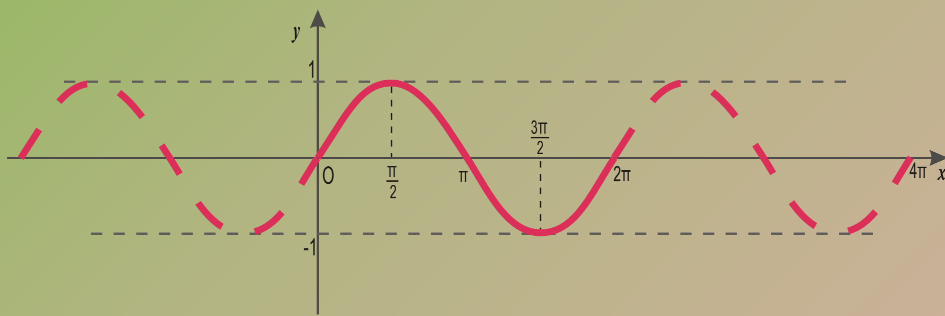
ΣΤΡΑΤΗΣ ΑΝΤΩΝΕΑΣ

Τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ της Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

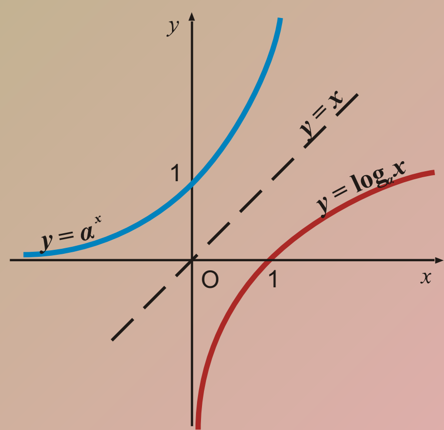


$$f(x) = \eta\mu x$$

$$x^n + y^n \neq z^n, \; n > 2$$

$$x^n + y^n \neq z^n, \; n > 2$$

$$x^n + y^n \neq z^n, \; n > 2$$



<u>ΣΤΡΑΤΗΣ ΑΝΤΩΝΕΑΣ</u>

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

της Β΄ Λυκείου

ΣΠΑΡΤΗ
2008

Κάθε γνήσιο αντίτυπο έχει την ιδιόχειρη υπογραφή του συγγραφέα

Γενική επιμέλεια : Στράτης Αντωνέας

e-mail: stranton@otenet.gr
Τηλέφωνα επικοινωνίας και διάθεσης βιβλίων
6974593717
27310 28791

<u>**ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ**</u>

ΜΕΡΟΣ Β΄ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό αποτελείται από τρία μέρη. Το πρώτο αναφέρεται στην άλγεβρα, το δεύτερο στη Γεωμετρία και το τρίτο καλύπτει την ύλη που περιέχουν τα Μαθηματικά της κατεύθυνσης.

Τα περιοδικά φαινόμενα είναι πανταχού παρόντα. Η κίνηση των πλανητών γύρω από τον ήλιο, η περιστροφή της γης γύρω από τον άξονά της, οι κινήσεις των δορυφόρων φυσικών και τεχνικών, ταλαντώσεις σωμάτων, παλιρροιακές κινήσεις κ.τ.λ. Τα μαθηματικά μοντέλα για τη μελέτη των φαινομένων αυτών περιέχουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Έτσι φαίνεται η αναγκαιότητα για τη μελέτη των συναρτήσεων αυτών. Η επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων είναι το επόμενο βήμα, το οποίο απαιτεί τη χρήση ορισμένων βασικών τύπων που δίνουν τις λύσεις στοιχειωδών τριγωνομετρικών εξισώσεων. Η λίστα των βασικών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων που γνωρίζουμε, συμπληρώνεται με ορισμένες άλλες, απαραίτητες για το λογισμό. Αυτές αναφέρονται στο άθροισμα και τη διαφορά δύο γωνιών, καθώς και στο διπλάσιο μιας γωνίας.

Τα πολυώνυμα είναι οι απλούστερες αγλεβρικές παραστάσεις και εδώ αποκτούμε όλο το απαραίτητο υπόβαθρο όπως είναι ο ορισμός, η ισότητα μεταξύ πολυωνύμων και ο λογισμός των πράξεων. Δίνεται ο αλγόριθμος της διαίρεσης δύο πολυωνύμων, καθώς και προτάσεις που αναφέρονται στη διαίρεση ενός πολυωνύμου από ένα άλλο πρώτου βαθμού. Παρόλο που έχει επινοηθεί τρόπος επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων τρίτου και τετάρτου βαθμού, εδώ αναφέρεται ο κλασσικός τρόπος με παραγοντοποίηση καθώς η εύρεση ακεραίων ριζών όταν οι συντελεστές του είναι ακέραιοι. Επίσης επιλύουμε και άλλες εξισώσεις οι οποίες μπορούν να αναχθούν σε πολυωνυμικές.

Η τοποθέτηση αντικειμένων σε μία σειρά και η αντιστοίχισή τους με το σύνολο των φυσικών αριθμών, μας οδηγεί στην έννοια της ακολουθίας. Έτσι μπορούμε να αναφερθούμε στον προηγούμενο ή τον επόμενο κάποιου όρου, τον νιοστό όρο κ.τ.λ. Δύο ακολουθίες με πολλές εφαρμογές ακόμα και στην καθημερινή πρακτική έχουν σχέση με τις δύο βασικές πράξεις, της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Η αριθμητική και η γεωμετρική πρόοδος, όπως ονομάζονται οι δύο κλάσεις ακολουθιών, δημιουργούνται με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό του ίδιου αριθμού στον προηγούμενο προκειμένου να δημιουργήσουμε τον επόμενο όρο.

Στην τελευταία ενότητα της Άλγεβρας παρουσιάζεται η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση. Γίνεται η μελέτη τους και παρουσιάζονται μέθοδοι για την επίλυση εξισώσεις, ανισώσεων και συστημάτων που περιέχουν τέτοιες συναρτήσεις. Παρουσιάζονται οι ιδιότητές τους και σημειώνεται ότι εμφανίζουν μία αντιστρεπτή διαδικασία.

Οι ενότητες που αφορούν τη Γεωμετρία αναφέρονται σε μετρικές σχέσεις στο τρίγωνο και στον κύκλο. Επίσης παρουσιάζονται οι τύποι που δίνουν το εμβαδόν όλων των βασικών ευθυγράμμων τμημάτων καθώς και του κυκλικού δίσκου.

Τα Μαθηματικά της κατεύθυνσης ξεκινούν με τον διανυσματικό λογισμό. Η έννοια του διανύσματος η οποία είναι στενά συνυφασμένη με τη Φυσική, απ' όπου προέρχονται και οι μέχρι τώρα γνώσεις, αφού έχει χρησιμοποιηθεί για να παραστήσει την ταχύτητα, την επιτάχυνση, τη δύναμη κ.τ.λ. Εκτός από τη γεωμετρική παράσταση του διανύσματος, εισάγεται και η αναλυτική παράστασή του από ένα ζεύγος συντεταγμένων σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων. Τέλος παρουσιάζεται το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων, μία εξωτερική πράξη, για την οποία αφιερώνεται αρκετό μέρος από παραδείγματα, εφαρμογές και ασκήσεις εξ' αιτίας της μεγάλης σημασίας του και εφαρμογής του σε πολλά προβλήματα.

Ακολουθεί η παρουσίαση της εξίσωσης μιας ευθείας, της απλούστερης από τις γραμμές που θα μελετήσουμε. Δίνονται οι διάφορες μορφές της εξίσωσής της, οι συνθήκες ώστε δύο ευθείες να είναι παράλληλες ή κάθετες καθώς και η εύρεση της γωνίας δύο ευθειών. Παρουσιάζονται οι τύποι απόστασης ενός σημείου από μία ευθεία, καθώς και ο τύπος που δίνει το εμβαδόν ενός τριγώνου.

Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι κωνικές τομές, ο κύκλος, η παραβολή, η έλλειψη και η υπερβολή. Δίνονται οι διάφορες μορφές των εξισώσεών τους, οι ιδιότητές τους καθώς και οι εξισώσεις των εφαπτόμενων τους. Ειδικά για την παραβολή, την έλλειψη και την υπερβολή, τα περισσότερα από τα θέματα που θα αντιμετωπίσουμε είναι παρόμοια, οπότε και οι μέθοδοι είναι ίδιες και στο μόνο που υπάρχει διαφορά είναι οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται. Στον κύκλο υπάρχει μία μεγαλύτερη ποικιλία θεμάτων, σε μερικά από αυτά χρησιμοποιούνται και γνώσεις από την Ευκλείδεια γεωμετρία. Τα πιο ενδιαφέροντα θέματα έχουν την εφαπτόμενη της κωνικής τομής και έτσι χρησιμοποιούνται γνώσεις από το προηγούμενο κεφάλαιο.

Στο τελευταίο κεφάλαιο γίνεται μία στοιχειώδης εισαγωγή στην θεωρία αριθμών. Διατυπώνεται η αρχή της Μαθηματικής επαγωγής, το θεώρημα της Ευκλείδειας διαίρεσης καθώς και ορισμένα βασικά θεωρήματα της διαιρετότητας μεταξύ ακεραίων.

Στράτης Αντωνέας

Σπάρτη, Ιούνιος 2008

ΜΕΡΟΣ Α΄ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

- Οι Τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- Βασικές Τριγωνομετρικές εξισώσεις
- Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών
- Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α

Η τριγωνομετρία, όπως φαίνεται από τα συνθετικά της λέξης, γεννήθηκε από την προσπάθεια σύνδεσης γωνιών και πλευρών ενός τριγώνου, που παραμένει όμοιο προς τον εαυτό του, όταν μεγεθύνεται ή σμικρύνεται. Έτσι αφού δημιουργήσαμε πίνακες με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών, μπορέσαμε να υπολογίζουμε μήκη γνωρίζοντας κάποια άλλα.

Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί συνέχεια της εισαγωγής στην τριγωνομετρία που παρουσιάστηκε στην ύλη της Α΄ Λυκείου. Στο τυπολόγιο που υπάρχει αμέσως μετά υπενθυμίζονται οι τύποι που χρειαζόμαστε, όπως οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μερικών γωνιών, οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες καθώς και οι τύποι αναγωγής στο πρώτο τεταρτημόριο. Αρχικά γίνεται μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, οι οποίες εφαρμόζονται στην περιγραφή περιοδικών φαινομένων όπως π.χ. τις ταλαντώσεις, τα κύματα κ.τ.λ. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα και τέλος σχεδιάζουμε τη γραφική παράστασή τους.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι τύποι για την επίλυση των βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων. Με βάση αυτές μπορούμε να λύσουμε άλλες τριγωνομετρικές εξισώσεις με τη βοήθεια και του αλγεβρικού λογισμού. Ακολουθούν οι τύποι που δίνουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς αθροίσματος γωνιών και έπειτα για το διπλάσιο μιας γωνίας. Οι ασκήσεις και οι μέθοδοι επίλυσής τους στις δύο τελευταίες ενότητες είναι παρόμοιες. Αυτό που κάνει τη διαφορά είναι οι επιπλέον τύποι και ο συνδυασμός με τα προηγούμενα προσφέρουν μία ποικιλία νέων θεμάτων.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

Γωνίες μεγαλύτερες των 360^0

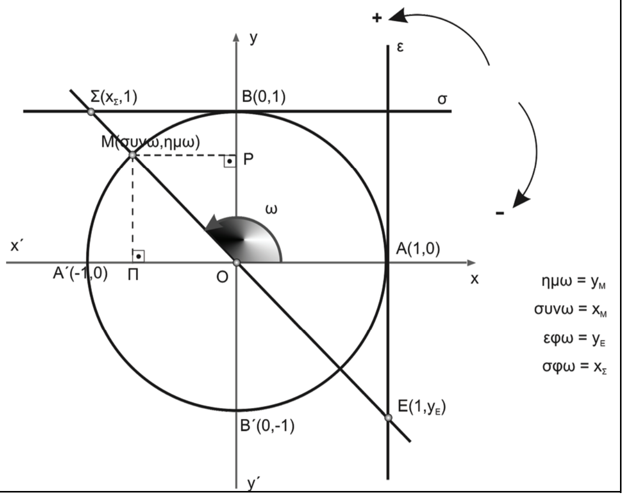
$\eta\mu(\kappa\cdot 360^0+\omega) = \eta\mu\omega\ ,\ \kappa\in\mathbb{Z}$ $\qquad$ $\sigma\upsilon\nu(\kappa\cdot 360^0+\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega\ ,\ \kappa\in\mathbb{Z}$

$\varepsilon\varphi(\kappa\cdot 360^0+\omega) = \varepsilon\varphi\omega\ ,\ \kappa\in\mathbb{Z}$ $\qquad$ $\sigma\varphi(\kappa\cdot 360^0+\omega) = \sigma\varphi\omega\ ,\ \kappa\in\mathbb{Z}$

Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας ω

	Τεταρτημόρια			
	1^o	2^o	3^o	4^o
ημω	+	+	–	–
συνω	+	–	–	+
εφω	+	–	+	–
σφω	+	–	+	–

Τριγωνομετρικός κύκλος



Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

ω σε μοίρες	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
ω σε rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
σφω		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

- $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \iff \begin{cases} \eta\mu^2\omega = 1-\sigma\upsilon\nu^2\omega \\ \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1-\eta\mu^2\omega \end{cases}$
- $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\ ,\ \sigma\upsilon\nu\omega\neq 0$ $\quad , \quad$ $\sigma\varphi\omega = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}\ ,\ \eta\mu\omega\neq 0$
- $\varepsilon\varphi\omega\cdot\sigma\varphi\omega = 1$
- $1+\varepsilon\varphi^2\omega = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}\ ,\ \sigma\upsilon\nu\omega\neq 0$ $\quad , \quad$ $1+\sigma\varphi^2\omega = \dfrac{1}{\eta\mu^2\omega}\ ,\ \eta\mu\omega\neq 0$

Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

Γωνίες αντίθετες	Γωνίες με άθροισμα 180^0	Γωνίες με διαφορά 180^0	Γωνίες με άθροισμα 90^0
$\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$ $\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$ $\varepsilon\varphi(-\omega) = -\varepsilon\varphi\omega$ $\sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega$	$\eta\mu(180^0-\omega) = \eta\mu\omega$ $\sigma\upsilon\nu(180^0-\omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$ $\varepsilon\varphi(180^0-\omega) = -\varepsilon\varphi\omega$ $\sigma\varphi(180^0-\omega) = -\sigma\varphi\omega$	$\eta\mu(180^0+\omega) = -\eta\mu\omega$ $\sigma\upsilon\nu(180^0+\omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$ $\varepsilon\varphi(180^0+\omega) = \varepsilon\varphi\omega$ $\sigma\varphi(180^0+\omega) = \sigma\varphi\omega$	$\eta\mu(90^0-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$ $\sigma\upsilon\nu(90^0-\omega) = \eta\mu\omega$ $\varepsilon\varphi(90^0-\omega) = \sigma\varphi\omega$ $\sigma\varphi(90^0-\omega) = \varepsilon\varphi\omega$

$\eta\mu(90^0+\omega) = \eta\mu[90^0-(-\omega)] = \sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$

$\sigma\upsilon\nu(90^0+\omega) = -\eta\mu\omega$

$\varepsilon\varphi(90^0+\omega) = -\sigma\varphi\omega$

$\sigma\varphi(90^0+\omega) = -\varepsilon\varphi\omega$

Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

- $\eta\mu x = \alpha \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ x = 2\kappa\pi + (\pi - \theta) \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \qquad (-1 \le \alpha \le 1)$
- $\sigma\upsilon\nu x = \alpha \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ x = 2\kappa\pi - \theta \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \qquad (-1 \le \alpha \le 1)$
- $\varepsilon\varphi x = \alpha \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$
- $\sigma\varphi x = \alpha \Leftrightarrow \sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$

Τριγωνομετρικοι αριθμοί αθροίσματος γωνιών	Τριγωνομετρικοι αριθμοί διαφοράς γωνιών
$\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta$ $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$ $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta}$ $\sigma\varphi(\alpha+\beta) = \dfrac{\sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\alpha}$	$\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta$ $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$ $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta) = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1 + \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta}$ $\sigma\varphi(\alpha-\beta) = \dfrac{\sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi\beta + 1}{\sigma\varphi\beta - \sigma\varphi\alpha}$

Τριγωνομετρικοι αριθμοί της γωνίας 2α	Τύποι αποτετραγωνισμού
$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$ $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$ $= 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$ $= 1 - 2\eta\mu^2\alpha$ $\varepsilon\varphi 2\alpha = \dfrac{2 \cdot \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}.$	$\eta\mu^2\alpha = \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$ $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \dfrac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$ $\varepsilon\varphi^2\alpha = \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.

ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1.1. <u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u>

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $\mathrm{T} > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

(i) $x + \mathrm{T} \in A$, $x - \mathrm{T} \in A$ και

(ii) $f(x + \mathrm{T}) = f(x - \mathrm{T}) = f(x)$

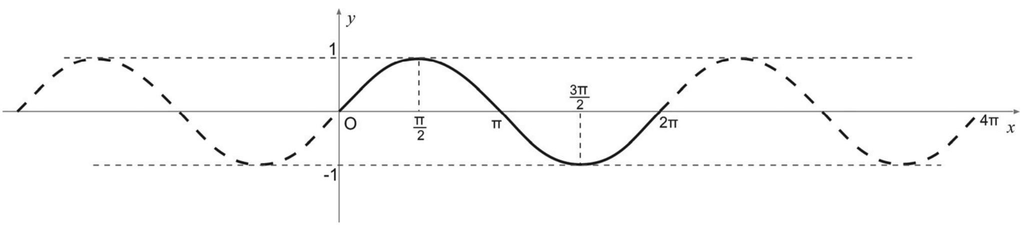
Ο πραγματικός αριθμός Τ λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f.

1. Η συνάρτηση $f(x) = ημx$.

Ο πίνακας μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = ημx$, όταν $0 \le x \le 2\pi$, είναι:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f(x) = ημx$	0	$\nearrow$	1 μεγ.	$\searrow$	0	$\searrow$	-1 ελαχ.	$\nearrow$	0

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ημx$ είναι:

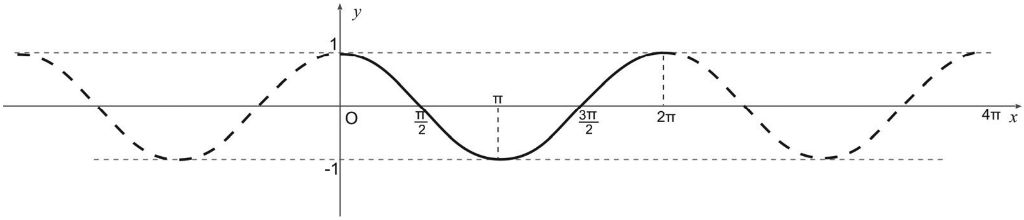


2. Η συνάρτηση $f(x) = συνx$.

Ο πίνακας μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = συνx$, όταν $0 \le x \le 2\pi$, είναι:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f(x) = συνx$	1 μεγ.	$\searrow$	0	$\searrow$	-1 ελαχ.	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1 μεγ.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = συνx$ είναι:

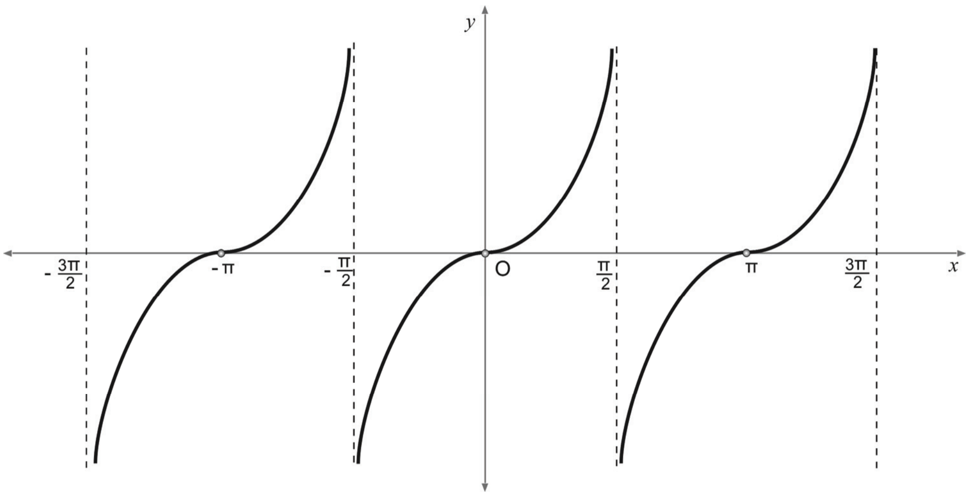


3. Η συνάρτηση $f(x) = εφx$.

Ο πίνακας μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = συνx$, όταν $0 \leq x \leq 2\pi$, είναι:

x		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$	
$f(x) = εφx$	…	‖	↗	‖	↗	‖	↗	‖	…

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = εφx$ είναι:



1.2. <u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> *Κάθε μια από τις δύο συναρτήσεις* $f(x) = \rho \cdot ημ(\omega x)$ *και* $g(x) = \rho \cdot συν(\omega x)$ *με* $\rho, \omega > 0$ *έχει:*

- *Μέγιστη τιμή την* ρ *και ελάχιστη τιμή την* $-\rho$.
- *Περίοδο* $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

1.2.1.<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u> Αν δεν γνωρίζουμε ότι το $\rho > 0$, τότε η μέγιστη τιμή των συναρτήσεων είναι $|\rho|$, ενώ η ελάχιστη τιμή είναι το $-|\rho|$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = α·συν(\frac{π}{2} + 4x) - 2·ημ(π+4x)$, με $α > 0$.

i) Να γράψετε τη συνάρτηση στη μορφή $f(x) = ρ·ημ(ωx)$.
ii) Να βρείτε τον $α$ αν η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή 3.
iii) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, όταν $0 \le x \le π$.

Λύση:

i) $f(x) = α·συν(\frac{π}{2} + 4x) - 2·ημ(π + 4x) = α·συν[(\frac{π}{2} - (-4x)] - 2·(-ημ4x)$

$= α·ημ(-4x) + 2·ημ4x = -α·ημ4x + 2·ημ4x = (2-α)·ημ4x.$

ii) Η συνάρτηση f έχει μέγιστη τιμή το 3 αν και μόνο αν

$|2-α| = 3 \Leftrightarrow$

$2-α = 3$ ή $2-α = -3 \Leftrightarrow$

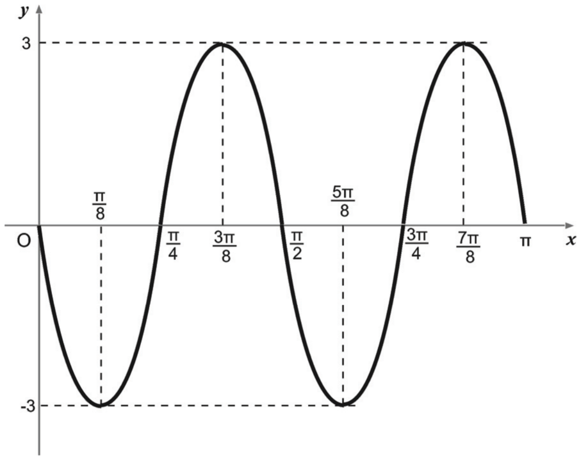
$-α = 3-2$ ή $-α = -3-2 \Leftrightarrow$

$-α = 1$ ή $-α = -5 \Leftrightarrow$

$α = -1$ *(απορρίπτεται)* ή $α = 5 \Leftrightarrow$

$α = 5.$

iii) Για $α = 5$ έχουμε: $f(x) = -3·ημ4x$.
Η περίοδος της συνάρτησης f είναι
$T = \frac{2π}{4} = \frac{π}{2}$.
Όταν $0 \le x \le π$ η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

1.4. Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα:

Συνάρτηση	Περίοδος	Μέγιστη-Ελάχιστη τιμή	Θέσεις ακροτάτων
$f(x) = \frac{1}{3}·συν2x$			
$f(x) = -2·ημ5x$			
$f(x) = 3·συν\left(\frac{x}{4}\right) - 2$			

1.5. Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα:

Συνάρτηση	Περίοδος	Μέγιστη-Ελάχιστη τιμή	Διαστήματα μονοτονίας
$f(x) = \frac{5}{2}·ημ\left(\frac{x}{2}\right)$			
$f(x) = 2·συν4x$			
$f(x) = -\frac{1}{2}·ημ2x + 1$			

1.6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3συν\frac{x}{4}$.

i) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.
ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

1.7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ημx$ και $g(x) = συνx$.

i) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, όταν $0 \leq x \leq 2\pi$.
ii) Από το σχέδιο του ερωτήματος **(i)** να λύσετε την ανίσωση $f(x) > g(x)$.

1.8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = συν(\frac{\pi}{2} + 4x)$.

i) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.
ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f για $0 \leq x \leq 2\pi$.

1.9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = συν(\frac{\pi}{2} - x) - ημ(\pi + x)$.

i) Να απλοποιήσετε τον τύπο της.
ii) Να βρείτε την περίοδο και τα ακρότατα της f.
iii) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης.

1.10. Έστω η συνάρτηση $f(x) = ημ\frac{x}{3}\cdot(2 - ημ\frac{x}{3}) - συν(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{3}) - συν^2\frac{x}{3} - ημ(\pi + \frac{x}{3})$.

α) Να γράψετε τη συνάρτηση στη μορφή $f(x) = \rho\cdot ημ(\omega x) + \kappa$.
β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα τιμών και μονοτονίας της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου της.

1.11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ημ(\pi - 2x) - ημ[2(\frac{\pi}{2} + x)]$.

α) Να γράψετε τη συνάρτηση στη μορφή $f(x) = \rho\cdot ημ(\omega x)$.
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3$.

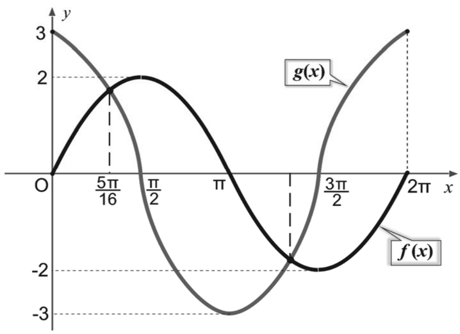
1.12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 5ημ[(\frac{\kappa+\lambda}{2})x] + \lambda - 2$ και $g(x) = 2 - (\kappa + 3)συνx$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}^*$. Να βρείτε τα κ, λ αν οι δύο συναρτήσεις έχουν την ίδια μέγιστη τιμή και η περίοδος της g είναι διπλάσια της περιόδου της f.

[Απ. κ=1, λ=3]

1.13. Στο διπλανό σχέδιο η $f(x)$ είναι ημιτονοειδής και η $g(x)$ είναι συνημιτονοειδής συνάρτηση.

i) Να βρείτε τις δύο συναρτήσεις.
ii) Να λυθεί η εξίσωση $εφx = 1{,}5$ στο διάστημα $[0,2\pi]$.

[Απ. ii) $\frac{5\pi}{16}$, $\frac{21\pi}{16}$]



1.14. **α)** Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = ημx$ και $g(x) = συνx$ όταν $x \in [0,2\pi]$.

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $|f(x) - g(x)|$ για κάθε $x \in [0,2\pi]$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η προηγούμενη παράσταση γίνεται μέγιστη.

[Απ. β) $\sqrt{2}$ γ) $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$]

* * * * *

Β΄ Ομάδα

1.15. **i)** Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = συνx$ και $g(x) = x^2 + 1$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $συνx = x^2 + 1$.

1.16. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (3 - \alpha)\cdot ημ(\beta x)$ με $\alpha > 1$ και $\beta > 0$.

Η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή 2 και περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

i) Να βρείτε τα α, β.

ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε διάστημα μιας περιόδου.

1.17. Οι ετήσιες πωλήσεις ενός προϊόντος, σε χιλιάδες κομμάτια, δίνονται κατά προσέγγιση από τον τύπο $f(t) = 23 + 5\cdot συν\left(\frac{\pi t}{4}\right)$ όπου t ο χρόνος σε έτη και $0 \leq t \leq 8$.

i) Να βρείτε τη μέγιστη , την ελάχιστη τιμή της f καθώς και την περίοδό της.

ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

iii) Σε ποιο έτος θα έχουμε τον μικρότερο αριθμό πωλήσεων;

iv) Σε ποιο έτος οι πωλήσεις θα φθάσουν τα 25500 κομμάτια.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.18. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* ή *Λάθος* κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Η συνάρτηση $f(x) = ημx$ είναι περιττή.

II. Η περίοδος της συνάρτησης $f(x) = συν(2x - \pi)$ είναι 2π.

III. Η συνάρτηση $f(x) = εφx$ έχει άπειρες κατακόρυφες ασύμπτωτες.

1.19. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = (\kappa^2 + 1)ημ3x + 4\kappa$ είναι -3, τότε η τιμή του κ είναι:

Α. 3 **Β.** 2 **Γ.** 4 **Δ.** 0 **Ε.** -2

II. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = συνx$ είναι:

Α. το $(-1,1)$ **Β.** το $[-1,1]$ **Γ.** το $\mathbb{R}$ **Δ.** το $\mathbb{R}^*$ **Ε.** το $\mathbb{R} - \{-1,1\}$

III. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = εφx$ είναι:

Α. το $\mathbb{R} - \{-1,1\}$ **Β.** το $[-1,1]$ **Γ.** το $\mathbb{R}^*$ **Δ.** το $\mathbb{R}$ **Ε.** το $(-1,1)$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

2.1. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Οι τύποι που δίνουν τις λύσεις των βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων είναι:*

i) $\eta\mu x = \alpha \;\Leftrightarrow\; \eta\mu x = \eta\mu\theta \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + (\pi - \theta) \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$.

ii) $\sigma\upsilon\nu x = \alpha \;\Leftrightarrow\; \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \theta \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$.

iii) $\varepsilon\varphi x = \alpha \;\Leftrightarrow\; \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta \;\Leftrightarrow\; x = \kappa\pi + \theta \;, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$.

iv) $\sigma\varphi x = \alpha \;\Leftrightarrow\; \sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta \;\Leftrightarrow\; x = \kappa\pi + \theta \;, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$.

2.2. *Βασική εφαρμογή:*

(i) $\eta\mu x = 0 \;\Leftrightarrow\; \eta\mu x = \eta\mu 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = 2\kappa\pi + 0 \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + (\pi - 0) \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = 2\kappa\pi \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = 2\kappa\pi \\ \text{ή} \\ x = (2\kappa + 1)\pi \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow\; x = \lambda\pi \;,\; \lambda \in \mathbb{Z}$.

(ii) $\sigma\upsilon\nu x = 0 \;\Leftrightarrow\; \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; x = \lambda\pi + \frac{\pi}{2} \;,\; \lambda \in \mathbb{Z}$.

2.2.1.ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Στις εξισώσεις $\eta\mu x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x = 0$ οι δύο οικογένειες λύσεων μπορούν να συμπτυχθούν σε μία.

2.3. *Βασική εφαρμογή:*

(i) $\eta\mu x = 1 \;\Leftrightarrow\; \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + (\pi - \frac{\pi}{2}) \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow\ x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\ ,\ \kappa \in \mathbb{Z}$.

(ii) $\text{συν}x = 1 \ \Leftrightarrow\ \text{συν}x = \text{συν}0 \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x = 2\kappa\pi + 0 \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - 0 \end{cases} \ \Leftrightarrow\ x = 2\kappa\pi\ ,\ \kappa \in \mathbb{Z}$.

2.3.1.<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u> Στις εξισώσεις $\text{ημ}x = 1$ και $\text{συν}x = 1$ οι δύο οικογένειες λύσεων συμπίπτουν.

2.4. ***<u>Βασική εφαρμογή:</u>***

(i) $\text{ημ}x = -1 \ \Leftrightarrow\ \text{ημ}x = \text{ημ}(-\frac{\pi}{2}) \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + (\pi + \frac{\pi}{2}) \end{cases} \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}\ ,\ \kappa \in \mathbb{Z}$.

(ii) $\text{συν}x = -1 \ \Leftrightarrow\ \text{συν}x = \text{συν}\pi \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \pi \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \pi \end{cases} \ \Leftrightarrow\ x = 2\kappa\pi + \pi\ ,\ \kappa \in \mathbb{Z}$.

2.4.1.<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u> Στις εξισώσεις $\text{ημ}x = -1$ και $\text{συν}x = -1$ οι δύο οικογένειες λύσεων συμπίπτουν.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.5. Να λυθεί η εξίσωση: σφ*x* – συν*x* = 1 – σφ*x*·συν*x*.

<u>Λύση:</u>

Η εξίσωση ορίζεται αν και μόνο αν $\text{ημ}x \neq 0$.

$\text{σφ}x - \text{συν}x = 1 - \text{σφ}x\cdot\text{συν}x \ \Leftrightarrow\ \text{σφ}x - \text{συν}x - 1 + \text{σφ}x\cdot\text{συν}x = 0 \ \Leftrightarrow$

$\text{σφ}x\cdot(1+\text{συν}x) - (1+\text{συν}x) = 0 \ \Leftrightarrow\ (1+\text{συν}x)(\text{σφ}x - 1) = 0 \ \Leftrightarrow\ 1+\text{συν}x = 0$ ή $\text{σφ}x - 1 = 0 \ \Leftrightarrow$
$\text{συν}x = -1$ ή $\text{σφ}x = 1$.

- $\text{συν}x = -1$ αδύνατη γιατί τότε θα ήταν $\text{ημ}x = 0$.
- $\text{σφ}x = 1 \ \Leftrightarrow\ \text{σφ}x = \text{σφ}\frac{\pi}{4} \ \Leftrightarrow\ x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ \kappa \in \mathbb{Z}$.

2.6. Να λυθούν οι εξισώσεις: (i) ημ3*x* + 1 = 0 (ii) 2συν(2*x*+ $\frac{\pi}{5}$) + 1 = 0.

<u>Λύση:</u>

(i) $\text{ημ}3x + 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ \text{ημ}3x = -1 \ \Leftrightarrow\ \text{ημ}3x = \text{ημ}(-\frac{\pi}{2}) \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + (-\frac{\pi}{2}) \\ \text{ή} \\ 3x = 2\kappa\pi + \pi - (-\frac{\pi}{2}) \end{cases} \ \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 3x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ 3x = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ 3x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 3x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

(i) $2\text{συν}(2x+\frac{\pi}{5}) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\text{συν}(2x+\frac{\pi}{5}) = -1 \Leftrightarrow \text{συν}(2x+\frac{\pi}{5}) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\text{συν}(2x+\frac{\pi}{5}) = \text{συν}\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\frac{\pi}{5} = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \\ \text{ή} \\ 2x+\frac{\pi}{5} = 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{5} \\ \text{ή} \\ 2x = 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{15} \\ \text{ή} \\ 2x = 2\kappa\pi - \frac{13\pi}{15} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \kappa\pi + \frac{7\pi}{30} \\ \text{ή} \\ x = \kappa\pi - \frac{13\pi}{30} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

2.6.1.<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u> Όταν το ημx , εφx , σφx είναι αρνητικά, δηλαδή ημ$x = -\alpha$, εφ$x = -\alpha$, σφ$x = -\alpha$, όπου $\alpha > 0$ τότε παίρνουμε ημ$(-\theta) = -\alpha$, με ημ$\theta = \alpha$, εφ$(-\theta) = -\alpha$, με εφ$\theta = \alpha$, σφ$(-\theta) = -\alpha$, με σφ$\theta = \alpha$. Όταν όμως έχουμε συν$x = -\alpha$, τότε παίρνουμε συν$(\pi-\theta) = -\alpha$, με συν$\theta = \alpha$.

2.7. Να λυθεί η εξίσωση: 6ημ²x + 5συνx = 2.

<u>Λύση:</u>

$6\text{ημ}^2x + 5\text{συν}x = 2 \Leftrightarrow 6\text{ημ}^2x + 5\text{συν}x - 2 = 0 \Leftrightarrow 6(1-\text{συν}^2x) + 5\text{συν}x - 2 = 0 \Leftrightarrow$
$6 - 6\text{συν}^2x + 5\text{συν}x - 2 = 0 \Leftrightarrow -6\text{συν}^2x + 5\text{συν}x + 4 = 0 \Leftrightarrow 6\text{συν}^2x - 5\text{συν}x - 4 = 0.$

$\Delta = (-5)^2 - 4\cdot 6\cdot(-4) = 25 + 96 = 121.$

$$\text{συν}x = \frac{5\pm\sqrt{121}}{2\cdot 6} = \frac{5\pm 11}{12} = \begin{cases} \frac{5+11}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} > 1 \text{ απορρίπτεται} \\ \frac{5-11}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα $\text{συν}x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{συν}x = \text{συν}\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

2.8. Να λυθεί η εξίσωση: ημ²x – ($\sqrt{3}$ +1)·ημx·συνx + $\sqrt{3}$ ·συν²x= 0.

<u>Λύση:</u>

Αν συν$x = 0$ τότε η εξίσωση ισοδυναμεί με $\text{ημ}^2x = 0 \Leftrightarrow \text{ημ}x = 0$ αδύνατο.

Επομένως, $\text{ημ}^2x - (\sqrt{3}+1)\cdot\text{ημ}x\cdot\text{συν}x + \sqrt{3}\cdot\text{συν}^2x = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{\text{ημ}^2x}{\text{συν}^2x} - (\sqrt{3}+1)\cdot\frac{\text{ημ}x\cdot\text{συν}x}{\text{συν}^2x} + \sqrt{3}\cdot\frac{\text{συν}^2x}{\text{συν}^2x} = \frac{0}{\text{συν}^2x} \Leftrightarrow$$

$$\text{εφ}^2x - (\sqrt{3}+1)\cdot\text{εφ}x + \sqrt{3} = 0.$$

$\Delta = [-(\sqrt{3}+1)]^2 - 4\cdot 1\cdot\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2 - 4\cdot\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 1 - 4\cdot\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1$
$= (\sqrt{3}-1)^2$.

$$\varepsilon\varphi x = \frac{(\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)\pm(\sqrt{3}-1)}{2} = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{2}=\frac{2}{2}=1 \end{cases}$$

- $\varepsilon\varphi x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.
- $\varepsilon\varphi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

2.9. Να λυθεί η εξίσωση: $3\cdot\varepsilon\varphi 2x + \sqrt{3} = 0$, στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

Λύση:

$3\cdot\varepsilon\varphi 2x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 3\cdot\varepsilon\varphi 2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 2x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 2x = \varepsilon\varphi(-\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow 2x = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

Είναι: $-\pi \le x \le \pi \Leftrightarrow -\pi \le \frac{\kappa\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \le \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} - \pi \le \frac{\kappa\pi}{2} \le \pi + \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow$

$-\frac{11\pi}{12} \le \frac{\kappa\pi}{2} \le \frac{13\pi}{12} \Leftrightarrow -\frac{11}{12} \le \frac{\kappa}{2} \le \frac{13}{12} \Leftrightarrow -\frac{11}{6} \le \kappa \le \frac{13}{6}$.

Επειδή $\kappa\in\mathbb{Z}$ θα είναι $\kappa=-1$ ή $\kappa=0$ ή $\kappa=1$ ή $\kappa=2$.

Επομένως οι ζητούμενες λύσεις είναι:

$x = \frac{-1\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = -\frac{7\pi}{12}$, $x = \frac{0\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{12}$

$x = \frac{1\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$, $x = \frac{2\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$.

2.10. Να λυθεί η εξίσωση: $\eta\mu\frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$, στο διάστημα $[0,2\pi]$.

Λύση:

$\eta\mu\frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu(2x-\frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(2x-\frac{\pi}{4}) = -\eta\mu\frac{x}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(2x-\frac{\pi}{4}) = \eta\mu(-\frac{x}{2}) \Leftrightarrow$

$$\sigma\upsilon\nu(2x-\frac{\pi}{4}) = \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2} \\ \text{ή} \\ 2x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-\frac{x}{2}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \\ \text{ή} \\ 2x+\frac{x}{2}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{3x}{2}=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{4} \\ \text{ή} \\ \frac{5x}{2}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3}\cdot2\kappa\pi+\frac{2}{3}\cdot\frac{3\pi}{4} \\ \text{ή} \\ x=\frac{2}{5}\cdot2\kappa\pi-\frac{2}{5}\cdot\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ x=\frac{4\kappa\pi}{5}-\frac{\pi}{10} \end{cases}.$$

- $0 \le x \le 2\pi \Leftrightarrow$

  $0 \le \frac{4\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \le 2\pi \Leftrightarrow$

  $-\frac{\pi}{2} \le \frac{4\kappa\pi}{3} \le 2\pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

  $-\frac{\pi}{2} \le \frac{4\kappa\pi}{3} \le \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$

- $0 \le x \le 2\pi \Leftrightarrow$

  $0 \le \frac{4\kappa\pi}{5} - \frac{\pi}{10} \le 2\pi \Leftrightarrow$

  $\frac{\pi}{10} \le \frac{4\kappa\pi}{5} \le 2\pi + \frac{\pi}{10} \Leftrightarrow$

  $\frac{\pi}{10} \le \frac{4\kappa\pi}{5} \le \frac{21\pi}{10} \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{2} \le \frac{4\kappa}{3} \le \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow$

$-\frac{3}{8} \le \kappa \le \frac{9}{8}$.

Επειδή $\kappa \in \mathbb{Z}$ θα είναι $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$.

Άρα $x = \frac{4\cdot 0\cdot \pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ ή

$x = \frac{4\cdot 1\cdot \pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{6}$.

$\frac{1}{10} \le \frac{4\kappa}{5} \le \frac{21}{10} \quad \Leftrightarrow$

$\frac{1}{8} \le \kappa \le \frac{21}{8}$.

Επειδή $\kappa \in \mathbb{Z}$ θα είναι $\kappa = 1$ ή $\kappa = 2$.

Άρα $x = \frac{4\cdot 1\cdot \pi}{5} - \frac{\pi}{10} = \frac{4\pi}{5} - \frac{\pi}{10} = \frac{7\pi}{10}$ ή

$x = \frac{4\cdot 2\cdot \pi}{5} - \frac{\pi}{10} = \frac{8\pi}{5} - \frac{\pi}{10} = \frac{15\pi}{10}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

2.11. Να λυθεί η εξίσωση: (εφx–1)(ημx+1) = 0.

