χαρακτηρίσετε ως *Σωστό* ( $\Sigma$ ) ή *Λάθος* ( $\Lambda$ ) κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις:
- α. Για κάθε πραγματικό αριθμό  $a$  ισχύει:  $\sqrt{a^2} = a$
- β. Αν  $x_1, x_2$  οι ρίζες της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$  με  $a \neq 0$  τότε το άθροισμα αυτών  $x_1 + x_2$  είναι  $\frac{\gamma}{a}$
- γ. Για κάθε  $a \in \mathbf{R}$  ισχύει  $|a|^2 = a^2$
- δ. Αν  $\theta > 0$  τότε  $|x| < \theta \iff -\theta < x < \theta$  (Μονάδες 8)

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

- A) Δίνεται η εξίσωση  $\lambda x^2 - 4x + 8 = 0$ . Να βρεθεί το  $\lambda$  ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή λύση.  
(Μονάδες 10)
- B) Να λυθεί η εξίσωση:  $\frac{2(|x|-3)}{3} + 3(|x|-1) = \frac{|x|+1}{4} + |x| + 2$  (Μονάδες 15)

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

- Σε ένα σχολείο τα ποσοστά των υποψηφίων που άριστευσαν στη Φυσική είναι 15%, στα Μαθηματικά 7%, ενώ το 5% άριστευσε και στα δυο μαθήματα. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή από το παραπάνω σχολείο. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να άριστευσε:
- α) σε ένα τουλάχιστον από τα δυο μαθήματα (Μονάδες 9)
- β) στα Μαθηματικά αλλά όχι στη Φυσική (Μονάδες 8)
- γ) στη Φυσική αλλά όχι στα Μαθηματικά (Μονάδες 8)

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

- Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x^2 + 3x + 1 = 0$
- A) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της  $f(x)$  (Μονάδες 5)
- B) Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες η  $f$  έχει
- α. θετικές τιμές και β. αρνητικές τιμές (Μονάδες 10)
- Γ) Να λυθεί η ανίσωση  $f(x) \geq 1$  (Μονάδες 5)

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Α΄ ΤΑΞΗΣ  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A. Αν η εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $\alpha \neq 0$  έχει πραγματικές ρίζες τις  $x_1, x_2$  και με  $S$  συμβολίσουμε το άθροισμά τους  $x_1 + x_2$  και με  $P$  το γινόμενο τους  $x_1 \cdot x_2$ , τότε να δείξετε τους τύπους:  $S = -\frac{\beta}{\alpha}$  και  $P = \frac{\gamma}{\alpha}$ .

Μονάδες: 13

- B. Έστω η συνάρτηση:  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha}$ , με  $\alpha \neq 0$ .

- B1. Πώς λέγεται η γραφική παράσταση  $C_f$  της συνάρτησης  $f$ .  
 B2. Πότε η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει μέγιστο και πότε ελάχιστο.  
 B3. Ποιές είναι οι συντεταγμένες της κορυφής  $K$  της  $C_f$ .  
 B4. Ποια ευθεία είναι άξονας συμμετρίας της  $C_f$ .

Μονάδες: 12

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση:  $g(x) = \frac{x}{x-2} + \sqrt{x-1}$ .

- A. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού  $D_g$  της συνάρτησης  $g$ .

Μονάδες: 8

- B. Να βρεθούν οι τιμές της συνάρτησης  $g$ , για  $x=1$  και για  $x=3$ .

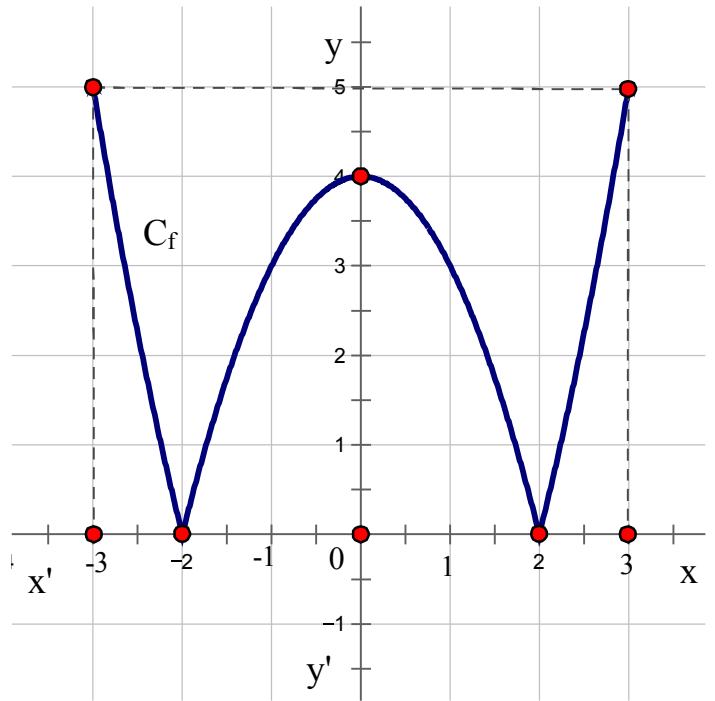
Μονάδες: 6

- Γ. Αν  $g(3) = 3 + \sqrt{2}$  και  $g(1) = -1$  να λυθεί η εξίσωση:  
 $g(3) + 2\alpha = \sqrt{2} - g(1)$ .

Μονάδες: 11

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση  $C_f$  μιας άρτιας συνάρτησης  $f$ , που έχει πεδίο ορισμού το διάστημα:  $D_f = [-3, 3]$ .



- A. Να βρείτε τα διαστήματα του  $x \in [-3, 3]$  για τα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και για εκείνα που η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες: 6

- B. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$ , καθώς και οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής  $x$  που τα παρουσιάζει.

Μονάδες 8

- Γ. Να βρείτε το είδος της συμμετρίας που παρουσιάζει η  $C_f$ .

Μονάδες: 5

- Δ. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ .

Μονάδες: 6

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = ax^2 - 3 \quad \text{και} \quad g(x) = 5x + \beta, \quad \text{με} \quad a, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad a \neq 0.$$

- A. Να βρεθούν τα  $a, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε η παραβολή να διέρχεται από το σημείο  $M(1, -2)$  και η ευθεία να τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $N(0, -9)$ .

Μονάδες: 8

- B. Αν  $a = 1$  και  $\beta = -9$  τότε, να βρεθούν:

- B1. Οι συντεταγμένες των κοινών σημείων της παραβολής και της ευθείας.

Μονάδες: 9

- B2. Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων της παραβολής που βρίσκονται κάτω από την ευθεία.

Μονάδες: 8

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΑΛΓΕΒΡΑ**  
**ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

**A.** Αν  $\alpha, \beta \geq 0$  , να αποδείξετε ότι ισχύει :  $\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$

**(Μονάδες 11)**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

**α.** Αν  $A$  και  $B$  δύο σύνολα με  $A \subseteq B$ , τότε ισχύει  $A \cap B = A$

**β.** Αν  $\alpha \geq 0$  ,  $\beta \geq 0$  και  $\nu \in \mathbb{N}^*$ , τότε ισχύει :  $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu \cdot \beta} = \alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$

**γ.** Για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ισχύει  $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$ .

**δ.** Αν η εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  με  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$  έχει ρίζες τους αριθμούς  $x_1$  και  $x_2$ , τότε ισχύει :  $x_1 \cdot x_2 = \frac{-\gamma}{\alpha}$  .

**ε.** Το τριώνυμο  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$  με  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$ , είναι πάντα θετικό, όταν η διακρίνουσά του  $\Delta$ , είναι μικρότερη του μηδενός.

**(5x2 = μονάδες 10)**

**Γ .** Αν  $\theta > 0$ , να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα στοιχείο της στήλης Β

Στήλη Α	Στήλη Β
<b>A.</b> $ x  > \theta$	<b>1.</b> Αδύνατη
<b>B.</b> $ x  = -\theta$	<b>2.</b> $x > \theta$
<b>Γ.</b> $ x  < \theta$	<b>3.</b> $x = \theta$ ή $x = -\theta$
<b>Δ.</b> $ x  = \theta$	<b>4.</b> $-\theta < x < \theta$
	<b>5.</b> $x > \theta$ ή $x < -\theta$

**(Μονάδες 04)**

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η παράσταση :  $A = \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^3 - x}$

**α.** Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις :

- i.**  $3x^2 + 2x - 5$                       **ii.**  $x^3 - x$

**( Μονάδες 09)**

**β.** Να βρείτε τις τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  ώστε να ορίζεται η παράσταση Α.

**( Μονάδες 08)**



γ. Να αποδείξετε ότι :  $A = \frac{3x + 5}{x^2 + x}$

( Μονάδες 08)

### Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνονται με περιγραφή τα σύνολα :

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / |x - 1| \leq 2\} \text{ και } B = \{x \in \mathbb{Z} / (x - 4) \cdot (x^2 - 2x - 3) = 0\} .$$

Να βρείτε με αναγραφή :

- α. Το σύνολο A . ( Μονάδες 08)
- β. Το σύνολο B . ( Μονάδες 08)
- γ. Το σύνολο  $A \cap B$  . ( Μονάδες 05)
- δ. Το σύνολο  $A - B$  . ( Μονάδες 04)

### Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο :  $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 & , x \geq 0 \\ |2x - 3| & , x < 0 \end{cases}$

- α. Να βρείτε τις τιμές :  $f(0)$ ,  $f(-2)$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  . (Μονάδες 07)
- β. Αν  $x \geq 0$ , να λύσετε την ανίσωση :  $f(x) < 0$  . (Μονάδες 09)
- γ. Αν  $x < 0$ , να λύσετε την ανίσωση :  $f(x) \leq 5$  . (Μονάδες 09)

## ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

### ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Να απαντήσετε στο τετράδιο σας σε **όλα** τα θέματα.
2. Κάθε απάντηση **δικαιολογημένη** είναι αποδεκτή.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΜΑΘΗΜΑ : ΑΛΓΕΒΡΑ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΔΙΑ ΒΙΟΥ  
ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ Δ/ΝΣΗ Π & Δ ΕΚΠ/ΣΗΣ Ν.  
ΑΙΓΑΙΟΥ  
Δ/ΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΟΥ

ΤΑΞΗ : Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

**ΘΕΜΑ ΠΡΩΤΟ**

Α) Δίνεται ότι η εξίσωση  $ax^2 + bx + c = 0$  (όπου  $a$  δεν είναι μηδέν), έχει θετική διακρίνουσα

Να δείξεις ότι: το άθροισμα των λύσεων της είναι:  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

Β) Να απαντήσεις με σωστό (Σ), ή λάθος (Λ) τις παρακάτω ερωτήσεις:

ι)  $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

ii)  $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

iii)  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

iv)  $\sqrt{x^2} = x$ , για κάθε  $x$  πραγματικό αριθμό (τα  $a, b$  είναι θετικοί αριθμοί)

**ΘΕΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ**

Α) Να λύσεις την εξίσωση :  $2x^2 - 10x + 12 = 0$

Β) Να λύσεις την ανίσωση:  $2x^2 - 10x + 12 \leq 0$

**ΘΕΜΑ ΤΡΙΤΟ**

Να βρείς αν υπάρχουν, τις λύσεις των εξισώσεων:

Α)  $x^3 = 8$ , Β)  $x^4 = -16$ , Γ)  $x^3 = -8$ , Δ)  $x^4 = 16$

**ΘΕΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ**

Να βρείς, αν υπάρχουν, τις λύσεις των εξισώσεων και των ανισώσεων:

Α)  $|x| = 1$ , Β)  $|x| = -1$ , Γ)  $|x| \leq 2$ , Δ)  $|x| \geq 2$

(Κάθε θέμα σωστό βαθμολογείται με 25 μονάδες)



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΠΕΡ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Π/ΘΜΙΑΣ & Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΝΟΤΙΟΥ  
ΑΙΓΑΙΟΥ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ  
ΜΑΙΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΑΞΗ: Α ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ :

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Τι ονομάζεται νιοστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού  $a$  ;  
(μον.3)

**A2.** Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $ax^2 + bx + \gamma = 0$  με  $a \neq 0$  και  $\Delta \geq 0$  να αποδείξετε ότι  $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$  και  $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$  (μον.8)

**A3.** Τι ονομάζεται απόλυτη τιμή ενός αριθμού  $a$  ; (μον.4)

**A4.** Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις προτάσεις που ακολουθούν ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ)

**α)** Ισχύει ότι  $|a + \beta| = |a| + |\beta|$  όλους τους αριθμούς  $a$  και  $\beta$

**β)** Η κλίση της ευθείας που σχηματίζει γωνία  $\omega$  με τον άξονα  $x'x$  είναι  $a = \epsilon\phi\omega$

**γ)** Αν στην εξίσωση  $ax^2 + bx + \gamma = 0$  με  $a \neq 0$  είναι  $a \cdot \gamma < 0$  τότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες

**δ)** Αν  $\alpha^2 < \beta^2$  τότε  $\alpha < \beta$

**ε)** Ισχύει ότι  $|x| \geq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$  όπου  $\theta$  θετικός αριθμός (μον. 10)

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -2x + 7$

**B1.** Να λυθεί η εξίσωση  $|f(x)| = 5$  (μον.6)

**B2.** Να λυθεί η ανίσωση  $|f(x)| \leq 3$  (μον.6)

**B3.** Να βρείτε που τέμνει η γραφική παράσταση τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$   
(μον.6)

**B4.** Να βρείτε τα σημεία  $A(1, f(1))$  και  $B(3, f(3))$  και να βρείτε την απόσταση των τεταγμένων τους  
(μον.7)

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \lambda x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda - 3$  με  $\lambda \neq 0$

**Γ1.** Να λυθεί η εξίσωση  $f(x) = 0$  για  $\lambda = -1$  (μον.5)

**Γ2.** Για  $\lambda = 3$ , να λυθεί η ανίσωση  $f(x) > 0$  (μον.5)

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι στην εξίσωση  $f(x) = 0$ , η διακρίνουσα είναι η  $\Delta = 4\lambda + 4$  (μον.6)

**Γ4.** Να βρείτε για ποια τιμή του  $\lambda$  ισχύει ότι  $x_1 + x_2 \geq x_1 \cdot x_2$  (μον.8)

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι ευθείες  $(\varepsilon_1): y = (\lambda - 2)x - 1$  και

$(\varepsilon_2) : y = (1 - 2\lambda)x + 5, \lambda \in \mathbb{R}$

**Δ1.** Αν η ευθεία  $(\varepsilon_1)$  διέρχεται από το σημείο  $A(3, 2)$  να υπολογίσετε την τιμή του  $\lambda$  (μον.7)

**Δ2.** Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε οι ευθείες  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$  να είναι παράλληλες (μον.8)

**Δ3.** Αν  $\lambda = -1$ , να βρείτε το κοινό σημείο των ευθειών  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$  (μον.6)

**Δ4.** Για  $\lambda = -3$ , να σχεδιάσετε την ευθεία  $(\varepsilon_2)$ . (μον.4)

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑΘΕΜΑ Α

**A1.** Αν  $x_1, x_2$  οι ρίζες της εξίσωσης  $ax^2 + bx + \gamma = 0$  με  $a \neq 0$  να αποδείξετε ότι το άθροισμά τους  $S = x_1 + x_2$  δίνεται από τη σχέση  $S = -\frac{\beta}{\alpha}$ .

Μονάδες 10

**A2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- vi. Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  τότε  $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ .
- vii. Αν  $\alpha \geq 0$  τότε  $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu+\nu]{\alpha}$ , όπου  $\mu, \nu$  θετικοί ακέραιοι.
- viii. Αν τρεις μη μηδενικοί αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε ισχύει:  $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$ .
- ix. Η εξίσωση  $x^\nu = \alpha$  με  $\alpha > 0$  και  $\nu$  άρτιο φυσικό αριθμό έχει ακριβώς δύο λύσεις τις  $\sqrt[\nu]{\alpha}$  και  $-\sqrt[\nu]{\alpha}$ .
- x. Αν  $\alpha = 0$  και  $\beta \neq 0$  τότε η εξίσωση  $\alpha x + \beta = 0$  έχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 10

**A3.** Πότε μια ακολουθία  $(\alpha_n)$  λέγεται αριθμητική πρόοδος.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι παραστάσεις:  $A = \frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$  και  $B = \sqrt[3]{\sqrt{28} - 1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{28} + 1}$ .

**B1.** Να απλοποιήσετε την παράσταση  $A = \frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$  αν  $0 < x < 3$ .

Μονάδες 9

**B2.** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $B = \sqrt[3]{\sqrt{28} - 1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{28} + 1}$ .

Μονάδες 7

**B3.** Αν  $A = 2$  και  $B = 3$  να λύσετε την ανίσωση:  $\frac{|\omega - 3| - 4}{A} + \frac{5}{B} < \frac{|3 - \omega|}{B}$ .

Μονάδες 9

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι αριθμοί  $\alpha = 3x + 5$ ,  $\beta = x - 1$ ,  $\gamma = x + 3$ .

Γ1. Να βρείτε την τιμή του  $x$  ώστε οι αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 10

Γ2. Αν  $x = -5$  και  $\alpha_{17} = \alpha$  να βρείτε τη διαφορά  $\omega$  τον πρώτο όρο ( $\alpha_1$ ) και τον πέμπτο όρο ( $\alpha_5$ ) της αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 15

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 6x - 8}}$ .

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

Μονάδες 8

Δ2. Να απλοποιηθεί η συνάρτηση  $h(x) = [f(x)]^2 \cdot (4 - x^2)$ .

Μονάδες 8

Δ3. Αν  $h(x) = \frac{2+x}{x-4}$ , να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες

$$x_1 = h(3) \text{ και } x_2 = \frac{1}{h(3)}.$$

Μονάδες 9

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Α΄ ΤΑΞΗΣ  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ**

**ΘΕΜΑ Α**

1. Να αποδείξετε ότι  $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$  για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta \geq 0$  και για κάθε θετικό ακέραιο  $n$ .

**Μονάδες 10**

2. Τι λέγεται γεωμετρικός μέσος δύο αριθμών  $\alpha$  και  $\gamma$ ;

**Μονάδες 5**

3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

**α.** Αν  $\alpha > \beta$  τότε  $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ , για κάθε πραγματικό αριθμό  $\gamma$ .

**β.** Ισχύει  $|x| \geq x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**γ.** Το συμμετρικό του σημείου  $M(\alpha, \beta)$  ως προς τον άξονα  $y'y$  είναι το  $M'(\alpha, -\beta)$  για κάθε  $\alpha, \beta$ .

**δ.** Αν η εξίσωση  $ax^2 + bx + \gamma = 0$  με  $a \neq 0$  έχει δύο άνισες ρίζες  $x_1, x_2$  τότε  $ax^2 + bx + \gamma = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ .

**ε.** Ο  $n$ -οστός όρος  $a_n$  μιας αριθμητικής προόδου ισούται με  $a_n = a_1 + (n-1)\omega$ , όπου  $a_1$  ο πρώτος όρος και  $\omega$  η διαφορά της προόδου.

**Μονάδες 5x2=10**

**ΘΕΜΑ Β**

Έστω η ευθεία ( $\epsilon$ ) με εξίσωση  $y = \alpha \cdot x + \beta$ , η οποία έχει κλίση 3 και τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο με τεταγμένη -1.

4. Να υπολογίσετε τα  $\alpha, \beta$ .

5. Να χαράξετε την γραφική παράσταση της ευθείας  $\epsilon$ .

6. Να υπολογιστεί το  $\lambda$  έτσι ώστε η ευθεία ( $\epsilon$ ) να είναι παράλληλη με την ευθεία ( $\zeta$ ) που έχει εξίσωση  $y = |\lambda - 2| \cdot x + \lambda$ .

**Μονάδες 8+7+10= 25**

**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω οι αριθμοί 4,  $x - 1$ ,  $3x - 11$  οι οποίοι είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου ( $a_n$ ) με λόγο  $\lambda \neq 1$ .

3. Να υπολογιστεί το  $x$  και το  $\lambda$  της προόδου.

4. Αν ο τέταρτος όρος της είναι το 4 τότε:

α) Να αποδείξετε ότι  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ .

β) Να υπολογιστεί το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.

γ) Να αποδείξετε ότι  $\kappa^{\frac{3}{16}} = 2\sqrt{2}$ , όπου  $\kappa = \alpha_{10}$ .

**Μονάδες 6+(6+7+6)=25**

### ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{(2x^2 + 7x - 15)(4x - 4)}{8x - 12}$

4. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$  και να αποδειχθεί ότι  $f(x) = x^2 + 4x - 5$ .
5. Για ποιες τιμές του  $x$  η  $C_f$  βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'x$ ;
6. Να αποδείξετε ότι  $\frac{\sqrt{f(3)} + \sqrt[3]{8f(4)}}{\sqrt{f(2)} - 3} = -5(\sqrt{7} + 3)$ .

**Μονάδες 8+8+9=25**



ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑΘΕΜΑ Α

**A1.** Αν  $x_1, x_2$  οι ρίζες της εξίσωσης  $ax^2 + bx + \gamma = 0$  με  $a \neq 0$  να αποδείξετε ότι το άθροισμά τους  $S = x_1 + x_2$  δίνεται από τη σχέση  $S = -\frac{\beta}{\alpha}$ .

Μονάδες 10

**A2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- xi. Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  τότε  $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ .
- xii. Αν  $a \geq 0$  τότε  $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}} = \sqrt[\mu+\nu]{a}$ , όπου  $\mu, \nu$  θετικοί ακέραιοι.
- xiii. Αν τρεις μη μηδενικοί αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε ισχύει:  $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$ .
- xiv. Η εξίσωση  $x^\nu = a$  με  $a > 0$  και  $\nu$  άρτιο φυσικό αριθμό έχει ακριβώς δύο λύσεις τις  $\sqrt[\nu]{a}$  και  $-\sqrt[\nu]{a}$ .
- xv. Αν  $a = 0$  και  $\beta \neq 0$  τότε η εξίσωση  $ax + \beta = 0$  έχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 10

**A3.** Πότε μια ακολουθία  $(\alpha_n)$  λέγεται αριθμητική πρόοδος.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι παραστάσεις:  $A = \frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$  και  $B = \sqrt[3]{\sqrt{28} - 1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{28} + 1}$ .

**B1.** Να απλοποιήσετε την παράσταση  $A = \frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$  αν  $0 < x < 3$ .

Μονάδες 9

**B2.** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $B = \sqrt[3]{\sqrt{28} - 1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{28} + 1}$ .

Μονάδες 7

**B3.** Αν  $A = 2$  και  $B = 3$  να λύσετε την ανίσωση:  $\frac{|\omega - 3| - 4}{A} + \frac{5}{B} < \frac{|3 - \omega|}{B}$ .

Μονάδες 9

### **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι αριθμοί  $\alpha = 3x + 5$ ,  $\beta = x - 1$ ,  $\gamma = x + 3$ .

**Γ1.** Να βρείτε την τιμή του  $x$  ώστε οι αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

**Μονάδες 10**

**Γ2.** Αν  $x = -5$  και  $\alpha_{17} = \alpha$  να βρείτε τη διαφορά  $\omega$  τον πρώτο όρο ( $\alpha_1$ ) και τον πέμπτο όρο ( $\alpha_5$ ) της αριθμητικής προόδου.

**Μονάδες 15**

### **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 6x - 8}}$ .

**Δ1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 8**

**Δ2.** Να απλοποιηθεί η συνάρτηση  $h(x) = [f(x)]^2 \cdot (4 - x^2)$ .

**Μονάδες 8**

**Δ3.** Αν  $h(x) = \frac{2+x}{x-4}$ , να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες

$x_1 = h(3)$  και  $x_2 = \frac{1}{h(3)}$ .

**Μονάδες 9**

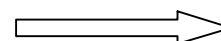
**ΘΕΜΑ 1Ο:**

**A)** Να κάνετε την αντιστοίχιση στον παρακάτω πίνακα : μονάδες 12

1ο μέλος	2ο μέλος
$(\alpha + \beta)^2 =$	$(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta)$
$(\alpha - \beta)^2 =$	$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
$\alpha^2 - \beta^2 =$	$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

**B)** Να κάνετε την αντιστοίχιση στον παρακάτω πίνακα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων  
μονάδες 13

1ο μέλος	2ο μέλος
$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu$	$\alpha^{\mu \cdot \nu}$
$(\alpha \cdot \beta)^\nu$	$\frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$
$\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}$	$\alpha^{\mu + \nu}$
$(\alpha^\mu)^\nu$	$\alpha^{\mu - \nu}$
$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu$	$\alpha^\nu \cdot \beta^\nu$



**ΘΕΜΑ 2Ο:**

Βρείτε το ανάπτυγμα στις παρακάτω ταυτότητες:

1)  $(x+5)^2 =$  μονάδες 12

2)  $(x-4)^2 =$  μονάδες 13

**ΘΕΜΑ 3Ο:**

Βρείτε τις λύσεις στις παρακάτω εξισώσεις:

1)  $|5x+4|=3x+20$  μονάδες 12

2)  $|2x - 7| = |x + 25|$  μονάδες 13

**ΘΕΜΑ 4Ο:**

1) Να λύσετε την εξίσωση:  $x^2 - 2x - 15 = 0$  μονάδες 12

2) Να λύσετε την εξίσωση:  $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x^2-x}$  μονάδες 13

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΑΛΓΕΒΡΑ  
ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

A. Αν  $\alpha, \beta \geq 0$ , να αποδείξετε ότι ισχύει :  $\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$

(Μονάδες 11)

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α. Αν A και B δύο σύνολα με  $A \subseteq B$ , τότε ισχύει  $A \cap B = A$

β. Αν  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$  και  $\nu \in \mathbb{N}^*$ , τότε ισχύει :  $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu \cdot \beta} = \alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$

γ. Για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ισχύει  $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$ .

δ. Αν η εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  με  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$  έχει ρίζες τους αριθμούς  $x_1$  και  $x_2$ , τότε ισχύει :  $x_1 \cdot x_2 = \frac{-\gamma}{\alpha}$ .

ε. Το τριώνυμο  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$  με  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$ , είναι πάντα θετικό, όταν η διακρίνουσά του  $\Delta$ , είναι μικρότερη του μηδενός.

(5x2 = μονάδες 10)

Γ. Αν  $\theta > 0$ , να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης A με ένα στοιχείο της στήλης B

Στήλη A	Στήλη B
A. $ x  > \theta$	1. Αδύνατη
B. $ x  = -\theta$	2. $x > \theta$
Γ. $ x  < \theta$	3. $x = \theta$ ή $x = -\theta$
Δ. $ x  = \theta$	4. $-\theta < x < \theta$
	5. $x > \theta$ ή $x < -\theta$

(Μονάδες 04)

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η παράσταση :  $A = \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^3 - x}$

α. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις :

i.  $3x^2 + 2x - 5$                       ii.  $x^3 - x$

( Μονάδες 09)

β. Να βρείτε τις τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  ώστε να ορίζεται η παράσταση A.

( Μονάδες 08)

γ. Να αποδείξετε ότι :  $A = \frac{3x + 5}{x^2 + x}$

( Μονάδες 08)

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνονται με περιγραφή τα σύνολα :

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / |x-1| \leq 2\} \text{ και } B = \{x \in \mathbb{Z} / (x-4) \cdot (x^2 - 2x - 3) = 0\} .$$

Να βρείτε με αναγραφή :

α. Το σύνολο A .

( Μονάδες 08)

β. Το σύνολο B .

( Μονάδες 08)

γ. Το σύνολο  $A \cap B$  .

( Μονάδες 05)

δ. Το σύνολο  $A - B$  .

( Μονάδες 04)

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο :  $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 & , x \geq 0 \\ |2x - 3| & , x < 0 \end{cases}$

α. Να βρείτε τις τιμές :  $f(0)$ ,  $f(-2)$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  .

(Μονάδες 07)

β. Αν  $x \geq 0$ , να λύσετε την ανίσωση :  $f(x) < 0$  .

(Μονάδες 09)

γ. Αν  $x < 0$ , να λύσετε την ανίσωση :  $f(x) \leq 5$  .

(Μονάδες 09)

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΟΔΗΓΙΕΣ**

1. Να απαντήσετε στο τετράδιο σας σε **όλα** τα θέματα.
2. Κάθε απάντηση **δικαιολογημένη** είναι αποδεκτή.

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A. Αν η εξίσωση  $ax^2 + bx + \gamma = 0$  με  $a \neq 0$  έχει πραγματικές ρίζες  $x_1, x_2$  να αποδείξετε ότι:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad (\text{Μονάδες 10})$$

- B. Αν  $(\alpha_n)$  είναι μια γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο  $\alpha_1$  και λόγο  $\lambda \neq 1$  να συμπληρώσετε τις ισότητες:

$$\alpha_n = \dots\dots\dots S_n = \dots\dots\dots$$

Όπου  $\alpha_n$  ο  $n^{\text{ος}}$  όρος της προόδου και  $S_n$  το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων της.

(Μονάδες 5)

- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**.

- α. Αν οι μη μηδενικοί αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου τότε ισχύει:  $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$ .
- β. Αν  $\alpha > 0$  και  $\nu, \mu$  θετικοί ακέραιοι τότε:  $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu+\nu]{\alpha}$ .
- γ. Η εξίσωση  $x^\nu = \alpha$ , με  $\alpha < 0$  και  $\nu$  άρτιο φυσικό αριθμό είναι αδύνατη.
- δ. Για κάθε πραγματικούς αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  ισχύει:  $|\alpha + \beta| > |\alpha| + |\beta|$ .
- ε. Έστω οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  με εξισώσεις  $y = \alpha_1 x + \beta_1$  και  $y = \alpha_2 x + \beta_2$  αντιστοίχως, τότε αν  $\alpha_1 = \alpha_2$  και  $\beta_1 \neq \beta_2$  οι ευθείες ταυτίζονται.

(Μονάδες 10)

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος: 5, 8, 11, ...

Να βρείτε:

- α) Την διαφορά  $\omega$  και τον  $50^{\text{ο}}$  όρο της προόδου.

(Μονάδες 8)

- β) Τον όρο της προόδου που είναι ίσος με 65.

(Μονάδες 9)

- γ) Το άθροισμα των 40 πρώτων όρων της προόδου.

(Μονάδες 8)

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 + 2\lambda x + 2 - \lambda = 0$  με  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

A) Για ποιες τιμές του  $\lambda$  η εξίσωση έχει δυο πραγματικές και άνισες ρίζες.

(Μονάδες 12)

B) Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης τότε:

α) Να βρεθούν συναρτήσει του  $\lambda$  το άθροισμα  $S$  και το γινόμενο  $P$  των ριζών.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το  $\lambda$  ώστε να ισχύει η σχέση:  $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = -4$ .

(Μονάδες 8)

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{\sqrt{|x-1|-2}}{x-4}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα σημεία που η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \sqrt[3]{2f(5)} - \sqrt{3}\sqrt{f(7)} + (f(-1))^2$$

(Μονάδες 8)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

A) Να αποδείξετε ότι για δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  ισχύει  
 $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$  (8 μονάδες)

B) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες: (10 μονάδες)

α) Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα ως πιθανότητα του ενδεχομένου  $A$  ορίζεται ο αριθμός  $P(A) = \frac{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Εννοικών Περιπτώσεων}} = \frac{N(\Omega)}{N(A)}$ .

β) Έστω η εξίσωση  $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$ . Αν  $\Delta = b^2 - 4a\gamma < 0$ , τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

γ)  $|-2| = -2$ .

δ) Για δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  ισχύει  $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ .

ε) Αν  $A \subseteq B$  τότε  $P(A) \leq P(B)$ .

Γ) Αν η εξίσωση  $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$  έχει πραγματικές ρίζες  $x_1, x_2$  να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις: (7 μονάδες)

α) Το άθροισμα  $x_1 + x_2$  δίνεται από τον τύπο  $S = \dots$

β) Το γινόμενο  $x_1 \cdot x_2$  δίνεται από τον τύπο  $P = \dots$

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Σε ένα πάρκινγκ υπάρχουν 25 ασημί, 15 μαύρα και 10 κόκκινα αυτοκίνητα. Αν επιλέξουμε στην τύχη ένα αυτοκίνητο, να βρείτε την πιθανότητα:

A) να είναι μαύρο, (8 μονάδες)

B) να μην είναι κόκκινο, (8 μονάδες)

Γ) να είναι ασημί ή κόκκινο. (9 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

A)  $2x^2 + 5x + 3 = 0$  (9 μονάδες)

B)  $x^2 - 6x + 9 = 0$  (8 μονάδες)

Γ)  $3x^2 + 4x + 2 = 0$  (8 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Να βρείτε, αν υπάρχουν, δύο αριθμούς που να έχουν

A) Άθροισμα 2 και γινόμενο -15. (13 μονάδες)

B) Άθροισμα 9 και γινόμενο 10. (12 μονάδες)

**ΘΕΜΑ Α**

A<sub>1</sub>. Να αποδείξετε ότι αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $ax^2 + bx + \gamma = 0$  με  $a \neq 0$

$$\text{τότε } S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

(Μον.10)

A<sub>2</sub>. Τι ονομάζεται απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού  $a$  και πως συμβολίζεται;

(Μον.5)

A<sub>3</sub>. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση :

- α) Αν  $a, \beta \geq 0$  και  $n$  φυσικός αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας, τότε  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{a \cdot \beta}$   
 β) Η εξίσωση  $x^n = a$ , με  $a > 0$  και  $n$  άρτιο φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την  $x = \sqrt[n]{a}$   
 γ) Μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.  
 δ) Η εξίσωση  $ax + \beta$  αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ , αν είναι  $a=0$  και  $\beta=0$ .  
 ε) Ισχύει  $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$

(Μον.10)

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι παραστάσεις  $A(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 3$  και  $B(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} - \sqrt{2}$ .

B<sub>1</sub>. Να αποδείξετε ότι  $A(x) = |x - 2| - 3$  και  $B(x) = -1$

(Μον.10)

B<sub>2</sub>. Αν  $-1 < x < 2$ , να απλοποιηθεί η παράσταση  $A(x) + |x - B(x)|$

(Μον.7)

B<sub>3</sub>. Να λύσετε την εξίσωση  $A(x) = 0$ .

(Μον.8)

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = 3x^2 - 3x$  και  $g(x) = 2x^2 + x - 3$ .

Γ<sub>1</sub>. Να λυθεί η εξίσωση  $g(x) = 0$

(Μον.8)

Γ<sub>2</sub>. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  και να απλοποιηθεί ο τύπος της.

(Μον.3+5)

Γ<sub>3</sub>. Να λυθεί η ανίσωση  $f(x) \leq g(x)$

(Μον.9)

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - \lambda x - 1$ , με  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Δ<sub>1</sub>. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε πραγματικό αριθμό αριθμό  $\lambda$ .

(Μον.7)

Δ<sub>2</sub>. Να βρείτε τις τιμές  $f(1)$ ,  $f(-1)$  και  $f(-2)$ .

(Μον.3)

Δ<sub>3</sub>. Αν ξέρετε ότι οι αριθμοί  $f(1)$ ,  $f(-1)$  και  $f(-2)$  που βρήκατε στο ερώτημα Δ<sub>2</sub> είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να δείξετε ότι  $\lambda = 3$ .

(Μον.5)

Δ<sub>4</sub>. Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι οι  $f(1)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(-2)$  είναι ο 4<sup>ος</sup>, ο 5<sup>ος</sup> και ο 6<sup>ος</sup> όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου να βρείτε :

- i) Τη διαφορά  $\omega$ .
- ii) Τον 1<sup>ο</sup> όρο  $a_1$ .

(Μον.5+5)



**Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.  
(Μονάδες:9)
- A2. i)** Ποιο παραλληλόγραμμο λέγεται ρόμβος ; (Μονάδες:3)
- ii)** Ποιες είναι οι ιδιότητες του ρόμβου; (Μονάδες:3)
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- i)** Δύο κύκλοι  $(O, R)$  και  $(K, \rho)$  εφάπτονται εξωτερικά αν  $(OK) = R + \rho$ .
- ii)** Ένα τετράπλευρο που οι διαγώνιοί του διχοτομούνται είναι παραλληλόγραμμο.
- iii)** Ορθόκεντρο ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου.
- iv)** Όλες οι γωνίες του ρόμβου είναι ίσες μεταξύ τους.
- v)** Η διάμεσος του τραπέζιου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με την ημιδιαφορά τους.
- (Μονάδες:10)

**ΘΕΜΑ Β**

Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με βάση την  $B\Gamma$  και  $\hat{A} = \hat{D}$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές .

(Μονάδες:5)

**B2.** Να δείξετε τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Delta\Gamma$  είναι ίσα.

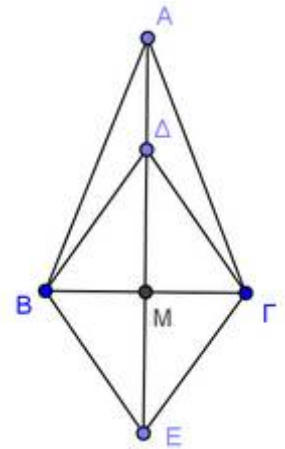
(Μονάδες:6)

**B3.** Να αποδείξετε ότι η προέκταση της  $A\Delta$  διέρχεται από το μέσο της  $B\Gamma$  .

(Μονάδες:7)

**B4.** Αν  $\Delta M = ME$  , αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $B\Delta\Gamma E$  είναι ρόμβος .

(Μονάδες:7)



**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  τέτοιο ώστε  $AB \parallel \Gamma\Delta$  με  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$   $AB = 6$  και  $B\Gamma = \Gamma\Delta = 4$  . Αν  $\Gamma E$  είναι κάθετη στην  $AB$  και  $M$  είναι το μέσο του  $AE$ , να αποδείξετε ότι:

- i)**  $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 120^\circ$  (Μονάδες:6)
- ii)** η  $\Delta M$  είναι παράλληλη στη  $B\Gamma$  (Μονάδες:6)
- iii)** το τετράπλευρο  $\Delta\Gamma B M$  είναι ρόμβος και η  $B\Delta$  είναι κάθετη στη  $\Gamma M$   
(Μονάδες:6)
- iv)** το τρίγωνο  $\Gamma\Delta M$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες:7)

### **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται οξυγώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$ , με βάση  $B\Gamma$  και το ύψος του  $AM$ . Προεκτείνουμε το  $AM$  κατά τμήμα  $MN=AM$  και τη  $B\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma\Delta=B\Gamma$ .

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $BN \parallel A\Gamma$  **(Μονάδες:5)**
- Δ2.** Να αποδείξετε ότι  $A\Delta=N\Delta$  **(Μονάδες:5)**
- Δ3.** Αν η προέκταση της  $A\Gamma$  τέμνει τη  $N\Delta$  στο  $E$ , να αποδείξετε ότι  $A\Gamma=2\cdot\Gamma E$  **(Μονάδες:5)**
- Δ4.** Αν  $Z$  το μέσο της  $AB$ , να αποδείξετε ότι:
- i)  $\Gamma Z=\Delta E$  **(Μονάδες:5)**
- ii) το  $\Gamma E M Z$  είναι παραλληλόγραμμο. **(Μονάδες:5)**

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Α΄ ΤΑΞΗΣ  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

**ΘΕΜΑ Α**

1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

**Μονάδες 10**

2. Τι ονομάζεται διάμεσος τραπεζίου.

**Μονάδες 5**

3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

- α. Η απόσταση του βαρύκεντρου τριγώνου από κάθε κορυφή του ισούται με το 1/3 του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.
- β. Αν τα αποστήματα δύο χορδών ενός κύκλου είναι ίσα τότε και οι χορδές αυτές είναι ίσες.
- γ. Η διάμεσος κάθε τραπεζίου ισούται με το άθροισμα των βάσεων του.
- δ. Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.
- ε. Κάθε τετράγωνο είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

**Μονάδες 5x2=10**

**ΘΕΜΑ Β**

Έστω ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο το σημείο Ο. Στην προέκταση της ΑΒ παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΒΖ = ΑΔ.

Να αποδείξετε ότι:

7. Το τετράπλευρο ΒΖΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
8. Ισχύει  $ZΓ = 2 \cdot ΒΟ$ .
9. Η ΑΓ είναι κάθετη στην ΓΖ.

**Μονάδες 8+8+9=**

**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με ύψος ΑΔ και Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΔΝ κατά τμήμα ΝΤ = ΔΝ και την ΔΜ κατά τμήμα ΜΛ = ΔΜ. Να αποδείξετε ότι:

5. Τα τρίγωνα ΑΝΤ και ΔΝΓ είναι ίσα.
6. Το τετράπλευρο ΑΛΒΔ είναι ορθογώνιο.
7. Τα σημεία Τ, Α, Λ είναι συνευθειακά.



4. Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Lambda\Delta\Gamma$  είναι ίσα.

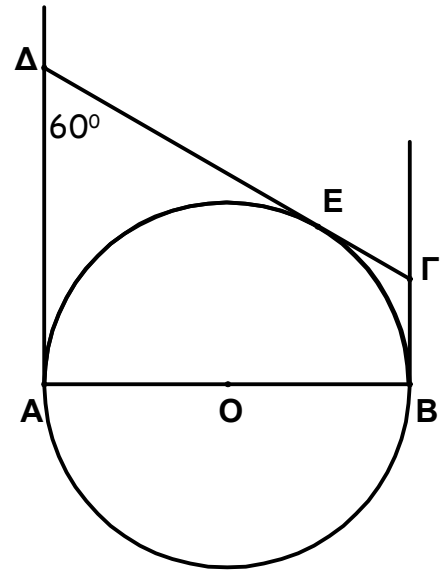
Μονάδες  $5+5+8+7=25$

### ΘΕΜΑ Δ

Στο διπλανό σχήμα, δίνεται κύκλος  $(O, R)$  με διάμετρο  $AB$ . Οι  $A\Delta$ ,  $B\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$  είναι εφαπτόμενες στα σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $E$  του κύκλου αντίστοιχα και ισχύει  $\widehat{A\Delta\Gamma} = 60^\circ$ .

Να αποδειχθεί ότι:

7. Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι τραπέζιο.
8.  $A\Delta + B\Gamma = \Gamma\Delta$
9. Το τρίγωνο  $\Gamma O\Delta$  είναι ορθογώνιο.
10. Οι κύκλοι  $(O, R)$  και  $(\Delta, R)$  εφάπτονται εξωτερικά.



Μονάδες  $7+6+6+6=25$

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**  
**ΤΑΞΗ : Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

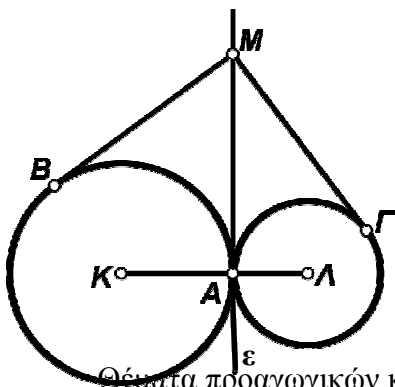
- A.** Να αποδείξετε ότι, το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2(δύο) ορθές.  
**(Μονάδες 10)**
- B.** Να δώσετε τον ορισμό της διχοτόμου μιας γωνίας και να αναφέρετε μία χαρακτηριστική της ιδιότητα.  
**(Μονάδες 04)**
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στη κόλλα σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α.** Μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος, λέγεται η ευθεία που διέρχεται από το μέσον του τμήματος.
- β.** Δύο γωνίες λέγονται παραπληρωματικές, όταν έχουν άθροισμα  $180^\circ$ .
- γ.** Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.
- δ.** Από κάθε σημείο εκτός ευθείας, άγεται μία μόνο κάθετη σε αυτήν.  
**(Μονάδες 08)**

- Δ.** Να αντιστοιχίσετε τα τετράπλευρα της στήλης Α με τις ιδιότητές τους της στήλης Β

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. Ορθογώνιο	<b>α.</b> Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
2. Τετράγωνο	<b>β.</b> Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.
3. Ρόμβος	<b>γ.</b> Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.
	<b>δ.</b> Οι διαγώνιοί του είναι ίσες

**(Μονάδες 03)**

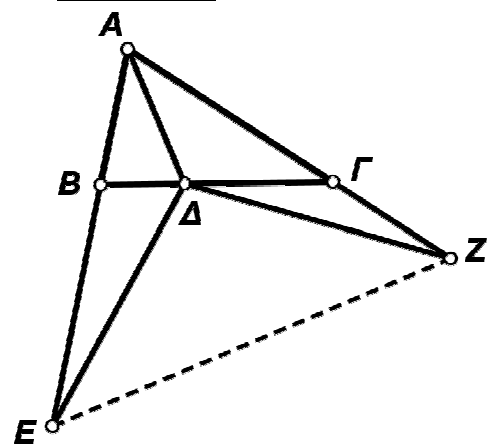
**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**



Στο διπλανό σχήμα, οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Αν Μ είναι ένα τυχαίο σημείο της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης τους (ε) και ΜΒ, ΜΓ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα προς τους κύκλους αυτούς, να αποδείξετε ότι ισχύει :  $ΜΒ = ΜΓ$ .

**(Μονάδες 25)**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**



Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  του διπλανού σχήματος, το τμήμα  $A\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $A$ . Είναι ακόμη:

$BE = A\Gamma$  και  $\Gamma Z = AB$ . Να αποδείξετε ότι :

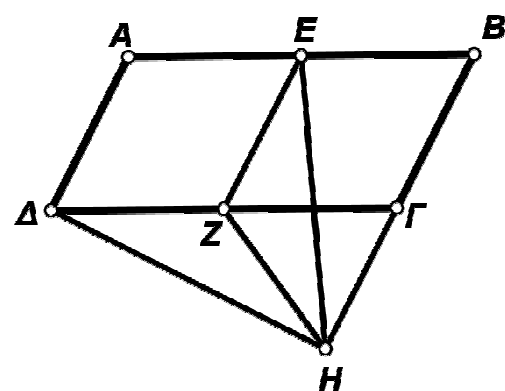
α. Τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $A\Delta Z$  είναι ίσα .

**(Μονάδες 13)**

β. Ο φορέας του τμήματος  $A\Delta$ , είναι κάθετος στο ευθύγραμμο τμήμα  $EZ$  .

**(Μονάδες 12)**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**



Στο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  του διπλανού σχήματος, τα σημεία  $E$  και  $Z$  ,είναι μέσα των πλευρών του  $AB$  και  $\Gamma\Delta$ . Δίνεται ακόμη ότι  $AB = 2A\Delta$  και το  $\Delta H$  κάθετο στο  $BH$ . Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο  $A\Delta EZ$  είναι ρόμβος.

**(Μονάδες 08)**

β. Το τρίγωνο  $EZH$  είναι ισοσκελές.

**(Μονάδες 09)**

γ. Το τμήμα  $HE$  , είναι διχοτόμος της γωνίας  $Z\hat{H}\Gamma$  .

**(Μονάδες 08)**

**ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ****ΘΕΜΑ 1ο**

A) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 15)

B) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος(Λ).

- α) Αν δύο τρίγωνα έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.
- β) Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι διχοτόμος και ύψος.
- γ) Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί ταυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.
- δ) Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.
- ε) Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με  $30^\circ$ , τότε η προσκείμενη πλευρά του είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

**ΘΕΜΑ 2ο**

Στο παραπάνω σχήμα είναι  $ΓΚ = ΚΔ$ ,  $ΑΓ = ΒΔ$  και  $Κ_1 = Κ_2$ .

i) Συγκρίνοντας τα τρίγωνα  $ΓΚΕ$  και  $ΔΚΖ$  να δείξετε ότι  $ΓΕ = ΔΖ$ .

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

ii) Να δείξετε ότι  $ΓΑΕ = ΔΒΖ$  (ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

iii) Είναι τα τρίγωνα  $ΑΓΚ$  και  $ΒΔΚ$  ίσα; Εξηγείστε. (ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

iv) Εξηγείστε γιατί  $ΓΕ // ΔΖ$ . (ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

### **ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $\hat{B} = 30^\circ$  και  $\Delta, E$  τα μέσα των  $AB$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την  $E\Delta$  κατά τμήμα  $\Delta Z = E\Delta$ .

i) Να δείξετε ότι  $ZE = A\Gamma$ .

(ΜΟΝΑΔΕΣ 15)

ii) Να αποδείξετε ότι το  $A\Gamma EZ$  είναι ρόμβος.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

### **ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Πάνω στις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  παίρνουμε σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα τέτοια ώστε  $B\Delta = \Gamma E$ . Από το σημείο  $E$  φέρνουμε παράλληλη στην  $AB$  η οποία τέμνει την  $B\Gamma$  στο  $Z$ .

i) Να δείξετε ότι  $EZ\Gamma = B$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

ii) Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $EZ\Gamma$  ισοσκελές.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

iii) Να εξηγήσετε γιατί το τετράπλευρο  $BZE\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

iv) Να εξηγήσετε γιατί το σημείο  $K$  είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος  $\Delta Z$ .

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ**  
**ΣΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με  $30^\circ$  να δείξετε ότι η απέναντι κάθετη πλευρά του ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

**Μονάδες 10**

**A2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- i. Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.
- ii. Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου προς οποιαδήποτε πλευρά του είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.
- iii. Το τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων ενός τραπεζίου ισούται με την ημιδιαφορά των βάσεων του.
- iv. Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.
- v. Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν μια γωνία του είναι οξεία.

**Μονάδες 10**

**A3.** Να αναφέρετε τις δύο ιδιότητες του ισοσκελούς τραπεζίου.

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Β**

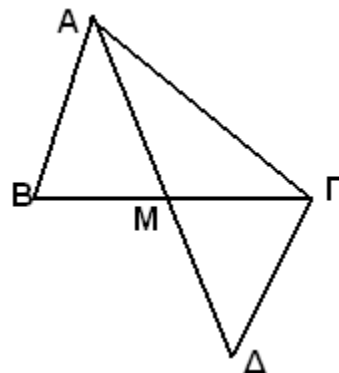
Στην προέκταση της διαμέσου  $AM$  τριγώνου  $AB\Gamma$  παίρνουμε τμήμα  $M\Delta = AM$   
Να αποδείξετε ότι:

**B1.**  $AB = \Gamma\Delta$

**Μονάδες 10**

**B2.** Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $B\Gamma\Delta$  είναι ίσα.

**Μονάδες 15**



## ΘΕΜΑ Γ

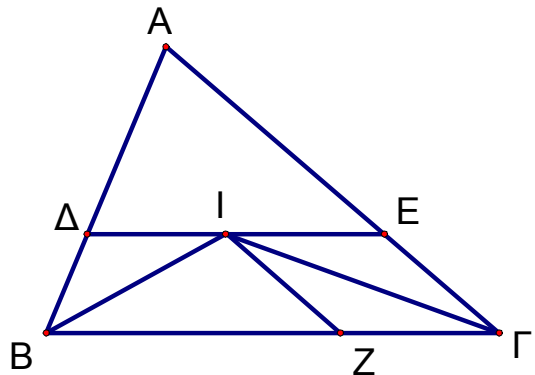
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και το έγκεντρό του  $I$ . Από το  $I$  φέρουμε παράλληλη στην  $B\Gamma$  που τέμνει τις  $AB$  και  $A\Gamma$  στα  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

**Γ1.** Τα τρίγωνα  $B\Delta I$  και  $IE\Gamma$  είναι ισοσκελή.

Μονάδες 12

**Γ2.** Αν  $IZ \parallel A\Gamma$ , να δείξετε ότι το τετράπλευρο  $IE\Gamma Z$  είναι ρόμβος.

Μονάδες 13



## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Στην προέκταση της πλευράς  $AB$  παίρνουμε τμήμα  $BE = AB$  και στην προέκταση της πλευράς  $A\Delta$  τμήμα  $\Delta Z = A\Delta$ . Να δείξετε ότι:

**Δ1.** Το τετράπλευρο  $B\Delta\Gamma E$  είναι παραλληλόγραμμο.

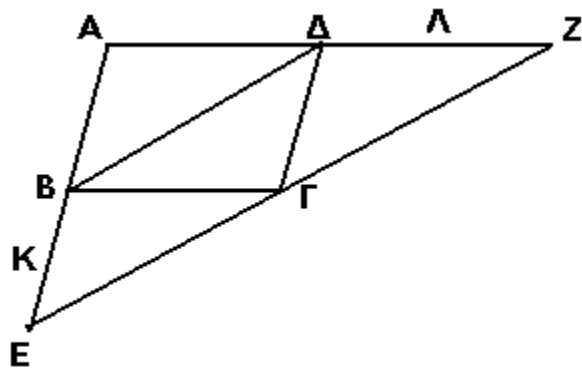
Μονάδες 8

**Δ2.** Τα σημεία  $E, \Gamma, Z$  είναι συνευθειακά.

Μονάδες 9

**Δ3.** Αν  $K$  και  $\Lambda$  μέσα των  $BE$  και  $\Delta Z$  αντίστοιχα τότε  $K\Lambda \parallel = \frac{3}{2} \Delta B$ .

Μονάδες 8



**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Α΄ ΤΑΞΗΣ**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

I. Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη και ίσο με το μισό της.

Μονάδες 9

II. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την λέξη «Σωστό» ή «Λάθος» δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α. Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.
- β. Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του.
- γ. Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι παραπληρωματικές.
- δ. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά γωνίες ίσες.

Μονάδες 8

III. Να αντιστοιχίσετε κάθε τετράπλευρο της στήλης Α, με τις ιδιότητες των διαγωνίων του, που αναγράφονται στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. Ορθογώνιο	1. Διχοτομούνται, είναι ίσες, είναι κάθετες και διχοτομούν τις γωνίες του.
β. Τετράγωνο	2. Διχοτομούνται, είναι κάθετες και διχοτομούν τις γωνίες του.
γ. Παραλληλόγραμμο	3. Διχοτομούνται και είναι ίσες.
δ. Ρόμβος	4. Διχοτομούνται.

Μονάδες 8

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι:  $\hat{A}_{εξ} = 132^{\circ}$  και  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ .

I. Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Μονάδες 15

II. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  τέμνονται στο σημείο I, να υπολογιστεί η γωνία  $\hat{B\Gamma I}$ .

Μονάδες 10



### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του  $AB, A\Gamma$  προς τα  $B, \Gamma$  παίρνουμε τα σημεία  $\Delta, E$  αντίστοιχα, ώστε  $B\Delta = \Gamma E$ . Αν  $\Delta K$  και  $E\Lambda$  είναι οι κάθετες από τα σημεία  $\Delta, E$  αντίστοιχα προς την ευθεία  $B\Gamma$ , να δείξετε ότι:

- I.  $\Delta K = E\Lambda$   
Μονάδες 8
- II. Το τετράπλευρο  $K\Delta E\Lambda$  είναι ορθογώνιο.  
Μονάδες 5
- III.  $\Delta\Gamma = BE$   
Μονάδες 8
- IV. Το τετράπλευρο  $B\Delta E\Gamma$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.  
Μονάδες 4

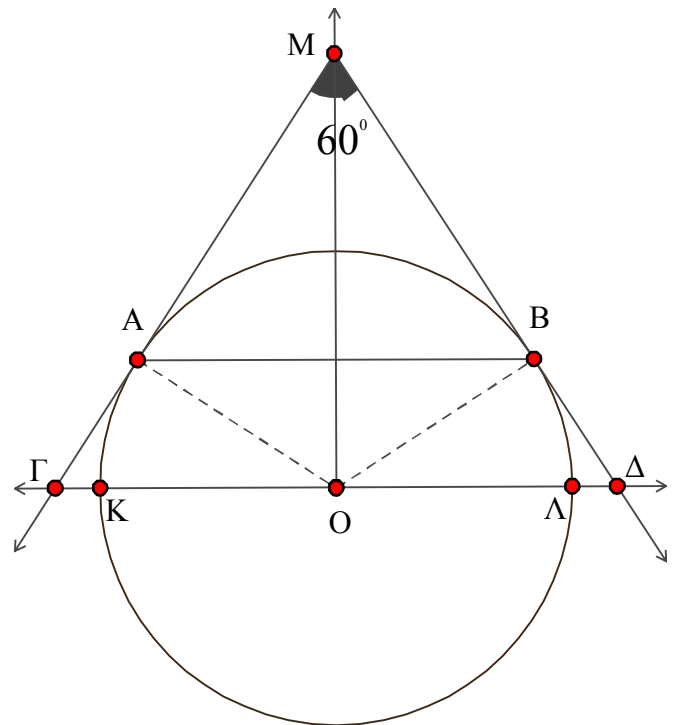
### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Στο διπλανό σχήμα, οι προεκτάσεις των εφαπτόμενων τμημάτων  $MA, MB$  προς τον κύκλο με κέντρο  $O$  τέμνουν την προέκταση της διαμέτρου  $K\Lambda$  στα σημεία  $\Gamma, \Delta$  αντίστοιχα.

Αν  $MO \perp K\Lambda$  και  $\widehat{AMB} = 60^\circ$ , να δείξετε ότι:

- I. Το τρίγωνο  $MAB$  είναι ισόπλευρο  
Μονάδες 7
- II. Το τρίγωνο  $M\Gamma\Delta$  είναι ισόπλευρο  
Μονάδες 8
- III.  $A\Gamma = \frac{M\Gamma}{4}$ .

Μονάδες 10



*Να απαντηθούν όλα τα θέματα.  
Καλή επιτυχία.*

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Α΄ ΤΑΞΗΣ  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

**Όνοματεπώνυμο:**.....  
**Α.Κ.**.....

**ΘΕΜΑ Α**

1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι δύο ορθές.  
**Μονάδες 10**

2. Αναφέρατε τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων.

**Μονάδες 5**

3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**Μονάδες 2x5=10**

α. Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος όταν έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

β. Η διάμεσος χωρίζει ένα τρίγωνο σε δύο ίσα τρίγωνα.

γ. Ένα σημείο εσωτερικό γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές της ανήκει στην διχοτόμο της.

δ. Σε κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες το χωρίζουν σε 4 ισοσκελή τρίγωνα.

ε. Σε κάθε τρίγωνο η μεσοκάθετος μιας πλευράς του είναι και ύψος του τριγώνου.

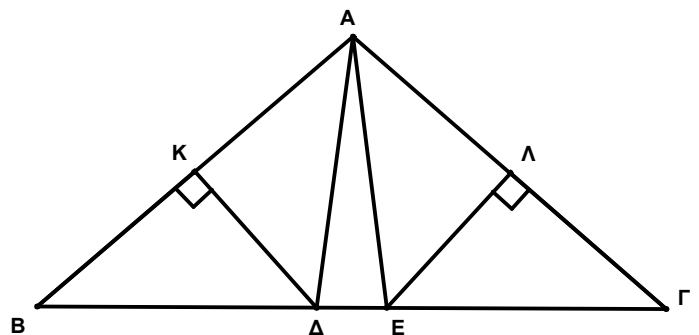
**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) και  $K, \Lambda$  τα μέσα των πλευρών του  $AB$  και  $AG$  αντίστοιχα. Από το σημείο  $K$  φέρνουμε κάθετη στην  $AB$  που τέμνει την  $B\Gamma$  στο  $\Delta$  και από το  $\Lambda$  φέρνουμε κάθετη στην  $AG$  που τέμνει την  $B\Gamma$  στο  $E$ .

1. Δείξτε ότι  $K\Delta=E\Lambda$ .

2. Δείξτε ότι  $EB=\Gamma\Delta$ .

3. Δείξτε ότι το τρίγωνο  $A\epsilon\Delta$  είναι ισοσκελές.



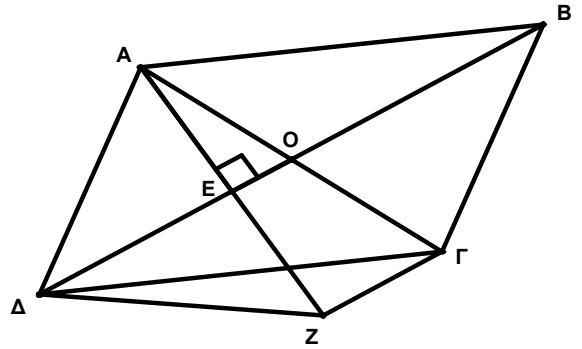
**Μονάδες 8+8+9=25**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  και έστω  $Ο$  το σημείο τομής των διαγωνίων  $ΑΓ$  και  $ΒΔ$ .

Φέρνουμε την  $ΑΕ$  κάθετη στην διαγώνιο  $ΒΔ$ . Εάν  $Ζ$  είναι το συμμετρικό του  $Α$  ως προς την διαγώνιο  $ΒΔ$ , τότε να αποδείξετε ότι:

1. Το τρίγωνο  $ΑΔΖ$  είναι ισοσκελές.
3.  $ΖΓ=2 \cdot ΟΕ$
2. Το  $ΒΔΖΓ$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

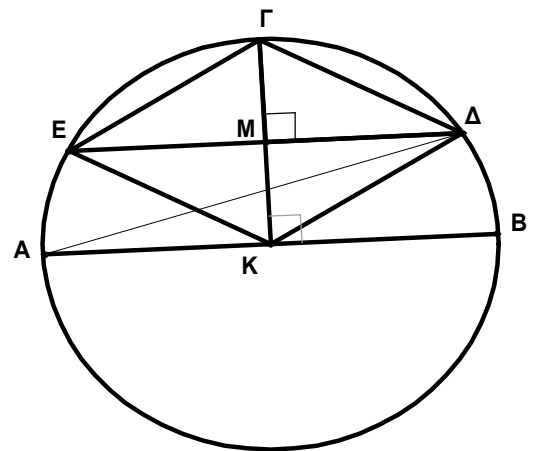


**Μονάδες 7+8+8 =25**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται κύκλος διαμέτρου  $ΑΒ$  και κέντρου  $Κ$ . Από το  $Κ$  φέρω την ακτίνα  $ΚΓ \perp ΑΒ$  και έστω  $Μ$  το μέσο της  $ΚΓ$ . Από το  $Μ$  φέρνω την κάθετη στην  $ΚΓ$  η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία  $Δ$  και  $Ε$ .

1. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $ΔΓΕΚ$  είναι ρόμβος .
2. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $ΚΔΓ$  είναι ισόπλευρο.
3. Να αποδείξετε ότι η  $ΑΔ$  είναι διχοτόμος της  $ΜΔΚ$ .
4. Να υπολογίσετε σε μοίρες τη γωνία  $ΒΑΔ$ .



**Μονάδες 6+6+7+6 =25**

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**  
**ΤΑΞΗ Α ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑΤΑ**

1.Α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180.  
 ΜΟΝΑΔΕΣ 15

- Β) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες
- 1) Δύο ευθείες κάθετες σε μια τρίτη ευθεία είναι κάθετες μεταξύ τους.
  - 2) Στο ισοσκελές τραπέζιο οι διαγώνιοι είναι ίσες.
  - 3) Η διάμεσος του τραπέζιου είναι ίση με το άθροισμα των βάσεων.
  - 4) Δύο παράλληλες ευθείες τεμνόμενες από μια τρίτη σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες παραπληρωματικές.
  - 5) Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός τμήματος ισαπέχει από τα άκρα της μεσοκαθέτου.
- ΜΟΝΑΔΕΣ 10.

2. Εστω Μ το μέσο της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ. Αν ΜΔ κάθετη στην ΑΒ και ΜΕ κάθετη στην ΑΓ να δείξετε ότι

α)  $ΜΔ=ΜΕ$  ΜΟΝΑΔΕΣ 13 β) Τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ίσα. ΜΟΝΑΔΕΣ 12

3. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, τη διχοτόμο ΑΔ, την παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Ε και την παράλληλη από το Ε προς την ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να δείξετε ότι.

α)  $ΕΔ=ΒΖ$  ΜΟΝΑΔΕΣ 7

β) Το ΑΕΔ τρίγωνο είναι ισοσκελές ΜΟΝΑΔΕΣ 11

γ)  $ΒΖ=ΑΕ$  ΜΟΝΑΔΕΣ 7

4. Εστω τρίγωνο ΑΒΓ με  $Α=3Γ$  και  $Β=2Γ$

α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου. ΜΟΝΑΔΕΣ 7

β) Αν  $Α=90, Β=60$  και  $Γ=30$  φέρνουμε τη διχοτόμο της Β που τέμνει την ΑΓ στο Δ και την ΔΕ κάθετη στη ΒΓ.

1) Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΔΕ και ΓΕΔ είναι ίσα. ΜΟΝΑΔΕΣ 10

2) Αποδείξτε ότι  $ΑΔ = \frac{ΑΓ}{3}$  ΜΟΝΑΔΕΣ 8



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΠΕΡ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Π/ΘΜΙΑΣ & Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΝΟΤΙΟΥ  
ΑΙΓΑΙΟΥ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ  
ΜΑΙΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ  
ΤΑΞΗ: Α ΛΥΚΕΙΟΥ

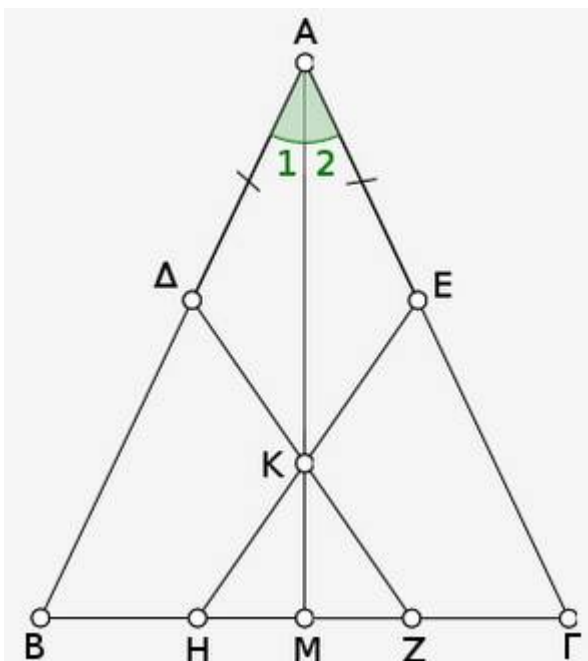
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ.....