[Απ. $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$, $x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}$]

2.12. Να λυθούν οι εξισώσεις: **i)** 2συν3x+1 = 0 **ii)** ημ$\frac{x}{2}$ + 1 = 0

[Απ. i) $x=\frac{2\kappa\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9}$ ii) $x=4\kappa\pi-\pi$]

2.13. Να λυθεί η εξίσωση: ημ2x·συνx = 2 + συνx – 2ημ2x.

[Απ. $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$]

2.14. Να λυθεί η εξίσωση: 2συν^2x + 3ημx = 0.

[Απ. $x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}$, $x=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6}$]

2.15. Να λυθεί η εξίσωση: (ημx+1)^2 + (συνx–1)^2 = 3.

[Απ. $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$]

2.16. Να λυθεί η εξίσωση: 9σφ^4x – 1 = 0.

[Απ. $x=\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}$]

2.17. Να λυθεί η εξίσωση: ημ^4x – συν^2x – 1 = 0.

[Απ. $x=2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}$]

2.18. Να λύσετε την εξίσωση: ημx + συνx = $\frac{1}{\eta\mu x}$.

[Απ. $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$]

2.19. Να λυθεί η εξίσωση: εφx + $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$ = συνx.

[Απ. $x=\kappa\pi$]

2.20. Να λυθεί η εξίσωση: ημ(πx) + $\sqrt{3}$ συν(πx) = 0.

[Απ. $x=\kappa-\frac{1}{3}$]

2.21. Να λυθεί η εξίσωση: $\dfrac{1}{\text{συν}^2 x} = 2\text{εφ}x$.

[Απ. $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$]

2.22. Να λυθεί η εξίσωση: $\text{εφ}^2 x = 4\text{συν}^2 x - 1$.

[Απ. $x=2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $x=2\kappa\pi \pm \frac{3\pi}{4}$]

2.23. Να λυθεί η εξίσωση: $\text{συν}x\cdot(1+\text{εφ}^2 x) - \text{εφ}x = \text{συν}x$.

[Απ. $x=\kappa\pi$]

2.24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\cdot\text{ημ}\left(\dfrac{2x}{3}\right) + \beta$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(\frac{3\pi}{2},3)$ και η μέγιστη τιμή f είναι 5. Να βρείτε:

i) Τα α, β.
ii) Την περίοδο της συνάρτησης.
iii) Τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 4$.

2.25. Να λύσετε την εξίσωση: $\text{σφ}x + \dfrac{\text{ημ}x}{1+\text{συν}x} = 2$.

[Απ. $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}$, $x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}$]

2.26. Να λυθεί η εξίσωση $\text{ημ}2x + \text{συν}x = 0$.

[Απ. $x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{2\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{2}$]

2.27. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{3}\cdot\text{εφ}\dfrac{2x}{3} + 1 = 0$, στο διάστημα $(0,3\pi)$.

[Απ. $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4}$]

2.28. Να λύσετε την εξίσωση $\text{σφ}2x - \sqrt{3} = 0$, στο διάστημα $(-\pi,2\pi)$.

[Απ. $-\frac{11\pi}{12}$, $-\frac{5\pi}{12}$, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{19\pi}{12}$]

2.29. Να λυθεί η εξίσωση $\text{σφ}^4 2x - 1 = 0$, όταν $x\in[0,2\pi]$.

[Απ. $\frac{\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{7\pi}{8}$, $\frac{9\pi}{8}$, $\frac{11\pi}{8}$, $\frac{13\pi}{8}$, $\frac{15\pi}{8}$]

2.30. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{1}{\text{ημ}^2 x} = 2\text{σφ}x$, στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

[Απ. $-\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$]

2.31. Δίνονται οι συναρτήσεις

$f(x) = \text{ημ}(2x+\pi) + \text{συν}(\frac{\pi}{2}+2x) + \text{ημ}^2(-x) + 2$ και

$g(x) = \text{ημ}[2(\frac{\pi}{2}-x)] - \text{συν}^2(\pi-x)$, με $x\in[0,2\pi]$.

Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

[Απ. $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}), (\frac{3\pi}{4}, -\frac{3}{2})$]

2.32. Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^3 x - \eta\mu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0$, στο διάστημα $(-2\pi, \pi]$.

[Απ. $-\frac{4\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$]

* * * * *

Β΄ Ομάδα

2.33. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x} = 4$.

[Απ. $x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}$]

2.34. Να λύσετε την εξίσωση $(\sqrt{3}+3)\eta\mu^2 x = \sqrt{3} + (\sqrt{3}-3)\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$.

[Απ. $\kappa\pi - \frac{\pi}{4}$, $\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$]

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

2.35. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* ή *Λάθος* κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Η εξίσωση $\eta\mu x = 1$ έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

II. Η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = \rho$ έχει λύση μόνο όταν $-1 < \rho < 1$.

III. Η εξίσωση $\eta\mu x = \eta\mu \alpha$ έχει λύση μόνο όταν $-1 \leq \alpha \leq 1$.

IV. Η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = \kappa^2 - 2\kappa + 2$ έχει λύση μόνο όταν $\kappa = 1$.

2.36. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Η εξίσωση $\varepsilon\varphi 2x = \kappa^2 - 4$ έχει λύση όταν:

A. $\kappa \geq 0$ **B.** $-2 \leq \kappa \leq 2$ **Γ.** $\kappa \geq 2$ **Δ.** $\kappa \leq -2$ **E.** για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$

ΕΝΟΤΗΤΑ 3.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΓΩΝΙΩΝ

Συνημίτονο αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

3.1. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Να αποδείξετε τους τύπους:*

i) $\text{συν}(\alpha-\beta)=\text{συν}\alpha\cdot\text{συν}\beta\ +\ \text{ημ}\alpha\cdot\text{ημ}\beta$

ii) $\text{συν}(\alpha+\beta)=\text{συν}\alpha\cdot\text{συν}\beta\ -\ \text{ημ}\alpha\cdot\text{ημ}\beta$

Απόδειξη: **ii)** $\text{συν}(\alpha+\beta)=\text{συν}[\alpha-(-\beta)]$

$=\text{συν}\alpha\cdot\text{συν}(-\beta)\ +\ \text{ημ}\alpha\cdot\text{ημ}(-\beta)$

$=\text{συν}\alpha\cdot\text{συν}\beta\ +\ \text{ημ}\alpha\cdot(-\text{ημ}\beta)$

$=\text{συν}\alpha\cdot\text{συν}\beta\ -\ \text{ημ}\alpha\cdot\text{ημ}\beta.$ ◘

3.1.1.*Παραδείγματα:*

- $\text{συν}15^0=\text{συν}(45^0-30^0)=\text{συν}45^0\cdot\text{συν}30^0+\text{ημ}45^0\cdot\text{ημ}30^0$
  $=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}.$
- $\text{συν}75^0=\text{συν}(45^0+30^0)=\text{συν}45^0\cdot\text{συν}30^0-\text{ημ}45^0\cdot\text{ημ}30^0$
  $=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}.$

Ημίτονο αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

3.2. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Να αποδείξετε τους τύπους:*

i) $\text{ημ}(\alpha+\beta)=\text{ημ}\alpha\cdot\text{συν}\beta\ +\ \text{συν}\alpha\cdot\text{ημ}\beta$

ii) $\text{ημ}(\alpha-\beta)=\text{ημ}\alpha\cdot\text{συν}\beta\ -\ \text{συν}\alpha\cdot\text{ημ}\beta$

Απόδειξη: **i)** $\text{ημ}(\alpha+\beta)=\text{συν}[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)]=\text{συν}(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta)=\text{συν}[(\frac{\pi}{2}-\alpha)-\beta]$

$=\text{συν}(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cdot\text{συν}\beta\ +\ \text{ημ}(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cdot\text{ημ}\beta$

$=\text{ημ}\alpha\cdot\text{συν}\beta\ +\ \text{συν}\alpha\cdot\text{ημ}\beta.$

ii) $\text{ημ}(\alpha-\beta)=\text{ημ}[\alpha+(-\beta)]$

$=\text{ημ}\alpha\cdot\text{συν}(-\beta)\ +\ \text{συν}\alpha\cdot\text{ημ}(-\beta)$

$=\text{ημ}\alpha\cdot\text{συν}\beta\ +\ \text{συν}\alpha\cdot(-\text{ημ}\beta)$

$=\text{ημ}\alpha\cdot\text{συν}\beta\ -\ \text{συν}\alpha\cdot\text{ημ}\beta.$

3.2.1.*<u>Παραδείγματα:</u>*

- $ημ15^0 = ημ(45^0–30^0) = ημ45^0·συν30^0 – συν45^0·ημ30^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$.
- $ημ75^0 = ημ(45^0+30^0) = ημ45^0·συν30^0 + συν45^0·ημ30^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$

<u>Εφαπτομένη αθροίσματος και διαφοράς γωνιών</u>

3.3. <u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> *Να αποδείξετε τους τύπους:*

i) $εφ(\alpha+\beta) = \frac{εφ\alpha+εφ\beta}{1-εφ\alpha\cdot εφ\beta}$

ii) $εφ(\alpha-\beta) = \frac{εφ\alpha-εφ\beta}{1+εφ\alpha\cdot εφ\beta}$

<u>Απόδειξη:</u> **i)** Οι $εφ\alpha$, $εφ\beta$ και $εφ(\alpha+\beta)$ ορίζονται αν και μόνο αν $συν\alpha \neq 0$, $συν\beta \neq 0$ και $συν(\alpha+\beta) \neq 0$. Τότε είναι:

$$εφ(\alpha+\beta) = \frac{ημ(\alpha+\beta)}{συν(\alpha+\beta)} = \frac{ημ\alpha\cdot συν\beta+συν\alpha\cdot ημ\beta}{συν\alpha\cdot συν\beta-ημ\alpha\cdot ημ\beta} = \frac{\frac{ημ\alpha\cdot συν\beta}{συν\alpha\cdot συν\beta}+\frac{συν\alpha\cdot ημ\beta}{συν\alpha\cdot συν\beta}}{\frac{συν\alpha\cdot συν\beta}{συν\alpha\cdot συν\beta}-\frac{ημ\alpha\cdot ημ\beta}{συν\alpha\cdot συν\beta}} = \frac{εφ\alpha+εφ\beta}{1-εφ\alpha\cdot εφ\beta}.$$

ii) Οι $εφ\alpha$, $εφ\beta$ και $εφ(\alpha–\beta)$ ορίζονται αν και μόνο αν $συν\alpha \neq 0$, $συν\beta \neq 0$ και $συν(\alpha–\beta) \neq 0$
Τότε είναι:

<u>1ος τρόπος:</u>

$$εφ(\alpha-\beta) = \frac{ημ(\alpha-\beta)}{συν(\alpha-\beta)} = \frac{ημ\alpha\cdot συν\beta-συν\alpha\cdot ημ\beta}{συν\alpha\cdot συν\beta+ημ\alpha\cdot ημ\beta} = \frac{\frac{ημ\alpha\cdot συν\beta}{συν\alpha\cdot συν\beta}-\frac{συν\alpha\cdot ημ\beta}{συν\alpha\cdot συν\beta}}{\frac{συν\alpha\cdot συν\beta}{συν\alpha\cdot συν\beta}+\frac{ημ\alpha\cdot ημ\beta}{συν\alpha\cdot συν\beta}} = \frac{εφ\alpha-εφ\beta}{1+εφ\alpha\cdot εφ\beta}.$$

<u>2ος τρόπος:</u>

$$εφ(\alpha-\beta) = εφ[\alpha+(-\beta)] = \frac{εφ\alpha+εφ(-\beta)}{1-εφ\alpha\cdot εφ(-\beta)} = \frac{εφ\alpha+(-εφ\beta)}{1-εφ\alpha\cdot(-εφ\beta)} = \frac{εφ\alpha-εφ\beta}{1+εφ\alpha\cdot εφ\beta}.$$

3.3.1.*<u>Παραδείγματα:</u>*

- $εφ15^0 = εφ(45^0–30^0) = \frac{εφ45^0-εφ30^0}{1+εφ45^0\cdot εφ30^0} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{3+\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} =$

$$\frac{(3-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \frac{3^2-2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{3^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{9-2\sqrt{3}+3}{9-3} = \frac{12-2\sqrt{3}}{6} = \frac{6(2-\sqrt{3})}{6}$$
$= 2 - \sqrt{3}$.

- $εφ75^0 = εφ(45^0+30^0) = \frac{εφ45^0+εφ30^0}{1-εφ45^0\cdot εφ30^0} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} =$

$$\frac{(3+\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{3^2+2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{3^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{9+2\sqrt{3}+3}{9-3} = \frac{12+2\sqrt{3}}{6} = \frac{6(2+\sqrt{3})}{6}$$
$= 2 + \sqrt{3}$.

Συνεφαπτομένη αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

3.4. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Να αποδείξετε τους τύπους:*

i) $\sigma\varphi(\alpha+\beta) = \dfrac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}$

ii) $\sigma\varphi(\alpha-\beta) = \dfrac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}$

Απόδειξη: **i)** Οι $\sigma\varphi\alpha$, $\sigma\varphi\beta$ και $\sigma\varphi(\alpha+\beta)$ ορίζονται αν και μόνο αν $\eta\mu\alpha\neq 0$, $\eta\mu\beta\neq 0$ και $\eta\mu(\alpha+\beta)\neq 0$. Τότε είναι:

$$\sigma\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}{\eta\mu(\alpha+\beta)} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta} = \frac{\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta}-\dfrac{\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta}}{\dfrac{\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta}} = \frac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}.$$

ii) Οι $\sigma\varphi\alpha$, $\sigma\varphi\beta$ και $\sigma\varphi(\alpha-\beta)$ ορίζονται αν και μόνο αν $\eta\mu\alpha\neq 0$, $\eta\mu\beta\neq 0$ και $\eta\mu(\alpha-\beta)\neq 0$

Τότε είναι:

1ος τρόπος:

$$\sigma\varphi(\alpha-\beta) = \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)}{\eta\mu(\alpha-\beta)} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta} = \frac{\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta}+\dfrac{\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta}}{\dfrac{\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta}} = \frac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}.$$

2ος τρόπος:

$$\sigma\varphi(\alpha-\beta) = \sigma\varphi[\alpha+(-\beta)] = \frac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi(-\beta)-1}{\sigma\varphi(-\beta)+\sigma\varphi\alpha} = \frac{\sigma\varphi\alpha\cdot(-\sigma\varphi\beta)-1}{-\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha} = \frac{-\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta-1}{-\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}$$

$$= \frac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Μέθοδος

Υπολογισμού τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας που είναι άθροισμα ή διαφορά δύο άλλων.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας που είναι άθροισμα ή διαφορά δύο άλλων γωνιών, βρίσκουμε πρώτα τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των δύο γωνιών και μετά εφαρμόζουμε τους προηγούμενους τύπους.