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Τι ονομάζεται ρόμβος; (μον.6)
- A2.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή και η διάμεσος  $AM$  που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Να αποδείξετε ότι  $AM = \frac{B\Gamma}{2}$  (μον.9)
- A3.** Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή ( $\Sigma$ ) ή λάθος ( $\Lambda$ )
- α)** οι διαγώνιες του ρόμβου τέμνονται κάθετα
- β)** τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν είναι μεταξύ τους ίσα
- γ)** Αν δυο τρίγωνα έχουν μία πλευρά τους ίση και δύο γωνίες τους ίσες τότε είναι ίσα
- δ)** Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει μία γωνία του ορθή, τότε έχει και ίσες διαγώνιες
- ε)** Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι μεγαλύτερο από  $180^\circ$  (μον.10)

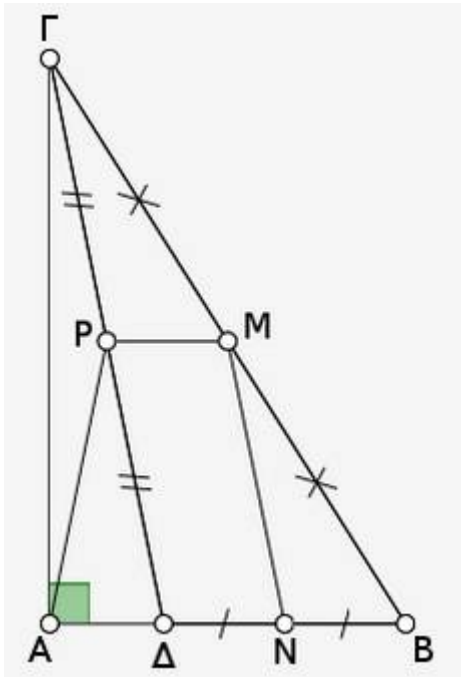
ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=AG$ . Στις ίσες πλευρές  $AB, AG$  παίρνουμε σημεία  $\Delta$  και  $E$  τέτοια, ώστε  $A\Delta=AE$ . Αν  $K$  είναι τυχαίο σημείο της διχοτόμου  $AM$  και οι  $K\Delta, KE$  τέμνουν τη  $B\Gamma$  στα σημεία  $Z$  και  $H$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι



- B1.** Τα τρίγωνα  $A\Delta K$  και  $AKE$  είναι ίσα (μον.9)
- B2.** Το τρίγωνο  $KHZ$  είναι ισοσκελές (μον.9)
- B3.** Το σημείο  $K$  ισαπέχει από τις πλευρές  $AB$  και  $AG$  (μον.7)

### ΘΕΜΑ Γ



Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και  $\Delta$  τυχαίο σημείο της πλευράς  $AB$ . Αν  $M, N, P$  είναι τα μέσα των  $B\Gamma$ ,  $B\Delta$  και  $\Gamma\Delta$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

**Γ1.** το  $MN\Delta P$  είναι παραλληλόγραμμο (μον.9)

**Γ2.**  $AP = PD$  (μον.8)

**Γ3.**  $AM = PN$  (μον.8)

### ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ . Φέρνουμε τη διχοτόμο του  $A\Delta$  και έστω  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ . Η κάθετη από το  $B$  προς τη διχοτόμο  $A\Delta$  τέμνει την  $A\Delta$  στο  $H$  και η προέκτασή της τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $E$ . Να αποδείξετε ότι

**Δ1.**  $AB = AE$  (μον.9)

**Δ2.**  $HM \parallel A\Gamma$  (μον.9)

**Δ3.**  $HM = \frac{A\Gamma - AB}{2}$  (μον.7)

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Α΄ ΤΑΞΗΣ  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

**ΘΕΜΑ Α**

1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

**Μονάδες 10**

2. Τι ονομάζεται διάμεσος τραπεζίου.

**Μονάδες 5**

3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Η απόσταση του βαρύκεντρου τριγώνου από κάθε κορυφή του ισούται με το  $\frac{1}{3}$  του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

β. Αν τα αποστήματα δύο χορδών ενός κύκλου είναι ίσα τότε και οι χορδές αυτές είναι ίσες.

γ. Η διάμεσος κάθε τραπεζίου ισούται με το άθροισμα των βάσεων του.

δ. Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

ε. Κάθε τετράγωνο είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

**Μονάδες  $5 \times 2 = 10$**

**ΘΕΜΑ Β**

Έστω ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο το σημείο Ο. Στην προέκταση της ΑΒ παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΒΖ = ΑΔ.

Να αποδείξετε ότι:

10. Το τετράπλευρο ΒΖΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

11. Ισχύει  $Z\Gamma = 2 \cdot BO$ .

12. Η ΑΓ είναι κάθετη στην ΓΖ.

**Μονάδες  $8+8+9 = 25$**

**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με ύψος ΑΔ και Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΔΝ κατά τμήμα ΝΤ = ΔΝ και την ΔΜ κατά τμήμα ΜΛ = ΔΜ. Να αποδείξετε ότι:

8. Τα τρίγωνα ΑΝΤ και ΔΝΓ είναι ίσα.

9. Το τετράπλευρο ΑΛΒΔ είναι ορθογώνιο.

10. Τα σημεία Τ, Α, Λ είναι συνευθειακά.

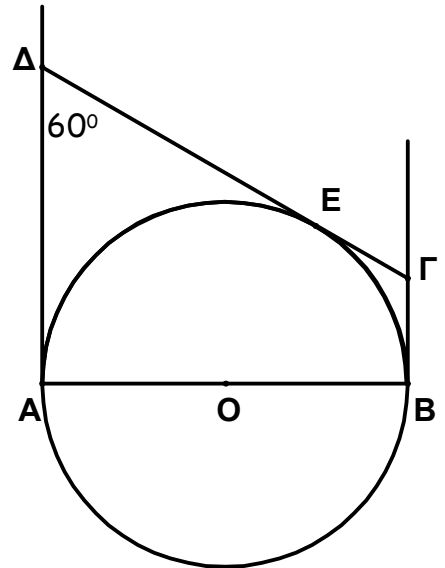
4. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΛΔΤ είναι ίσα.

**ΘΕΜΑ Δ**

Στο διπλανό σχήμα, δίνεται κύκλος  $(O, R)$  με διάμετρο  $AB$ . Οι  $A\Delta$ ,  $B\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$  είναι εφαπτόμενες στα σημεία  $A, B, E$  του κύκλου αντίστοιχα και ισχύει  $\widehat{A\Delta\Gamma} = 60^\circ$ .

Να αποδειχθεί ότι:

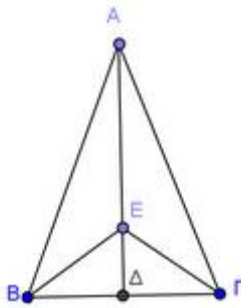
11. Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι τραπέζιο.
12.  $A\Delta + B\Gamma = \Gamma\Delta$
13. Το τρίγωνο  $\Gamma O\Delta$  είναι ορθογώνιο.
14. Οι κύκλοι  $(O, R)$  και  $(\Delta, R)$  εφάπτονται εξωτερικά.





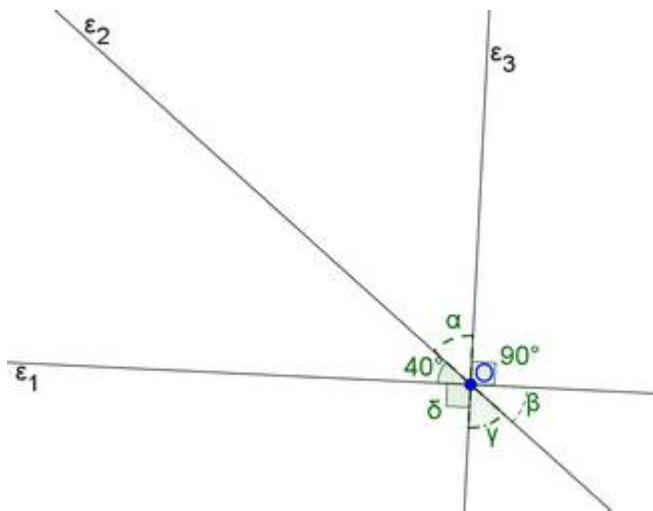
**Θέμα 1<sup>ο</sup>:**

- 1) Πότε δυο γωνίες λέγονται συμπληρωματικές;
- 2) Πότε δυο γωνίες λέγονται παραπληρωματικές;
- 3) Πότε δυο γωνίες λέγονται κατακορυφήν;
- 4) Αποδείξτε ότι οι διχοτόμοι δυο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.

**Θέμα 2<sup>ο</sup>:**

Δίνεται το παρακάτω σχήμα

- 1) βρείτε ποιες γωνίες είναι κατακορυφήν
- 2) βρείτε δυο ζεύγη συμπληρωματικών γωνιών
- 3) υπολογίστε τις γωνίες  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Έστω ένα ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) και η διχοτόμος του  $A\Delta$ . Πάνω στην διχοτόμο  $A\Delta$  παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο  $E$ . Δείξτε ότι

- 1) Τα τρίγωνα  $ABE$  και  $AGE$  είναι ίσα.
- 2) Το τρίγωνο  $EB\Gamma$  είναι ισοσκελές, με  $EB=EG$

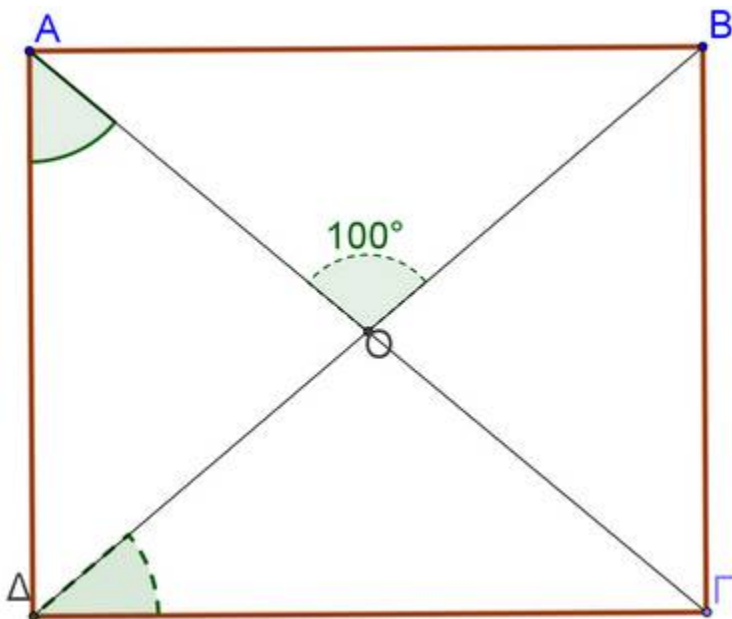
**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  οι διαγώνιες του τέμνονται στο  $O$  και η γωνία  $AOB$  είναι  $100^\circ$ . Αποδείξτε ότι

- 1) τα τρίγωνα  $O\Delta\Gamma$  και  $AO\Delta$  είναι ισοσκελή.



- 2) η γωνία  $\angle \Gamma$  είναι  $40^\circ$   
3) Αποδείξτε ότι η γωνία  $\angle \Delta$  είναι  $50^\circ$



**Γραπτές προαγωγικές εξετάσεις περιόδου Μαΐου – Ιουνίου 2012  
στην Γεωμετρία της Α΄ Εσπερινού Λυκείου**

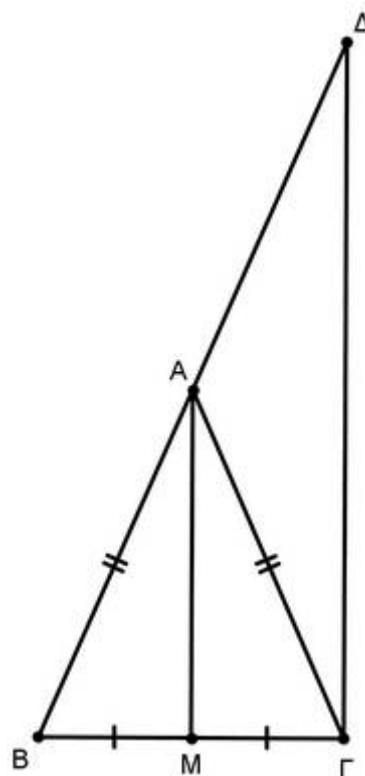
**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A)** Να αποδείξετε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους. (10 μονάδες)
- B)** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **σωστές (Σ)** ή **λανθασμένες (Λ)**:
- α)** Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν έχει μία οξεία γωνία.
- β)** Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα.
- γ)** Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.
- δ)** Αν σε ένα ισοσκελές τρίγωνο, μια γωνία του ισούται με  $60^\circ$ , τότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.
- ε)** Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, η διχοτόμος οποιασδήποτε γωνίας είναι και διάμεσος και ύψος.

(15 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές ( $AB=A\Gamma$ ),  $AM$  η διάμεσος και  $\Gamma\Delta \parallel AM$  όπου  $\Delta$  σημείο της προέκτασης του  $BA$ . Να αποδείξετε ότι  $A\Gamma=A\Delta$ . (25 μονάδες)



### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και η  $B\Delta$  είναι διχοτόμος της  $\hat{B}$ . Αν  $B\Delta = \Delta\Gamma$  να βρείτε τις γωνίες  $B$  και  $\Gamma$ .  
(25 μονάδες)

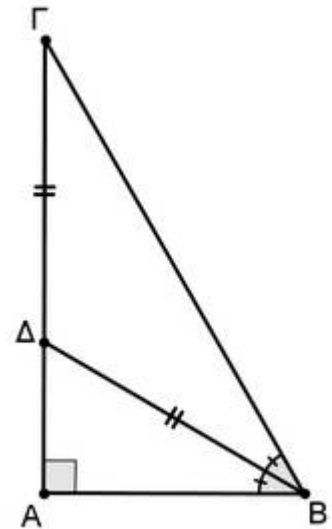
### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  προεκτείνουμε την διάμεσο  $AM$  κατά ίσο τμήμα  $M\Delta$ .

i) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $ABM$  και  $\Delta M\Gamma$  είναι ίσα.  
(10 μονάδες)

ii) Να αποδείξετε ότι  $AB = \Gamma\Delta$ .

iii) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $B\Gamma\Delta$  είναι ίσα.



(5 μονάδες)  
(10 μονάδες)

**ΤΑΞΗ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ**  
**ΜΑΙΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2012 ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με  $30^\circ$ , τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας.

**Μονάδες 9**

**A2.** Τι ονομάζεται τραπέζιο ;

**Μονάδες 3**

**A3.** Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων που ανήκουν στην διχοτόμο μιας γωνίας ;

**Μονάδες 3**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη *Σωστό*, αν η πρόταση είναι σωστή, ή *Λάθος*, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Δύο τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές ίσες, μία προς μία, και μια γωνία ίση είναι πάντοτε ίσα.

**β)** Αν η απόσταση του κέντρου ενός κύκλου από μια ευθεία είναι ίση με την ακτίνα του τότε η ευθεία είναι εφαπτόμενη στο κύκλου.

**γ)** Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.

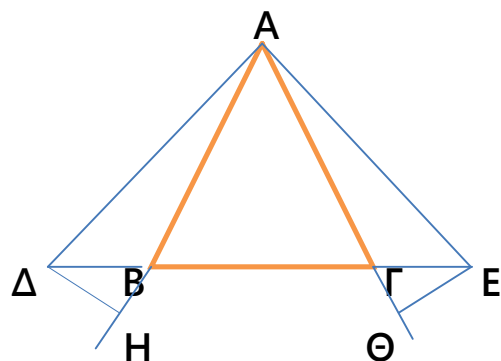
**δ)** Οι διαγώνιες κάθε παραλληλογράμμου διχοτομούν τις γωνίες του.

**ε)** Κάθε τετράπλευρο με ίσες διαγωνίους είναι ορθογώνιο.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Σε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) στην προέκταση της βάσης του προς το σημείο  $B$  παίρνουμε σημείο  $\Delta$  και στην προέκταση της βάσης του προς το σημείο  $\Gamma$  παίρνουμε σημείο  $E$ , έτσι ώστε  $B\Delta=GE$ .



B1. Να αποδείξετε ότι:  $\hat{\Delta}AB = \hat{E}AG$ .

Μονάδες 10

B2. Να αποδείξετε ότι τα Δ, Ε ισαπέχουν αντίστοιχα από τις AB και AG.

Μονάδες 15

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με  $AB < AG$ , η διχοτόμος του ΑΔ και σημείο Μ το μέσο της ΒΓ. Από την κορυφή Β φέρουμε ευθεία κάθετη στην ΑΔ που τέμνει αυτήν στο Η και την ΑΓ στο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

Γ1.  $\hat{E}B\Gamma = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$ .

Μονάδες 10

Γ2.  $HM = \frac{AG - AB}{2}$

Μονάδες 8

Γ3.  $\hat{\Delta}HM = \frac{\hat{A}}{2}$

Μονάδες 7

### ΘΕΜΑ Δ

Έστω ένα τραπέζιο ABΓΔ ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $\Gamma\Delta = 2AB$  και  $\hat{A}B\Gamma = 3\hat{\Gamma}$ .

Φέρνουμε κάθετο τμήμα ΒΕ στη ΓΔ, το οποίο τέμνει την ΑΓ στο Μ.

Φέρνουμε επίσης την ΑΕ, που τέμνει την ΒΔ στο σημείο Ν.

Να δείξετε ότι :

Δ1.  $\hat{\Gamma} = 45^\circ$

Δ2. Το Μ είναι μέσο του ΒΕ.

Δ3.  $AE = BD$  και  $AE \perp BD$ .

Δ4.  $MN = \frac{1}{4} \Gamma\Delta$ .

Μονάδες 8

Μονάδες 6

Μονάδες 6

Μονάδες 5

## ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΤΡΙΤΗ 29 ΜΑΪΟΥ 2012

## ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

## ΘΕΜΑ 1ο

Α) Να αποδείξετε ότι: «Αν δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες, τότε και τα αποστήματά τους είναι ίσα».  
(Μονάδες 10)

Β) Τι ονομάζουμε βαρύκεντρο και ποια είναι η ιδιότητά του; (Μονάδες 5)

Γ) Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

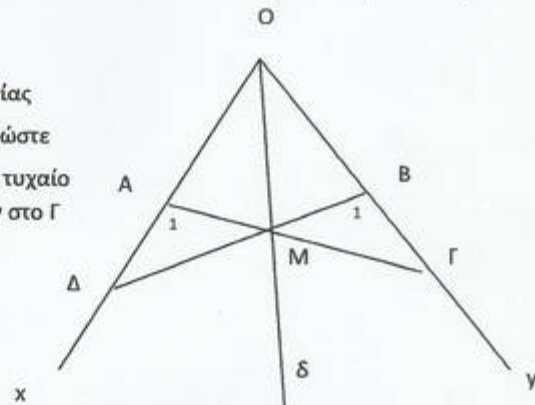
1. Σε ένα ισοσκελές (και όχι ισόπλευρο) τρίγωνο κάθε διάμεσός του είναι και ύψος και διχοτόμος.
2. Αν δύο ευθείες τέμνονται από μια τρίτη ευθεία, τότε οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.
3. Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.
4. Υπάρχουν σημεία που ισαπέχουν από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος και δεν ανήκουν στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος.
5. Δύο ευθείες κάθετες σε μια τρίτη ευθεία είναι και μεταξύ τους κάθετες.
6. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
7. Αν σε ένα ορθογώνιο οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα, τότε είναι τετράγωνο.
8. Το μέσο της υποτεινουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου.
9. Το ύψος ενός τραπεζίου είναι κάθετο στη διάμεσο του τραπεζίου.
10. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή

(Μονάδες 10x1=10)

## ΘΕΜΑ 2ο

Πάνω στις πλευρές  $Ox$  και  $Oy$  μιας κυρτής γωνίας  $\widehat{xOy}$  παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία  $A$  και  $B$  ώστε  $OA=OB$ . Στη διχοτόμο  $O\delta$  της  $\widehat{xOy}$  παίρνουμε τυχαίο σημείο  $M$ . Η προέκταση της  $AM$  τέμνει την  $Oy$  στο  $\Gamma$  και η προέκταση της  $BM$  τέμνει την  $Ox$  στο  $\Delta$ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα  $OAM$  και  $OBM$ .  
(Μονάδες 10)





Β) Να δείξετε ότι  $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ .

(Μονάδες 5)

Γ) Να δείξετε ότι  $AD = BG$ .

(Μονάδες 10)

### ΘΕΜΑ 3ο

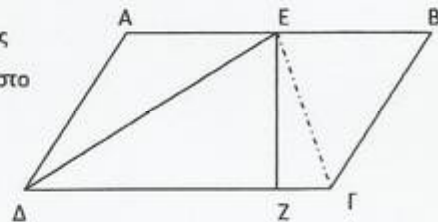
Στο παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  του διτλανού σχήματος είναι  $\widehat{A} = 120^\circ$  και η διχοτόμος της  $\widehat{D}$  τέμνει την  $AB$  στο μέσο της  $E$ .

Α) Να δείξετε ότι  $AB = 2AD$  (Μονάδες 8)

Β) Αν  $EZ$  κάθετη στην  $ΔΓ$  να δείξετε ότι  $ΔE = 2EZ$

(Μονάδες 9)

Γ) Να δείξετε ότι  $\widehat{E}Γ = 90^\circ$ . (Μονάδες 8)



### ΘΕΜΑ 4ο

Σε τραπέζιο  $ABΓΔ$  είναι  $AB \parallel ΓΔ$  και  $AB = AD$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $A$  τέμνει τη  $ΒΔ$  στο σημείο  $M$  και τη  $ΔΓ$  στο σημείο  $E$ .

Δ1) Να δείξετε ότι:

α) Η  $ΒΔ$  είναι κάθετη στην  $ΑΕ$ .

(Μονάδες 8)

β) Η  $ΒΔ$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $Δ$ .

(Μονάδες 7)

γ) Το τετράπλευρο  $ΑΒΕΔ$  είναι ρόμβος.

(Μονάδες 5)

Δ2) Από το σημείο  $M$  φέρνουμε παράλληλη προς την  $ΓΔ$  που τέμνει την  $ΑΓ$  στο σημείο  $N$ . Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι  $ΓΔ = 3AB$  να δείξετε ότι  $MN = AB$ .

(Μονάδες 5)

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

A) Να αποδείξετε ότι αν δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες τότε τα αποστήματά τους είναι ίσα. (8 μονάδες)

B) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες: (10 μονάδες)

α) Σε κάθε τρίγωνο ABΓ ισχύει  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ .

β) Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, τότε οι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες.

γ) Ένα τρίγωνο είναι σκαληνό όταν δύο πλευρές του είναι ίσες μεταξύ τους.

δ) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία τότε είναι ίσα.

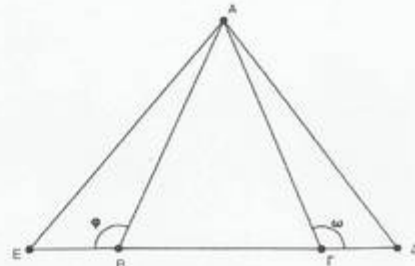
ε) Αν σε τρίγωνο ABΓ είναι  $\hat{A} = 30^\circ$  και  $\hat{B} = 70^\circ$  τότε  $\widehat{\Gamma_{εξ}} = 100^\circ$ .

Γ) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις: (7 μονάδες)

α) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος προς τη βάση είναι ..... και .....

β) Αν σε τρίγωνο ABΓ είναι  $\hat{A} = 50^\circ$  τότε  $\hat{B} + \hat{\Gamma} = \dots$

γ) Ένα τρίγωνο με όλες τις πλευρές του ίσες ονομάζεται .....

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με  $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 70^\circ$  και για τα ευθύγραμμα τμήματα BE και ΓΔ ισχύει BE=ΓΔ.

A) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{A}$ ,  $\hat{\omega}$  και  $\hat{\phi}$ .

(13 μονάδες)

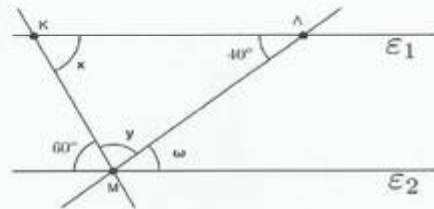
B) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και ΑΓΔ είναι ίσα.

(12 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  είναι παράλληλες. Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  και  $\hat{\omega}$ .

(25 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Σε τρίγωνο ABΓ η γωνία  $\hat{A}$  είναι τριπλάσια της γωνίας  $\hat{B}$ . Αν  $\widehat{\Gamma_{εξ}} = 144^\circ$  να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του. (25 μονάδες)

Θέμα Α

Α. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση του είναι διχοτόμος και ύψος.

(Μον.10)

Β. Πότε ένα παραλληλόγραμμο λέγεται ρόμβος;

(Μον.5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες είναι ίσες.

β) Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.

γ) Η κοινή χορδή δύο ίσων κύκλων είναι μεσοκάθετος της διακέντρου.

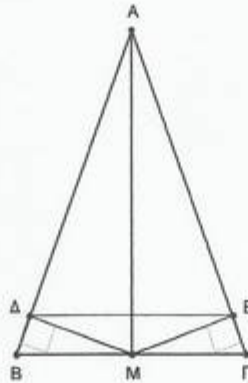
δ) Σε ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με τη μία κάθετη πλευρά.

ε) Σε κύκλο  $(O, \rho)$  σε ίσα αποστήματα αντιστοιχούν ίσες χορδές.

(Μον.10)

Θέμα Β

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=A\Gamma$ ) και  $M$  το μέσο της βάσης του  $B\Gamma$ .



Αν  $M\Delta$  και  $ME$  είναι οι αποστάσεις του  $M$  από τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α.  $M\Delta = ME$

(Μον.8)

β. Η  $AM$  είναι η διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{\Delta ME}$

(Μον.9)

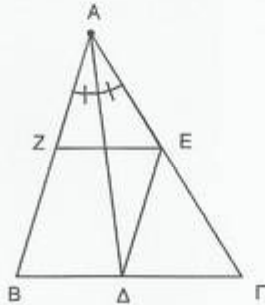
γ. Το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές

(Μον.8)

Θέμα Γ

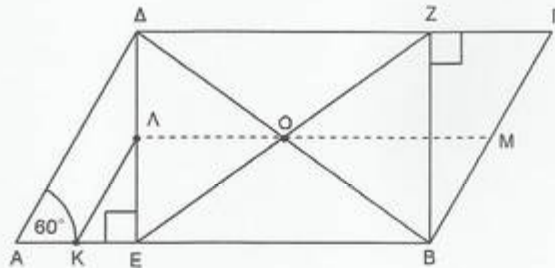
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διχοτόμος του  $A\Delta$ . Η παράλληλη από το  $\Delta$  προς την  $AB$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $E$ . Αν η παράλληλη από το  $E$  προς τη  $B\Gamma$  τέμνει την  $AB$  στο  $Z$ , να αποδείξετε ότι :

- α. Το τετράπλευρο  $B\Delta EZ$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μον.8)
- β. Το τρίγωνο  $AE\Delta$  είναι ισοσκελές. (Μον.8)
- γ.  $AE = BZ$ . (Μον.9)



Θέμα Δ

Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\hat{A} = 60^\circ$  φέρουμε  $\Delta E \perp AB$  και  $BZ \perp \Delta\Gamma$ . Αν  $K$  και  $\Lambda$  είναι τα μέσα των  $AE$  και  $\Delta E$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :



- α. Το  $BZ\Delta E$  είναι ορθογώνιο. (Μον.7)
- β.  $EZ = B\Delta$  (Μον.3)
- γ. Η  $ΛΟ$  διέρχεται από το μέσο της  $B\Gamma$  (Μον.5)
- δ. Αν  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$  τότε  $ZM = K\Lambda$  (Μον.5)
- ε.  $K\Lambda = AE$  (Μον.5)

**Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΑΛΓΕΒΡΑ**

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Αν  $a > 0$  με  $a \neq 1$  τότε για οποιουσδήποτε  $\theta_1, \theta_2 > 0$  να αποδείξετε ότι ισχύει:  
 $\log_a(\theta_1\theta_2) = \log_a\theta_1 + \log_a\theta_2$ .

Μονάδες 9

**A2.** Πότε ένα πολυώνυμο λέγεται σταθερό και πότε μηδενικό;

Μονάδες 6

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο φύλλο των απαντήσεών σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που ακολουθεί σε κάθε πρόταση:

**α.** Η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$  είναι περιοδική με περίοδο  $\pi$ .

**β.** Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

**γ.** Η συνάρτηση  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$  έχει πεδίο ορισμού  $[-1, 1]$ .

**δ.** Για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $e^{\ln x} = x$ .

**ε.** Η συνάρτηση  $f(x) = a^x$  με  $0 < a < 1$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Μονάδες 10

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 2x + 4$ , όπου  $a, b \in \mathbb{R}$ . Το  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x - 1$  και το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $x + 1$  είναι το 6.

**B1.** Να δείξετε ότι  $a = -1$  και  $b = -2$ .

Μονάδες 7

**B2.** Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

Μονάδες 6

**B3.** Να λύσετε την ανίσωση  $P(x) > 0$ .

Μονάδες 5

**B4.** Να λύσετε την εξίσωση  $\sigma\upsilon\nu^4 x - \sigma\upsilon\nu^3 x + 2\eta\mu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0$  στο διάστημα  $[-\frac{\pi}{2}, \pi)$ .

διάστημα  $[-\frac{\pi}{2}, \pi)$ ,

Μονάδες 7

**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω η αριθμητική πρόοδος  $(a_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  για την οποία δίνεται ότι ο έκτος όρος της είναι  $a_6 = 15$  και το άθροισμα των οκτώ πρώτων όρων της είναι  $S_8 = 96$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου είναι  $a_1 = 5$  και η διαφορά της είναι  $\omega = 2$ .

Μονάδες 7

**Γ2.** Ποιος όρος της προόδου ισούται με 1995;

Μονάδες 5

**Γ3.** Αν  $a_n$  ο γενικός όρος της αριθμητικής προόδου και  $S_n$  το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων της και ισχύει  $S_n < 9a_n - 75$ , να βρεθεί ο αριθμός  $n$ .

Μονάδες 7

**Γ4.** Αν οι αριθμοί  $\log(a_3)$ ,  $\log(x+1)$ ,  $\log(a_{11})$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να βρεθεί ο αριθμός  $x$ .

προόδου, να

Μονάδες 6

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \log(4^x - 2)$ .

**Δ1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$  και να αποδείξετε ότι η γραφική έχει μοναδικό κοινό σημείο με την ευθεία  $y = 1 - \log 5$ .

παράσταση της  $f$

Μονάδες 6

**Δ2.** Να λύσετε την ανίσωση  $4^{x-\frac{1}{2}} - \frac{4}{5} 2^{x+1} + \frac{6}{5} > 0$ .

Μονάδες 6

**Δ3.** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + \log\left(4^{x-\frac{1}{2}} - \frac{4}{5} 2^{x+1} + \frac{6}{5}\right)$ .

Μονάδες 8

**Δ4.** Να λύσετε την εξίσωση  $\eta\mu 2x = f\left(\frac{5}{2}\right) + f(1) - f\left(\frac{3}{2}\right)$ .

Μονάδες 5

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄  
ΤΑΞΗΣ  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΔΥΟ (2)**

**Όνοματεπώνυμο:** .....  
**Α.Κ.**.....

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Έστω  $\alpha > 0$  με  $\alpha \neq 1$ . Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε  $\theta_1, \theta_2 > 0$  ισχύει ότι  

$$\log_{\alpha}(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_{\alpha}(\theta_1) + \log_{\alpha}(\theta_2).$$

**Μονάδες 10**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α)** Η διαίρεση ενός πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x - \rho$  μπορεί να δώσει υπόλοιπο, ένα πολυώνυμο  $1^{\text{ου}}$  βαθμού.

**β)** Η εκθετική συνάρτηση  $f(x) = \alpha^x$  με  $0 < \alpha \neq 1$  και  $x \in \mathbb{R}$ , είναι γνήσια φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$  αν και μόνο αν  $0 < \alpha < 1$ .

**γ)** Για κάθε  $\theta > 0$  και  $0 < \alpha \neq 1$  ισχύει ότι  $\alpha^{\log_{\alpha}(\theta)} = \log_{\alpha}(\alpha^{\theta})$ .

**δ)** Οι λύσεις της εξίσωσης  $\varepsilon\varphi(x) = \varepsilon\varphi(\theta)$  με  $x, \theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$  είναι οι  $x = k\pi + \theta$  με  $k \in \mathbb{Z}$ .

**ε)** Η συνάρτηση  $f(x) = \sin x$  είναι περιοδική με περίοδο  $T = 2\pi$ . **Μονάδες  $5 \times 2 = 10$**

**Γ.** Πότε ένας αριθμός  $\rho$  λέγεται ρίζα ενός πολυωνύμου  $P(x)$ ; **Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Β**

Η συνάρτηση  $f(x) = \alpha + \beta \cdot \sin 2x$  με  $\beta > 0$ , έχει μέγιστη τιμή το 4 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $M(\frac{\pi}{3}, -5)$ .

**B1.** Να βρείτε τα  $\alpha$  και  $\beta$ .

**B2.** Για  $\alpha = -2$  και  $\beta = 6$ :

i. Να βρείτε την περίοδο  $T$  της συνάρτησης  $f$ .

ii. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f$ .

iii. Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει την ελάχιστη τιμή της.

vi. Να βρείτε τα κοινά σημεία της συνάρτησης  $f$  με την ευθεία  $y = 1$ .



**Μονάδες 5+(3+3+7+7) =25**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x)$ , βαθμού  $n \geq 2$ , για το οποίο ισχύει :

$$8(x-1)P(x) - xP(2x+3) = -52x^3 - 8x^2 - 6x - 16, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $x-1$  είναι 2:

Γ1. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το πολυώνυμο  $x^2 - 6x + 5$ .

Γ2. Αν το πηλίκο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το πολυώνυμο  $x^2 - 6x + 5$  είναι το

$$\Pi(x) = x + 4:$$

α) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $P(x)$ :

i. με τον άξονα  $y'y$ .

ii. με την ευθεία  $y=2$

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $P(x)$  είναι πάνω από την ευθεία  $y=2$ .

**Μονάδες 5+[(5+7)+ 8]=25**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = k + \log(x^2 - 3)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

2. Να υπολογίσετε την τιμή του  $k$  ώστε  $f(2) = \log 100$ .

3. Για  $k=2$  :

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης την με την ευθεία :

$$y = -\log \frac{1}{1000}$$

β) Να λυθεί η ανίσωση :  $f(x) > 2$ .

**Μονάδες =25**

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΑΛΓΕΒΡΑ**  
**ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.** Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο  $v$  της διαίρεσης ενός πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x - \rho$ , είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου  $P(x)$ , για  $x = \rho$ , δηλαδή  $v = P(\rho)$ .  
**(Μονάδες 13)**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη «Σωστό» ή «Λάθος» δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

**α.**  $10^x = \theta \Leftrightarrow \log \theta = x, \theta > 0$

**β.**  $\ln \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\ln \theta_1}{\ln \theta_2}, \theta_1, \theta_2 > 0$

**γ.** Ένας αριθμός  $\rho$ , λέγεται ρίζα ενός πολυωνύμου  $P(x)$  αν και μόνο αν, ισχύει  $P(\rho) = 0$

**δ.** Η συνάρτηση  $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$  έχει περίοδο  $T = \frac{2\omega}{\pi}$

**(Μονάδες 04)**

**Γ.** Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τα παρακάτω :

**α.**  $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \theta \Leftrightarrow x = \dots$

**β.**  $\log_a a^x = \dots$  όπου  $a > 0, a \neq 1$  και  $x \in \mathbb{R}$

**γ.** Η συνάρτηση  $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$  είναι γνησίως .....

**δ.**  $\log_a \theta^\kappa = \dots$  όπου  $a > 0, a \neq 1, \kappa \in \mathbb{R}$  και  $\theta > 0$

**(Μονάδες 08)**

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται το πολυώνυμο :  $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 4x + 2\alpha + \beta$  όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

**α.** Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του  $P(x)$  και  $P(2) = 3$ , να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$ .

**(Μονάδες 12)**

**β.** Αν  $\alpha = 2$  και  $\beta = -5$ , να λυθεί η εξίσωση  $P(x) = 0$

**(Μονάδες 13)**

**Θ Ε Μ Α 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + \ln(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha) \cdot x^2 - \ln(1 + 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha) \cdot x - 8$ ,

όπου  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

i. Να αποδείξετε ότι το 2 είναι ρίζα του  $P(x)$ .

(Μονάδες 13)

ii. Αν  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$

(Μονάδες 12)

**Θ Ε Μ Α 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

α. Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 10)

β. Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και  $f(2) = 4$ ,

i. Να υπολογίσετε το  $\alpha$ .

(Μονάδες 07)

ii. Για  $a = 2$  να λύσετε την ανίσωση  $f(x+1) < 8$

(Μονάδες 08)



**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ****ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ****ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι ο  $n$ -οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο  $\alpha_1$  και διαφορά  $\omega$  είναι:  $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$ .

Μονάδες 10

**A2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- xvi. Ένα πολυώνυμο  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x - \rho$  αν και μόνο αν το  $\rho$  είναι ρίζα του  $P(x)$  δηλαδή αν και μόνο αν  $P(\rho) = 0$ .
- xvii. Τρεις αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει  $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$ .
- xviii. Αν  $0 < \alpha \neq 1$  τότε για κάθε  $\theta > 0$  ισχύει:  $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$ .
- xix. Η εκθετική συνάρτηση  $f(x) = a^x$  είναι πάντοτε γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .
- xx. Το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου  $(\alpha_n)$  με λόγο  $\lambda = 1$  είναι:  $S_n = n \cdot \alpha_1$ .

Μονάδες 10

**A3.** Εστω τρεις αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$  για τους οποίους ισχύει  $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$ . Ποιος λέγεται γεωμετρικός μέσος των  $\alpha$  και  $\gamma$ .

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 1$ .

**B1.** Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $x - 1$ .

Μονάδες 12

**B2.** Να λύσετε την ανίσωση  $P(x) > 5$ .

Μονάδες 13

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι αριθμοί:  $\alpha = \frac{1}{3}, \beta = 3^{x+1}, \gamma = 3^{x^2}$ .

**Γ1.** Να βρείτε το  $x$  ώστε οι αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Μονάδες 10

Γ2. Αν  $x = -1$  και  $a = a_3$  να υπολογίσετε τον λόγο  $\lambda$ , τον πρώτο όρο  $a_1$  και το άθροισμα  $S_5$ .

Μονάδες 15

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \log(3x - 2) + \log 50$  και  $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \log(x + 2) + 2$ .

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

Μονάδες 10

Δ2. Να λύσετε την εξίσωση:  $f(x) = g(x)$ .

Μονάδες 15

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

A. Να δείξετε ότι, το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x - \rho$  είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για  $x = \rho$ , δηλαδή  $\upsilon = P(\rho)$ .

Μονάδες 8

B. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισοδυναμίες, που μας δίνουν τις λύσεις των αντίστοιχων τριγωνομετρικών εξισώσεων.

1.  $\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow x = \dots\dots\dots$  ή  $x = \dots\dots\dots$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

2.  $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow x = \dots\dots\dots$  ή  $x = \dots\dots\dots$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

3.  $\varepsilon\phi x = \varepsilon\phi\theta \Leftrightarrow x = \dots\dots\dots$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

Μονάδες 8

Γ. Θεωρούμε τη εκθετική συνάρτηση:  $f(x) = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας τη λέξη «Σωστό» ή «Λάθος», δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση.

α. Η συνάρτηση  $f$  έχει σύνολο τιμών το  $(0, +\infty)$ .

β. Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

γ. Το σημείο  $A(1,0)$  ανήκει στην γραφική παράσταση της  $f$ .

Μονάδες 9

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται το πολυώνυμο:  $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

A. Να βρεθεί το  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου  $P(x)$  για  $x = -1$  να είναι ίση με  $-24$ .

Μονάδες 7

B. Για  $\alpha = -6$  να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου  $P(x)$  με το πολυώνυμο  $x - 1$ .

Μονάδες 8

Γ. Να λυθεί η ανίσωση:  $P(x) > 0$ .

Μονάδες 10

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}\right)$ .

- A. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$  Μονάδες 6
- B. Να λυθεί η εξίσωση:  $f(x) = 0$ . Μονάδες 9
- Γ. Να βρεθούν οι τιμές του  $x$  για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$ . Μονάδες 10

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = (2\ln\theta - 1)x^4 + x^3 - x^2 + x - 2\sigma\upsilon\nu\varphi, \quad \theta > 0, \quad \varphi \in (0, \pi), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- A. Αν το πολυώνυμο  $P(x)$  είναι 3<sup>ου</sup> βαθμού και έχει παράγοντα το  $x-1$ , να βρεθούν τα  $\theta, \varphi$ . Μονάδες 8
- B. Αν  $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$  να βρεθούν οι τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει:  $P(x) < 0$ . Μονάδες 7
- Γ. Να λυθούν:
- I) η εξίσωση  $P(\sqrt{2}\eta\mu\omega) = 0, \quad \acute{\omicron}\tau\alpha\nu \quad \omega \in (0, \pi)$ . Μονάδες 5
- II) η ανίσωση  $P(2 + \ln\alpha) < 0$ . Μονάδες 5



**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ**

**ΘΕΜΑ Α**

1. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x - \rho$  είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για  $x = \rho$ , δηλαδή  $u = P(\rho)$ .

**Μονάδες 10**

2. Πότε μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος.

**Μονάδες 5**

3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η συνάρτηση  $f(x) = a^x$  με  $a > 1$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

β. Ισχύει  $a^{\log_a \theta} = \theta$ , για κάθε  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  και  $\theta > 0$ .

γ. Το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων μια αριθμητικής προόδου  $(a_n)$  δίνεται από τον τύπο  $S_n = n \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot \omega]$ .

δ. Ο βαθμός ενός μηδενικού πολυωνύμου είναι 0.

ε. Αν  $\alpha, \beta, \gamma$  διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου τότε ισχύει  $2\beta = \alpha + \gamma$ .

**Μονάδες 5x2=10**

**ΘΕΜΑ Β**

Έστω αριθμητική πρόοδος  $(a_n)$  τέτοια ώστε ο πέμπτος όρος της ισούται με 5 και ο δέκατος όρος της ισούται με 20.

13. Να αποδείξετε ότι  $a_1 = -7$  και  $\omega = 3$ .

**Μονάδες 8**

14. Ποιος όρος της ισούται με 2012;

**Μονάδες 8**

15. Να υπολογίσετε το άθροισμα  $\Sigma = a_{101} + a_{102} + a_{103} + \dots + a_{200}$ .

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω το πολυώνυμο  $P(x) = ax^3 + \beta x^2 - 2x + a + 7$ . Δίνεται ότι το  $x + 2$  είναι παράγοντας του  $P(x)$  και το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $(x + 1)$  είναι ίσο με 8.

11. Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$  και  $\beta = -1$ .

**Μονάδες 8**

12. Να κάνετε την Ευκλείδεια διαίρεση  $P(x):(x^2 - 2x)$  και να γράψετε την ταυτότητα της.

**Μονάδες 8**

13. Να λύσετε την ανίσωση  $P(x) < 8$ .

**Μονάδες 9**

### **ΘΕΜΑ Δ**

Έστω οι συναρτήσεις  $f(x) = \log(3x)$ , με  $x > 0$  και  $g(x) = 10^{f(x)}$ .

15. Να αποδείξετε ότι  $2f(2) - f(4) - f(3) + f(1) + e^{\ln 2} + \log 10 = 3$

**Μονάδες 7**

16. Να εξετάσετε αν υπάρχει  $x$  τέτοιο ώστε οι αριθμοί  $f(x - 2)$ ,  $f(x)$ ,  $f(x + 1)$  να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

**Μονάδες 8**

17. Αφού απλοποιήσετε τον τύπο της  $g(x)$  να λύσετε την ανίσωση  $e^{g(2x)} - e^{g(x)} - 2 > 0$ .

**Μονάδες 10**



**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ**  
**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΔΙΑ ΒΙΟΥ**  
**ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ**  
**ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ Δ/ΝΣΗ Π & Δ ΕΚΠ/ΣΗΣ Ν.**  
**ΑΙΓΑΙΟΥ**  
**Δ/ΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΟΥ**  
**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ**

**ΜΑΘΗΜΑ :** ΑΛΓΕΒΡΑ

**ΤΑΞΗ :** Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.α.** Αν  $a > 0$  με  $a \neq 1$ , να αποδείξετε ότι για κάθε  $\theta > 0$  και  $\kappa \in \mathbb{R}$  ισχύει  $\log_a \theta^\kappa = \kappa \log_a \theta$  (μονάδες 9)

**β.** Η συνάρτηση  $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$  είναι:

1. για  $a > 1$  γνησίως .....

2. για  $0 < a < 1$  γνησίως .....

Να συμπληρώσετε τα παραπάνω κενά

(μονάδες 4)...

**B** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη (Σ) ή (Λ) αν είναι σωστές ή λάθος αντίστοιχα

**α.** Για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $e^{\ln x} = x$

**β.** Η συνάρτηση  $f(x) = a^x, 0 < a \neq 1$  έχει σύνολο τιμών το  $(0, +\infty)$

**γ.** Για κάθε  $x \neq 0$  ισχύει  $\ln x^2 = 2 \ln x$

**δ.** Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = \ln x$  και  $g(x) = e^x$

έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία  $y = -x$

**ε.** Αν το πολυώνυμο  $P(x)$  είναι  $n$  βαθμού με  $n \in \mathbb{N}^*$  τότε το πολυώνυμο  $P(x) \cdot (x^2 - 4)$  έχει βαθμό  $n + 2$

**στ.** Η εξίσωση  $\eta \mu x = \log 10^2 + \sigma \nu 120^0$  είναι αδύνατη

(μονάδες 12)

**ΘΕΜΑ 2ο**

Έστω πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  το οποίο έχει παράγοντες τους  $x + 1, x - 2$

**α.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = -3$  και  $\beta = 0$

(μονάδες 7)

**β.** Για τις παραπάνω τιμές των  $\alpha, \beta$  να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$

(μονάδες 7)

**γ.** Έστω  $C$  η γραφική παράσταση συνάρτησης  $f(x) = P(x)$  με  $\alpha = -3$  και  $\beta = 0$

να βρείτε **:(i)** το σημείο τομής της  $C$  με τον άξονα  $y' y$

(μονάδες 4)

(ii) τις τιμές του  $\chi$  για τις οποίες ή C είναι πάνω από τον  $\chi' \chi$

(μονάδες 7)

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f(\chi) = a \cdot \sin\left(\frac{\beta \chi}{4}\right)$  όπου  $a, \beta \in \mathbf{R}$ . Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από τα σημεία  $A(0, -2)$  και  $B\left(\frac{4\pi}{\beta}, \beta\right)$  τότε:

α. να αποδείξετε ότι  $a = -2$  και  $\beta = 2$

(μονάδες 8)

β. Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f$  καθώς και την περίοδό της

(μονάδες 9)

γ. Να λύσετε την εξίσωση  $f(\chi) = 1$

(μονάδες 8)

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f(\chi) = \ln(3e^{2\chi} - e^\chi - 2)$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$

(μονάδες 10)

β. Να βρείτε την τεταγμένη του σημείου της γραφικής παράστασης με τετμημένη  $\ln 2$  και να βρείτε τη θέση του σημείου ως προς τον άξονα  $\chi' \chi$

(μονάδες 5)

γ. Να λυθεί η εξίσωση  $f(\chi) = 3\chi$  ως προς  $\chi$

(μονάδες 10)

**ΓΡΑΠΤΕΣ – ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ  
ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ : .....  
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ :

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

A) Να αποδείξετε ότι: Ένα πολυώνυμο  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x - \rho$  αν και μόνο αν το  $\rho$  είναι ρίζα του  $P(x)$ , δηλαδή αν και μόνο αν  $P(\rho) = 0$   
(MON. 15)

B) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό(Σ) ή Λάθος(Λ) :

α. Το μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό μηδέν.

β. Αν οι αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής

προόδου τότε ισχύει: 
$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} .$$

γ. Ο  $v^{\text{ος}}$  όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο  $\alpha_1$  και διαφορά  $\omega$ , είναι:  $\alpha_v = \alpha_1 + (v - 1)\omega$  .

δ. Η εξίσωση  $\varepsilon\phi x = a$  και  $\sigma\phi x = a$  έχουν την ίδια λύση  $x = \kappa\pi + a$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$  .

ε. Η συνάρτηση  $f(x) = \alpha^x$ ,  $\alpha > 0$  είναι γνησίως αύξουσα.

(MON. 10)

## ΘΕΜΑ 2°

Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) \quad 2\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \quad (\text{MON. 10})$$

$$\beta) \quad 2\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 3\eta\mu x - 1 \quad (\text{MON. 15})$$

## ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = \alpha x^3 + (\beta - 1)x^2 - 3x - 2\beta + 6$ , όπου  $\alpha, \beta$  πραγματικοί αριθμοί.

i) Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου  $P(x)$  και το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $x+1$  είναι ίσο με 2, τότε να δείξετε ότι  $\alpha = 2$  και  $\beta = 4$ . (MON.15)

ii) Για τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  του παραπάνω ερωτήματος να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ . (MON.10)

## ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \left(\frac{\alpha - 1}{3}\right)^x$ , όπου  $x$  πραγματικός αριθμός.

i) Βρείτε για ποιες τιμές του  $\alpha$  ορίζεται η  $f(x)$ . (MON.7)

ii) Βρείτε για ποιες τιμές του  $\alpha$  η  $f(x)$  είναι γνησίως αύξουσα. (MON.8)

iii) Αν  $\alpha = 7$ , να λύσετε την εξίσωση  $f(x) + f(2x) = 2$  (MON.10)

**Να γράψετε όλα τα Θέματα!**

**Στην κόλλα των θεμάτων να γράψετε μόνο το όνομα σας.**

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**  
**ΑΛΓΕΒΡΑ Β! ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A<sub>1</sub>)** Να αποδείξετε ότι : ένα πολυώνυμο  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x-p$  αν και μόνο αν το  $p$  είναι ρίζα του  $P(x)$ , δηλαδή αν και μόνο αν  $P(p) = 0$ . (μονάδες12)

**A<sub>2</sub>)** Να αντιστοιχήσετε κάθε εξίσωση της πρώτης στήλης του παρακάτω πίνακα με τη λύση της που βρίσκεται στη δεύτερη στήλη

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	ΛΥΣΕΙΣ
$\eta\mu\chi = \eta\mu\theta$	$\chi = k\pi + \theta$
$\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\theta$	$\chi = 2k\pi + \theta$ ή $\chi = 2k\pi - \theta$
$\epsilon\phi\chi = \epsilon\phi\theta$	$\chi = 2k\pi + \theta$ ή $\chi = 2k\pi + \pi - \theta$
$\sigma\phi\chi = \sigma\phi\theta$	

(μονάδες6)

**A<sub>3</sub>)** Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου  $\Delta(x)$  (διαιρέτος) δια του  $\delta(x)$  (διαιρέτης), αναφέροντας τα ονόματα των υπόλοιπων πολυωνύμων που υπάρχουν σε αυτήν, όπως και τους περιορισμούς για ένα από αυτά. (μονάδες7)

**ΘΕΜΑ Β**

**B<sub>1</sub>)** Να παραγοντοποιήσετε (αναλύσετε σε γινόμενο παραγόντων) το πολυώνυμο  $\Pi(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

**B<sub>2</sub>)** Να λύσετε την εξίσωση:  $\Pi(x) = 0$

**B<sub>3</sub>)** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$  βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ<sub>1</sub>)** Να λύσετε την εξίσωση:  $\sigma\upsilon\nu^2\chi - 3\sigma\upsilon\nu\chi + 2 = 0$  (μονάδες18)

**Γ<sub>2</sub>)** Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης που βρίσκονται στο διάστημα  $[0, 2\pi]$  (μονάδες7)

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ<sub>1</sub>)** Να βρείτε τα  $\chi$  για τα οποία ορίζεται η εξίσωση:

$$\sqrt{x-2} + \frac{x-2}{2\sqrt{x-2}} = 3 \quad \text{(μονάδες 5)}$$

**Δ<sub>2</sub>)** Να λύσετε την εξίσωση του ερωτήματος Δ<sub>1</sub>. (μονάδες 20)

ΣΧΟΛ.ΕΤΟΣ: 2011-2012

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΕΣ - ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**

ΤΑΞΗ: Β' Λυκείου

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: Άλγεβρα

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A.** Να αποδείξετε ότι : « Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x - \rho$  είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για  $x = \rho$  .Είναι δηλαδή  $\nu = P(\rho)$  ». **(12 μόρια)**
- B.** Τι ονομάζεται λογάριθμος του  $\theta$  ως προς βάση  $a$ ;  $(\log_a \theta)$  **(5 μόρια)**
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την έκφραση «σωστό» ή «λάθος».
- α.** Το πεδίο ορισμού της εκθετικής συνάρτησης  $f(x) = a^x$  είναι το  $\mathbb{R}$ .
- β.** Ισχύει  $\ln e = 0$ .
- γ.** Ισχύει  $\ln x < 0$  , αν  $0 < x < 1$  .
- δ.** Η λογαριθμική συνάρτηση  $f(x) = \ln x$  , έχει σύνολο τιμών το  $(0, +\infty)$  . **(8 μόρια)**

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$  .

- α.** Να λυθεί η εξίσωση  $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  . **(9 μόρια)**
- β.** Να βρείτε την περίοδο , την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $g(x) = 2f(4x)$  . **(6 μόρια)**
- γ.** Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  , ισχύει  $g(x) = 1$  . **(10 μόρια)**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 + x^2 - \alpha x + 2$  .

- α.** Να βρεθεί η τιμή του  $\alpha$  ώστε το  $P(x)$  να έχει παράγοντα το  $(x+2)$  . **(7 μόρια)**
- β.** Για  $\alpha = 5$  , να λυθεί η εξίσωση  $P(x) = 0$  . **(10 μόρια)**
- γ.** Για  $\alpha = 5$  , να κάνετε την διαίρεση  $P(x) \div (x^2 - 1)$  και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. **(8 μόρια)**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$  και  $g(x) = \ln(e^x - 1)$  .

- α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού των δύο συναρτήσεων. **(8 μόρια)**
- β.** Να δείξετε ότι  $f(2) + 3f(1) - f(3) = \ln 4$  **(7 μόρια)**
- γ.** Να λυθεί η εξίσωση  $f(e^x) = \ln 3 + g(x)$  . **(10 μόρια)**



**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑ**  
**ΤΑΞΗ Β ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑΤΑ**

1. Α) Να αποδείξετε ότι το υπολοιπο της διαίρεσης ενός πολυώνυμου  $P(x)$  με ένα πολυώνυμο της μορφής  $\chi - \rho$  είναι  $u = P(\rho)$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 11**

Β) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες

- 1)  $\ln(x-\psi) = \ln x - \ln \psi$ , όπου  $x, \psi$  θετικοί αριθμοί.
- 2) Το πολυώνυμο με τύπο  $P(x) = 5$  είναι μηδενικού βαθμού
- 3) Η συνάρτηση  $f(x) = \ln x$  είναι γνήσια φθίνουσα στο  $(0, +\infty)$
- 4)  $a^{\log_a \alpha} = \alpha$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 8.**

Γ) Να αντιστοιχίσετε τα πολυώνυμα της πρώτης στήλης με τις ρίζες τους στη δεύτερη στήλη.

- |                               |       |
|-------------------------------|-------|
|                               | a) -2 |
| 1) $P(x) = 3x - 12$           | b) -1 |
| 2) $Q(x) = x^2 - 5x + 6$      | c) 0  |
| 3) $R(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ | d) 2  |
|                               | e) 3  |
|                               | f) 4  |

**ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

2. Να λύσετε τις παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις

α)  $\eta\mu\chi = \frac{1}{2}$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

β)  $\sigma\upsilon\nu(\chi - \pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

γ)  $3\epsilon\phi^2\chi - 2\sqrt{3}\epsilon\phi\chi - 3 = 0$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 9**

3. Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = \chi(x^2 + \lambda) + k\chi^2 + 5$  με παράγοντα το  $\chi - 1$  και  $P(-2) = 3$

A) Βρείτε τα  $k, \lambda$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 9**

B) Αν  $k = -1$  και  $\lambda = -5$

1) Λύστε την εξίσωση  $P(x) = 0$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

2) Λύστε την ανίσωση  $P(x) \leq 8$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

4 Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(e^x - 2) - \ln(e^x - 1)$

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 7**

Β) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{e^x - 1}\right)$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 7**

Γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = -\ln 2$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

Δ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  δεν τέμνει την ευθεία με εξίσωση  $\psi = \chi$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

A. Αν η εξίσωση  $ax^2 + bx + c = 0$  με  $a \neq 0$  έχει πραγματικές ρίζες  $x_1, x_2$  να αποδείξετε ότι:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad (\text{Μονάδες 10})$$

B. Αν  $(a_n)$  είναι μια γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο  $a_1$  και λόγο  $\lambda \neq 1$  να συμπληρώσετε τις ισότητες:

$$a_n = \dots\dots\dots \quad S_n = \dots\dots\dots$$

Όπου  $a_n$  ο  $n^{\text{ος}}$  όρος της προόδου και  $S_n$  το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων της.

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**.

α. Αν οι μη μηδενικοί αριθμοί  $a, b, c$  είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου τότε ισχύει:  $b^2 = a \cdot c$ .

β. Αν  $a > 0$  και  $n, \mu$  θετικοί ακέραιοι τότε:  $\sqrt[n]{\sqrt[\mu]{a}} = \sqrt[n+\mu]{a}$ .

γ. Η εξίσωση  $x^y = a$ , με  $a < 0$  και  $n$  άρτιο φυσικό αριθμό είναι αδύνατη.

δ. Για κάθε πραγματικούς αριθμούς  $a$  και  $b$  ισχύει:  $|a + b| > |a| + |b|$ .

ε. Έστω οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  με εξισώσεις  $y = a_1x + \beta_1$  και  $y = a_2x + \beta_2$  αντιστοίχως, τότε αν  $a_1 = a_2$  και  $\beta_1 \neq \beta_2$  οι ευθείες ταυτίζονται.

(Μονάδες 10)

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος: 5, 8, 11, ...

Να βρείτε:

α) Την διαφορά  $\omega$  και τον 50<sup>ο</sup> όρο της προόδου.

(Μονάδες 8)

β) Τον όρο της προόδου που είναι ίσος με 65.

(Μονάδες 9)

γ) Το άθροισμα των 40 πρώτων όρων της προόδου.

(Μονάδες 8)

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 + 2\lambda x + 2 - \lambda = 0$  με  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

A) Για ποιες τιμές του  $\lambda$  η εξίσωση έχει δυο πραγματικές και άνισες ρίζες.

(Μονάδες 12)

B) Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης τότε:

α) Να βρεθούν συναρτήσει του  $\lambda$  το άθροισμα  $S$  και το γινόμενο  $P$  των ριζών.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το  $\lambda$  ώστε να ισχύει η σχέση:  $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = -4$ .

(Μονάδες 8)

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{\sqrt{|x-1|-2}}{x-4}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα σημεία που η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \sqrt[3]{2f(5)} - \sqrt{3}\sqrt{f(7)} + (f(-1))^2$$

(Μονάδες 8)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

A) Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x-\rho$  είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για  $x=\rho$ , δηλαδή  $u=P(\rho)$ . (8 μονάδες)

B) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες: (10 μονάδες)

α) Η ακολουθία 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... είναι μία αριθμητική πρόοδος.

β) Αν ο αριθμός 3 είναι ρίζα ενός πολυωνύμου  $P(x)$  τότε  $P(3)=3$ .

γ) Ο  $n^{\text{ος}}$  όρος μίας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο  $a_1$  και λόγο  $\lambda$  είναι:

$$a_n = a_1 + (n-1)\lambda.$$

δ) Αν διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο  $5^{\text{ου}}$  βαθμού με ένα πολυώνυμο  $3^{\text{ου}}$  βαθμού τότε το πηλίκο θα είναι πολυώνυμο  $2^{\text{ου}}$  βαθμού.

ε) Ο έβδομος όρος της γεωμετρικής προόδου 3, 6, 12, 24, ... είναι ο αριθμός 96.

ς) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις: (7 μονάδες)

α) Το άθροισμα των πρώτων  $n$  όρων αριθμητικής προόδου ( $a_n$ ) με διαφορά  $\omega$  είναι  $S_n = \dots$

β) Το άθροισμα των πρώτων  $n$  όρων γεωμετρικής προόδου ( $a_n$ ) με λόγο  $\lambda \neq 1$  είναι  $S_n = \dots$

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις μεταξύ πολυωνύμων:

A)  $(x^3 + 2x^2 + 1) + (2x^3 + 4x^2 + 5x)$  (6 μονάδες)

B)  $(2x^3 - 4x^2 - 5x + 4) - (4x^2 - 5x - 6)$  (6 μονάδες)

Γ)  $(x^2 + 3) \cdot (x - 6)$  (6 μονάδες)

Δ)  $(x^3 + 5x^2 + 3x - 8) : (x - 2)$  (7 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

A)  $9+12+15+\dots+90$  (12 μονάδες)

B)  $2+8+32+\dots+8192$  (13 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Μία στέγη σχήματος τραapeζίου έχει 15 σειρές κεραμίδια. Η πρώτη σειρά έχει 53 κεραμίδια και κάθε επόμενη σειρά έχει δύο κεραμίδια λιγότερα. Να υπολογίσετε:

A) Πόσα κεραμίδια έχει η 15<sup>η</sup> σειρά. (12 μονάδες)

B) Πόσα κεραμίδια έχει συνολικά η στέγη. (13 μονάδες)

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.

**ΘΕΜΑ1ο** : Α) Αν  $a > 0$  με  $a \neq 1$ , τότε για οποιαδήποτε  $\theta_1, \theta_2 > 0$  να αποδείξετε ότι:  
 $\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$ .

(Μονάδες 15)

Β) Να συμπληρώσετε στο γραπτό σας τους παρακάτω τύπους, ώστε να προκύψουν γνωστές ιδιότητες ή ορισμοί ή θεωρήματα.

- i. Αν  $\eta \mu x = \eta \mu \theta$  τότε  $x = \dots$  ή  $\dots$ ,
- ii. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x - \rho$  είναι  $\nu = \dots$
- iii. Η ακολουθία  $\alpha_n$  είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά  $\omega$ , αν και μόνο αν ισχύει:  $\alpha_{n+1} = \dots$
- iv. Εάν  $x_1 < x_2$  τότε  $e^{-x_1} \dots e^{-x_2}$
- v. Εάν  $\theta > 0$  τότε  $\ln \theta = x \Leftrightarrow \dots$  (Μονάδες 5)

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

- i. Η εξίσωση  $2x^2 + 4x - 3 = 0$  έχει ακέραιες ρίζες.
- ii. Η συνάρτηση  $F(x) = e^{-x}$  είναι γνησίως φθίνουσα, με σύνολο τιμών το διάστημα  $(0, +\infty)$ .
- iii. Αν πολλαπλασιάσουμε όλους τους όρους μιας αριθμητικής προόδου με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό, τότε προκύπτει, στην ίδια σειρά, πάλι μια αριθμητική πρόοδος.
- iv. Η εξίσωση  $\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x = 2$  έχει λύση.
- v. Για κάθε  $\theta > 0$  ισχύει  $\log \theta = \frac{\ln \theta}{\ln 10}$ . (Μονάδες 5)

**ΘΕΜΑ2ο** : Δίνεται πολυώνυμο  $P(x) = x^2 + ax^2 + \beta x - 2$  όπου  $a, \beta \in \mathbb{R}$ , το οποίο έχει ρίζα το 1 και διαιρούμενο με το  $x - 2$  αφήνει υπόλοιπο 12.

Α) Να βρείτε τα  $a$  και  $\beta$ . (Μονάδες 10)

Β) Αν  $a=2$  και  $\beta=-1$  τότε :

- i. Να λυθεί η εξίσωση  $P(x)=0$  (Μονάδες 10)  
 ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση του  $P(x)$  βρίσκεται πάνω από το  $x$ . (Μονάδες 5)

**ΘΕΜΑ3ο** : Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι  $a_2 = 77$  και  $a_{21} = 20$

- A) Να βρείτε το  $a_1$  και το  $\omega$  (Μονάδες 10)  
 B) Αν  $a_1 = 80$  και  $\omega = -3$
- i. Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου ισούται με  $-97$ . (Μονάδες 5)  
 ii. Να βρείτε το άθροισμα των 11 πρώτων όρων. (Μονάδες 5)  
 iii. Αν μεταξύ του  $2^{99}$  και του  $20^{99}$  όρου θέλουμε να παρεμβάλουμε 8 όρους ώστε να προκύψει ξανά αριθμητική πρόοδος, να βρεθεί το  $\omega$  της νέας αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 5)

**ΘΕΜΑ4ο** : Αν  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  και οι αριθμοί  $\log(1+\sigma\upsilon\nu\theta)$ ,  $\log(\eta\mu\theta)$ ,  $-\log 2$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε :

- A) Να δείξετε ότι  $\eta\mu^2\theta = \frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{2}$  (Μονάδες 10)  
 B) Να λύσετε την εξίσωση  $\eta\mu^2\theta = \frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{2}$  (Μονάδες 15)





**Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ  
Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτεινούςας.  
(Μονάδες: 9)
- A2. Αφού αντιγράψετε στην κόλλα σας τον παρακάτω πίνακα να τον συμπληρώσετε (θεωρήστε τα βασικά κανονικά πολύγωνα εγγεγραμμένα σε κύκλο ακτίνας R).
- |                     | Ισόπλευρο τρίγωνο | Τετράγωνο | Κανονικό εξάγωνο |
|---------------------|-------------------|-----------|------------------|
| Πλευρά $\lambda_n$  |                   |           |                  |
| Απόστημα $\alpha_n$ |                   |           |                  |
- (Μονάδες: 6)
- A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- Σε κάθε κανονικό  $n$ -γωνο ισχύει η σχέση  $\alpha_n^2 + \frac{\lambda_n^2}{4} = R^2$
  - Σε κάθε τρίγωνο ισχύει:  $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2 + \frac{\mu_a^2}{2}$
  - Σε κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$  το εμβαδόν του δίνεται από τον τύπο  $E = \tau \cdot \rho$ , όπου  $\tau$  είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου και  $\rho$  η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.
  - Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτεινούςα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτεινούςα.
  - Το μήκος τόξου  $\mu^\circ$  σε κύκλο ακτίνας R δίνεται από τον τύπο:  $\ell = \frac{\pi R \mu}{360^\circ}$
- (Μονάδες: 10)

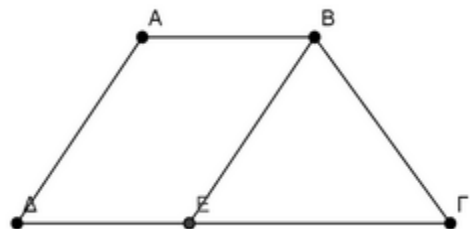
**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρές  $\alpha=14$ ,  $\beta=6$  και  $\gamma=10$ .

- Να εξετάσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες  
(Μονάδες: 7)
- Να υπολογίσετε τη γωνία A  
(Μονάδες: 6)
- Να υπολογίσετε την  $\mu_a$   
(Μονάδες: 6)
- Να υπολογίσετε την προβολή της  $\mu_a$  πάνω στη  $B\Gamma$ .  
(Μονάδες: 6)

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $AB = 4$ ,  $\Gamma\Delta = 10$ ,  $A\Delta = B\Gamma = 5$ . Από την κορυφή B φέρουμε παράλληλη στην  $A\Delta$  που τέμνει την  $\Gamma\Delta$  στο σημείο E.



- Να δείξετε ότι  $(B\epsilon\Gamma)=12$   
(Μονάδες: 7)
- Να βρείτε το εμβαδόν του τραπέζιου  
(Μονάδες: 8)
- Να υπολογίσετε την ακτίνα  $\rho$  του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο  $B\epsilon\Gamma$   
(Μονάδες: 5)

- Γ4. Να υπολογίσετε την ακτίνα  $R$  του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $ΒΕΓ$ .  
(Μονάδες: 5)

### **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται κύκλος  $(O,R)$  και τα διαδοχικά του σημεία  $A,B$  και  $\Gamma$ , ώστε  $AB=\lambda_3$  και  $B\Gamma=\lambda_6$ . Αν  $AM$  είναι διάμεσος στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  που προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο στο  $\Delta$ , τότε:

- Δ1. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο (Μονάδες: 5)
- Δ2. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως συνάρτηση του  $R$ . (Μονάδες: 5)
- Δ3. Να αποδείξετε ότι  $AM=\frac{R\sqrt{13}}{2}$  και  $M\Delta=\frac{R\sqrt{13}}{26}$  (Μονάδες: 8)
- Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα  $BO\Gamma$ . (Μονάδες: 7)

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

**ΘΕΜΑ Α**

1. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτεινούσα ισούται με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτεινούσα.