3.5. Αν $\eta\mu\alpha = \frac{4}{5}$ με $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ και $\sigma\upsilon\nu\beta = -\frac{3}{5}$ με $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε:

i) το $\eta\mu(\alpha-\beta)$ **ii) το $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$**

Λύση:

Είναι $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1-\eta\mu^2\alpha = 1-\left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1-\frac{16}{25} = \frac{25}{25}-\frac{16}{25} = \frac{9}{25}$.

Επειδή $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ θα είναι $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$.

Ακόμα $\eta\mu^2\beta = 1-\sigma\upsilon\nu^2\beta = 1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1-\frac{9}{25} = \frac{25}{25}-\frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.

Επειδή $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ θα είναι $\eta\mu\beta = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$.

i) $ημ(α–β) = ημα·συνβ – συνα·ημβ = \frac{4}{5}·(-\frac{3}{5}) – (-\frac{3}{5})(-\frac{4}{5}) = -\frac{12}{25} - \frac{12}{25} = -\frac{24}{25}$.

ii) $συν(α+β) = συνα·συνβ – ημα·ημβ = -\frac{3}{5}·(-\frac{3}{5}) - \frac{4}{5}·(-\frac{4}{5}) = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$.

Μέθοδος Απόδειξης τριγωνομετρικών ταυτοτήτων.

- Όταν θέλουμε να αποδείξουμε μία τριγωνομετρική ταυτότητα, τότε:
  - Προσέχουμε μήπως η ταυτότητα είναι απλή εφαρμογή των τύπων.
  - Διαφορετικά δουλεύουμε όπως στις αλγεβρικές ταυτότητες ταυτότητες, χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς τύπους. Έτσι μπορούμε να ξεκινήσουμε από το ένα μέλος και να φθάσουμε στο δεύτερο ή να δουλέψουμε με ισοδυναμίες και να καταλήξουμε σε μία αληθή σχέση.
  - Αν η ταυτότητα έχει και συνθήκη, τότε ξεκινούμε από αυτήν ή τη χρησιμοποιούμε κατά τη διάρκεια των πράξεων.
    Αν η σχέση αναφέρεται σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ τότε θα χρησιμοποιήσουμε την ισότητα $Α + Β + Γ = π$ ή $\frac{Α}{2} + \frac{Β}{2} + \frac{Γ}{2} = \frac{π}{2}$.
- Όταν δίνεται μία σχέση που ισχύει για ένα τρίγωνο και θέλουμε να αποδείξουμε ότι αυτό είναι ισοσκελές ή ορθογώνιο κ.τ.λ, τότε μετασχηματίζουμε τη σχέση χρησιμοποιώντας τους τύπους και καταλήγουμε σε δύο γωνίες ίσες ή μία γωνία 90^0 ή κ.τ.λ.

3.6. Αν $α+β+γ = π$ τότε να αποδειχθούν οι επόμενες ισότητες:

i) $εφα + εφβ + εφγ = εφα \cdot εφβ \cdot εφγ$.

ii) $εφ\frac{α}{2} \cdot εφ\frac{β}{2} + εφ\frac{β}{2} \cdot εφ\frac{γ}{2} + εφ\frac{γ}{2} \cdot εφ\frac{α}{2} = 1$.

iii) $σφα \cdot σφβ + σφβ \cdot σφγ + σφγ \cdot σφα = 1$.

iv) $σφ\frac{α}{2} + σφ\frac{β}{2} + σφ\frac{γ}{2} = σφ\frac{α}{2} \cdot σφ\frac{β}{2} \cdot σφ\frac{γ}{2}$.

Λύση:

i) $α + β + γ = π \Rightarrow α+β = π – γ \Rightarrow εφ(α+β) = εφ(π–γ) \Rightarrow \frac{εφα+εφβ}{1-εφα \cdot εφβ} = –εφγ \Rightarrow$

$εφα + εφβ = –εφγ·(1 – εφα+εφβ) \Rightarrow εφα + εφβ = –εφγ + εφα·εφβ·εφγ \Rightarrow$

$εφα + εφβ + εφγ = εφα·εφβ·εφγ$.

ii) $α + β + γ = π \Rightarrow \frac{α}{2} + \frac{β}{2} + \frac{γ}{2} = \frac{π}{2} \Rightarrow \frac{α}{2} + \frac{β}{2} = \frac{π}{2} - \frac{γ}{2} \Rightarrow$

$εφ(\frac{α}{2}+\frac{β}{2}) = εφ(\frac{π}{2}-\frac{γ}{2}) \Rightarrow \frac{εφ\frac{α}{2}+εφ\frac{β}{2}}{1-εφ\frac{α}{2}·εφ\frac{β}{2}} = σφ\frac{γ}{2} \Rightarrow \frac{εφ\frac{α}{2}+εφ\frac{β}{2}}{1-εφ\frac{α}{2}·εφ\frac{β}{2}} = \frac{1}{εφ\frac{γ}{2}} \Rightarrow$

$εφ\frac{γ}{2}·(εφ\frac{α}{2}+εφ\frac{β}{2}) = 1 – εφ\frac{α}{2}·εφ\frac{β}{2} \Rightarrow εφ\frac{α}{2}·εφ\frac{γ}{2} + εφ\frac{β}{2}·εφ\frac{γ}{2} = 1 – εφ\frac{α}{2}·εφ\frac{β}{2} \Rightarrow$

$εφ\frac{α}{2}·εφ\frac{β}{2} + εφ\frac{β}{2}·εφ\frac{γ}{2} + εφ\frac{γ}{2}·εφ\frac{α}{2} = 1$.

iii) $\alpha+\beta+\gamma=\pi \;\Rightarrow\; \alpha+\beta=\pi-\gamma \;\Rightarrow\; \sigma\varphi(\alpha+\beta)=\sigma\varphi(\pi-\gamma) \;\Rightarrow\; \dfrac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}=-\sigma\varphi\gamma \;\Rightarrow$

$\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta-1=-\sigma\varphi\gamma\cdot(\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha) \;\Rightarrow\; \sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta-1=-\sigma\varphi\gamma\cdot\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\gamma\cdot\sigma\varphi\alpha \;\Rightarrow$

$\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\beta\cdot\sigma\varphi\gamma+\sigma\varphi\gamma\cdot\sigma\varphi\alpha=1.$

iv) $\alpha+\beta+\gamma=\pi \;\Rightarrow\; \dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}+\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\gamma}{2} \;\Rightarrow$

$\sigma\varphi(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2})=\sigma\varphi(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\gamma}{2}) \;\Rightarrow\; \dfrac{\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}\cdot\sigma\varphi\frac{\beta}{2}-1}{\sigma\varphi\frac{\beta}{2}+\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}}=\varepsilon\varphi\dfrac{\gamma}{2} \;\Rightarrow\; \dfrac{\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}\cdot\sigma\varphi\frac{\beta}{2}-1}{\sigma\varphi\frac{\beta}{2}+\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1}{\sigma\varphi\frac{\gamma}{2}} \;\Rightarrow$

$\sigma\varphi\dfrac{\gamma}{2}\cdot(\sigma\varphi\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sigma\varphi\dfrac{\beta}{2}-1)=\sigma\varphi\dfrac{\beta}{2}+\sigma\varphi\dfrac{\alpha}{2} \;\Rightarrow\; \sigma\varphi\dfrac{\gamma}{2}\cdot\sigma\varphi\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sigma\varphi\dfrac{\beta}{2}-\sigma\varphi\dfrac{\gamma}{2}=\sigma\varphi\dfrac{\beta}{2}+\sigma\varphi\dfrac{\alpha}{2} \;\Rightarrow$

$\sigma\varphi\dfrac{\alpha}{2}+\sigma\varphi\dfrac{\beta}{2}+\sigma\varphi\dfrac{\gamma}{2}=\sigma\varphi\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sigma\varphi\dfrac{\beta}{2}\cdot\sigma\varphi\dfrac{\gamma}{2}.$

3.6.1.<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u> • Σε ένα μη ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$, επειδή $\hat{Α}+\hat{Β}+\hat{Γ}=\pi$ θα είναι:

$\varepsilon\varphi Α+\varepsilon\varphi Β+\varepsilon\varphi Γ=\varepsilon\varphi Α\cdot\varepsilon\varphi Β\cdot\varepsilon\varphi Γ$, $\varepsilon\varphi\dfrac{Α}{2}\cdot\varepsilon\varphi\dfrac{Β}{2}+\varepsilon\varphi\dfrac{Β}{2}\cdot\varepsilon\varphi\dfrac{Γ}{2}+\varepsilon\varphi\dfrac{Γ}{2}\cdot\varepsilon\varphi\dfrac{Α}{2}=1$, κ.τ.λ.

- Οι σχέσεις **(i)** και **(iii)** ισχύουν γενικά όταν: $\alpha+\beta+\gamma=\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.
  Οι σχέσεις **(ii)** και **(iv)** ισχύουν γενικά όταν: $\alpha+\beta+\gamma=(2\kappa+1)\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$

3.7. Να αποδείξετε ότι: **i)** $\dfrac{\eta\mu(\alpha+\beta)\cdot\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\beta}=\varepsilon\varphi^2\alpha-\varepsilon\varphi^2\beta.$

ii) $\dfrac{\eta\mu(\alpha+\beta)\cdot\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\beta}+\dfrac{\eta\mu(\beta+\gamma)\cdot\eta\mu(\beta-\gamma)}{\sigma\upsilon\nu^2\beta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\gamma}+\dfrac{\eta\mu(\gamma+\alpha)\cdot\eta\mu(\gamma-\alpha)}{\sigma\upsilon\nu^2\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=0.$

<u>Λύση:</u>

i) $\dfrac{\eta\mu(\alpha+\beta)\cdot\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\beta}=\dfrac{(\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta)\cdot(\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta)}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\beta}$

$=\dfrac{(\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta)^2-(\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta)^2}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\beta}=\dfrac{\eta\mu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\beta-\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot\eta\mu^2\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\beta}=\dfrac{\eta\mu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\beta}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot\eta\mu^2\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\beta}$

$=\varepsilon\varphi^2\alpha-\varepsilon\varphi^2\beta.$

ii) Σύμφωνα με το **(i)** θα είναι

$\dfrac{\eta\mu(\beta+\gamma)\cdot\eta\mu(\beta-\gamma)}{\sigma\upsilon\nu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma}=\varepsilon\varphi^2\beta-\varepsilon\varphi^2\gamma$ και $\dfrac{\eta\mu(\gamma+\alpha)\cdot\eta\mu(\gamma-\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi^2\gamma-\varepsilon\varphi^2\alpha.$

Άρα $\dfrac{\eta\mu(\alpha+\beta)\cdot\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta}+\dfrac{\eta\mu(\beta+\gamma)\cdot\eta\mu(\beta-\gamma)}{\sigma\upsilon\nu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma}+\dfrac{\eta\mu(\gamma+\alpha)\cdot\eta\mu(\gamma-\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}$

$=\varepsilon\varphi^2\alpha-\varepsilon\varphi^2\beta+\varepsilon\varphi^2\beta-\varepsilon\varphi^2\gamma+\varepsilon\varphi^2\gamma-\varepsilon\varphi^2\alpha=0.$

3.8. Αν σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει η σχέση $\dfrac{\eta\mu Α}{\eta\mu Β}=2\cdot\sigma\upsilon\nu Γ$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

<u>Λύση:</u>

$\dfrac{\eta\mu Α}{\eta\mu Β}=2\cdot\sigma\upsilon\nu Γ \;\Leftrightarrow\; \eta\mu Α=2\cdot\eta\mu Β\cdot\sigma\upsilon\nu Γ \;\Leftrightarrow\; \eta\mu[180^0-(Β+Γ)]=2\cdot\eta\mu Β\cdot\sigma\upsilon\nu Γ \;\Leftrightarrow$

$\etaμ(B+Γ) = 2\cdot ημB\cdot συνΓ \;\Leftrightarrow\; ημB\cdot συνΓ + συνB\cdot ημΓ = 2\cdot ημB\cdot συνΓ \;\Leftrightarrow$

$ημB\cdot συνΓ + συνB\cdot ημΓ - 2\cdot ημB\cdot συνΓ = 0 \;\Leftrightarrow\; συνB\cdot ημΓ - ημB\cdot συνΓ = 0 \;\Leftrightarrow$

$ημ(Γ-B) = 0 \;\Leftrightarrow\; Γ-B = 0 \;\Leftrightarrow\; Γ = B$.

Επομένως, το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές.

3.8.1.<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u> (1) ημΒ $\neq 0$, γιατί διαφορετικά θα ήταν $Β = 0^0$ ή $Β = 180^0$, πράγμα άδύνατο.
(2) Αν $Γ - Β = 180^0 \Leftrightarrow Γ = 180^0 + Β$ αδύνατο.

Μέθοδος Επίλυσης τριγωνομετρικών εξισώσεων οι οποίες έχουν άθροισμα ή διαφορά γωνιών.

Αν θέλουμε να επιλύσουμε μία τριγωνομετρική εξίσωση στην οποία παρουσιάζεται τριγωνομετρικός αριθμός με άθροισμα ή διαφορά δύο άλλων γωνιών, τότε εφαρμόζουμε τους προηγούμενους τύπους και μετασχηματίζουμε την εξίσωση σε μία από τις γνωστές μορφές που έχουμε μελετήσει στην αντίστοιχη ενότητα.

3.9. Να λυθεί η εξίσωση $2\cdot ημ3x = συν(3x-\frac{π}{6})$, όταν $x\in[-\frac{π}{2},π]$.

<u>Λύση:</u>

$2\cdot ημ3x = συν(3x-\frac{π}{6}) \;\Leftrightarrow\; 2\cdot ημ3x = συν3x\cdot συν\frac{π}{6} + ημ3x\cdot ημ\frac{π}{6} \;\Leftrightarrow$

$2\cdot ημ3x = συν3x\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + ημ3x\cdot \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; 4\cdot ημ3x = \sqrt{3}\cdot συν3x + ημ3x \;\Leftrightarrow$

$3\cdot ημ3x = \sqrt{3}\cdot συν3x \;\Leftrightarrow\; \frac{ημ3x}{συν3x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \;\Leftrightarrow\; εφ3x = \frac{\sqrt{3}}{3} \;\Leftrightarrow\; εφ3x = εφ\frac{π}{6} \;\Leftrightarrow$

$3x = κπ + \frac{π}{6} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{κπ}{3} + \frac{π}{18}$, $κ\in\mathbb{Z}$.

Είναι $-\frac{π}{2} \leq x \leq π \;\Leftrightarrow\; -\frac{π}{2} \leq \frac{κπ}{3} + \frac{π}{18} \leq π \;\Leftrightarrow\; -\frac{π}{2} - \frac{π}{18} \leq \frac{κπ}{3} + \frac{π}{18} - \frac{π}{18} \leq π - \frac{π}{18} \;\Leftrightarrow$

$-\frac{9π}{18} - \frac{π}{18} \leq \frac{κπ}{3} \leq \frac{18π}{18} - \frac{π}{18} \;\Leftrightarrow\; -\frac{10π}{18} \leq \frac{κπ}{3} \leq \frac{17π}{18} \;\Leftrightarrow\; -\frac{5}{9} \leq \frac{κ}{3} \leq \frac{17}{18} \;\Leftrightarrow$

$-\frac{5}{3} \leq κ \leq \frac{17}{6}$. Επειδή $κ\in\mathbb{Z}$ θα είναι $κ = -1$ ή $κ = 0$ ή $κ = 1$ ή $κ = 2$.

Επομένως, οι λύσεις τις εξίσωσης είναι:

$x = \frac{-1π}{3} + \frac{π}{18} = -\frac{6π}{18} + \frac{π}{18} = -\frac{5π}{18}$, $x = \frac{0π}{3} + \frac{π}{18} = \frac{π}{18}$

$x = \frac{1π}{3} + \frac{π}{18} = \frac{6π}{18} + \frac{π}{18} = \frac{7π}{18}$ και $x = \frac{2π}{3} + \frac{π}{18} = \frac{12π}{18} + \frac{π}{18} = \frac{13π}{18}$.

3.9.1.<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u> (1) $συν3x \neq 0$, γιατί αν $συν3x = 0$ τότε και $ημ3x = 0$, το οποίο είναι αδύνατο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ Ομάδα</u>

3.10. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις:

i) $συν3θ\cdot συνθ + ημ3θ\cdot ημθ$ **ii)** $ημ4θ\cdot συνθ + συν4θ\cdot ημθ$

iii) $ημ(α-β)\cdot συν(α+β) + συν(α-β)\cdot ημ(α+β)$

3.11. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sigma\upsilon\nu(45^0-\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(45^0-\beta) - \eta\mu(45^0-\alpha)\cdot\eta\mu(45^0-\beta) = \eta\mu(\alpha+\beta)$

ii) $\eta\mu(45^0+\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(45^0-\beta) + \sigma\upsilon\nu(45^0+\alpha)\cdot\eta\mu(45^0-\beta) = \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$

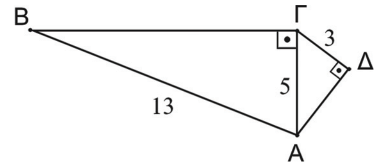
3.12. Να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu(x+\frac{\pi}{3})\cdot\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{3}-x) - \eta\mu(x+\frac{\pi}{3})\cdot\eta\mu(\frac{\pi}{3}-x) = -\frac{1}{2}$.

3.13. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu(\alpha+18^o)\cdot\sigma\upsilon\nu(12^o-\alpha) - \sigma\upsilon\nu(\alpha+78^o)\cdot\eta\mu(\alpha-72^o) = \frac{1}{2}$.

3.14. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu(\frac{\pi}{4}+\varphi) + \eta\mu(\frac{\pi}{4}-\varphi) = \sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi$.

3.15. Να αποδείξετε ότι: $(\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu2\alpha-\eta\mu2\alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu3\alpha$.

3.16. Στο διπλανό σχήμα, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει ΑΒ = 13, ΓΔ = 3 και ΑΓ = 5. Επίσης ΑΓ ⊥ ΒΓ και ΑΔ ⊥ ΓΔ.
Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{A}$.



[Απ. ημΑ=$\frac{63}{65}$, συνΑ=$-\frac{16}{65}$, εφΑ=$-\frac{63}{16}$, σφΑ=$-\frac{16}{63}$]

3.17. Να αποδείξετε ότι το κλάσμα $A = \dfrac{\eta\mu(\alpha+x)-\eta\mu(\alpha-x)}{\sigma\upsilon\nu(\beta-x)-\sigma\upsilon\nu(\beta+x)}$ είναι ανεξάρτητο του x.

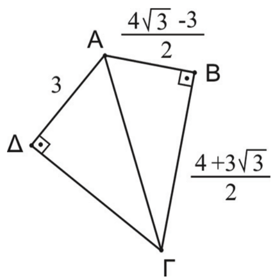
3.18. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-2\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta} = \varepsilon\varphi(\alpha+\beta)$.

3.19. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει
$\hat{B} = \hat{\Delta} = 90^0$, $AB = \frac{4\sqrt{3}-3}{2}$ και $B\Gamma = \frac{4+3\sqrt{3}}{2}$.

Να υπολογίσετε:

α) το συνΑ

β) τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$.



[Απ. α) $-\frac{1}{2}$ β) $\hat{A}=120^0$, $\hat{\Gamma}=60^0$]

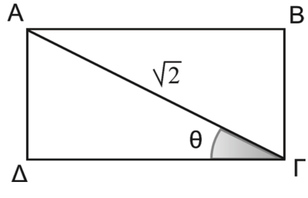
3.20. α) Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu x - \sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x = 2\eta\mu(x-\frac{\pi}{3})$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu x - \sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{3}$.

3.21. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, με διαγώνιο $\sqrt{2}$ και $A\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\theta}$.

i) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου ισούται με $P = 4\cdot\eta\mu(\theta+\frac{\pi}{4})$.

ii) Να βρείτε τη γωνία $\hat{\theta}$ αν η περίμετρος είναι ίση με $2\sqrt{3}$.



[Απ. ii)15^0 ή 75^0]

3.22. **α)** Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta = \sqrt{2}\cdot\eta\mu(\theta+45^0)$.

β) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η υποτείνουσά του ΒΓ = 1 και η περίμετρός του ισούται με $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. Να βρείτε τις οξείες γωνίες του τριγώνου.

[Απ. β)30^0, 60^0]

3.23. Να αποδείξετε ότι:

i) $1 + \varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi2\alpha = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu2\alpha}$ **ii)** $1 - \varepsilon\varphi2\alpha\cdot\sigma\varphi\alpha = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu2\alpha}$

3.24. Να αποδείξετε ότι: **i)** $\frac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\eta\mu(\alpha-\beta)} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}$ **ii)** $\frac{\eta\mu(\alpha+\beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)}{\eta\mu(\alpha-\beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)} = \frac{\eta\mu\beta + \sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta}$

3.25. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu(60^0 - x) = \eta\mu x + \sqrt{3}\cdot\eta\mu(30^0 - x)$ **ii)** $\eta\mu(120^0 - x) = \eta\mu x + \eta\mu(60^0 - x)$

iii) $\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu(x+60^0) + \sigma\upsilon\nu(x+120^0) = 0$

3.26. Να αποδείξετε ότι η παράσταση: $\Pi = (\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta)^2 + (\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta)^2 + 2\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$ είναι ανεξάρτητη των γωνιών α και β.

3.27. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu(\alpha+\beta)\cdot\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta = \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$.

ii) $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\cdot\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta = \sigma\upsilon\nu^2\beta - \eta\mu^2\alpha$.

iii) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta = 1 + \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\cdot\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$.

iv) $\frac{\eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta}{\eta\mu^2(\alpha-\beta)} = 1 + \frac{2\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta}{\eta\mu(\alpha-\beta)}$.

3.28. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)} + \frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)} = 2$.

3.29. Να αποδείξετε ότι: **i)** $\varepsilon\varphi(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}$ **ii)** $\varepsilon\varphi(45^0-\theta) = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta}$

3.30. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\varepsilon\varphi^2 2\alpha - \varepsilon\varphi^2\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2 2\alpha\cdot\varepsilon\varphi^2\alpha} = \varepsilon\varphi3\alpha\cdot\varepsilon\varphi\alpha$.

3.31. Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{2\cdot\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)} = \varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta$ **ii)** $\frac{2\cdot\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)} = \sigma\varphi\beta - \sigma\varphi\alpha$.

iii) $\frac{2\cdot\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)} + \frac{2\cdot\eta\mu(\beta-\gamma)}{\sigma\upsilon\nu(\beta-\gamma)-\sigma\upsilon\nu(\beta+\gamma)} + \frac{2\cdot\eta\mu(\gamma-\alpha)}{\sigma\upsilon\nu(\gamma-\alpha)-\sigma\upsilon\nu(\gamma+\alpha)} = 0$.

3.32. Να αποδείξετε ότι: $\frac{2\cdot\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)}{\eta\mu(\alpha-\beta)+\eta\mu(\alpha+\beta)} + \frac{2\cdot\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)} = \varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha$.

3.33. Να αποδείξετε ότι: **i)** $\dfrac{\text{ημ}(\alpha-\beta)}{\text{συν}\alpha\cdot\text{συν}\beta} = \text{εφ}\alpha - \text{εφ}\beta$ **ii)** $\dfrac{\text{ημ}(\alpha-\beta)}{\text{ημ}\alpha\cdot\text{ημ}\beta} = \text{σφ}\beta - \text{σφ}\alpha$.

iii) $\dfrac{\text{ημ}(\alpha-\beta)}{\text{συν}\alpha\cdot\text{συν}\beta} + \dfrac{\text{ημ}(\beta-\gamma)}{\text{συν}\beta\cdot\text{συν}\gamma} + \dfrac{\text{ημ}(\gamma-\alpha)}{\text{συν}\gamma\cdot\text{συν}\alpha} = 0.$

iv) $\dfrac{\text{ημ}(\alpha-\beta)}{\text{ημ}\alpha\cdot\text{ημ}\beta} + \dfrac{\text{ημ}(\beta-\gamma)}{\text{ημ}\beta\cdot\text{ημ}\gamma} + \dfrac{\text{ημ}(\gamma-\alpha)}{\text{ημ}\gamma\cdot\text{ημ}\alpha} = 0.$

3.34. Να αποδείξετε ότι: **i)** $\dfrac{\text{ημ}(\alpha+\beta)\cdot\text{ημ}(\alpha-\beta)}{\text{ημ}^2\alpha\cdot\text{ημ}^2\beta} = \text{σφ}^2\beta - \text{σφ}^2\alpha.$

ii) $\dfrac{\text{ημ}(\alpha+\beta)\cdot\text{ημ}(\alpha-\beta)}{\text{ημ}^2\alpha\cdot\text{ημ}^2\beta} + \dfrac{\text{ημ}(\beta+\gamma)\cdot\text{ημ}(\beta-\gamma)}{\text{ημ}^2\beta\cdot\text{ημ}^2\gamma} + \dfrac{\text{ημ}(\gamma+\alpha)\cdot\text{ημ}(\gamma-\alpha)}{\text{ημ}^2\gamma\cdot\text{ημ}^2\alpha} = 0.$

3.35. Αν $\alpha+\beta = 135^0$ να αποδείξετε ότι $(1+\text{σφ}\alpha)(1+\text{σφ}\beta) = 2$.

3.36. Αν $\alpha+\beta = 225^0$ να αποδείξετε ότι **i)** $(1+\text{εφ}\alpha)(1+\text{εφ}\beta) = 2$.

ii) $(1+\text{σφ}\alpha)(1+\text{σφ}\beta) = 2\text{σφ}\alpha\cdot\text{σφ}\beta$.

3.37. Αν $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ να αποδείξετε ότι: $\text{εφ}2\alpha + \text{εφ}2\beta + \text{εφ}2\gamma = \text{εφ}2\alpha\cdot\text{εφ}2\beta\cdot\text{εφ}2\gamma$.

3.38. Αν σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει $\text{ημ}(Β+Γ) = 2\text{ημ}Β\cdot\text{συν}Γ$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

3.39. Σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει $\dfrac{\text{ημ}Γ}{\text{συν}Α\cdot\text{συν}Β} = 2\text{εφ}Β$, αν και μόνο αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

3.40. Αν σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει $\dfrac{\text{ημ}Β+\text{συν}Γ}{\text{συν}Β+\text{ημ}Γ} = \text{εφ}Β$, τότε να αποδείξετε ότι $\hat{Α} = \dfrac{\pi}{2}$ και αντιστρόφως.

3.41. Σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$, του οποίου η $\hat{Β}$ δεν είναι ορθή, ισχύει η ισότητα $\text{εφ}Β = \dfrac{\text{συν}(Β-Γ)}{\text{ημ}Α-\text{ημ}(Β-Γ)}$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και αντιστρόφως.

3.42. Να λυθεί η εξίσωση $\text{ημ}(2x+\frac{\pi}{6}) + \text{ημ}(2x-\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$

[Απ. x=κπ+π/4]

3.43. Να λυθεί η εξίσωση $2\text{ημ}(x+45^0) = \sqrt{2}\cdot\text{συν}x + 1$ στο διάστημα $[0,\pi]$.

[Απ. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$]

3.44. Να λύσετε στο διάστημα $[0, \pi]$ την εξίσωση $(\text{ημ}3x + \text{ημ}x)^2 + (\text{συν}3x + \text{συν}x)^2 = 3$.

[Απ. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$]

3.45. Να λυθεί η εξίσωση $\text{σφ}x + \text{σφ}(45^0+x) = 2$.

[Απ. $x=\kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}$]

3.46. α) Να αποδείξετε ότι: $ημ6x + ημ4x = 2ημ5x \cdot συνx$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $ημ6x + ημ4x + 4ημ5x = 0$.

3.47. Έστω $f(x) = (ημ2x + συνx)^2 + (συν2x + ημx)^2 - 1$.

α) Να γράψετε τη συνάρτηση στη μορφή $f(x) = \rho \cdot ημ(\omega x) + \kappa$.