**Μονάδες 10**

2. Πότε ένα κυρτό πολύγωνο λέγεται κανονικό;

**Μονάδες 5**

3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν  $\alpha, \beta, \gamma$  πλευρές τριγώνου  $AB\Gamma$  με  $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$  τότε  $\hat{A} < 90^\circ$ .

β. Σε ένα κανονικό  $n$ -γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας  $R$  ισχύει:  $\alpha_n^2 + \lambda_n^2 = R^2$ , όπου  $\lambda_n$  η πλευρά και  $\alpha_n$  το απόστημα του.

γ. Το μήκος τόξου  $\mu^0$  ενός κύκλου  $(O, R)$  ισούται με:  $l = \frac{\pi \cdot R \cdot \mu}{180}$ .

δ. Η πλευρά ενός κανονικού τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο  $(O, R)$  ισούται με  $\lambda_4 = R\sqrt{2}$ .

ε. Ένας τύπος για τον υπολογισμό του εμβαδού τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι και ο  $E = 2\tau \cdot \rho$ , όπου  $\rho$  η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου και  $\tau$ , η ημιπερίμετρος του.

**Μονάδες 5x2=10**

**ΘΕΜΑ Β**

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρές  $\alpha = 6, \beta = 14, \gamma = 10$ .

16. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.
17. Να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι  $(AB\Gamma) = 15\sqrt{3}$  τ. μον.
18. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου  $(I, \rho)$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
19. Να υπολογιστεί το μήκος της διαμέσου  $\mu_\beta$ .

**Μονάδες 6+6+6+7=25**

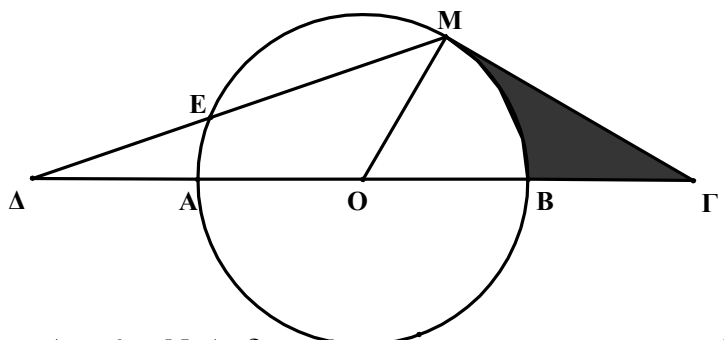
**ΘΕΜΑ Γ**

Σε κύκλο  $(O, R)$  προεκτείνουμε την διάμετρο

$AB$  κατά τμήμα

$B\Gamma = R$  και κατά τμήμα  $A\Delta = R$ . Φέρνουμε

τέμνουσα  $\Delta EM$  τέτοια ώστε  $\Delta M = R\sqrt{7}$ .



14. Να αποδείξετε ότι  $\Gamma M = R\sqrt{3}$ .
15. Να αποδείξετε ότι το  $\Gamma M$  είναι εφαπτόμενο τμήμα.
16. Να υπολογίσετε την  $\Delta E$  σε συνάρτηση του  $R$ .
17. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μικτόγραμμου τριγώνου  $MB\Gamma$ .

Μονάδες  $6+6+6+7=25$

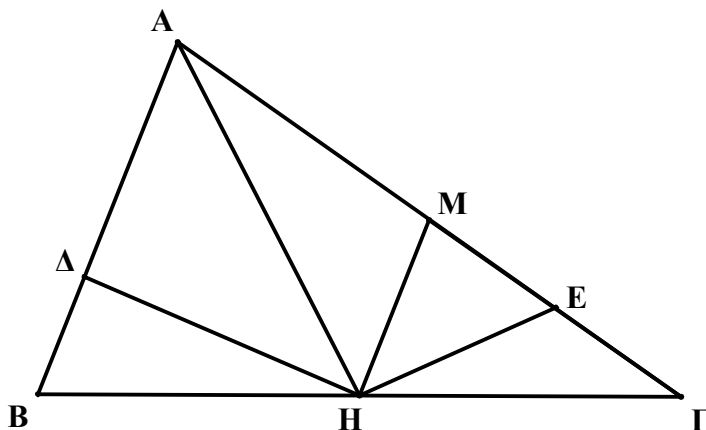
### ΘΕΜΑ Δ

Στο διπλανό σχήμα δίνονται:

$$A\Delta = \frac{2}{3}AB, \quad AE = \frac{3}{4}A\Gamma,$$

Μ μέσο της  $A\Gamma$  και  $MH \parallel AB$ . Να αποδείξετε ότι:

18.  $(HME) = (HE\Gamma)$ .
19.  $2(HMA) = (ABH)$ .
20.  $\frac{(B\Delta H)}{(BAH)} = \frac{1}{3}$ .



Μονάδες  $8+8+9=25$

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΙΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ**  
**ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**  
**ΤΑΞΗ: Β ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα. (ΜΟΝΑΔΕΣ 10)  
 B) Να αντιστοιχίσετε τα σχήματα της στήλης Α με τους τύπους υπολογισμού του εμβαδού τους της στήλης Β.

Σχήματα	Τύποι εμβαδού
A) Τετράγωνο	1) $E = \alpha\beta$
B) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο	2) $E = \frac{(\beta + B)}{2} \nu$
Γ) Παραλληλόγραμμο	3) $E = \frac{1}{2} \alpha \nu_{\alpha} = \frac{1}{2} \beta \nu_{\beta} = \frac{1}{2} \gamma \nu_{\gamma}$
Δ) Τρίγωνο	4) $E = \alpha^2$
E) Τραπεζίο	5) $E = \alpha \nu_{\alpha} = \beta \nu_{\beta}$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

- Γ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με τις λέξεις **Σωστό(Σ)** ή **Λάθος(Λ)**:

- α) Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι  $\hat{A} < 1 \perp$  και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε:  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \text{ΑΔ}$ .  
 β) Σε κάθε τρίγωνο ισχύει η ισοδυναμία  $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ , αν και μόνο αν  $\hat{A} > 90^\circ$ .  
 γ) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $A = 90^\circ$ ) ισχύει  $AB^2 = B\Gamma^2 + A\Gamma^2$ .  
 δ) Το μήκος ενός κύκλου (Ο, R) δίνεται από τον τύπο  $E = \pi R^2$ .  
 ε) Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R η κεντρική γωνία  $\omega_n$  υπολογίζεται με την

$$\text{σχέση } \omega_n = \frac{\nu}{360^\circ} .$$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών  $\alpha=12, \beta=8, \gamma=6$ .

- A) Να εξετάσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

- B) Να υπολογίσετε την διάμεσο του  $\mu_{\alpha}$ .

(ΜΟΝΑΔΕΣ 15)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB=6, A\Gamma=8$  και  $\hat{A}=60^\circ$ . Να βρεθούν

- α) Το ύψος  $\nu_{\beta}$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

- β) το εμβαδόν (ΑΒΓ)

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

- γ) το ύψος  $\nu_{\alpha}$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 15)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Το άθροισμα των γωνιών ενός κανονικού πολυγώνου είναι 8 ορθές και το εμβαδόν του  $6\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>.

α) Να βρεθεί το πλήθος  $n$  των πλευρών του.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

β) Να βρεθεί η ακτίνα του  $R$ .

(ΜΟΝΑΔΕΣ 15)

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΔΥΟ (2)**

Όνοματεπώνυμο:.....Α.Κ.....

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του, είναι ίσο με το γινόμενο της υποτεινούς επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτεινούσα.

**Μονάδες 10**

**A2.** Να διατυπώσετε το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

**Μονάδες 5**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει  $\beta^2 > \alpha^2 + \gamma^2$  τότε το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο .

**β.** Η δύναμη ενός σημείου  $P$  ως προς κύκλο  $(O,R)$  δίνεται από τον τύπο

$$\Delta_{(O,R)}^P = OP^2 - R^2 .$$

**γ.** Το εμβαδόν τριγώνου  $AB\Gamma$  , δίνεται από τον τύπο  $(AB\Gamma) = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{4\rho}$  , όπου  $\rho$  η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

**δ.** Για την κεντρική γωνία  $\omega_n$  κάθε κανονικού πολυγώνου με  $n$  πλευρές ισχύει

$$\omega_n = \frac{360^\circ}{n} .$$

**ε.** Σε κάθε κανονικό πολύγωνο με  $n$  πλευρές , εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας  $R$

$$\text{ισχύει } \lambda_n^2 + \frac{\alpha_n^2}{4} = R^2 .$$

**Μονάδες 5x2=10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\alpha = 2 \cdot \gamma$  και  $\mu_\alpha = \frac{\alpha \cdot \sqrt{3}}{2}$  .

**B1.** Να δείξετε ότι  $\beta = \gamma \cdot \sqrt{7}$

**B2.** Να βρείτε το είδος του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως προς τις γωνίες του.

**B3.** Αν  $B\Delta$  το ύψος του τριγώνου, να δείξετε ότι:  $A\Delta = \frac{2 \cdot \gamma \cdot \sqrt{7}}{7}$

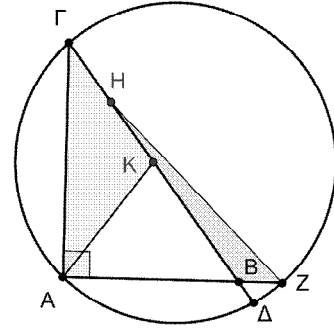
**B4.** Βρείτε το λόγο των εμβαδών:  $\frac{(B\Delta M)}{(AB\Gamma)}$  , όπου  $M$  το μέσο της πλευράς  $\beta$  .

**Μονάδες 5+5+8+7=25**



### ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , ( $\hat{A} = 90^\circ$ )  
 με  $B\Gamma = 20$  και τον κύκλο που διέρχεται από  
 τα  $A$ ,  $\Gamma$  και τέμνει τις προεκτάσεις των  
 $B\Gamma$  και  $AB$  στα σημεία  $\Delta$  και  $Z$   
 αντίστοιχα ώστε  $B\Delta = 1,8$ ,  $AB > BZ$   
 και  $AZ = 15$ .



**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $AB = 12$ .

**Γ2.** Να υπολογίσετε το μήκος της  $A\Gamma$ .

**Γ3.** Αν  $K$  το μέσο της  $B\Gamma$  και  $H$  το μέσο της  $K\Gamma$ , να αποδείξετε ότι  $3(AK\Gamma) = 8(BHZ)$ .

**Μονάδες 9+7+9=25**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται κύκλος  $(K, 5)$ , η διάμετρος του  $AB$  και ένα  
 σημείο του  $\Gamma$  διαφορετικό των  $A$  και  $B$ . Η εφαπτόμενη  
 του κύκλου στο  $\Gamma$  τέμνει τις κάθετες στα άκρα  $A$  και  
 $B$  της διαμέτρου  $AB$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα.  
 Έστω  $M$  το μέσο της  $EZ$ .

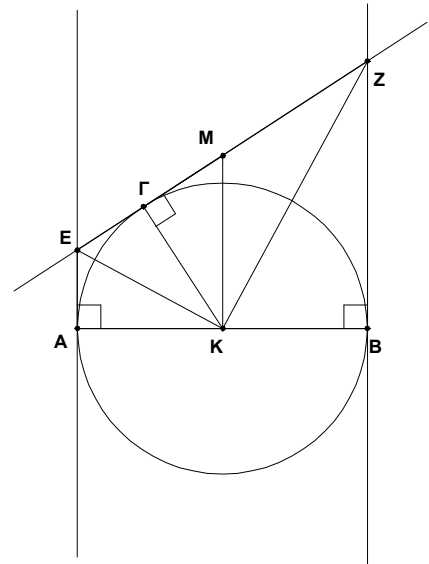
**Δ1.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $EKZ$  είναι  
 ορθογώνιο.

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι :  $AE \cdot BZ = 25$ .

**Δ3.** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\Delta_{(K,R)}^E \cdot \Delta_{(K,R)}^Z$$

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τραπέζιου  
 $(ABZE) = AB \cdot KM$ . **Μονάδες 5+5+8+7=25**





ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΔΙΑ ΒΙΟΥ  
ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ Δ/ΝΣΗ Π & Δ ΕΚΠ/ΣΗΣ Ν.  
ΑΙΓΑΙΟΥ  
Δ/ΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ  
:ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΤΑΞΗ :Β΄  
ΛΥΚΕΙΟΥ

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

- Α.α.Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A=90^\circ$  ισχύει  $B\Gamma^2=AB^2+A\Gamma^2$ .  
β. (μονάδες 10)
- β.Να διατυπώσετε το 1<sup>ο</sup> θεώρημα διαμέσου. (μονάδες 5)
- Β.Να χαρακτηρίσετε ως σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις
- α.Αν  $AB$  κάθετος πλευρά και  $A\Delta$  ύψος ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$  με  $A=90^\circ$ , τότε  $AB^2=B\Gamma \cdot B\Delta$
- β.Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  αν  $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$  τότε αυτο είναι οξυγώνιο.
- γ.Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο πλευρας  $a$  το εμβαδόν του είναι  $E = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$
- δ.Η πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο  $(O,R)$  είναι  $\lambda_3 = R\sqrt{3}$
- ε.Το απόστημα τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο  $(O,R)$  είναι  $\alpha_4 = R\sqrt{2}$  (μονάδες 10)

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

- Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=6$ ,  $A\Gamma=8$  και εμβαδό  $E=12\sqrt{3}$ . Να υπολογίσετε :
- α.την γωνία  $A$  του τριγώνου. (μονάδες 6)
- β.την πλευρά  $B\Gamma$ . (μονάδες 6)
- γ.την διάμεσο  $AM$ . (μονάδες 6)
- δ.την προβολή  $M\Delta$  της διαμέσου  $AM$  στην πλευρά  $B\Gamma$ . (μονάδες 7)

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

- Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και σημείο  $E$  της  $AB$  ώστε  $AE = \frac{1}{3} AB$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $B\Gamma$  προς το μέρος του  $B$ , κατά ευθυγράμμο τμήμα  $B\Delta = \frac{1}{2} B\Gamma$  και φέρνουμε την  $A\Delta$ .
- α.Να αποδείξετε ότι  $\frac{(BE\Delta)}{(AB\Delta)} = \frac{2}{3}$  (μονάδες 10)
- β.Αν  $(AB\Gamma)=12$  να υπολογίσετε τα εμβαδά  $(BE\Delta)$ ,  $(A\Delta\Gamma)$ . (μονάδες 15)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται κύκλος  $(O,R)$  και εγγεγραμμένο σαυτόν τετράγωνο  $ΑΒΓΔ$ . Φέρνουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο  $Γ$  που τέμνει την προέκταση της  $ΑΒ$  στο  $Ε$ . Να βρείτε :

α. το εμβαδόν του τραπέζιου  $ΑΕΓΔ$ .

(μονάδες 8)

β. το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος  $ΟΒΓ$ .

(μονάδες 7)

γ. το μήκος και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου  $ΒΓΕ$

(μονάδες 10)

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**

**ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A<sub>1</sub>)** Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτεινούς επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτεινούσα.

**A<sub>2</sub>)** Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα στοιχείο της στήλης Β

1. Πλευρά κανονικού εξαγώνου ( $\lambda_6$ )	i.	R
2. Πλευρά κανονικού τετραγώνου ( $\lambda_4$ )	ii.	$R\sqrt{2}$
3. Απόστημα κανονικού τριγώνου ( $\alpha_3$ )	iii.	$R\sqrt{3}$
4. Απόστημα κανονικού εξαγώνου ( $\alpha_6$ )	iv.	R / 2
	v.	$R\sqrt{2} / 2$
	vi.	$R\sqrt{3} / 2$

**A<sub>3</sub>)** Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

- i. Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R με πλευρά  $\lambda_n$  και απόστημα  $\alpha_n$  ισχύει η σχέση  $4\alpha_n^2 + \lambda_n^2 = 4R^2$
- ii. Η δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R) είναι πάντα θετική.
- iii. Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο ομοιότητας.
- iv. Το εμβαδόν E ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς a δίνεται από τον τύπο  $E = a^2\sqrt{3}/4$

ΜΟΝΑΔΕΣ (9+8+8)

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με πλευρές AB = 5cm, ΑΓ= 3cm και ΒΓ= 7cm.

**B<sub>1</sub>)** Να δείξετε ότι η γωνία Α είναι αμβλεία.

**B<sub>2</sub>)** Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς ΑΒ πάνω στην ΒΓ.

**B<sub>3</sub>)** Να υπολογίσετε την διάμεσο ΑΜ όπου Μ, το μέσο της ΒΓ.

ΜΟΝΑΔΕΣ (8+9+8)

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται κύκλος (O,R) και οι χορδές AB=R και ΑΓ=  $R\sqrt{2}$  οι οποίες είναι προς το ίδιο μέρος της ακτίνας ΟΑ.

**Γ<sub>1</sub>)** Να υπολογίσετε τις γωνίες ΑΟΒ και ΑΟΓ.

**Γ<sub>2</sub>)** Αν ΑΟΒ =  $60^\circ$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα (O, AB) και το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περικλείεται από την χορδή ΑΒ και το τόξο ΑΒ.

**Γ<sub>3</sub>)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ το οποίο αποτελείται από τις χορδές ΑΒ, ΑΓ και το τόξο ΒΓ.

ΜΟΝΑΔΕΣ (8+8+9)

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  με  $ΑΒ=10$ ,  $ΑΔ=4$  και γωνία  $Δ=60^0$ .

Στην πλευρά  $ΑΒ$  θεωρούμε τα σημεία  $Ε$ ,  $Ζ$  τέτοια ώστε  $ΑΕ=ΕΖ=ΖΒ$ .

Αν  $Η$  το σημείο τομής των  $ΔΕ$  και  $ΓΖ$  τότε να υπολογίσετε:

Δ<sub>1</sub>) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου  $ΑΒΓΔ$ .

Δ<sub>2</sub>) Το εμβαδόν του τραπεζίου  $ΓΔΕΖ$ .

Δ<sub>3</sub>) Το εμβαδόν του τριγώνου  $ΗΕΖ$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ (10+10+5)

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ**  
**ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**  
**ΤΑΞΗ: Β ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

A) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα. (ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

B) Να αντιστοιχίσετε τα σχήματα της στήλης Α με τους τύπους υπολογισμού του εμβαδού τους της στήλης Β.

Σχήματα	Τύποι εμβαδού
A) Τετράγωνο	1) $E = \alpha\beta$
B) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο	2) $E = \frac{(\beta + B)}{2} \nu$
Γ) Παραλληλόγραμμο	3) $E = \frac{1}{2} \alpha \nu_{\alpha} = \frac{1}{2} \beta \nu_{\beta} = \frac{1}{2} \gamma \nu_{\gamma}$
Δ) Τρίγωνο	4) $E = \alpha^2$
E) Τραπεζίο	5) $E = \alpha \nu_{\alpha} = \beta \nu_{\beta}$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με τις λέξεις **Σωστό(Σ)** ή **Λάθος(Λ)**:

α) Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι  $\hat{A} < 1 \text{ L}$  και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε:  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \text{ΑΔ}$ .

β) Σε κάθε τρίγωνο ισχύει η ισοδυναμία  $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ , αν και μόνο αν  $\hat{A} > 90^\circ$ .

γ) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $A = 90^\circ$ ) ισχύει  $AB^2 = B\Gamma^2 + A\Gamma^2$ .

δ) Το μήκος ενός κύκλου (Ο, R) δίνεται από τον τύπο  $E = \pi R^2$ .

ε) Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R η κεντρική γωνία  $\omega_n$  υπολογίζεται με την

$$\text{σχέση } \omega_n = \frac{\nu}{360^\circ} \cdot \quad (\text{ΜΟΝΑΔΕΣ 10})$$

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών  $\alpha=12, \beta=8, \gamma=6$ .

A) Να εξετάσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

B) Να υπολογίσετε την διάμεσο του  $\mu_{\alpha}$ .

(ΜΟΝΑΔΕΣ 15)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB=6, A\Gamma=8$  και  $\hat{A}=60^\circ$ . Να βρεθούν

α) Το ύψος  $\nu_{\beta}$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

β) το εμβαδόν (ΑΒΓ)

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

γ) το ύψος  $\nu_{\alpha}$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 15)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Το άθροισμα των γωνιών ενός κανονικού πολυγώνου είναι 8 ορθές και το εμβαδόν του  $6\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>.

α) Να βρεθεί το πλήθος  $n$  των πλευρών του.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

β) Να βρεθεί η ακτίνα του  $R$ .

(ΜΟΝΑΔΕΣ 15)

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ**

**ΣΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς ισούται με το γινόμενο της υποτεινούςας επι την προβολή αυτής στην υποτεινούςα.

**Μονάδες 12**

**A2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- i.** Αν  $\beta^2 < \alpha^2 + \gamma^2$  τότε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι οξυγώνιο.
- ii.** Αν δυο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών τους.
- iii.** Αν  $P$  είναι εξωτερικό σημείο κύκλου  $(O,R)$  και  $PE$  εφαπτόμενο τμήμα τότε  $PE^2 = \Delta_{(O,R)}^P$ .
- iv.** Η σχέση που συνδέει τις γωνίες  $\varphi_v$  και  $\omega_v$  κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο είναι  $\varphi_v = 180^\circ + \omega_v$ .

**Μονάδες 8**

**A3.** Τι ονομάζεται δύναμη του σημείου  $P$  ως προς κύκλο  $(O,R)$  και πως συμβολίζεται.

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\alpha = 12$ ,  $\beta = \sqrt{97}$  και  $\mu_\alpha = 5$ .

**B1.** Να υπολογίσετε την πλευρά  $\gamma$ .

**Μονάδες 8**

**B2.** Να βρείτε το είδος του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως προς τις γωνίες του.

**Μονάδες 8**

**B3.** Να υπολογίσετε την προβολή της διαμέσου  $\mu_\alpha$  στη  $B\Gamma$ .

**Μονάδες 9**



### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρές

$AB = 20$ ,  $A\Gamma = 12$  και γωνία  $\hat{A} = 30^\circ$ . Αν

$AM$  διάμεσος και στην προέκταση της πλευράς  $AB$  θεωρήσουμε σημείο  $\Delta$

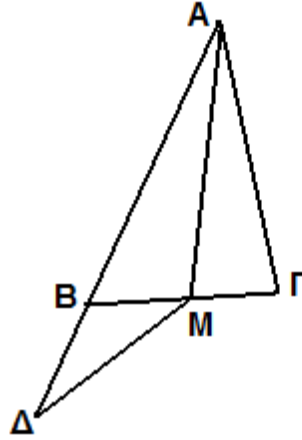
ώστε  $B\Delta = \frac{1}{3}AB$  να δείξετε ότι:

**Γ1.**  $(AB\Gamma) = 60\tau.μ.$

Μονάδες 12

**Γ2.**  $(B\Delta M) = 10\tau.μ.$

Μονάδες 13



### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  εγγεγραμμένο σε

κύκλο  $(O, R)$  με  $AB = R\sqrt{2}$ ,  $\hat{B} = 60^\circ$  και

ύψος  $AK$ .

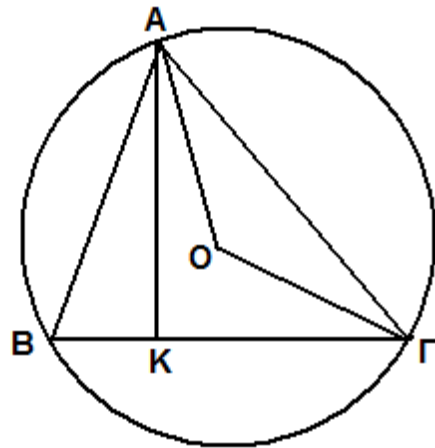
Να υπολογίσετε :

**Δ1.** Την πλευρά  $A\Gamma$  ως συνάρτηση της ακτίνας  $R$ .

Μονάδες 10

**Δ2.** Την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως συνάρτηση της ακτίνας  $R$ .

Μονάδες 15



**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ  
ΤΑΞΗ: Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.** Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, είναι ίσον με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών του στην υποτείνουσα.

**(Μονάδες 11)**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Η δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O, R) ορίζεται με τον τύπο:  $\Delta_{(O,R)}^P = OP^2 - R^2$ .

**β.** Αν δυο τρίγωνα ABΓ και A'B'Γ' είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ τότε ισχύει :

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = 2\lambda$$

**γ.** Αν ABΓ είναι τρίγωνο με πλευρές α,β,γ και  $\mu_\alpha$  η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά α, τότε ισχύει:  $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$

**δ.** Η γωνία  $\varphi_n$  ενός κανονικού n-γώνου και η κεντρική του γωνία  $\omega_n$ , είναι συμπληρωματικές.

**(Μονάδες 4X2= 08)**

**Γ.** Μεταφέρετε και συμπληρώσετε στο τετράδιό σας, τον παρακάτω πίνακα, με τις πλευρές και τα αποστήματα, των κανονικών πολυγώνων, που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο ακτίνας R.

	Τετράγωνο	Κανονικό εξάγωνο	Ισόπλευρο τρίγωνο
Πλευρά $\lambda_n$			
Απόστημα $\alpha_n$			

**(Μονάδες 06)**

### ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρές :  $\alpha = 7$  ,  $\beta = 6$  και  $\gamma = 3$ ..

α. Να βρείτε το είδος του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως προς τις γωνίες του.

(Μονάδες 12)

β. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου  $\mu_\beta$  του τριγώνου  $AB\Gamma$

(Μονάδες 13)

### ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = 10cm$  και ύψος  $AH = 4cm$  που αντιστοιχεί στην πλευρά  $\Gamma\Delta$ .

Αν το σημείο  $M$  είναι το μέσον της πλευράς  $AB$ , τότε :

α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $(B\Gamma M)$  του τριγώνου  $B\Gamma M$ .

(Μονάδες 12)

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $(AM\Gamma\Delta)$  του τραπέζιου  $AM\Gamma\Delta$ .

(Μονάδες 07)

γ. Να αποδείξετε ότι :  $(B\Gamma M) = \frac{1}{4}(AB\Gamma\Delta)$

(Μονάδες 06)

### ΘΕΜΑ 4°

Στο διπλανό σχήμα, ο κύκλος έχει ακτίνα  $R = 2cm$

Αν το  $PA$  είναι εφαπτόμενο τμήμα,  $PB\Gamma$  μία τυχαία τέμνουσα του κύκλου και  $\widehat{AOM} = 60^\circ$ , τότε :

α. Να αποδείξετε ότι :  $OP = 2R$ .

(Μονάδες 04)

β. Να υπολογίσετε το γινόμενο  $PB \cdot P\Gamma$ .

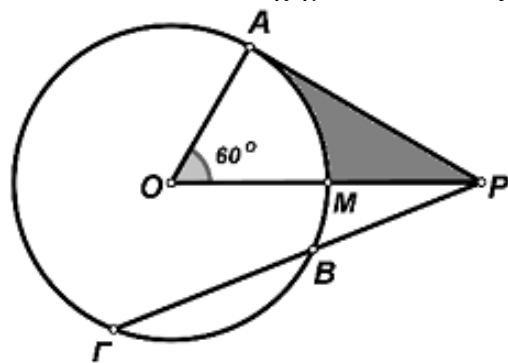
(Μονάδες 07)

γ. Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου  $\widehat{AM}$ .

(Μονάδες 07) δ. Να

υπολογίσετε την περίμετρο του σκιασμένου χωρίου  $AMP$ .

(Μονάδες 07)



**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- I. Αν  $B, \beta$  οι βάσεις τραπεζίου και  $υ$  το ύψος του, να δείξετε ότι το εμβαδόν του  $E$  ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του,

δηλαδή: 
$$E = \frac{(B + \beta)}{2} \cdot υ$$

Μονάδες 9

- II. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας την λέξη «Σωστό» ή «Λάθος» δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν  $AD$  είναι το ύψος ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$  που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα  $B\Gamma$  τότε ισχύει:  $AD^2 = BD \cdot \Gamma D$

β. Αν  $AM$  διάμεσος τριγώνου  $AB\Gamma$  τότε ισχύει:  $(ABM) = (A\Gamma M)$

γ. Σε δύο κανονικά  $n$ -γωνα ισχύει:  $\frac{\lambda_n}{\lambda'_n} = \frac{\alpha_n}{\alpha'_n} = \frac{R}{R'}$

δ. Η πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο  $(O, R)$  είναι  $\lambda_6 = R\sqrt{3}$ .

Μονάδες 8

- III. Να αντιστοιχίσετε τις τιμές της δύναμης του σημείου  $P$  ως προς τον κύκλο  $(O, R)$ , της στήλης A, με την θέση του σημείου  $P$ , ως προς τον κύκλο  $(O, R)$ , της στήλης B.

ΣΤΗΛΗ A	ΣΤΗΛΗ B
A. $\Delta_{(O,R)}^P = -R^2$	1. Το σημείο $P$ είναι εσωτερικό του κύκλου $(O, R)$
B. $\Delta_{(O,R)}^P > 0$	2. Το σημείο $P$ ταυτίζεται με το κέντρο του κύκλου $(O, R)$
Γ. $\Delta_{(O,R)}^P = 0$	3. Το σημείο $P$ είναι εξωτερικό του κύκλου $(O, R)$
Δ. $\Delta_{(O,R)}^P < 0$	4. Το σημείο $P$ ανήκει στον κύκλο $(O, R)$

Μονάδες 8

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\gamma = \beta\sqrt{2}$  και  $\mu_\beta = \frac{3\beta}{2}$ .

I. Να δείξετε ότι:  $\alpha = \beta\sqrt{3}$

Μονάδες 9

II. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

Μονάδες 7

III. Να δείξετε ότι η προβολή της διαμέσου  $\mu_\alpha$  στην πλευρά  $\alpha$  είναι ίση με  $\frac{\alpha}{6}$ .

Μονάδες 9

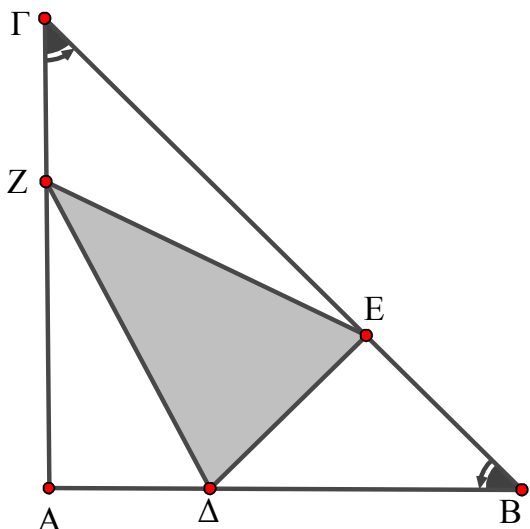
### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma = \alpha$ .

Στις πλευρές  $AB, B\Gamma, \Gamma A$  παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία  $\Delta, E, Z$  τέτοια ώστε:

$$A\Delta = \frac{1}{3}AB, \quad BE = \frac{1}{3}B\Gamma, \quad \Gamma Z = \frac{1}{3}A\Gamma, \quad \text{όπως στο σχήμα.} \quad \text{Να δείξετε ότι:}$$

- I.  $B\Gamma = \alpha\sqrt{2}$  Μονάδες 3
- II.  $(A\Delta Z) = (BE\Delta) = (\Gamma ZE) = \frac{\alpha^2}{9}$ . Μονάδες 10
- III.  $\frac{(A\Delta Z)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3}$ . Μονάδες 7
- IV.  $\frac{E}{(AB\Gamma)} = \pi$ . Όπου  $E$  το εμβαδό του Μονάδες 5  
 περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

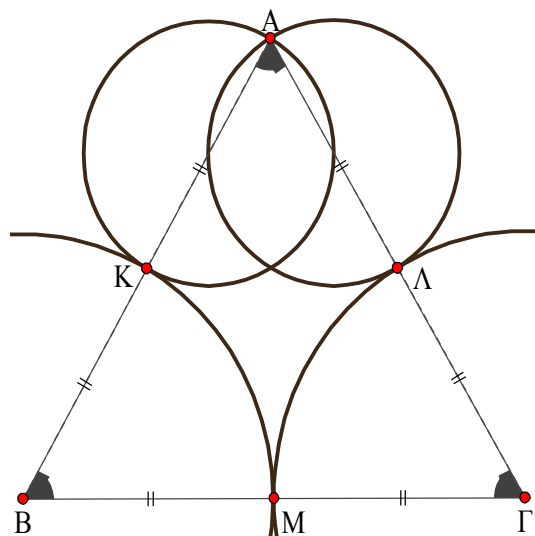


### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  πλευράς  $\alpha$  με  $K, \Lambda, M$  τα μέσα των πλευρών του  $AB, A\Gamma, B\Gamma$  αντίστοιχα. Εξωτερικά του τριγώνου είναι τα δύο ημικύκλια με διαμέτρους  $AK, A\Lambda$  και εσωτερικά τα τόξα  $KM, \Lambda M$  των κύκλων  $(B, BK), (\Gamma, \Gamma\Lambda)$  αντίστοιχα.

Να βρεθούν, ως συνάρτηση του  $\alpha$ :

- I. Η περίμετρος της γραμμοσκιασμένης «καρδούλας» Μονάδες 8
- II. Το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης «καρδούλας» Μονάδες 12
- III. Το εμβαδό του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Μονάδες 5



**ΓΡΑΠΤΕΣ – ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ/ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ  
ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ : .....  
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : .....

**1<sup>ο</sup> Θέμα**

A.

Να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δυο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.  
(13 μονάδες)

B.

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστές ή Λάθος.

α) Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $A=90^\circ$ ) ισχύει  $\beta^2 + \gamma^2 = 4\mu_a^2$

β) Σε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς  $\gamma$  το εμβαδόν δίνεται από τον τύπο:  $\gamma^2 \frac{3}{\sqrt{4}}$

γ) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση:  $a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma$

δ) Το εμβαδόν του τραπέζιου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του.  
(12 μονάδες)

**2<sup>ο</sup> Θέμα**

Τα μήκη των πλευρών τριγώνου  $\triangle AB\Gamma$  είναι  $\gamma = 6$ ,  $\alpha = 12$ ,  $\beta = 8$ .

A) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. (10 μονάδες)

B) Να υπολογίσετε τη προβολή της  $\mu_\beta$  πάνω στην πλευρά  $\beta$ . (15 μονάδες)

**3<sup>ο</sup> Θέμα**

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο τραπέζιο ( $A=B=90^\circ$ ) και  $AB=12$ ,  $AD=39$ ,  $B\Gamma=48$ .

α) Να βρείτε το εμβαδόν του.

β) Να βρείτε την περίμετρό του.

γ) Αν ΔΚ χωρίζει το τραπέζιο σε δύο ισοδύναμα σχήματα ΑΒΚΔ και ΚΓΔ να υπολογίσετε τα μήκη ΒΚ και ΚΓ.  
(25 μονάδες)

**4<sup>ο</sup> Θέμα**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $A=90^\circ$ ) με μήκη πλευρών  $AB=R$  και  $AG=R\sqrt{3}$ . Γράφουμε τους κύκλους  $(B,R)$  και  $(\Gamma,R\sqrt{3})$ .

Να υπολογίσετε :

α) το μήκος της πλευράς ΒΓ συναρτήσει του R (7 μονάδες)

β) τις γωνίες Β και Γ (8 μονάδες)

γ) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΔΓ συναρτήσει του R (10 μονάδες)

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**  
**ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β! ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ 1**

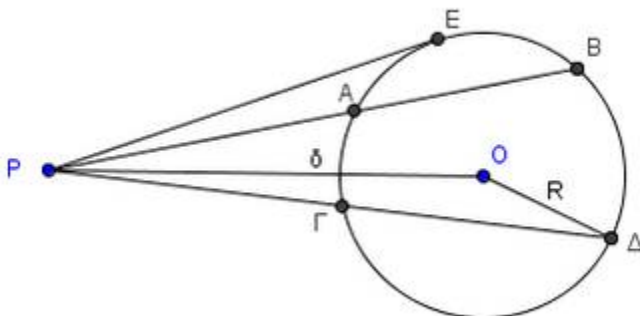
A) Με τι ισούται το εμβαδόν ενός τριγώνου; Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας.

**(Μονάδες 10)**

B) Να γράψετε τους τύπους εύρεσης εμβαδού τετραγώνου, ορθογώνιου, παραλληλογράμμου και τραπεζίου, εξηγώντας τι αντιπροσωπεύει κάθε μεταβλητή στους αντίστοιχους τύπους και κάνοντας σχετικά σχήματα.

**(Μονάδες 10)**

Γ)



Σε σχέση με το παραπάνω σχήμα, να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να εμφανιστούν γνωστές ισότητες της θεωρίας των τεμνουσών κύκλου.

i)  $PG \cdot P\Delta = \dots\dots\dots$  ii)  $PE^2 = \dots\dots\dots$  iii)  $\Delta_{(O,R)}^P = \dots\dots\dots$  **(Μονάδες 5)**

**ΘΕΜΑ 2**

Ένα ορθογώνιο με διαστάσεις  $\alpha=8$  και  $\beta=2$  έχει εμβαδό όσο και η περίμετρος ενός τετραγώνου.

Να βρείτε: α) το εμβαδόν του τετραγώνου.

**(Μονάδες 12)**

β) Τα μήκη των διαγωνίων του ορθογώνιου και του τετραγώνου.

**(Μονάδες 13)**

**ΘΕΜΑ 3**

Δίνεται τρίγωνο με πλευρές  $\alpha=5, \beta=6, \gamma=7$

A) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του

**(Μονάδες 8)**

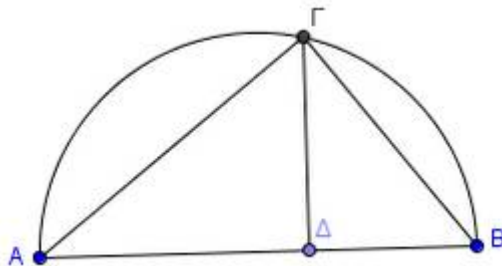
B) Να βρείτε το  $\sin \Gamma$

**(Μονάδες 8)**

Γ) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου  $\mu_\beta$

**(Μονάδες 9)**

**ΘΕΜΑ 4**



Στο παραπάνω ημικύκλιο με διάμετρο  $AB=4$ , είναι  $A\Delta=B\Gamma$  και  $\Gamma\Delta \perp AB$

A) Να αποδείξετε ότι το σημείο  $\Delta$  διαιρεί την  $AB$  σε μέσο και άκρο λόγο(χρυσή τομή)  
(Μονάδες10)

B) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων  $A\Delta$  και  $\Delta B$  (Μονάδες15)



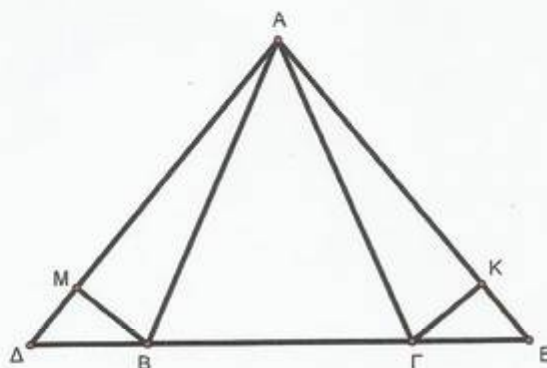
**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου ισούται με 2 ορθές.  
(Μονάδες 10)
- B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α) Δύο κύκλοι  $(K, \rho_1)$  και  $(\Lambda, \rho_2)$  με  $\rho_1 > \rho_2$  εφάπτονται εσωτερικά αν  $K\Lambda = \rho_1 - \rho_2$ .
- β) Δύο ορθογώνια τρίγωνα με δύο οξείες γωνίες τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα.
- γ) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι ύψος και διάμεσος.
- δ) Βαρύκεντρο είναι το σημείο στο οποίο τέμνονται οι διχοτόμοι κάθε τριγώνου
- ε) Ένα τετράπλευρο με 3 γωνίες ορθές είναι ορθογώνιο.  
(Μονάδες 10)
- Γ. Να διατυπώσετε τα 3 κριτήρια ισότητας τριγώνων.  
(Μονάδες 5)

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ).  
Προεκτείνουμε την βάση  $B\Gamma$  κατά τμήματα  $\Gamma E$  και  $B\Delta$  τέτοια ώστε  $\Gamma E = B\Delta$  και φέρνουμε τις  $BM \perp A\Delta$  και  $\Gamma K \perp AE$ .  
Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $\Lambda DE$  είναι ισοσκελές.  
(Μονάδες 13)
- β)  $BM = \Gamma K$   
(Μονάδες 12)



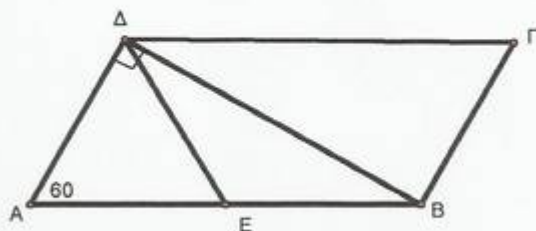
### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  τέτοιο ώστε  $B\Delta \perp \Delta A$  και  $\hat{A} = 60^\circ$ . Αν  $E$  είναι το μέσο της  $AB$ , να αποδείξετε ότι:

α)  $A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$  (Μονάδες 7)

β)  $\Delta E = B\Gamma$ . (Μονάδες 8)

γ)  $B\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $E\hat{\Delta}\Gamma$ . (Μονάδες 10)

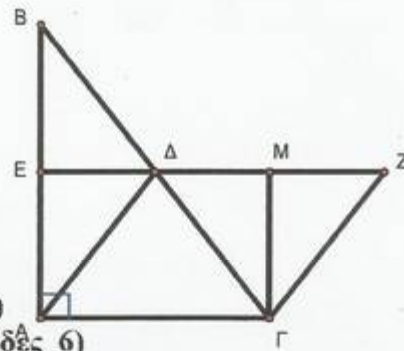


### ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και  $E, \Delta$  τα μέσα των  $AB$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Φέρνουμε από το  $\Gamma$  παράλληλη προς την  $A\Delta$  που τέμνει την προέκταση της  $E\Delta$  στο  $Z$ . Τότε:

- A) Να αποδείξετε ότι:  
α) το  $\Delta A\Gamma Z$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)  
β)  $\Delta Z = 2E\Delta$ . (Μονάδες 6)

- B) Αν  $M$  μέσο της  $\Delta Z$  να αποδείξετε ότι:  
α) το τετράπλευρο  $EM\Gamma A$  είναι ορθογώνιο (Μονάδες 6)  
β) το τρίγωνο  $\Delta Z\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)



**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2012****ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ****ΘΕΜΑ Α**

**A<sub>1</sub>)** Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτεινουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτεινουσα.

**A<sub>2</sub>)** Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα στοιχείο της στήλης Β

1. Πλευρά κανονικού εξαγώνου ( $\lambda_6$ )	vii.	R
2. Πλευρά κανονικού τετραγώνου ( $\lambda_4$ )	viii.	$R\sqrt{2}$
3. Απόστημα κανονικού τριγώνου ( $\alpha_3$ )	ix.	$R\sqrt{3}$
4. Απόστημα κανονικού εξαγώνου ( $\alpha_6$ )	x.	R / 2
	xi.	$R\sqrt{2} / 2$
	xii.	$R\sqrt{3} / 2$

**A<sub>3</sub>)** Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

- i. Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R με πλευρά  $\lambda_n$  και απόστημα  $\alpha_n$  ισχύει η σχέση  $4\alpha_n^2 + \lambda_n^2 = 4R^2$
- ii. Η δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R) είναι πάντα θετική.
- iii. Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο ομοιότητας.
- iv. Το εμβαδόν E ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς a δίνεται από τον τύπο  $E = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

ΜΟΝΑΔΕΣ (9+8+8)

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με πλευρές AB = 5cm, ΑΓ= 3cm και ΒΓ= 7cm.

**B<sub>1</sub>)** Να δείξετε ότι η γωνία Α είναι αμβλεία.

**B<sub>2</sub>)** Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς AB πάνω στην ΒΓ.

**B<sub>3</sub>)** Να υπολογίσετε την διάμεσο AM όπου Μ, το μέσο της ΒΓ.

ΜΟΝΑΔΕΣ (8+9+8)

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται κύκλος (O,R) και οι χορδές AB=R και ΑΓ=  $R\sqrt{2}$  οι οποίες είναι προς το ίδιο μέρος της ακτίνας ΟΑ.

**Γ<sub>1</sub>)** Να υπολογίσετε τις γωνίες ΑOB και ΑΟΓ.

**Γ<sub>2</sub>)** Αν ΑOB =  $60^\circ$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα (O, AB) και το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περικλείεται από την χορδή AB και το τόξο AB.

**Γ<sub>3</sub>)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου ABΓ το οποίο αποτελείται από τις χορδές AB, ΑΓ και το τόξο ΒΓ.

ΜΟΝΑΔΕΣ (8+8+9)

### **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  με  $AB=10$ ,  $AD=4$  και γωνία  $Δ=60^0$ .

Στην πλευρά  $AB$  θεωρούμε τα σημεία  $E, Z$  τέτοια ώστε  $AE=EZ=ZB$ .

Αν  $H$  το σημείο τομής των  $ΔE$  και  $ΓZ$  τότε να υπολογίσετε:

$Δ_1$ ) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου  $ABΓΔ$ .

$Δ_2$ ) Το εμβαδόν του τραπεζίου  $ΓΔEZ$ .

$Δ_3$ ) Το εμβαδόν του τριγώνου  $HEZ$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ (10+10+5)

Γραπτές προαγωγικές εξετάσεις περιόδου Μαΐου – Ιουνίου 2012  
στην Άλγεβρα της Β' (Εσπερινού Λυκείου)

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A) Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία  $\omega$  ισχύει ότι  $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$  (10 μονάδες)
- B) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **σωστές (Σ)** ή **λανθασμένες (Λ)**:
- Η ευθεία  $y=ax$  δε διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
  - Η γραφική παράσταση της παραβολής  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$  έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία  $x = -\frac{\beta}{2a}$ .
  - Μια ευθεία παράλληλη στον άξονα  $x'x$  σχηματίζει με τον άξονα των  $x$  γωνία  $90^\circ$ .
  - Τα σημεία του άξονα  $y'y$  έχουν τεταγμένη ίση με το μηδέν.
  - Η κλίση της ευθείας  $y = ax + \beta$  είναι ίση με το συντελεστή του  $x$ .
- (15 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση για κάθε μία από τις παρακάτω μαθηματικές προτάσεις. (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.)

- A) Το σύστημα  $\begin{cases} x + y + \omega = 9 \\ x + y - \omega = 5 \\ x - y + \omega = 1 \end{cases}$  έχει λύση:
- |  |   |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li><math>(x=1, y=2, \omega=3)</math></li> <li><math>(x=3, y=4, \omega=2)</math></li> <li>καμία λύση (είναι αδύνατο)</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li><math>(x=2, y=3, \omega=1)</math></li> <li>άπειρα ζεύγη λύσεων</li> </ol> <p style="text-align: right;">(12 μονάδες)</p> |
|--|---|
- B) Το σύστημα  $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$  έχει λύση:
- μοναδική λύση το ζεύγος  $(x=3, y=1)$ .
  - άπειρα ζεύγη λύσεων. (αόριστο)
  - δύο ζεύγη λύσεων  $(x_1=3, y_1=1)$  και  $(x_2=-1, y_2=-3)$ .
  - κανένα ζεύγος λύσεων. (αδύνατο)
  - μία λύση το  $(x=0 \text{ και } y=0)$ .
- (13 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = a\sqrt{x+1}$  και το σημείο  $M(3,4)$  που ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

- Να βρείτε την τιμή του  $a$ . (8 μονάδες)
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ . (7 μονάδες)
- Για  $a=2$ , να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης  $f$  με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ . (10 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η γωνία  $\omega$  για την οποία ισχύει:  $90^\circ < \omega < 180^\circ$  και  $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$ .

Να υπολογίσετε:

- Το ημίτονο της γωνίας  $\omega$ . (ημ $\omega$ ) (13 μονάδες)
- Την εφαπτομένη (εφ $\omega$ ) και τη συνεφαπτομένη (σφ $\omega$ ) της γωνίας  $\omega$ . (12 μονάδες)

**Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα**  
**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**



**Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ**

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ**  
**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΔΥΟ (2)**

Όνοματεπώνυμο:.....Α.Κ.....

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Αν  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  δύο διανύσματα του επιπέδου με συντελεστές διεύθυνσης  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$

αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ . **Μονάδες 10**

**A2.** Να διατυπώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .

**Μονάδες 5**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη *Σωστό* ή *Λάθος* δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Η ευθεία με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  με  $A \neq 0$  ή  $B \neq 0$ , είναι παράλληλη

στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (A, B)$

**β.** Αν  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  αντίρροπα διανύσματα τότε ισχύει  $-\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ .

**γ.** Το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  δίνεται πάντα από τον τύπο

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} \vec{A} & \vec{B} & \vec{A}\vec{\Gamma} \end{pmatrix}.$$

**δ.** Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου  $C: x^2 + y^2 = \rho^2$  στο σημείο του  $A(x_1, y_1)$  είναι η  $C: xx_1 + yy_1 + \rho^2 = 0$ .

**ε.** Αν  $O$  σημείο αναφοράς τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα  $\vec{AB}$  ισχύει  $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ .

**Μονάδες 5x2=10**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (1, 1)$ ,  $\vec{\beta} = (-6, 0)$  και  $\vec{\gamma} = \kappa \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι τα  $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$  και  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -6$ .

**Μονάδες 6**

**B2.** Αν  $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$  τότε:



- i. Να αποδείξετε ότι  $k=3$  . **Μονάδες 6**
- ii. Να υπολογίσετε το  $|\vec{\gamma}|$  . **Μονάδες 6**
- iii. Να υπολογίσετε τη γωνία  $(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$  . **Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τα σημεία  $A(1,2)$  ,  $B(5,5)$  και  $\Gamma(7,3)$  του επιπέδου.

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι τα  $A$  ,  $B$  και  $\Gamma$  δεν είναι συνευθειακά και να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  . **Μονάδες 6**
- Γ2.** Να προσδιορίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα  $\vec{B\Gamma}$  με τον άξονα  $X'X$ . **Μονάδες 6**
- Γ3.** Να προσδιορίσετε σημείο  $\Delta$  του επιπέδου ώστε το τετράπλευρο  $AB\Delta\Gamma$  να είναι παραλληλόγραμμο . **Μονάδες 5**
- Γ4.** Αν  $\Delta(11,6)$  τότε να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου  $\Delta$  από την ευθεία  $AB$ . **Μονάδες 8**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση :  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$  (1)

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο του  $K$  και την ακτίνα του  $\rho$  . **Μονάδες 6**
- Δ2.** Να δείξετε ότι ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα  $xx'$  . **Μονάδες 4**
- Δ3.** Έστω  $K(1,2)$  το κέντρο του κύκλου .
- α.** Να βρεθεί το συμμετρικό σημείο  $\Lambda$ , του κέντρου του κύκλου ως προς το σημείο  $M(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$  . **Μονάδες 5**
- β.** Αν  $\Lambda(2,1)$  να δείξετε ότι το  $\Lambda$  είναι εσωτερικό του κύκλου. **Μονάδες 5**
- γ.** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από το  $\Lambda(2,1)$  και τέμνει τον κύκλο στα  $A, B$  ώστε το  $\Lambda$  να είναι μέσο της χορδής  $AB$ . **Μονάδες 5**

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Τι ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$ ; (Μονάδες 5)
- A2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου με κέντρο  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho$ , είναι:  
 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ . (Μονάδες 10)
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο φύλλο των απαντήσεών σας τη λέξη **Σωστό** ή τη λέξη **Λάθος**, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:
- 1.** Αν  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  δύο σημεία του επιπέδου, τότε οι συντεταγμένες του μέσου  $M$  του  $AB$  είναι  $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$  και  $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$ .
- 2.** Η παραβολή  $y^2 = 2px$  έχει εστία την  $E\left(\frac{\rho}{2}, 0\right)$ .
- 3.** Σε κάθε έλλειψη με εστιακή απόσταση  $2\gamma$  και σταθερό άθροισμα  $2a$  ισχύει ότι :  $\beta^2 = \gamma^2 - a^2$ .
- 4.** Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής  $Ax + By + \Gamma = 0$  με  $A \neq 0$  και  $B \neq 0$ .
- 5.** Το εμβαδό ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  δίνεται πάντοτε από τη σχέση  $E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} \vec{AB} & \vec{A\Gamma} \end{pmatrix}$ . (Μονάδες 10)

**ΘΕΜΑ Β**

- Δίνονται τα σημεία  $A(0,2)$  και  $B(8, -4)$ . Ευθεία κάθετη στην  $AB$  στο  $A$ , τέμνει την ευθεία  $\epsilon: y = 2x - 2$  στο σημείο  $\Gamma$ .
- B1.** Να βρείτε το μήκος του τμήματος  $AB$  και τις εξισώσεις των ευθειών  $AB$  και  $A\Gamma$ . (Μονάδες 10)
- B2.** Να δείξετε ότι το σημείο  $\Gamma$  έχει συντεταγμένες  $(6, 10)$  και ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- B3.** Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  και να βρεθεί η εξίσωση της διαμέσου του από την κορυφή  $A$ . (Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (y - 2, 4)$  και  $\vec{\beta} = (y + 2, 1 - 2x)$  με  $x, y \in \mathbb{R}$ .

- Γ1.** Αν τα διανύσματα  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  είναι κάθετα, να αποδείξετε ότι το σημείο  $M(x,y)$  ανήκει στην παραβολή  $C: y^2 = 8x$ . (Μονάδες 6)
- Γ2.** Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας  $E$  και την εξίσωση της διευθετούσας  $\delta$  της παραβολής  $C$ . (Μονάδες 5)
- Γ3.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης  $\epsilon_1$  της παραβολής  $C$  που διέρχεται από το σημείο  $A(-2,0)$  και σχηματίζει οξεία γωνία με τον  $x'x$ . (Μονάδες 7)
- Γ4.** Να βρείτε την εξίσωση κύκλου  $C_1$  που έχει κέντρο στον  $y'y$ , εφάπτεται στην διευθετούσα  $\delta$  της παραβολής  $C$  και διέρχεται από το σημείο επαφής της παραβολής  $C$  με την ευθεία  $\epsilon_1$ . (Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 4\lambda x + 2\lambda y - 1 = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  **(1)** και οι ελλείψεις  $C_1: x^2 + 3y^2 = 2$ ,  $C_2: 3x^2 + y^2 = 2$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση **(1)** παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα των παραπάνω κύκλων ως συναρτήσεις του  $\lambda$ .

(Μονάδες 6)

**Δ2.** Να βρείτε τις εστίες και τις κορυφές των ελλείψεων  $C_1$ ,  $C_2$ .

(Μονάδες 5)

**Δ3.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των ελλείψεων  $C_1$ ,  $C_2$  και να αποδείξετε ότι ανήκουν σε κύκλο  $C$ . Για ποια τιμή του  $\lambda$  ο κύκλος που περιγράφει η εξίσωση **(1)** συμπίπτει με τον κύκλο  $C$ ;

(Μονάδες 8)

**Δ4.** Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες του κύκλου  $C$  στα κοινά σημεία των ελλείψεων  $C_1$ ,  $C_2$  σχηματίζουν τετράγωνο με διαγώνιους τους μεγάλους άξονες των ελλείψεων  $C_1$ ,  $C_2$ .

(Μονάδες 6)

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη  $\varepsilon$  του κύκλου  $C : x^2 + y^2 = \rho^2$  στο σημείο του  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση  $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ .

**Μονάδες 10**

2. Τι ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ .

**Μονάδες 5**

3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α. Αν  $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$  είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ , τότε ισχύει

η ισοδυναμία:  $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$ .

- β. Αν  $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$  τότε οπωσδήποτε  $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ .

- γ. Για το εσωτερικό γινόμενο των  $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$  και  $\vec{\nu}$  ισχύει:  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\nu} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\nu}| \cdot \cos \alpha$ .

- δ. Η ευθεία με εξίσωση  $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ , με  $A \neq 0$  ή  $B \neq 0$ ,

είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, -A)$ .

- ε. Αν  $A^2 + B^2 - 4 \cdot \Gamma = 0$  η εξίσωση  $x^2 + y^2 + A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$  παριστάνει ένα μόνο σημείο.

**Μονάδες 5x2=10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται τα σημεία  $A(1, 2)$ ,  $B(3, 4)$  και  $\Gamma(-4, 7)$ .

1. Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  αποτελούν κορυφές τριγώνου.

**Μονάδες 6**

2. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο.

**Μονάδες 6**

3. Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς  $B\Gamma$ .

**Μονάδες 6**

4. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου  $B$  ως προς την ευθεία  $A\Gamma$ .

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$  (1).

1. Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο  $C$  του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του παραπάνω κύκλου στο σημείο του  $A(2,0)$ .
3. Να εξετάσετε τη σχετική θέση της ευθείας  
ε:  $y = x - 2$  ως προς τον κύκλο  $C$ .

**Μονάδες 8+9+8=25**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  και το κυρτό τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\overline{AB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ ,  $\overline{A\Delta} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ ,  $\overline{A\Gamma} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ .

21. Να αποδείξετε ότι το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.

**Μονάδες 6**

22. Αν το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ρόμβος και  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$  τότε :

- α) Να αποδείξετε ότι τα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  είναι κάθετα μεταξύ τους.
- β) Να βρεθεί το μήκος της πλευράς του ρόμβου.
- γ) Να βρεθεί το είδος της γωνίας  $\widehat{BA\Delta}$ .

**Μονάδες 7+6+6=19**

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**  
**ΤΑΞΗ: Β'**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.** Δίνονται τα σημεία  $A(x_1, \psi_1)$  και  $B(x_2, \psi_2)$ . Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες  $x, \psi$  του μέσου  $M(x, \psi)$  του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  είναι:  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$  και  $\psi = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}$ . (μονάδες 15)

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$  τότε  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ .

β) Αν  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$  τότε  $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$ .

γ) Στην παραβολή  $\psi^2 = 2px$  η εστία είναι  $E(-\frac{p}{2}, 0)$  και η διευθετούσα  $\delta: x = \frac{p}{2}$

δ) Το διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, -A)$  είναι παράλληλο στην ευθεία με εξίσωση  $Ax + B\psi + \Gamma = 0$

ε) Το εμβαδόν ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι:  $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{AB} & \vec{A\Gamma} \end{pmatrix} \right|$  (μονάδες 5x2=10)

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα διανύσματα:  $\vec{a} = (2+\kappa, 4)$  και  $\vec{\beta} = (5, \kappa+11)$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

α) Για  $\kappa = 1$  να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$   
 (μονάδες 8)

β) Για  $\kappa = 1$  να βρείτε το  $\text{συν} \left( \hat{\vec{a}}, \vec{\beta} \right)$ .

(μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού  $\kappa \in \mathbb{R}$  για την οποία είναι  $\vec{a} \perp \vec{\beta}$ .  
 (μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές τα σημεία:  $A(2, 3)$ ,  $B(-2, 5)$  και  $\Gamma(-4, -3)$

α) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους  $BE$ . (μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $E$ . (μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $BE\Gamma$ . (μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + \psi^2 - 2\lambda x - 1 = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (μονάδες 7)

β) Αν για  $\lambda=1$  προκύπτει από την (1) ο κύκλος  $C_1$  και για  $\lambda=2$  προκύπτει ο κύκλος  $C_2$ , να βρείτε τα κοινά σημεία των κύκλων  $C_1$  και  $C_2$ . (μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι  $C_\lambda$  που ορίζονται από την (1) για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. (μονάδες 6)

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

A. Δίνονται τα διάνυσμα  $\vec{a} = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ ,  $\vec{\gamma} = (x_3, y_3)$ . Να αποδείξετε ότι

$$\vec{a} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma} \quad (\text{Μονάδες } 9)$$

B. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$ .

(Μονάδες 8)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α. Για κάθε διάνυσμα  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  ισχύει:  $\vec{a} = \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{\beta}|$

β. Έστω  $\vec{a} \nearrow \nearrow \vec{\beta}$  τότε  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ .

γ. Η εξίσωση  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  παριστάνει κύκλο αν ισχύει  $A^2 + B^2 + 4\Gamma > 0$

δ. Το διάνυσμα  $\vec{\delta} = (-A, B)$  είναι παράλληλο στην ευθεία  $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ ,  $A \neq 0$  ή  $B \neq 0$

(Μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Αν  $|\vec{a}| = 2$  και  $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$  και  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = 45^\circ$ .

i) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$ .

(Μονάδες 9)

ii) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{a} - \vec{\beta}$ .

(Μονάδες 7)

iii) Να βρείτε τη γωνία  $(\vec{a} - \vec{\beta}, \vec{\beta})$  των διανυσμάτων  $\vec{a} - \vec{\beta}$  και  $\vec{\beta}$  (Μονάδες 9)

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνονται τα σημεία  $A(0, 0)$ ,  $B(6, 0)$  και  $\Gamma(4, 3)$  του καρτεσιανού επιπέδου

i) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς  $B\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  που σχηματίζεται από τα παραπάνω σημεία  $A, B, \Gamma$ . (Μονάδες 6)

ii) Να βρεθεί η εξίσωση της διαμέσου του τριγώνου  $AB\Gamma$  που άγεται από την κορυφή  $\Gamma$ . (Μονάδες 6)

iii) Να βρεθεί η απόσταση της κορυφής  $A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  από την πλευρά του  $B\Gamma$ . (Μονάδες 6)

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 7)

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Έστω η παραβολή με εξίσωση  $y^2=4x$ . Αν το σημείο  $A(3, 2\sqrt{3})$  ανήκει στην παραβολή τότε:

i) Να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο  $A$ . (Μονάδες 8)

ii) Αν η εφαπτομένη τέμνει την διευθετούσα της παραβολής στο σημείο  $B$  να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο το  $AB$ . (Μονάδες 8)

iii) Να αποδείξετε ότι ο παραπάνω κύκλος εφάπτεται στο άξονα  $x'x$  στην εστία της παραβολής. (Μονάδες 9)

### ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Να απαντήσετε στο τετράδιο σας σε **όλα** τα θέματα.

2. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.



**ΓΡΑΠΤΕΣ – ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ/ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ : .....  
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : .....

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

A. Πως ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{b}$ ; (μονάδες 9)

B. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (x_1, y_1)$  και  $\vec{b} = (x_2, y_2)$ . Να εκφράσετε (χωρίς απόδειξη) το  $\sin(\vec{a}, \vec{b})$  συναρτήσει των συντεταγμένων των διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{b}$ .  
(μονάδες 8)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων είναι πάντα θετικός αριθμός.

β) Η ευθεία με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, A)$

γ) Η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου είναι  $x^2 = 1 - y^2$

δ) Οι ευθείες  $y = \frac{1}{\lambda} x$ ,  $\lambda \neq 0$  και  $y = \lambda^2 x - 1$  είναι κάθετες για  $\lambda = -1$

(μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (1, 2)$  και  $\vec{b} = (2, 3)$ .

A. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$ . (μονάδες 8)

B. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{a} \cdot \vec{\gamma}$  (μονάδες 8)

Γ. Να βρείτε τον αριθμό  $k \in \mathbb{R}$ , ώστε το διάνυσμα  $\vec{u} = (k^2 - k, k)$  να είναι κάθετο στο  $\vec{a}$ . (μονάδες 9)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα σημεία A(1,3), B(-1,-2), Γ(3,-2).

A. Να αποδείξετε ότι τα A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου και να βρείτε το είδος του.

(μονάδες 7)

B. Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΑΔ

(μονάδες 9)

Γ.Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

(μονάδες 9)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται ο κύκλος  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ .

Α.Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

(μονάδες 10)

Β.Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και

είναι κάθετη στην εφαπτομένη του στο σημείο  $(2, -3)$  (μονάδες 15)

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

A. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$  και  $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ . Να δείξετε ότι  
το εσωτερικό γινόμενο τους είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους, δηλαδή:  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$   
Μονάδες 16

B. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.  
α. Η εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  δεν παριστάνει ευθεία όταν .....  
β. Αν  $B \neq 0$ , τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας  $Ax + By + \Gamma = 0$  είναι ίσος με .....  
γ. Η ευθεία  $Ax + By + \Gamma = 0$  με  $A \neq 0$  ή  $B \neq 0$ , είναι παράλληλη προς το διάνυσμα ..... και κάθετη προς το διάνυσμα .....  
Μονάδες 9

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα σημεία  $E'(-4, 0)$  και  $E(4, 0)$ .

A. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος  $C_1$  των σημείων  $M(x, y)$  του  
επιπέδου για τα οποία η περίμετρος του τριγώνου  $MEE'$  είναι ίση με 18, είναι έλλειψη με μεγάλο άξονα  $2a = 10$  και στη συνέχεια να  
βρείτε την εξίσωσή της.  
Μονάδες 15

B. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής  $C_2$  που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη  $C_1$  και εκκεντρότητα  $\varepsilon = 2$ .  
Μονάδες 10

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Θεωρούμε ευθεία  $\varepsilon$  η οποία τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  στα σημεία  $A(2,0)$  και  $B(0,-3)$  αντίστοιχα.

- A. Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  είναι η:  $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$   
Μονάδες 8
- B. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία  $\varepsilon$  με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .  
Μονάδες 7
- Γ. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου  $\Delta$  της ευθείας  $\varepsilon$  που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων  $O(0,0)$ .  
Μονάδες 10

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$  με  $\vec{u} \neq 2\vec{v}$  και η εξίσωση:  $C: x^2 + y^2 - |\vec{u}| \cdot x - 2|\vec{v}| \cdot y + \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  (I).

- A. Να δείξετε ότι η σχέση (I) παριστάνει κύκλο με ακτίνα:  $\rho = \frac{|\vec{u} - 2\vec{v}|}{2}$ .  
Μονάδες 10
- B. Αν  $|\vec{u}| = 2$ ,  $|\vec{v}| = 1$  και  $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 60^\circ$ , να δείξετε ότι:
- α. Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο  $K(1,1)$ .  
Μονάδες 3
- β. Η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με  $\rho = 1$ .  
Μονάδες 6
- γ. Ο κύκλος  $C$  εφάπτεται στην ευθεία  $\varepsilon: 6x + 8y - 4 = 0$   
Μονάδες 6

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη  $\varepsilon$  του κύκλου  $C : x^2 + y^2 = \rho^2$  στο σημείο του  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση  $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ .

**Μονάδες 10**

2. Τι ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ .

**Μονάδες 5**

3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α. Αν  $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$  είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ , τότε ισχύει

η ισοδυναμία:  $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$ .

- β. Αν  $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$  τότε οπωσδήποτε  $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ .

- γ. Για το εσωτερικό γινόμενο των  $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$  και  $\vec{\nu}$  ισχύει:  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\nu} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\nu}| \cdot \cos \alpha$ .

- δ. Η ευθεία με εξίσωση  $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ , με  $A \neq 0$  ή  $B \neq 0$ ,

είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, -A)$ .

- ε. Αν  $A^2 + B^2 - 4 \cdot \Gamma = 0$  η εξίσωση  $x^2 + y^2 + A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$  παριστάνει ένα μόνο σημείο.

**Μονάδες 5x2=10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται τα σημεία  $A(1, 2)$ ,  $B(3, 4)$  και  $\Gamma(-4, 7)$ .

4. Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  αποτελούν κορυφές τριγώνου.

**Μονάδες 6**

5. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο.

**Μονάδες 6**

6. Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς  $B\Gamma$ .

**Μονάδες 6**

5. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου  $B$  ως προς την ευθεία  $A\Gamma$ .

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$  (1).

4. Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο  $C$  του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
5. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του παραπάνω κύκλου στο σημείο του  $A(2,0)$ .
6. Να εξετάσετε τη σχετική θέση της ευθείας  
ε:  $y = x - 2$  ως προς τον κύκλο  $C$ .

**Μονάδες 8+9+8=25**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  και το κυρτό τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\overline{AB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ ,  $\overline{A\Delta} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ ,  $\overline{A\Gamma} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ .

23. Να αποδείξετε ότι το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.

**Μονάδες 6**

24. Αν το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ρόμβος και  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$  τότε :

- α) Να αποδείξετε ότι τα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  είναι κάθετα μεταξύ τους.
- β) Να βρεθεί το μήκος της πλευράς του ρόμβου.
- γ) Να βρεθεί το είδος της γωνίας  $\widehat{BA\Delta}$ .

**Μονάδες 7+6+6=19**



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΠΕΡ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Π/ΘΜΙΑΣ & Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΝΟΤΙΟΥ  
ΑΙΓΑΙΟΥ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ  
ΜΑΙΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ  
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ  
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
ΤΑΞΗ : **Β ΛΥΚΕΙΟΥ**

### ΘΕΜΑ Α

- A1.** Τι ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  ;  
(μον. 6)
- A2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho$  είναι η  $x^2 + y^2 = \rho^2$  (μον.9)
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως σωστή ( $\Sigma$ ) ή λάθος ( $\Lambda$ )
- α)** Το σημείο  $(1,-1)$  ανήκει στον κύκλο  $x^2 + y^2 = 2$
- β)** Η παραβολή  $y^2 = 2px$  έχει διευθετούσα την ευθεία  $y = -\frac{p}{2}$
- γ)** Το διάνυσμα  $(2,1)$  είναι παράλληλο στην ευθεία  $x-2y+4=0$
- δ)** Η εξίσωση  $9x^2 - 4y^2 = 36$  παριστάνει στο επίπεδο υπερβολή
- ε)** Οι ευθείες  $3x-2y+5=0$  και  $3x-2y-5=0$  είναι παράλληλες  
(μον.10)

### ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (1,2)$  και  $\vec{\beta} = (-3,4)$

- B1.** Να βρείτε το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = 3\vec{a} - 2\vec{\beta}$  (μον.5)
- B2.** Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{a} + \vec{\beta}$  (μον.6)
- B3.** Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$  (μον.6)
- B4.** Να γράψετε το διάνυσμα  $\vec{u} = (5,-2)$  ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  (μον.8)

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$  (1) και η ευθεία  $x + \lambda y + 4 - \lambda = 0$  (2)

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο  $(-2,3)$  και ακτίνα 4 (μον.8)

**Γ2.** Αν η ευθεία (2) διέρχεται από το κέντρο του κύκλου να αποδείξετε ότι  $\lambda = -1$  (μον.6)

**Γ3.** Για  $\lambda = -1$

**i)** να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες (μον.6)

**ii)** να βρείτε την απόσταση του σημείου  $M(4,-3)$  από την ευθεία (2) (μον.5)

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές τα σημεία  $A(-1,0)$ ,  $B(3,2)$  και  $\Gamma(-3,4)$

**Δ1.** Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου  $AM$  (μον.6)

**Δ2.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $B\Gamma(\varepsilon_1)$  (μον.6)

**Δ3.** Να βρείτε την ευθεία  $(\varepsilon_2)$  που είναι παράλληλη στην ευθεία  $B\Gamma$  και διέρχεται από το σημείο  $A$  (μον.6)

**Δ4.** Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των ευθειών  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  (μον.7)

*Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.*



**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΔΟΣΧΟΛΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΤΑΞΗΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Αν  $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ ,  $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$  και  $\vec{\gamma}=(x_3,y_3)$  να αποδείξετε ότι:  
 $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ . Μονάδες 10

**A2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Αν  $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$  τότε  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ .

2. Κάθε εξίσωση της μορφής  $Ax+By+\Gamma=0$  παριστάνει ευθεία γραμμή.

3. Η εφαπτομένη της παραβολής  $y^2=2px$  στο σημείο της  $M_1(x_1,y_1)$  έχει εξίσωση:  
 $yy_1=p(x+x_1)$ .

4. Μια παραβολή με κορυφή το  $O(0,0)$  και διευθετούσα  $y = -\frac{p}{2}$  έχει άξονα συμμετρίας τον  $x'x$ .

5. Δύο ελλείψεις λέγονται όμοιες όταν έχουν τις ίδιες εστίες.

Μονάδες 10

**A3.** Τι λέγεται έλλειψη με εστίες τα σημεία  $E'$  και  $E$  ενός επιπέδου;  
 Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται το τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές τα σημεία  $A(0,3), B(-9,0)$  και  $\Gamma(\gamma,0)$  όπου  $\gamma \in \mathbb{R}$  με  $\gamma > 0$ .

Αν ισχύει:  $|\overline{AB}| = 3|\overline{A\Gamma}|$ , τότε:

**B1.** Να υπολογίσετε την τιμή του  $\gamma$ . Μονάδες 9

**B2.** Αν  $\Delta(\kappa,\lambda)$  και  $E(\mu,\nu)$  είναι δύο σημεία του επιπέδου για τα οποία ισχύει  $\overline{A\Delta} = 3 \cdot \overline{A\Gamma}$  και  $\overline{B\Gamma} = 2 \cdot \overline{\Gamma E}$  να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων  $\Delta$  και  $E$ .  
 Μονάδες 9

**B3.** Να αποδείξετε ότι  $\overline{AB} \perp \overline{\Delta E}$ . Μονάδες 7

**ΘΕΜΑ Γ**

Θεωρούμε δύο σημεία τα  $B(-3,7)$  και  $\Gamma(3,1)$  και τις ευθείες  $\varepsilon_1: 3x - y + 2 = 0$   
 $\varepsilon_2: 2x + y - 7 = 0$

που τέμνονται στο σημείο  $A$ . Να βρείτε:

**Γ1.** Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας  $B\Gamma$ , την γωνία που σχηματίζει η  $B\Gamma$  με τον άξονα  $x'x$  και την εξίσωση της  $B\Gamma$ .

Μονάδες 9

**Γ2.** Τις συντεταγμένες του  $A$ .

Μονάδες 7

**Γ3.** Την εξίσωση της διαμέσου  $AM$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και την γωνία των ευθειών  $AM$  και  $B\Gamma$ . **Μονάδες 9**

### **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η εξίσωση:  $x^2+y^2+\lambda x+(\lambda-2)y-4-3\lambda=0$  (1)

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda \in R$  του οποίου να βρείτε το κέντρο  $K$  και την ακτίνα  $\rho$ . **Μονάδες 8**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που παριστάνει η εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in R$  κινούνται σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση. **Μονάδες 6**

**Δ3.** Αν το κέντρο  $K$  του κύκλου που ορίζει η εξίσωση (1) ανήκει και στην ευθεία  $\varepsilon: 3x+y-9=0$ , να βρείτε τον αριθμό  $\lambda$ . **Μονάδες 4**

**Δ4.** Για  $\lambda=-4$ , να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του  $A(1,5)$ . **Μονάδες 7**

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**  
**2012 ΤΑΞΗ: Β'**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

A. Δίνονται τα σημεία  $A(x_1, \psi_1)$  και  $B(x_2, \psi_2)$ . Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες  $x, \psi$  του μέσου  $M(x, \psi)$  του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  είναι:  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$  και  $\psi = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}$ . (μονάδες 15)

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$  τότε  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ .

β) Αν  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$  τότε  $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$ .

γ) Στην παραβολή  $\psi^2 = 2px$  η εστία είναι  $E(-\frac{p}{2}, 0)$  και η διευθετούσα  $\delta: x = \frac{p}{2}$

δ) Το διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, -A)$  είναι παράλληλο στην ευθεία με εξίσωση  $Ax + B\psi + \Gamma = 0$

ε) Το εμβαδόν ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι:  $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{AB} & \vec{A\Gamma} \end{pmatrix} \right|$  (μονάδες  $5 \times 2 = 10$ )

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα διανύσματα:  $\vec{a} = (2 + \kappa, 4)$  και  $\vec{\beta} = (5, \kappa + 11)$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

α) Για  $\kappa = 1$  να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$   
(μονάδες 8)

β) Για  $\kappa = 1$  να βρείτε το  $\text{syn}(\hat{\vec{a}}, \vec{\beta})$ .

(μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού  $\kappa \in \mathbb{R}$  για την οποία είναι  $\vec{a} \perp \vec{\beta}$ .  
(μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές τα σημεία:  $A(2, 3)$ ,  $B(-2, 5)$  και  $\Gamma(-4, -3)$

α) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους  $BE$ . (μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $E$ . (μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $BE\Gamma$ . (μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + \psi^2 - 2\lambda x - 1 = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (μονάδες 7)

β) Αν για  $\lambda = 1$  προκύπτει από την (1) ο κύκλος  $C_1$  και για  $\lambda = 2$  προκύπτει ο κύκλος  $C_2$ , να βρείτε τα κοινά σημεία των κύκλων  $C_1$  και  $C_2$ . (μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι  $C_\lambda$  που ορίζονται από την (1) για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. (μονάδες 6)

δ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής όλων των κύκλων  $C_\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη  $\epsilon$  του κύκλου  $C : x^2 + y^2 = \rho^2$  στο σημείο του  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση  $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ .

**Μονάδες 10**

2. Τι ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ .

**Μονάδες 5**

3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α. Αν  $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$  είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ , τότε ισχύει

η ισοδυναμία:  $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$ .

- β. Αν  $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$  τότε οπωσδήποτε  $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ .

- γ. Για το εσωτερικό γινόμενο των  $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$  και  $\vec{\nu}$  ισχύει:  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\nu} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\nu}| \cdot \cos \theta$ .

- δ. Η ευθεία με εξίσωση  $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ , με  $A \neq 0$  ή  $B \neq 0$ ,

είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, -A)$ .

- ε. Αν  $A^2 + B^2 - 4 \cdot \Gamma = 0$  η εξίσωση  $x^2 + y^2 + A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$  παριστάνει ένα μόνο σημείο.

**Μονάδες 5x2=10****ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται τα σημεία  $A(1, 2)$ ,  $B(3, 4)$  και  $\Gamma(-4, 7)$ .

7. Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  αποτελούν κορυφές τριγώνου.

**Μονάδες 6**

8. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο.

**Μονάδες 6**

9. Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς  $B\Gamma$ .

**Μονάδες 6**

6. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου  $B$  ως προς την ευθεία  $AG$ .

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$  (1).

7. Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο  $C$  του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
8. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του παραπάνω κύκλου στο σημείο του  $A(2,0)$ .
9. Να εξετάσετε τη σχετική θέση της ευθείας  
ε:  $y = x - 2$  ως προς τον κύκλο  $C$ .

**Μονάδες 8+9+8=25**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  και το κυρτό τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\overline{AB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ ,  $\overline{A\Delta} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ ,  $\overline{A\Gamma} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ .

25. Να αποδείξετε ότι το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.

**Μονάδες 6**

26. Αν το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ρόμβος και  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$  τότε :

- α) Να αποδείξετε ότι τα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  είναι κάθετα μεταξύ τους.
- β) Να βρεθεί το μήκος της πλευράς του ρόμβου.
- γ) Να βρεθεί το είδος της γωνίας  $\widehat{BA\Delta}$ .

**Μονάδες 7+6+6=19**

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**B! ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

A) Έστω  $O\chi\psi$  ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και  $C$  ο κύκλος με κέντρο το σημείο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho$ .

Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου αυτού και να αποδείξετε γιατί είναι αυτή που γράψατε η εξίσωσή του. **(Μονάδες 10)**

B) Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δυο διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  **(Μονάδες 5)**

Γ) Να χαρακτηρίσετε τα παρακάτω σαν **σωστό** ή **λάθος**

i)  $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$     ii)  $|\vec{a} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$     iii)  $|\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$     iv)  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{\beta}$

όπου  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  δυο τυχαία διανύσματα του επιπέδου. **(Μονάδες 10)**

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}=(8,\lambda)$  και  $\vec{\beta}=(-\lambda,-2)$ .

A) Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε  $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$  **(Μονάδες 7)**

B) Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε τα  $\vec{a}$ ,  $\vec{\beta}$  να είναι ομόρροπα

**(Μονάδες 10)**

Γ) Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε  $\vec{a} \perp \vec{\beta}$  ; **(Μονάδες 8)**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $(\kappa-2)\chi+(\kappa+1)\psi+\kappa=0$

A) Να βρείτε την τιμή του  $\kappa$  ώστε να παριστάνει ευθεία **(Μονάδες 9)**

B) Να βρείτε την τιμή του  $\kappa$  ώστε η ευθεία αυτή θα είναι παράλληλη στον  $\psi/\psi$

**(Μονάδες 8)**

Γ) Να βρείτε την τιμή του  $\kappa$  ώστε αυτή η ευθεία να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

**(Μονάδες 8)**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση:  $\chi^2+\psi^2+2\chi-4\psi-4=0$

A) Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

**(Μονάδες 10)**

B) Να βρείτε τα σημεία τομής του κύκλου αυτού με τον  $\chi/\chi$

**(Μονάδες 8)**

Γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του στο σημείο  $A(2,2)$

**(Μονάδες 7)**

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΕΣ - ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**

**ΤΑΞΗ:** Β' Λυκείου

**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:** Μαθηματικά τεχνολογικής κατεύθυνσης

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου με κέντρο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho$ , είναι η  $x^2 + y^2 = \rho^2$ . **(12 μόρια)**
- B.** Τι ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων,  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ ; **(5 μόρια)**
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την έκφραση «σωστό» ή «λάθος».
- α.** Ισχύει  $|\vec{\alpha}|^2 = \vec{\alpha}^2$ .
- β.** Το εμβαδό του τριγώνου  $AB\Gamma$  δίνεται από τον τύπο  $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overline{AB} \\ \overline{A\Gamma} \end{pmatrix} \right|$ .
- γ.** Αν  $\vec{\alpha} \nearrow \swarrow \vec{\beta}$  τότε  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ .
- δ.** Το διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, A)$  είναι παράλληλο στην ευθεία  $Ax + By + \Gamma = 0$ . **(8 μόρια)**

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα σημεία  $A(-4,-3)$ ,  $B(2,1)$  και  $\Gamma(5,3)$ .

- α.** να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\overline{AB}$  και  $\overline{B\Gamma}$  και να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  είναι συνευθειακά. **(9 μόρια)**
- β.** να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου του  $AB$ . **(5 μόρια)**
- γ.** να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\overline{B\Gamma}$ . **(4 μόρια)**
- δ.** αν  $\vec{\alpha} = (2, -3)$ , να αποδείξετε ότι  $\vec{\alpha} \perp \overline{A\Gamma}$ . **(7 μόρια)**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4x$  και ο κύκλος  $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$ .

- α.** να βρεθεί η εστία και η διευθετούσα της παραβολής. **(6 μόρια)**
- β.** να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου. **(7 μόρια)**
- γ.** να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο  $A(1,2)$  και να αποδείξετε ότι εφάπτεται επίσης και στον κύκλο. **(12 μόρια)**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $(3\alpha + 1)x + (2\alpha - 2)y + 7\alpha + 5 = 0$  **(1)**.

**α.** να δείξετε ότι η εξίσωση **(1)** παριστάνει ευθεία για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ . **(5 μόρια)**

**β.** να δείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση **(1)**, διέρχονται από το ίδιο σημείο Α. **(7 μόρια)**

**γ.** για  $\alpha = 0$ , να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην **(1)** στο σημείο Α. **(7 μόρια)**

**δ.** Να βρείτε την γωνία  $\omega$  που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  η ευθεία **(1)** για  $\alpha = -\frac{1}{3}$  και για  $\alpha = 1$ . **(6 μόρια)**



## ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup> (25 μονάδες)

A] Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο  $A(x_0, y_0)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$ , είναι η  $y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$ .

(15 μονάδες)

B] Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη **Σωστό (Σ)** ή **Λάθος (Λ)**.

1. Αν  $\vec{\gamma} \neq \vec{0}$  τότε  $\vec{\gamma} \cdot \vec{a} = \vec{\gamma} \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$

2.  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{\gamma}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{\gamma}$

3.  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

4. Η εξίσωση  $y^2 - x^2 = 0$  παριστάνει δυο ευθείες κάθετες.

5. Το κέντρο του κύκλου με εξίσωση  $x^2 + y^2 + Bx + Ay + \Gamma = 0$  είναι το  $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ .

6. Οι ελλείψεις με εξισώσεις  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  και  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$  είναι όμοιες.

7. Η εξίσωση εφαπτομένης της έλλειψης  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  στο σημείο της  $A(x_1, y_1)$  είναι η  $b^2 x_1 + a^2 y_1 - i = 0$ .

8. Εάν  $\det(\overline{AB}, \overline{AG}) = 0$ , τότε δε μπορεί να σχηματιστεί τρίγωνο με κορυφές τα σημεία A, B και Γ.

9. Η παραβολή  $y^2 = 2x$  και ο κύκλος  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  εφάπτονται.

10. Η εξίσωση  $(x-2y) \cdot \lambda + x - y - 2 = 0$  παριστάνει οικογένεια ευθειών για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , και όλες διέρχονται από το σημείο  $A(4, 2)$ .

(10 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 2° (25 μονάδες)**

Αν  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$  και  $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$  τότε:

1. Να υπολογιστεί το  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ . (5 μονάδες)
2. Να δείξετε ότι  $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{6}$  (10 μονάδες)
3. Να βρεθεί η γωνία (αμβλεία) των διανυσμάτων  $\vec{a} - \vec{b}$  και  $\vec{b}$  (10 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 3° (25 μονάδες)**

Δίνεται τρίγωνο με κορυφές τα σημεία  $A(-1,2)$ ,  $B(1,3)$  και  $\Gamma(3,-2)$ , ΒΔ ύψος και ΑΜ διάμεσος.

1. Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους ΒΔ. (8 μονάδες)
2. Να υπολογιστεί το μήκος του ύψους ΒΔ. (7 μονάδες)
3. Να υπολογιστεί το εμβαδό του τριγώνου ΒΔΜ. (10 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 4° (25 μονάδες)**

Δίνεται ο κύκλος  $C_1: x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$  και η παραβολή  $C_2: y^2 = 2px$ . Αν το σημείο  $A(1, \lambda)$ ,  $\lambda > 0$  είναι κοινό σημείο των  $C_1$  και  $C_2$ , τότε:

1. Να βρείτε τα  $\lambda$  και  $p$  καθώς και το άλλο κοινό σημείο των  $C_1$  και  $C_2$ . (6 μονάδες)
2. Για  $\lambda = \sqrt{2}$  και  $p=1$ 
  - i) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής  $C_2$  στο Α εφάπτεται στον κύκλο  $C_1$ . (10 μονάδες)
  - ii) Να βρείτε την άλλη κοινή εφαπτόμενη στο άλλο κοινό τους σημείο. (5 μονάδες)
  - iii) Να δείξετε ότι οι κοινές εφαπτόμενες των  $C_1$  και  $C_2$ , τέμνονται πάνω στον άξονα  $xx'$ . (4 μονάδες)



**Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ**  
**ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Πότε μια συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο;

**Μονάδες: 8**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται συνεχής; **Μονάδες :7**

**A3.** Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις, να γράψετε στο φύλλο των απαντήσεών σας τη λέξη **Σωστό** ή τη λέξη **Λάθος**, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

1. Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  έχουν όρια στο  $x_0$  πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$  και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \text{ με } l_1, l_2 \in \mathbb{R}, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$$

**Μονάδες :2**

2. Η παράγωγος της  $f(x) = \eta\mu x$  είναι η  $f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x$ .

**Μονάδες :2**

3. Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα  $\nu_i$  μίας μεταβλητής  $X$ , με το μέγεθος  $\nu$  του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα  $f_i$  της τιμής  $x_i$ . Δηλαδή  $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, \kappa$  με  $\kappa \leq \nu$ .

**Μονάδες :2**

4. Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει  $f(x_1) > f(x_2)$ .

**Μονάδες :2**

5. Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι παραγωγίσιμες τότε ισχύει:  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$

**Μονάδες :2****ΘΕΜΑ Β**

Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια:

**α.**  $\lim_{x \rightarrow 0} (4x^3 - x^2 + 5x - 8)$

**Μονάδες :4**

**β.**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 1}{x + 2}$

**Μονάδες :5**

**γ.**  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2x - 4}{-(x^2 - 4)} \right)$

**Μονάδες :8**

**δ.**  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$

**Μονάδες :8****ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 5$ , για  $x \in \mathbb{R}$ .

**α.** Να υπολογίσετε τις τιμές  $f(-1), f(0), f(2)$

**Μονάδες : 6**

**β.** Βρείτε την παράγωγο της  $f$ .

**Μονάδες :6**

**γ.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία.

**Μονάδες : 8**

**δ.** Να βρεθούν τα ακρότατα της  $f$ .

**Μονάδες :5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Α. Η βαθμολογία 50 μαθητών στο μάθημα των μαθηματικών δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Βαθμο ί $x_i$	Συχνότητε ς $v_i$	Σχετική Συχνότητ α $f_i$	Σχετ.Συχν . τοις εκατό $f_i\%$	Αθροιστικ ή Συχνότητα $N_i$	Αθροιστικ ή Σχετ. Συχν. $F_i$	Αθροιστικ ή Σχετ. Συχν. τοις εκατό $F_i\%$
11	10					
12	4					
13	6					
15						
17	12					
19	4					
20	2					
Σύνολο	50					

- α. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα. **Μονάδες: 18**
- β. i) Πόσοι μαθητές πήραν βαθμό 13 και πάνω; **Μονάδες: 2**  
ii) Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που πήραν βαθμό 17 και κάτω; **Μονάδες:3**
- γ. Τι ποσοστό των μαθητών πήραν βαθμό 15; **Μονάδες :2**



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΔΙΑ ΒΙΟΥ  
ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ Δ/ΝΣΗ Π & Δ ΕΚΠ/ΣΗΣ Ν.  
ΑΙΓΑΙΟΥ  
Δ/ΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ  
:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ  
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΑΞΗ :Γ΄  
ΛΥΚΕΙΟΥ

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

Α.α.Να αποδείξετε ότι η παραγωγός της ταυτοτικής συνάρτησης  $f(x)=x$  είναι ίση με 1. Δηλαδή  $(x)'=1$ .  
(μονάδες 10)

β.Τι ονομάζουμε διάμεσο ( $\delta$ ) ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων. (μονάδες 5)

Β.Να χαρακτηρίσετε ως σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις

α.Ισχύει  $(x^v)'=vx^{v-1}$ , όπου  $v$  φυσικός αριθμός.

β.Για  $x>0$ , είναι  $(\ln x)'=-\frac{1}{x}$

γ.Ισχύει  $:(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$

δ.Αν  $\bar{x} > 0$ ,  $CV=\frac{s}{\bar{x}}$

ε.Ένα δείγμα είναι ομοιογενές όταν ο συντελεστής μεταβολής είναι μικρότερος ή ίσος του 0,1.  
(μονάδες 10)

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=xe^x$ .

α.Να βρείτε την πρώτη και δεύτερη παραγωγή της  $f$ . (μονάδες 9)

β.Να δείξετε ότι  $:f'(\chi)-2f(\chi)+f(x)=0$ . (μονάδες 9)

γ.Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της  $f$  στο  $\chi_0=0$ . (μονάδες 7)

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Η βαθμολογία των γραπτών 10 μαθητών στα μαθηματικά είναι :14,15,13,13,16,15,15,16,15,18.Να βρείτε :

α.τη μέση τιμή και τη διάμεσο. (μονάδες 8)

β.την τυπική αποκλίση και το συντελεστή μεταβλητότητας. (μονάδες 10)

γ.να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. (μονάδες 7)

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Δίνεται δείγμα με συντελεστή μεταβλητότητας 0,3 ,μεση τιμή 10 και τυπική απόκλιση  $S$  καθώς και η συνάρτηση  $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+Sx^2-8x+1$ , όπου  $S$  η παραπάνω τυπική απόκλιση. Να βρείτε :

**α.** την τυπική απόκλιση

**(μονάδες 7)**

**β.** την μονοτονία της  $f$

**(μονάδες 10)**

**γ.** τα ακρότατα της  $f$ .

**(μονάδες 8)**



**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ – ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2011-2012**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ**  
**ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης  $f(x) = x$  είναι η  $f'(x) = 1$ , δηλαδή  $(x)' = 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 10**

2. Πότε δύο ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  λέγονται ασυμβίβαστα;

**Μονάδες 5**

3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

- α.** Η παράγωγος της  $f(x) = \eta\mu x$  είναι  $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ .
- β.** Για την παράγωγο του γινομένου δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων ισχύει ο κανόνας  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ .
- γ.** Η διάμεσος  $\delta$  ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων είναι πάντα μία από αυτές τις παρατηρήσεις.
- δ.** Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει πάντα  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .
- ε.** Για την σχετική συχνότητα  $f_i$  των τιμών  $x_i$  ενός δείγματος μεγέθους  $n$  ισχύει  $0 \leq f_i \leq 1$ .

**Μονάδες 5x2=10**

**ΘΕΜΑ Β**

Σε ένα σχολείο το 70% των μαθητών μιλούν Αγγλικά, το 30% μιλούν Γαλλικά και το 10% μιλούν και τις δύο αυτές γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή αυτού του σχολείου.

- 20.** Να υπολογιστεί η πιθανότητα ο μαθητής να μιλάει μία τουλάχιστον από αυτές τις γλώσσες.
- 21.** Να υπολογιστεί η πιθανότητα να μην μιλάει καμιά από αυτές τις γλώσσες.
- 22.** Να υπολογιστεί η πιθανότητα να μιλάει μόνο Γαλλικά.

**Μονάδες 8 + 8 + 9 = 25**

### ΘΕΜΑ Γ

1. Να συμπληρώσετε τα κενά στον παρακάτω πίνακα κατανομής συχνοτήτων των τιμών  $x_i$  (με αιτιολόγηση) που αντιστοιχούν στο πλήθος των επισκέψεων στην ιστοσελίδα του Υπουργείου Παιδείας το σχολικό έτος 2011-12 ενός δείγματος 50 μαθητών της Γ' Λυκείου.

$x_i$	$v_i$	$f_i$	$f_i \%$	$N_i$	$F_i \%$
10					30
20			12		
30	10				
40					
<b>Αθροίσματα</b>	50				

2. Πόσοι μαθητές επισκέφθηκαν τουλάχιστον 20 φορές την ιστοσελίδα;  
3. Ποιο ποσοστό των μαθητών αυτών επισκέφθηκε το πολύ 30 φορές την ιστοσελίδα;  
**Μονάδες 15 + 5 + 5 = 25**

### ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x-2}$ .

1. Ποιο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ ;
2. Ποια η μέση τιμή και η διάμεσος των παρατηρήσεων  $f(2)$ ,  $f(6)$ ,  $f(27)$ ,  $f(11)$ ,  $f(3)$ .
3. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της  $f(x)$ , δηλαδή η  $f'(x)$ .
4. Να υπολογιστεί το  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 1}{x - 3}$ .

**Μονάδες 6 + 6 + 6 + 7 = 25**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΝΔΟΣΧΟΛΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣΘΕΜΑ Α

**A1.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης  $f(x) = x$  είναι  $f'(x) = 1$

Μονάδες 10

**A2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**i.** Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται συνεχής αν υπάρχει ένα  $x_0 \in A$  έτσι ώστε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

**ii.**  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$

**iii.** Ισχύει  $(\sin x)' = -\eta\mu x$

**iv.** Ισχύει  $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$ .

**v.** Διάμεσος(δ)ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση αν το  $n$  είναι περιττός

Μονάδες 10

**A3.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι ώρες μελέτης των 50 μαθητών της Α τάξης ενός Λυκείου στην διάρκεια μιας εβδομάδας είναι:

Ωρες $x_i$	Συχνότητα $v_i$	$f_i\%$	$N_i$
2	8		
3	$v_2$		
4	12		
5	15		
6	6		
Σύνολο			

**B1.** Να υπολογίσετε τη συχνότητα  $v_2$ . Μονάδες 5

**B2.** Αν  $v_2 = 9$  να συμπληρώσετε τον πίνακα. Μονάδες 5

**B3.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των ωρών μελέτης των μαθητών. Μονάδες 8

**B4.** Να υπολογίσετε το πλήθος των μαθητών που μελέτησαν το πολύ 4 ώρες.  
Μονάδες 7

### **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + ax^2 - x - 2$

**Γ1.** Να βρείτε το  $a$  ώστε η γραφική παράσταση της  $f$  να διέρχεται από το σημείο  $A(2,12)$  Μονάδες 9

**Γ2.** Αν  $a=2$  να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$  Μονάδες 8

**Γ3.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $A(2,12)$

Μονάδες 8

### **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln \frac{x+3}{2-x}$ .

**Δ1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

Μονάδες 8

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = \frac{-5}{(x+3)(x-2)}$ .

Μονάδες 8

**Δ3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι δεν έχει ακρότατο.

Μονάδες 9

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**  
**ΤΑΞΗ Γ΄**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι  $(x)' = 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$   
**(μονάδες 15)**
- B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση: **(μονάδες 10)**
- α) Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $f$  και  $g$  ισχύει:  $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$  .
- β) Ισχύει  $(\eta \mu x)' = -\sigma \nu x$ , για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ .
- γ) Το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων  $f_i$  των τιμών  $x_i$  μιας μεταβλητής είναι ίσο με **100** .
- δ) Η διάμεσος ενός δείγματος είναι μέτρο διασποράς.
- ε) Το εύρος ενός δείγματος τιμών θεωρείται αξιόπιστο μέτρο διασποράς.

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται ο πίνακας:

$x_i$	$v_i$	$f_i$	$f_i \%$	$N_i$	$F_i$	$F_i \%$	$x_i \cdot v_i$
1	4						
2	5						
3	8						
4	3						
Σύνολο							

- α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα αφού πρώτα τον μεταφέρετε στο γραπτό σας.  
**(μονάδες 12)**
- β) Να βρείτε τη μέση τιμή των δεδομένων του ίδιου πίνακα.  
**(μονάδες 8)**
- γ) Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες του 2.  
**(μονάδες 5)**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$ , όπου  $x$  πραγματικός αριθμός.

- α) Να βρείτε την  $f'(x)$ .  
**(μονάδες 7)**
- β) Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης  $f$  στα οποία η παράγωγος είναι 0.  
**(μονάδες 8)**
- γ) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατά της .  
**(μονάδες 10)**

#### **ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Οι βαθμοί της μικρής Χουάνας στον έλεγχο του Β΄ τριμήνου, στα 10 μαθήματα που εξετάζονται γραπτά, ήταν: 15,17,14,18,15,15,17,17,16,16.

**α)** Να βρείτε τη μέση τιμή των παραπάνω βαθμών.

**(μονάδες 8)**

**β)** Να βρείτε τη διάμεσο τιμή των παραπάνω βαθμών.

**(μονάδες 8)**

**γ)** Αν η διακύμανση των παραπάνω τιμών  $s^2$ , είναι ίση με 1,4 να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής CV. Χαρακτηρίζεται το δείγμα των βαθμών ως ομοιογενές; (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).

(Δίνεται ότι:  $\sqrt{1,4} \approx 1,2$ )

**(μονάδες 9)**

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΙΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης  $f(x) = c$  είναι ίση με 0.

**Μονάδες 6**

**A2.** Πως ορίζεται η μέση τιμή μίας ποσοτικής μεταβλητής  $X$ , σε ένα δείγμα τιμών  $t_1, t_2, \dots, t_n$  μεγέθους  $n$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

**α)**  $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

**β)**  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$

**γ)**  $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

**δ)** Η διάμεσος ( $\delta$ ) ενός δείγματος είναι ένα μέτρο διασποράς.

**ε)** Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής.

**Μονάδες 15**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$ .

**B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

**Μονάδες 7**

**B2.** Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ .

**Μονάδες 9**

**B3.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow -2} f'(x)$ .

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ Γ**

Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον επόμενο πίνακα συχνοτήτων και στη συνέχεια να συμπληρώσετε τα στοιχεία που λείπουν σε κάθε μια από τις πέντε στήλες

$x_i$	$v_i$	$f_i$	$N_i$	$f_i\%$	$F_i\%$
1	2	0,1			
2			8		
3	8				
4					
ΣΥΝΟΛΟ		1		100	

**Μονάδες 25**

**ΘΕΜΑ Δ**

Μια μεταβλητή  $X$  παίρνει τις τιμές 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

**Δ1.** Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$ .

**Μονάδες 8**

**Δ2.** Να βρείτε τη διάμεσο  $\delta$  των παραπάνω παρατηρήσεων.

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να βρείτε τη διακύμανση  $S^2$  των παραπάνω παρατηρήσεων.

**Μονάδες 10**

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής**  
**ΤΑΞΗ: Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Θέμα 1°**

**A.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της.

**(Μονάδες 03)**

**B.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι :

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

**(Μονάδες 08)**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

**α.** Αν  $A$  και  $B$  δύο σύνολα με  $A \subseteq B$ , τότε ισχύει  $A \cap B = A$

**β.** Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της όταν για κάθε  $x \in A$  ισχύει  $f(x) \geq f(x_0)$ .

**γ.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ , όπου  $l_1, l_2$  πραγματικοί αριθμοί και υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$ , τότε ισχύει η σχέση  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$ .