β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα τιμών και μονοτονίας της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου της.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

3.48. Να αποδείξετε ότι:

i) $ημ^2\alpha + ημ^2(60^0 + \alpha) + ημ^2(60^0 - \alpha) = \frac{3}{2}$ **ii)** $συν^2\alpha + συν^2(60^0 + \alpha) + συν^2(60^0 - \alpha) = \frac{3}{2}$.

iii) $ημ^2\alpha + ημ^2(120^0+\alpha) + ημ^2(120^0 - \alpha) = \frac{3}{2}$ **iv)** $συν^2\alpha+συν^2(120^0+\alpha)+συν^2(120^0 - \alpha) = \frac{3}{2}$.

3.49. Να αποδείξετε ότι $\frac{1+ημx}{ημx+συνx} \cdot συν(x-\frac{\pi}{4}) + \frac{1-ημx}{ημx-συνx} \cdot ημ(x-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$.

3.50. Να αποδείξετε ότι: **i)** $\frac{1}{εφ3\alpha - εφ\alpha} - \frac{1}{σφ3\alpha - σφ\alpha} = σφ2\alpha$.

ii) $\frac{1}{εφ3\alpha + εφ\alpha} - \frac{1}{σφ3\alpha + σφ\alpha} = σφ4\alpha$.

iii) $\frac{σφ\alpha}{σφ\alpha - σφ3\alpha} + \frac{εφ\alpha}{εφ\alpha - εφ3\alpha} = 1$.

3.51. Χρησιμοποιώντας την άσκηση 3.27 (i)

α) να αποδείξετε ότι: $ημ^2(1875^0 + \theta) - ημ^2(1875^0 - \theta) = \frac{1}{2} \cdot ημ2\theta$.

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $ημ^2(990^0 + \omega) - ημ^2(990^0 - \omega)$.

[Απ. β)0]

3.52. Αν $ημ(\alpha+\beta) = 0$, να αποδείξετε ότι $συν(\alpha+2\beta) = συν\alpha$.

3.53. i) Να δείξετε ότι: $ημ(\alpha+\beta) - ημ(\alpha-\beta) = 2ημ\beta \cdot συν\alpha$

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $ημ(3x + \frac{\pi}{4}) - ημ(3x - \frac{\pi}{4}) = 1$

iii) Να δείξετε ότι: $ημ61^0 - ημ59^0 = ημ1^0$

3.54. Α. Να αποδείξετε ότι:

i) $2ημ\alpha \cdot συν\beta = ημ(\alpha+\beta) + ημ(\alpha-\beta)$ **ii)** $2συν\alpha \cdot συν\beta = συν(\alpha-\beta) + συν(\alpha+\beta)$

iii) $2ημ\alpha \cdot ημ\beta = συν(\alpha-\beta) - συν(\alpha+\beta)$

Β. Να χρησιμοποιήσετε τους προηγούμενους τύπους, για να αποδείξετε τα επόμενα:

i) $ημ(\alpha-\beta) \cdot συν(\alpha+\beta) + ημ(\beta-\gamma) \cdot συν(\beta+\gamma) + ημ(\gamma-\alpha) \cdot συν(\gamma+\alpha) = 0$

ii) $ημ(\alpha+\beta) \cdot ημ(\alpha-\beta) + ημ(\beta+\gamma) \cdot ημ(\beta-\gamma) + ημ(\gamma+\alpha) \cdot ημ(\gamma-\alpha) = 0$

iii) $συν\alpha \cdot ημ(\beta-\gamma) + συν\beta \cdot ημ(\gamma-\alpha) + συν\gamma \cdot ημ(\alpha-\beta) = 0$

iv) $συν(36^0-\alpha) \cdot συν(36^0+\alpha)+συν(54^0-\alpha) \cdot συν(54^0+\alpha)= συν2\alpha$

v) αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ημA = 2ημB·συνΓ, το τρίγωνο είναι ισοσκελές και αντίστροφα

Γ. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) συνx·συν$7x$ = συν$3x$·συν$5x$

ii) συνx·συν$3x$ = συν$5x$·συν$7x$ στο διάστημα $(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$

iii) ημx·συν$2x$ + ημ$3x$·συν$6x$ + ημ$4x$·συν$13x$ = 0.

[Απ. i)x=κπ/2,x=κπ/4 ii)-π/8,0,π/8]

3.55. Αν ημα + ημβ = $\frac{3}{2}$ και συνα + συνβ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, να αποδείξετε ότι συν$(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}$.

3.56. Αν $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$ και **i)** εφ$\alpha = \frac{1}{2}$, εφ$\beta = \frac{1}{3}$ τότε $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$.

ii) εφ$\alpha = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, εφ$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ τότε $\alpha-\beta = \frac{\pi}{4}$.

3.57. Αν εφ$x = \frac{\lambda}{\lambda-1}$ και εφ$y = \frac{1}{1-2\lambda}$ με $\lambda\neq 1$ και $\lambda\neq\frac{1}{2}$.

α) Να βρείτε την εφ$(x+y)$.

β) Αν $x, y\in(0,\frac{3\pi}{2})$, να βρείτε τη γωνία $x+y$.

[Απ. α)1 β) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$]

3.58. Αν εφ$x = \frac{1+\nu}{1-\nu}$ και εφ$y = \frac{1}{\nu}$ με $\nu\neq 0$ και $\nu\neq 1$, να αποδείξετε ότι $x + y = (4\kappa+3)\frac{\pi}{4}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

3.59. Αν $\frac{\pi}{4} < x, y < \pi$ και εφ$x = \frac{1}{\alpha^2+1}$, εφ$y = \frac{\alpha^2+2}{\alpha^2}$ με $\alpha\neq 0$, να αποδείξετε ότι $y = x + \frac{\pi}{4}$.

3.60. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $x + y + \omega = 0$ τότε εφx + εφy + εφω = εφx·εφy·εφω.

ii) εφ3α − εφ2α − εφα = εφ3α·εφ2α·εφα.

iii) εφ$(\alpha-\beta)$ + εφ$(\beta-\gamma)$ + εφ$(\gamma-\alpha)$ = εφ$(\alpha-\beta)$·εφ$(\beta-\gamma)$·εφ$(\gamma-\alpha)$.

3.61. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $x + y + \omega = \pi$ τότε εφx + εφy + εφω = εφx·εφy·εφω.

ii) εφ72^0 + εφ58^0 + εφ50^0 = εφ72^0·εφ58^0·εφ50^0.

iii) εφ245^0 − εφ33^0 − εφ32^0 = εφ245^0·εφ33^0·εφ32^0.

iv) εφ$(\alpha-\beta+\frac{\pi}{3})$ + εφ$(\beta-\gamma+\frac{\pi}{3})$ + εφ$(\gamma-\alpha+\frac{\pi}{3})$ = εφ$(\alpha-\beta+\frac{\pi}{3})$·εφ$(\beta-\gamma+\frac{\pi}{3})$·εφ$(\gamma-\alpha+\frac{\pi}{3})$.

* * * * *

Β΄ Ομάδα

3.62. Δίνονται οι παραστάσεις:

$Α = συν^2 x - 2συνα \cdot συνx \cdot συν(α+x) + συν^2(α+x)$

$Β = συν^2 x - 2ημα \cdot συνx \cdot ημ(α+x) + ημ^2(α+x)$.

Να αποδείξετε ότι:

i) Οι παραστάσεις Α, Β είναι ανεξάρτητες του x.

ii) Η παράσταση Α + Β είναι ανεξάρτητη του $α$.

3.63. Αν $συν(α+β) = συνα \cdot συνβ$ να αποδείξετε ότι $ημ^2(α+β) = (ημα+ημβ)^2$.

3.64. Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ να αποδείξετε ότι: $ημΑ \cdot ημ(Β-Γ) + ημΒ \cdot ημ(Γ-Α) + ημΓ \cdot ημ(Α-Β) = 0$.

3.65. Αν σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει $συν^2 Α + συν^2 Β + συν^2 Γ = 1$, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και αντιστρόφως.

3.66. Σε κάθε τρίγωνο $ΑΒΓ$ να αποδείξετε ότι ισχύουν:

i) $σφ^2 Α + σφ^2 Β + σφ^2 Γ \geq 1$ **ii)** $εφ^2 \frac{Α}{2} + εφ^2 \frac{Β}{2} + εφ^2 \frac{Γ}{2} \geq 1$.

(*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιείστε την ανισότητα $(x-y)^2 \geq 0$)

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

3.67. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* ή *Λάθος* κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Η περίοδος της συνάρτησης

$f(x) = ημ(34^0-2x) \cdot συν(56^0-2x) + συν(34^0-2x) \cdot ημ(56^0-2x)$ είναι $\frac{π}{2}$.

II. Η τιμή της παράστασης $ημ145^0 \cdot συν65^0 + συν145^0 \cdot ημ65^0$ είναι 0,5.

III. Η τιμή της παράστασης $συν(38^0+θ) \cdot συν(22^0-θ) + ημ(38^0+θ) \cdot ημ(θ-22^0)$ είναι 0,5.

3.68. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Η τιμή της παράστασης $συν63^0 \cdot συν27^0 - ημ63^0 \cdot ημ27^0$ είναι

Α. 1 **Β.** -1 **Γ.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **Δ.** 0 **Ε.** $\frac{1}{2}$

II. Αν σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει η σχέση: $ημΑ \cdot συνΒ = 1 - συνΑ \cdot ημΒ$, τότε το τρίγωνο είναι:

Α. Οξυγώνιο **Β.** Αμβλυγώνιο **Γ.** Ορθογώνιο **Δ.** Ισόπλευρο

III. Αν σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει η σχέση: $συνΒ \cdot συνΓ = ημΒ \cdot ημΓ$, τότε το τρίγωνο είναι:

Α. Οξυγώνιο **Β.** Αμβλυγώνιο **Γ.** Ορθογώνιο **Δ.** Ισόπλευρο

IV. Η τιμή της παράστασης $ημ(α+20^0) \cdot συν(10^0-α) + συν(α+80^0) \cdot ημ(70^0-α)$ είναι:

Α. 1 **Β.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **Γ.** $-\frac{1}{2}$ **Δ.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **Ε.** $\frac{1}{2}$

v. Αν $A = συνθ·συνφ – ημθ·ημφ$ και $45^0 < θ$, $φ < 90^0$ τότε

Α. $A > 0$ **Β.** $A < 0$ **Γ.** $A = 0$ **Δ.** $A = 1$ **Ε.** $A = \frac{1}{2}$

3.69. Να συμπληρώσετε τον πίνακα (ΙΙ), ώστε κάθε τριγωνομετρικός αριθμός της στήλης Α να αντιστοιχεί στην παράσταση της στήλης Β, με την οποία είναι ίσος

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $συν(y–x)$ **2.** $ημ(x+y)$ **3.** $συν(x+y)$ **4.** $ημ(x–y)$	**Α.** $συνx·συνy – ημx·ημy$ **Β.** $ημy·συνx – ημx·συνy$ **Γ.** $–ημy·συνx + ημx·συνy$ **Δ.** $ημy·ημx – συνx·συνy$ **Ε.** $ημx·συνy + ημy·συνx$ **Ζ.** $συνx·συνy + ημy·ημx$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**

3.70. Να συμπληρώσετε τον πίνακα (ΙΙ), ώστε κάθε τριγωνομετρικός αριθμός της στήλης Α να αντιστοιχεί στην παράσταση της στήλης Β, με την οποία είναι ίσος

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $συν3x$ **2.** $ημ5x$ **3.** $συν7x$ **4.** $ημ11x$	**Α.** $ημ14x·ημ3x – συν14x·ημ3x$ **Β.** $συν3x·συν4x – ημ3x·ημ4x$ **Γ.** $ημ2x·ημx – συν2x·συνx$ **Δ.** $συν3x·συν4x + ημ3x·ημ4x$ **Ε.** $συν2x·συνx – ημ2x·ημx$ **Ζ.** $ημ3x·συν2x + ημ2x·συν3x$ **Η.** $συν3x·ημ14x – ημ3x·συν14x$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**

ΕΝΟΤΗΤΑ 4.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ 2α

4.1. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Να αποδείξετε τους τύπους:*

i) $ημ2α = 2ημα \cdot συνα$

ii) $συν2α = συν^2α - ημ^2α = 2συν^2α - 1 = 1 - 2ημ^2α$

iii) $εφ2α = \dfrac{2εφα}{1-εφ^2α}$

Απόδειξη: **i)** $ημ2α = ημ(α+α) = ημα \cdot συνα + συνα \cdot ημα = 2ημα{\cdot}συνα$.

ii) $συν2α = συν(α+α) = συνα \cdot συνα - ημα \cdot ημα = συν^2α - ημ^2α$.

$συν2α = συν^2α - ημ^2α = συν^2α - (1-συν^2α) = συν^2α - 1 + συν^2α = 2συν^2α - 1$.

$συν2α = συν^2α - ημ^2α = 1 - ημ^2α - ημ^2α = 1 - 2ημ^2α$.

iii) $εφ2α = εφ(α+α) = \dfrac{εφα+εφα}{1-εφα\cdot εφα} = \dfrac{2\cdot εφα}{1-εφ^2α}$.

4.2. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Να αποδείξετε τους τύπους:*

i) $ημ^2α = \dfrac{1-συν2α}{2}$

ii) $συν^2α = \dfrac{1+συν2α}{2}$

iii) $εφ^2α = \dfrac{1-συν2α}{1+συν2α}$

Απόδειξη: **i)** $συν2α = 1 - 2ημ^2α \Leftrightarrow 2ημ^2α = 1 - συν2α \Leftrightarrow ημ^2α = \dfrac{1-συν2α}{2}$.

ii) $συν2α = 2συν^2α - 1 \Leftrightarrow 1 + συν2α = 2συν^2α \Leftrightarrow συν^2α = \dfrac{1+συν2α}{2}$.

iii) $εφ^2α = \dfrac{ημ^2α}{συν^2α} = \dfrac{\frac{1-συν2α}{2}}{\frac{1+συν2α}{2}} = \dfrac{1-συν2α}{1+συν2α}$.