**δ.** Ισχύει η σχέση  $(\sin x)' = \eta \mu x$

**ε.** Η μέση τιμή και η διάμεσος ενός συνόλου  $n$  παρατηρήσεων είναι μέτρα διασποράς.

**(5x2 = 10 μονάδες)**

**Δ.** Να συμπληρώσετε τους παρακάτω κανόνες παραγωγίσισης

**α.**  $(f(x) \cdot g(x))' = \dots\dots\dots$       **β.**  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dots\dots\dots$

**(Μονάδες 04)**

**Θέμα 2°**

Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = \alpha \cdot x^3 + \beta x^2 + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , η καμπύλη της οποίας διέρχεται από τα σημεία  $A(1,0)$  και  $B(2,5)$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι :  $\alpha = 2$  και  $\beta = -3$ .



( Μονάδες 09)

β. Για  $\alpha = 2$  και  $\beta = -3$ , να βρείτε την  $f'(x)$ .

( Μονάδες 08)

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = -1$ .

( Μονάδες 08)

### Θέμα 3<sup>ο</sup>

Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές  $x_i$  μιας μεταβλητής  $X$ , και κάποιες από τις αντίστοιχες συχνότητες.

Η σχετική συχνότητα της τιμής

$x_4$  είναι  $f_4 = 0,4$ .

Η συχνότητα  $v_1$  είναι το τοπικό **ελάχιστο**

και η μέση τιμή  $\bar{x}$ , των παραπάνω τιμών  $x_i$

το τοπικό **μέγιστο** της συνάρτησης:  $f(x) = 2 \cdot x^3 - 3x^2 + 6 - \bar{x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α. Να αποδείξετε ότι το μέγεθος  $v$  του δείγματος, είναι:  $v = 15$ .

( Μονάδες 05)

β. Να αποδείξετε ότι  $v_1 = 2$  και  $\bar{x} = 3$ .

( Μονάδες 09)

γ. Να αποδείξετε ότι η συχνότητα  $v_3$  είναι:  $v_3 = 5$ .

( Μονάδες 05)

δ. Να υπολογίσετε τη διάμεσο του δείγματος.

( Μονάδες 06)

$x_i$	$v_i$
1	
2	2
3	
4	6
Σύνολο	$v$

### Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο:  $f(x) = \frac{(x^2 - 1) \cdot \lambda^2 - 4x^2 + 4}{x - 1}$

και το πείραμα τύχης της ρίψης ενός ζαριού με δειγματικό χώρο  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Αν  $\lambda \in \Omega$  τότε:

α. Να αποδείξετε ότι:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \cdot (\lambda^2 - 4)$

( Μονάδες 07)

β. Να προσδιορίσετε τα στοιχεία των παρακάτω ενδεχομένων

$$A = \left\{ \lambda \in \Omega / \lim_{x \rightarrow 1} f(x) > 0 \right\}$$

( Μονάδες 05)

$$B = \left\{ \lambda \in \Omega / \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6 \cdot \lambda \right\}$$

( Μονάδες 05)

Να βρείτε την πιθανότητα:

i. Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A και B. ( Μονάδες 04)

ii. Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A. ( Μονάδες 04)



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΠΕΡ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Π/ΘΜΙΑΣ & Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΝΟΤΙΟΥ  
ΑΙΓΑΙΟΥ

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ  
ΜΑΙΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ  
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΤΑΞΗ:Γ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Ας υποθέσουμε ότι  $x_1, x_2, \dots, x_k$  είναι οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$ , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους  $n$ . Τι ονομάζεται συχνότητα  $n_i$  της τιμής  $x_i$ ;

(μον.4)

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται συνεχής;

(μον.4)

**A3.** Να αποδείξετε ότι  $(x)' = 1$

(μον.9)

**A4.** Να συμπληρώσετε τις ισότητες

$(c)' = \dots\dots\dots, (e^x)' = \dots\dots\dots, (\ln x)' = \dots\dots\dots$

$(\sqrt{x})' = \dots\dots\dots, (x^n)' = \dots\dots\dots$

(μον.5)

**A5.** Η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ το 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτή και το πολύ το 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτή. Σωστό ή Λάθος;

(μον.3)

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 1, x \in \mathbb{R}$

**B1.** Να βρείτε την  $f'(x)$

(μον.4)

**B2.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα

(μον.7)

**B3.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο της

$M(-1, f(-1))$

(μον.7)

**B4.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{x^2 - x}$

(μον.7)

### ΘΕΜΑ Γ

Οι παρακάτω τιμές αντιπροσωπεύουν το πλήθος των επιβατών που μπορεί να μεταφέρει καθένα από 20 διαφορετικά αυτοκίνητα .

5 4 4 6 4 3 5 4 5 3 4 3 5 6 4 5 5 3 4 4

Γ1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα (μον.9)

Μεταβλητή $x_i$	Συχνότητα $v_i$	Σχετική συχνότητα τοις εκατό $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα $N_i$	Αθροιστική σχετική συχνότητα τοις εκατό $F_i\%$	$x_i v_i$
3					
4					
5					
6					
σύνολο					

Γ2. Να βρείτε τη διάμεσο των παραπάνω τιμών (μον.6)

Γ3. Να βρείτε τη μέση τιμή των παραπάνω τιμών (μον.5)

Γ4. Να βρείτε το ποσοστό των αυτοκινήτων του δείγματος που μπορεί να μεταφέρει το πολύ 5 επιβάτες. (μον.5)

### ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα (μον.10)

Μεταβλητή $x_i$	Συχνότητα $v_i$	Σχετική συχνότητα $f_i$	Αθροιστική συχνότητα $N_i$	Αθροιστική ή σχετική συχνότητα $F_i$	$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$
$x_1=1$			100			
$x_2=3$				0,5		
$x_3=5$	250	0,5				
Σύνολο						

Δ2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της  $f$  (μον.7)

Δ3. Να υπολογίσετε τη διακύμανση της  $f$  (μον.8)

(Δίνεται ότι 
$$s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{(\sum_{i=1}^k x_i v_i)^2}{v} \right\}$$
)

**ΓΡΑΠΤΕΣ – ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ/ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΤΑΞΗ: Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ :** .....

**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ :** .....

**1<sup>ο</sup> Θέμα**

A. Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται συνεχής;  
(4 μονάδες)

B. Να γράψετε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$$cf(x), \quad f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{με } g(x) \neq 0$$

όπου  $c$  πραγματική σταθερά. (9 μονάδες)

Γ. Να γράψετε τα γράμματα της στήλης A και δίπλα τον αριθμό της στήλης B που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη A συνάρτηση	Στήλη B πρώτη παράγωγος
α. $x^2+3$	1. $1-\eta\mu x$
β. $x+\sigma\upsilon\nu x$	2. $3x^2-8x$
γ. $x\eta\mu x$	3. $2x+3$
δ. $x^3-4x^2$	4. $\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$
	5. $2x$

(12 μονάδες)

**2<sup>ο</sup> Θέμα**

Η εξέταση 10 μαθητών στο μάθημα της Στατιστικής έδωσε τους εξής βαθμούς:

11, 3, 7, 5, 16, 14, 11, 10, 11, 12

α) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έγραψε κάτω από 10.  
(5 μονάδες)

β) Να βρείτε πόσοι μαθητές έγραψαν τουλάχιστον 14. (5 μονάδες)

γ) Να βρείτε τη διάμεσο. (7 μονάδες)

δ) Να βρείτε τη μέση τιμή. (8 μονάδες)

**3<sup>ο</sup> Θέμα**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f(x)$ . ( 5 μονάδες)
- β) Να υπολογίσετε τα  $f(1)$  και  $f(3)$ . ( 5 μονάδες)
- γ) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ . ( 7 μονάδες)
- δ) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ . ( 8 μονάδες)

#### 4° Θέμα

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 4x + 6$

- α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της  $f$ . ( 5 μονάδες)
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία. (10 μονάδες)
- γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τα ακρότατα καθώς και να βρεθούν οι τιμές των ακροτάτων. ( 10 μονάδες)

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΔΥΟ (2)**

Όνοματεπώνυμο:..... Α.Κ.....

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Αν  $A, B$  δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  να αποδείξετε ότι ισχύει:  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ . **Μονάδες 10**
- A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;  
**Μονάδες 5**
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α.** Δύο ενδεχόμενα  $A, B$  του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$  λέγονται ασυμβίβαστα όταν  $A \cup B = \emptyset$ .
- β.** Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών οι αθροιστικές συχνότητες  $N_i$  εκφράζουν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής  $x_i$ .
- γ.** Η διάμεσος μιας κανονικής κατανομής συμπίπτει με τη μέση τιμή της.
- δ.** Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  έχουν στο  $x_0 \in \mathbb{R}$  όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$
- ε.** Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  λέγεται συνεχής στο  $A$ , αν για κάθε  $x_0 \in A$  ισχύει  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . **Μονάδες 5x2=10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων που παριστάνει τον αριθμό των παιδιών ενός δείγματος 40 οικογενειών.

$x_i$	$v_i$	$f_i$	$N_i$	$F_i$
1	4			
2	16			
3				
4		0,2		
Σύνολο				

**B1.** Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.

**Μονάδες 13**

**B2.** Να βρείτε τον αριθμό των οικογενειών που έχουν τουλάχιστον δύο παιδιά .

**Μονάδες 6**

**B3.** Να υπολογίσετε το ποσοστό των οικογενειών που έχουν το πολύ τρία παιδιά .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Θεωρούμε το δείγμα των παρατηρήσεων  $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$  και τη συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ .

Γ1. Να υπολογίσετε τη διάμεσο του παραπάνω δείγματος.

Γ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

Γ4. Αν  $A, B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με  $A \cup B = \Omega$ ,  $P(A) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  και

$P(B')$  η τιμή της διαμέσου που υπολογίσατε στο Γ1, να υπολογίσετε την  $P(A \cap B)$ .

**Μονάδες 6+5+6+8=25**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω  $A$  το ενδεχόμενο ο μαθητής να είναι άριστος στα Μαθηματικά και  $B$  το ενδεχόμενο να είναι άριστος στα Αρχαία, με  $P(A), P(B)$  οι αντίστοιχες πιθανότητες των παραπάνω ενδεχομένων.

Αν η πιθανότητα να είναι άριστος μόνο στα Μαθηματικά είναι  $\frac{3}{10}$  και οι πιθανότητες  $P(B), P(A \cap B)$

βρίσκονται στο σύνολο  $\Psi = \left\{ \frac{1}{2}, \alpha, \frac{4}{3} \right\}$ , όπου  $\alpha = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4}$ . Να βρείτε:

Δ1. Να αποδείξετε ότι  $\alpha = \frac{2}{5}$ .

**Μονάδες 5**

Δ2. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου  $A$ .

**Μονάδες 5**

Δ3. Την πιθανότητα να είναι καλός μόνο σε ένα από τα 2 μαθήματα.

**Μονάδες 5**

Δ4. Την πιθανότητα να είναι καλός το πολύ σε ένα από τα 2 μαθήματα.

**Μονάδες 5**

Δ5. Να μην είναι καλός σε κανένα από τα παραπάνω μαθήματα.

**Μονάδες 5**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ – ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2011-2012**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ**  
**ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

2. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης  $f(x) = x$  είναι η  $f'(x) = 1$ , δηλαδή  $(x)' = 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 10**

2. Πότε δύο ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  λέγονται ασυμβίβαστα;

**Μονάδες 5**

3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α. Η παράγωγος της  $f(x) = \eta\mu x$  είναι  $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ .
- β. Για την παράγωγο του γινομένου δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων ισχύει ο κανόνας  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ .
- γ. Η διάμεσος  $\delta$  ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων είναι πάντα μία από αυτές τις παρατηρήσεις.
- δ. Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει πάντα  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .
- ε. Για την σχετική συχνότητα  $f_i$  των τιμών  $x_i$  ενός δείγματος μεγέθους  $n$  ισχύει  $0 \leq f_i \leq 1$ .

**Μονάδες  $5 \times 2 = 10$**

**ΘΕΜΑ Β**

Σε ένα σχολείο το 70% των μαθητών μιλούν Αγγλικά, το 30% μιλούν Γαλλικά και το 10% μιλούν και τις δύο αυτές γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή αυτού του σχολείου.

23. Να υπολογιστεί η πιθανότητα ο μαθητής να μιλάει μία τουλάχιστον από αυτές τις γλώσσες.
24. Να υπολογιστεί η πιθανότητα να μην μιλάει καμιά από αυτές τις γλώσσες.
25. Να υπολογιστεί η πιθανότητα να μιλάει μόνο Γαλλικά.

**Μονάδες  $8 + 8 + 9 = 25$**



**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΝΔΟΣΧΟΛΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης  $f(x) = x$  είναι  $f'(x) = 1$

**Μονάδες 10**

**A2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**vi.** Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται συνεχής αν υπάρχει ένα  $x_0 \in A$  έτσι ώστε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

**vii.**  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$

**viii.** Ισχύει  $(\sin x)' = -\eta\mu x$

**ix.** Ισχύει  $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$ .

**x.** Διάμεσος(δ)ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση αν το  $n$  είναι περιττός

**Μονάδες 10**

**A3.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της.

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Β**

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι ώρες μελέτης των 50 μαθητών της Α τάξης ενός Λυκείου στην διάρκεια μιας εβδομάδας είναι:

Ωρες $x_i$	Συχνότητα $v_i$	$f_i\%$	$N_i$
2	8		
3	$v_2$		
4	12		
5	15		
6	6		
Σύνολο			

**B1.** Να υπολογίσετε τη συχνότητα  $v_2$ . **Μονάδες 5**

**B2.** Αν  $v_2 = 9$  να συμπληρώσετε τον πίνακα. **Μονάδες 5**

**B3.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των ωρών μελέτης των μαθητών.  
**Μονάδες 8**

**B4.** Να υπολογίσετε το πλήθος των μαθητών που μελέτησαν το πολύ 4 ώρες.  
**Μονάδες 7**

### **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + ax^2 - x - 2$

Γ1. Να βρείτε το  $a$  ώστε η γραφική παράσταση της  $f$  να διέρχεται από το σημείο  $A(2,12)$  **Μονάδες 9**

Γ2. Αν  $a=2$  να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$  **Μονάδες 8**

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $A(2,12)$

**Μονάδες 8**

### **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln \frac{x+3}{2-x}$ .

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

**Μονάδες 8**

Δ2. Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = \frac{-5}{(x+3)(x-2)}$ .

**Μονάδες 8**

Δ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι δεν έχει ακρότατο.

**Μονάδες 9**

### Θέμα 1<sup>ο</sup>:

A) Να κάνετε την αντιστοίχιση στον παρακάτω πίνακα μεταξύ της κάθε συνάρτησης και της πρώτης παραγώγου της. μονάδες 15

Στήλη Α $f(x)$	Στήλη Β $f'(x)$
$f(x) = c$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = x^p$	$f'(x) = -\eta\mu x$
$f(x) = \eta\mu x$	$f'(x) = 0$
$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$	$f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \rho \cdot x^{\rho-1}$

B) Να γράψετε τους τύπους που προκύπτουν από τους κανόνες παραγώγισης για τις παρακάτω συναρτήσεις: μονάδες 10

i)  $(f(x) + g(x))' =$

ii)  $(f(x) \cdot g(x))' =$

iii)  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' =$

### Θέμα 2<sup>ο</sup>:

Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

α) Βρείτε την συνάρτηση  $f'(x)$  μονάδες 10

β) Βρείτε την  $f'(1)$  μονάδες 5

γ) Βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f'(x)$  μονάδες 5



**Θέμα 3<sup>ο</sup>:**

Μια τάξη έχει 18 μαθητές. Η μέση τιμή του ύψους των μαθητών είναι 172cm.

A) Ποιο θα είναι το μέσο ύψος της τάξης αν προστεθούν άλλοι δύο μαθητές με ύψος 152 και 158cm αντίστοιχα; μονάδες 13

B) Πόσο θα γίνει το μέσο ύψος της τάξης αν φύγει ένας μαθητής με ύψος 186cm; μονάδες 12

**Θέμα 4<sup>ο</sup>:**

Τα αποτελέσματα των εκλογών σε ένα εκλογικό τμήμα δίνονται από τον παρακάτω (ελλιπή) πίνακα:

Κόμμα $x_i$	Συχνότητα $v_i$	Σχετική Συχνότητα $f_i$
A		0,25
B	150	0,50
Γ		0,10
Δ	45	
Σύνολο		

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα. μονάδες 18

β) Να σχεδιάσετε το ραβδόγραμμα των συχνοτήτων  $v_i$  μονάδες 7

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A)** Θεωρούμε ένα δείγμα μεγέθους  $n$  και έστω  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , με  $k \leq n$ , οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$  ως προς την οποία μελετάμε το δείγμα. Έστω επίσης  $n_i$  η συχνότητα της τιμής  $x_i$ . Αν  $f_i$  είναι η σχετική συχνότητα της τιμής  $x_i$  με  $i=1, 2, \dots, k$ , να αποδείξετε ότι:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1. \quad (8 \text{ μονάδες})$$

**B)** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες: (10 μονάδες)

**α)** Το χρώμα κάθε αυτοκινήτου είναι ποιοτική μεταβλητή.

**β)** Η συνάρτηση  $f(x) = \frac{5}{x-1}$  έχει πεδίο ορισμού όλο το  $\mathbb{R}$ .

**γ)** Ο αριθμός των απουσιών των μαθητών της Δ' Λυκείου είναι συνεχής ποσοτική μεταβλητή.

**δ)** Η αθροιστική συχνότητα  $N_i$  μιας κατανομής εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής  $x_i$ .

**ε)** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $(\eta \mu x)' = -\sigma \mu x$ .

**Γ)** Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις: (7 μονάδες)

**α)** Η μέση τιμή των αριθμών 25, 35, 44, 36, 20 είναι .....

**β)** Η διάμεσος των αριθμών 8, 12, 16, 24, 9, 10, 5 είναι .....

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 3x^2 - 12x + 8$

**A)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$  και την τιμή  $f(2)$ .

(12 μονάδες)

**B)** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

(13 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Να συμπληρώσετε τα στοιχεία που λείπουν σε καθεμία από τις πέντε στήλες του παρακάτω πίνακα συχνοτήτων. (25 μονάδες)

$x_i$	$n_i$	$f_i$	$N_i$	$F_i$
1	8	0,2		
2			24	
3	12			
4				
Σύνολο				

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Οι δείκτες νοημοσύνης (IQ) 40 ατόμων, όπως μετρήθηκε με κάποιο τεστ, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

99	100	111	106	103
105	120	101	95	106
115	106	92	102	114
110	101	107	102	94
103	90	96	112	103
94	100	108	104	113
97	104	112	109	99
103	118	98	116	107

A) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε 6 κλάσεις και να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής  $n_i$

$f_i$ ,  $N_i$  και  $F_i$ . (13 μονάδες)

B) Να κατασκευάσετε ιστόγραμμα συχνοτήτων  $n_i$  και σχετικών συχνοτήτων  $f_i$ . (12 μονάδες)

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.

**Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
(ΕΝΔΟΣΧΟΛΙΚΕΣ)**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ:ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **Μονάδες 10**
- A2.** Έστω  $M(x,y)$  η εικόνα του μιγαδικού αριθμού  $z = x+yi$  στο μιγαδικό επίπεδο. Τι ορίζουμε ως μέτρο του  $z$ ; **Μονάδες 5**
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή:  
αν  $x_1 \neq x_2$ , τότε  $f(x_1) \neq f(x_2)$
- β)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$
- γ)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε  $x \in \Delta$  ή είναι αρνητική για κάθε  $x \in \Delta$ , δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα  $\Delta$ .
- δ)** Για κάθε μιγαδικό  $z$  ισχύει  $|z| = z \cdot \bar{z}$
- ε)** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \varepsilon \phi x$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $R_1 = R - \{x \mid \sin x = 0\}$  και ισχύει  $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z = \lambda^2 - 2 + (3-2\lambda)i, \lambda \in \mathbf{R} \text{ και } w = k+4i, k > 0.$$

Για τους  $z$  και  $w$  ισχύουν:  $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 0$  και  $w = 5$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $z = -1 + i$ .

**Μονάδες 8**



**B2.** Να αποδείξετε ότι  $k=3$

**Μονάδες 8**

**B3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\mu \in \mathbb{R}$ , για το οποίο ισχύει  
 $z + \mu\bar{z} = 3i - w$

**Μονάδες 9**

### **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$$2 - x^4 \leq f(x) \leq 2 + x^4 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

Να αποδείξετε ότι:

**Γ1.**  $f(0) = 2$

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 = 0$ .

**Μονάδες 3**

**Γ3.** Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0 = 0$ .

**Μονάδες 10**

### **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 3x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

**Δ1.** Αν η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0 = 1$ , να βρείτε την τιμή του  $\lambda$ .

**Μονάδες 4**

Για  $\lambda=0$

**Δ2.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 8**

**Δ3.** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της  $f$  που είναι παράλληλες προς την ευθεία  $y=9x$ .

**Μονάδες 8**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) - \sqrt{x} = 0$  έχει μία τουλάχιστον λύση στο ανοικτό διάστημα  $(0,1)$ .

**Μονάδες 5**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΝΔΟΣΧΟΛΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**Όνοματεπώνυμο:** .....

**ΘΕΜΑ Α**

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε μιγαδικούς αριθμούς  $z_1, z_2$  ισχύει  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ .  
**Μονάδες 10**
2. Πότε μια συνάρτηση λέγεται κυρτή σε ένα διάστημα  $\Delta$ ;  
**Μονάδες 5**
3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*
  - α. Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z$ , ισχύει  $|z|^2 = z^2$ .
  - β. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  ώστε  $f(x_0) = 0$  τότε σίγουρα  $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ .
  - γ. Η συνάρτηση  $f$  θα είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της  $A$  αν για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $f(x_1) = f(x_2)$  να συνεπάγεται  $x_1 = x_2$ .
  - δ. Για κάθε συνάρτηση  $f$  που είναι γνησίως αύξουσα σε διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \Delta$ .
  - ε. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  και  $f(\alpha) = f(\beta)$ , τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (\alpha, \beta)$ , τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = 0$ .

**Μονάδες 5x2=10**

**ΘΕΜΑ Β**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $w = \frac{3+4 \cdot i}{2+i}$  και  $z = x + y \cdot i$  με  $x, y \in \mathbb{R}$ .

26. Να αποδειχθεί ότι  $\operatorname{Re}(w) = 2$  και  $\operatorname{Im}(w) = 1$ .  
**Μονάδες 8**
27. Ποιος ο μιγαδικός αριθμός  $z$ , αν ισχύει  $2z - iw = 5 - i^7$ ;  
**Μονάδες 8**

28. Ποιος ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $u$ , αν δίνεται ότι ισχύει  $|u - w| = 1$ ;

**Μονάδες 9**

### ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - \frac{1}{3}$ .

18. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 8**

19. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο σημείο  $M(0, f(0))$ .

**Μονάδες 8**

20. Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**Μονάδες 9**

### ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x \cdot \ln x + 2x - 3$  με  $x \geq 1$ .

27. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$ , έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(1, e)$ .

**Μονάδες 6**

28. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της  $f$  για  $x \geq 1$ .

**Μονάδες 6**

29. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (1, e)$  τέτοιο ώστε  $(e - 1) \cdot f'(\xi) + 2 = 3e$ .

**Μονάδες 6**

30. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση  $f(x) = 2012$ , έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα  $[1, +\infty)$ .

**Μονάδες 7**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΝΔΟΣΧΟΛΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣΘΕΜΑ Α

**A1.** Αν  $z_1, z_2$  είναι μιγαδικοί αριθμοί να αποδειχθεί ότι  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Μονάδες 10

**A2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**xi.** Κάθε συνάρτηση που είναι "1-1" στο πεδίο ορισμού της είναι γνησίως μονότονη.

**xii.** Η ευθεία  $y = l$  λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$  όταν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ .

**xiii.** Ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$ .

**xiv.** Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z \neq 0$  ορίζουμε  $z^0 = 1$ .

**xv.** Για  $x \in \mathbb{R}^*$  ισχύει  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ .

Μονάδες 10

**A3.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται συνεχής στο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

**i)** Να λύσετε την εξίσωση  $z^2 - 4z + 5 = 0$ .

Μονάδες 10

**ii)** Αν  $z_1, z_2$  οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης με  $z_1 = 2 - i$  ή μια από αυτές, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $w$  για τους οποίους ισχύει:  $|w - z_1| = |w - z_2|$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + 2x^2 - \alpha x - 2$ .

**i)** Να δείξετε ότι για κάθε  $\alpha \neq 1$  η εξίσωση  $x^3 + 2x^2 = \alpha x + 2$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(-1, 1)$

Μονάδες 13

ii) Αν  $\alpha = 1$  να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x+2}$

Μονάδες 12

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x \cdot \sqrt{2-x^2}$ .

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού.

Μονάδες 8

ii) Να δείξετε ότι  $f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{2-x^2}}$ .

Μονάδες 9

iii) Να βρείτε τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα της  $f$ .

Μονάδες 8

**ΓΡΑΠΤΕΣ – ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ/ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΤΑΞΗ: Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ : .....

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

A) Πότε μια συνάρτηση  $f:A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται “1-1; (μονάδες 4)

B) Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Bolzano (μονάδες 11)

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας τη λέξη *Σωστό* ή *Λάθος* δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών υπάρχει ένα στοιχείο  $i$  τέτοιο ώστε  $i^2 = -1$ .

β) Για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z_1, z_2$  ισχύει ότι  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

γ)  $(\sin x)' = \eta \mu x$

δ)  $(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x)$

ε) Για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  ισχύει  $|z^2| = z\bar{z}$  (μονάδες 10)

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

A) Να λυθεί στο σύνολο των μιγαδικών η εξίσωση  $x^2 - 2x + 5 = 0$  (μονάδες 10)

B) Για τις λύσεις που βρήκατε στο πρώτο ερώτημα να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α)  $x_1 + x_2$     β)  $x_1 x_2$     γ)  $\frac{x_1}{x_2}$  (μονάδες 15)

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ .

α) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  (μονάδες 10)

β) Να μελετήσετε την  $f(x)$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (μονάδες 15)

#### **Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=2x^3-2x^2-2x+3$ .

α) Να μελετήσετε την  $f(x)$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής αν υπάρχουν.  
(μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)$  τις ευθείες  $x=0, x=1$  και του άξονα των  $x$ .  
(μονάδες 15)

## ΤΑΞΗ Γ΄

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ (ΕΝΔΟΣΧΟΛΙΚΕΣ) ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ  
2012ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ****ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A.** Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  που ανήκει στο πεδίο ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. (μονάδες 13)
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση: (μονάδες 12)
- α)** Μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνάρτηση 1 – 1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει: Αν  $x_1 \neq x_2$ , τότε  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .
- β)** Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $f$  και  $g$  ισχύει:  $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$ .
- γ)** Οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  αντίστοιχα, είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y=x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $x\hat{O}\psi$  και  $x'\hat{O}\psi'$ .
- δ)** Αν  $z_1, z_2$  είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε ισχύει πάντα:  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z = \alpha + \beta i$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και  $w = 3z - \bar{iz} + 4$  όπου  $\bar{z}$  είναι ο συζυγής του  $z$ .

- α)** Να αποδείξετε ότι:  $\operatorname{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4$  και  $\operatorname{Im}(w) = 3\beta - \alpha$ . (μονάδες 13)
- β)** Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση  $y = x - 12$ , τότε οι εικόνες του  $z$  κινούνται στην ευθεία με εξίσωση  $y = x - 2$ . (μονάδες 12)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^5 + x^3 + x + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$

- α)** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει αντίστροφη συνάρτηση. (μονάδες 12) β)
- Να αποδείξετε ότι  $f(e^x) \geq f(1+x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . (μονάδες 13)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ .

- α)** Να αποδείξετε ότι:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . (μονάδες 13)
- β)** Να αποδείξετε ότι:  $f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$ . (μονάδες 12)



**ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΕΣ - ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2012**

**ΤΑΞΗ:** Γ' Λυκείου

**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:** Μαθηματικά τεχνολογικής κατεύθυνσης

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A.** Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **(12 μόρια)**
- B.** Τι ονομάζονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης  $f$ . **(8 μόρια)**
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την έκφραση «σωστό» ή «λάθος».
- α.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε κάθε σημείο του  $\Delta$  βρίσκεται «κάτω» από την γραφική παράσταση της  $f$ , με εξαίρεση ίσως το σημείο επαφής τους.
- β.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει  $f'(x_0) = 0$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο  $x_0$ .
- γ.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ , τότε ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ .
- δ.** Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.
- ε.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ . **(5 μόρια)**

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - x$ .

- A.** Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. **(13 μόρια)**
- B.** Να αποδείξετε ότι είναι κυρτή. **(5 μόρια)**
- Γ.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$ , στο σημείο  $A(0,1)$ . **(7 μόρια)**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Έστω  $z \in \mathbb{C}$ , ώστε να ισχύει:  $|z+i|^2 + |z-i|^2 = 4$ .

- α.** Να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών  $z$  βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο. **(9 μόρια)**
- β.** Έστω  $w = 2z + 3 + 4i$ . Αν ισχύει  $|z| = 1$ , τότε:
- i)** Να βρείτε που κινούνται οι εικόνες των μιγαδικών  $w$ . **(8 μόρια)**
- ii)** Να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο μέτρο του  $w$ . **(8 μόρια)**

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Δίνεται συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2x}{x - 3} = 1.$$

**A.** Να βρείτε το  $f(3)$ .

**(7 μόρια)**

**B.** Αν ισχύει  $f(5) = 6$ , να αποδείξετε ότι η ευθεία  $y = x + 2$  τέμνει την γραφική παράσταση της  $f$  σε ένα τουλάχιστον σημείο  $x_0 \in (3, 5)$ .

**(9 μόρια)**

**Γ.** Αν η  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ , να δείξετε ότι :

$$f(x) - f(x-1) < f'(x) < f(x+1) - f(x).$$

**(9 μόρια)**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>:** Α) Να αποδείξετε ότι αν για μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σ' ένα διάστημα  $\Delta$  ισχύουν

- Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$
- $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$

Τότε η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ . (Μονάδες 10)

Β) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ , στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο  $\Delta$ . (Μονάδες 5)

Γ) Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z$  ισχύει :

i.  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

ii.  $|z|^2 = z^2$

iii.  $|z| = -|z|$

iv.  $|z| = |\bar{z}|$

v.  $|z| = |z \cdot \bar{z}|$

(Μονάδες 10)

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>:** Α) Δίνεται ο μιγαδικός  $z = (\lambda + 4i) \cdot (2 - i)$

- i. Να κάνετε τις πράξεις και να γράψετε ο  $z$  στη μορφή  $a + bi$ . (Μονάδες 5)
- ii. Να βρείτε το  $\lambda$ , ώστε ο μιγαδικός  $z$  να είναι πραγματικός αριθμός. (Μονάδες 5)
- iii. Αν  $\lambda = -2$ , να βρείτε το συζυγή του  $z$ . (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα μέτρα των παρακάτω μιγαδικών αφού κάνετε όπου είναι χρήσιμο, πρώτα τις πράξεις

i.  $\frac{3-4i}{1-i}$  (Μονάδες 5)

ii.  $\frac{1-i}{1-i}$  (Μονάδες 5)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>:** Α) Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

i.  $f(x) = 2x^4 + \ln x - \sqrt{3}$  (Μονάδες 5)

ii.  $f(x) = e^x \cdot \eta\mu x$  (Μονάδες 5)

iii.  $f(x) = (3x^2 + 4x^3)^2$  (Μονάδες 5)

Β) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 3x + 5$

i. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$ . (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία  $y = 9x - 1$ . (Μονάδες 5)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>:** Α) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$

i. Να βρείτε το Πεδίο Ορισμού (Μονάδες 2)

ii. Να μελετήσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 5)

iii. Να μελετήσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής. (Μονάδες 3)

iv. Να ελέγξετε αν η  $f$  έχει οριζόντιες ασύμπτωτες στο  $+\infty$  και στο  $-\infty$ . (Μονάδες 3)

Β) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x-1) \cdot \eta\mu x$ . Να αποδείξετε ότι:

i. Η εξίσωση  $f'(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα  $(0,1)$ . (Μονάδες 5)

ii. Η εξίσωση  $\epsilon\phi x = 1 - x$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα  $(0,1)$ . (Μονάδες 5)

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**Γ' ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ 1°** Α. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της. (Μονάδες 7)

Β. να μεταφέρετε στην κόλλα σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α.  $(f(x) + g(x))' = \dots\dots\dots$                       β.  $(c \cdot f(x))' = \dots\dots\dots$   
 γ.  $(f(x) \cdot g(x))' = \dots\dots\dots$                       δ.  $(e^x)' = \dots\dots\dots$

(Μονάδες 10)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α. Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.  
 β. Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $f'(x) < 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .  
 γ. Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ , είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο  $x_0$  του  $\Delta$  και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$ , τότε:  $f'(x_0) = 0$ .  
 δ.  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$  για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z$ .

(Μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 2°** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός  $z = \frac{1+3i}{3+i}$ .

Α. Να βρείτε το πραγματικό μέρος ( $\text{Re}(z)$ ) και το φανταστικό μέρος ( $\text{Im}(z)$ ) του αριθμού  $z$ .

(Μονάδες 9)

Β. Να βρείτε το συζυγή του  $z$  (το  $\bar{z}$ ).

(Μονάδες 7)

Γ. Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού  $z$  ανήκει στον κύκλο με κέντρο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho=1$ .

(Μονάδες 9)

**ΘΕΜΑ 3°** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 3x - 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

Α. Να εξετάσετε αν η  $f$  είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 = 2$ .

(Μονάδες 10)

Β. Να εξετάσετε αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0 = 2$ . (Μονάδες 15)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + ax^2 - ax + 9$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Α. Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο  $x_0 = -1$ , να βρείτε τον αριθμό  $a$ . (Μονάδες 11)

Β. Για  $a=1$ , να βρείτε το είδος του ακροτάτου στο  $x_0 = -1$ . (Μονάδες 7)

Γ. Για  $a=1$ , να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 7)

**Σημείωση:** Να απαντήσετε στην κόλλα σας σε όλα τα θέματα.