4.2.1.*Παραδείγματα:*

- $ημ^2 22{,}5^0 = \dfrac{1-συν45^0}{2} = \dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$, οπότε $ημ22{,}5^0 = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

➢ $συν^2 22{,}5^0 = \dfrac{1+συν^2 45^0}{2} = \dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$, οπότε $συν22{,}5^0 = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

➢ $εφ22{,}5^0 = \dfrac{ημ22{,}5^0}{συν22{,}5^0} = \dfrac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{2} + 1.$

4.3. *Βασική εφαρμογή:*

Για κάθε γωνία $α$ με $συνα \neq 0$ ισχύουν:

- $ημ2α = 2 \cdot ημα \cdot συνα = \dfrac{2 \cdot ημα \cdot συνα}{1} = \dfrac{2 \cdot ημα \cdot συνα}{συν^2α+ημ^2α} = \dfrac{\frac{2 \cdot ημα \cdot συνα}{συν^2α}}{\frac{συν^2α}{συν^2α}+\frac{ημ^2α}{συν^2α}} = \dfrac{2 \cdot εφα}{1+εφ^2α}.$

- $συν2α = συν^2α - ημ^2α = \dfrac{συν^2α-ημ^2α}{1} = \dfrac{συν^2α-ημ^2α}{συν^2α+ημ^2α} = \dfrac{\frac{συν^2α}{συν^2α}-\frac{ημ^2α}{συν^2α}}{\frac{συν^2α}{συν^2α}+\frac{ημ^2α}{συν^2α}} = \dfrac{1-εφ^2α}{1+εφ^2α}.$

4.4. *Βασική εφαρμογή:*

- $ημ3α = ημ(2α+α)$
  $= ημ2α \cdot συνα + συν2α \cdot ημα$
  $= 2 \cdot ημα \cdot συνα \cdot συνα + (1-2ημ^2α) \cdot ημα$
  $= 2 \cdot ημα \cdot συν^2α + ημα - 2ημ^3α$
  $= 2 \cdot ημα \cdot (1-ημ^2α) + ημα - 2ημ^3α$
  $= 2 \cdot ημα - 2 \cdot ημ^3α + ημα - 2ημ^3α$
  $= 3 \cdot ημα - 4 \cdot ημ^3α$.

- $συν3α = συν(2α+α)$
  $= συν2α \cdot συνα - ημ2α \cdot ημα$
  $= (2συν^2α-1) \cdot συνα - 2 \cdot ημα \cdot συνα \cdot ημα$
  $= 2 \cdot συν^3α - συνα - 2ημ^2α \cdot συνα$
  $= 2 \cdot συν^3α - συνα - 2(1-συν^2α) \cdot συνα$
  $= 2 \cdot συν^3α - συνα - 2 \cdot συνα + 2 \cdot συν^3α$
  $= 4 \cdot συν^3α - 3 \cdot συνα$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.5. Αν $π < α < \frac{3π}{2}$ και $συνα = -\frac{1}{4}$, να υπολογίσετε:

i) το $συν\frac{α}{2}$.

ii) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{α}{4}$.

Λύση:

i) $συν^2\dfrac{α}{2} = \dfrac{1+συνα}{2} = \dfrac{1+(-\frac{1}{4})}{2} = \dfrac{1-\frac{1}{4}}{2} = \dfrac{\frac{3}{4}}{2} = \dfrac{3}{8}.$

Είναι: $π < α < \dfrac{3π}{2} \Leftrightarrow \dfrac{π}{2} < \dfrac{α}{2} < \dfrac{3π}{4}$. Επομένως, $συν\dfrac{α}{2} = -\sqrt{\dfrac{3}{8}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

ii) Είναι: $π < α < \dfrac{3π}{2} \Leftrightarrow \dfrac{π}{4} < \dfrac{α}{4} < \dfrac{3π}{8}$.

$ημ^2\dfrac{α}{4} = \dfrac{1-συν\frac{α}{2}}{2} = \dfrac{1-(-\frac{\sqrt{6}}{4})}{2} = \dfrac{1+\frac{\sqrt{6}}{4}}{2} = \dfrac{\frac{4+\sqrt{6}}{4}}{2} = \dfrac{4+\sqrt{6}}{8}.$

Άρα $ημ\frac{α}{4} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{6}}{8}} = \sqrt{\frac{8+2\sqrt{6}}{16}} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{6}}}{4}$.

$συν^2\frac{α}{4} = \frac{1+συν\frac{α}{2}}{2} = \frac{1+(-\frac{\sqrt{6}}{4})}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{6}}{4}}{2} = \frac{\frac{4-\sqrt{6}}{4}}{2} = \frac{4-\sqrt{6}}{8}$.

Άρα $συν\frac{α}{4} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{6}}{8}} = \sqrt{\frac{8-2\sqrt{6}}{16}} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{6}}}{4}$.

Είναι $εφ\frac{α}{4} = \frac{ημ\frac{α}{4}}{συν\frac{α}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{8+2\sqrt{6}}}{4}}{\frac{\sqrt{8-2\sqrt{6}}}{4}} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{6}}}{\sqrt{8-2\sqrt{6}}} = \sqrt{\frac{8+2\sqrt{6}}{8-2\sqrt{6}}} = \sqrt{\frac{2(4+\sqrt{6})}{2(4-\sqrt{6})}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{6}}{4-\sqrt{6}}} =$

$\sqrt{\frac{(4+\sqrt{6})^2}{(4-\sqrt{6})(4+\sqrt{6})}} = \frac{4+\sqrt{6}}{\sqrt{4^2-(\sqrt{6})^2}} = \frac{4+\sqrt{6}}{\sqrt{16-6}} = \frac{4+\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \frac{(4+\sqrt{6})\sqrt{10}}{10} = \frac{4\sqrt{10}+\sqrt{60}}{10} =$

$\frac{4\sqrt{10}+2\sqrt{15}}{10} = \frac{2\sqrt{5}(2\sqrt{2}+\sqrt{3})}{10} = \frac{\sqrt{5}(2\sqrt{2}+\sqrt{3})}{5}$. Επίσης $σφ\frac{α}{4} = \frac{\sqrt{5}(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{5}$.

4.6. i) Να αποδείξετε ότι $συνx = \frac{ημ2x}{2\cdot ημx}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $συν\frac{π}{7}\cdot συν\frac{2π}{7}\cdot συν\frac{4π}{7} = -\frac{1}{8}$.

Λύση:

i) $\frac{ημ2x}{2\cdot ημx} = \frac{2\cdot ημx\cdot συνx}{2\cdot ημx} = συνx$.

ii) $συν\frac{π}{7}\cdot συν\frac{2π}{7}\cdot συν\frac{4π}{7} = \frac{ημ(2\cdot\frac{π}{7})}{2\cdot ημ\frac{π}{7}}\cdot\frac{ημ(2\cdot\frac{2π}{7})}{2\cdot ημ\frac{2π}{7}}\cdot\frac{ημ(2\cdot\frac{4π}{7})}{2\cdot ημ\frac{4π}{7}} = \frac{ημ\frac{2π}{7}}{2\cdot ημ\frac{π}{7}}\cdot\frac{ημ\frac{4π}{7}}{2\cdot ημ\frac{2π}{7}}\cdot\frac{ημ\frac{8π}{7}}{2\cdot ημ\frac{4π}{7}}$

$= \frac{ημ\frac{8π}{7}}{8\cdot ημ\frac{π}{7}} = \frac{ημ(π+\frac{π}{7})}{8\cdot ημ\frac{π}{7}} = \frac{-ημ\frac{π}{7}}{8\cdot ημ\frac{π}{7}} = -\frac{1}{8}$.

4.7. i) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $Π = \frac{ημ3α}{ημα} - \frac{συν3α}{συνα}$ είναι ανεξάρτητη του $α$.

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{ημ153^o}{συν51^o} - \frac{συν153^o}{ημ51^o}$.

Λύση:

i) $Π = \frac{ημ3α}{ημα} - \frac{συν3α}{συνα} = \frac{ημ3α\cdot συνα}{ημα\cdot συνα} - \frac{συν3α\cdot ημα}{συνα\cdot ημα} = \frac{ημ3α\cdot συνα - συν3α\cdot ημα}{ημα\cdot συνα} = \frac{ημ(3α-α)}{ημα\cdot συνα}$

$= \frac{ημ2α}{ημα\cdot συνα} = \frac{2\cdot ημα\cdot συνα}{ημα\cdot συνα} = 2$.

ii) $\frac{ημ153^0}{ημ51^0} - \frac{συν153^0}{συν51^0} = \frac{ημ(3\cdot 51^0)}{ημ51^0} - \frac{συν(3\cdot 51^0)}{συν51^0} \overset{(i)}{=} 2$.

4.8. Αν σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει η σχέση $\frac{συνA}{ημB} = \frac{συνB}{ημA}$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

Λύση:

$\frac{συνA}{ημB} = \frac{συνB}{ημA} \Leftrightarrow συνA·ημA = ημB·συνB \Leftrightarrow 2·ημA·συνA = 2·ημB·συνB \Leftrightarrow$
$ημ2A = ημ2B \Leftrightarrow 2A = 2B$ ή $2A + 2B = 180^0 \Leftrightarrow A = B$ ή $A+B = 90^0 \Leftrightarrow$
$A = B$ ή $Γ = 90^0$.
Επομένως, το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

4.8.1.<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u> **(1)** ημΑ ≠ 0 , ημΒ ≠ 0, γιατί διαφορετικά οι γωνίες θα ήταν 0^0 ή 180^0, πράγμα άδύνατο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ Ομάδα</u>

4.9. Να αποδείξετε τις επόμενες ισότητες:

α) $2ημ\frac{\pi}{8}·συν\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **β)** $(ημ\frac{\pi}{8} - συν\frac{\pi}{8})^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

γ) $(ημ15^0 - συν15^0)^2 = \frac{1}{2}$ **δ)** $συν^2\frac{\pi}{12} - ημ^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4.10. Να αποδείξετε ότι: $συν80^0 = ημ^2 50^0 - συν^2 50^0$.

4.11. Να αποδείξετε τις ισότητες: **i)** $συν^2(45^0–α) - ημ^2(45^0–α) = ημ2α$

ii) $1 - 2ημ^2(45^0 - \frac{α}{2}) = ημα$

4.12. Έστω $f(x) = (ημx + συνx)^2 - (συνx - ημx)^2$.

α) Να γράψετε τη συνάρτηση στη μορφή $f(x) = ρ·ημ(ωx)$.
β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα τιμών και μονοτονίας της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου της.
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία που έχει εξίσωση $y–1 = 0$.

4.13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(ημx+συνx)^2}{2} - ημx(ημx+συνx)$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι περιοδική και να βρείτε την περίοδό της.
β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο βρίσκονται οι τιμές της συνάρτησης.

[Απ. α)π β)$[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$]

4.14. Αν $ημα = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ και $\frac{3\pi}{2} < α < 2\pi$ να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $2α$.

[Απ. $ημ2α=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$, $συν2α=-\frac{7}{9}$, $εφ2α=\frac{4\sqrt{2}}{7}$, $σφ2α=\frac{7\sqrt{2}}{8}$]

4.15. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $\frac{\pi}{8}$ και $\frac{\pi}{16}$.

4.16. Για τη γωνία $α$ ισχύει ότι: $5συν2α - 14συνα - 7 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $συνα = -\frac{3}{5}$.

β) Αν επιπλέον ισχύει $\pi \le α \le \frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημ$2α$, συν$2α$ και εφ$2α$.

4.17. Χρησιμοποιώντας την ισότητα $συνx = \frac{ημ2x}{2\cdot ημx}$ να αποδείξετε ότι:

α) $συν20^0\cdot συν40^0\cdot συν60^0\cdot συν80^0 = \frac{1}{16}$.

β) $συν\frac{2\pi}{7}\cdot συν\frac{4\pi}{7}\cdot συν\frac{8\pi}{7} = \frac{1}{8}$

γ) $συν\frac{\pi}{15}\cdot συν\frac{2\pi}{15}\cdot συν\frac{3\pi}{15}\cdot συν\frac{4\pi}{15}\cdot συν\frac{5\pi}{15}\cdot συν\frac{6\pi}{15}\cdot συν\frac{7\pi}{15} = \frac{1}{2^7}$.

4.18. Να αποδείξετε τις επόμενες ισότητες:

i) $συν^4α - ημ^4α = συν2α$

ii) $εφx - σφx + 2σφ2x = 0$

iii) $\frac{1+σφ^2α}{2\cdot σφα} = \frac{1}{ημ2α}$

iv) $σφα = \frac{1}{ημ2α} + σφ2α$

4.19. Να αποδείξετε ότι: **i)** $1 - εφα\cdot σφ2α = \frac{1}{2συν^2α}$ **ii)** $1 + σφα\cdot σφ2α = \frac{1}{2ημ^2α}$

4.20. Αποδείξτε ότι $συν5\theta\cdot συν3\theta - ημ5\theta\cdot ημ3\theta = συν^24\theta - ημ^24\theta$.

4.21. Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{ημ2α}{1-συν2α} = σφα$

ii) $\frac{σφα-εφα}{σφα+εφα} = συν2α$

iii) $\frac{σφ^2α+1}{σφ^2α-1} = \frac{1}{συν2α}$

iv) $σφ\frac{α}{2} - εφ\frac{α}{2} = 2σφα$

4.22. Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{(1+εφα)(1+σφα)}{2} = \frac{1+ημ2α}{ημ2α}$

ii) $\frac{2\cdot ημ2α-ημ4α}{2\cdot ημ2α+ημ4α} = εφ^2α$

iii) $(1+εφα)^2 + (1+σφα)^2 = \frac{4\cdot(1+ημ2α)}{ημ^22α}$

4.23. Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{συνα+ημα}{συνα-ημα} - \frac{συνα-ημα}{συνα+ημα} = 2εφ2α$

ii) $\frac{ημα-συνα}{ημα+συνα} + \frac{ημα+συνα}{ημα-συνα} = -\frac{2}{συν2α}$

4.24. Να αποδείξετε ότι:

i) $εφ(\frac{\pi}{4}+α) - εφ(\frac{\pi}{4}-α) = 2εφ2α$

ii) $εφ(45^0+α) + εφ(45^0-α) = \frac{2}{συν2α}$

iii) $εφ^2(\frac{\pi}{4}-α) = \frac{1-ημ2α}{1+ημ2α}$

iv) $εφ^2(\frac{\pi}{4}+\frac{α}{2}) = \frac{1+ημα}{1-ημα}$

4.25. Να αποδείξετε ότι:

i) $εφ(\frac{\pi}{4}-\frac{α}{2}) = \frac{συνα}{1+ημα}$

ii) $σφ(45^0+α) = \frac{συν2α}{1+ημ2α}$

iii) $\dfrac{\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}+1}{\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}-1} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-\eta\mu\alpha}$ **iv)** $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\cdot\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})-\sigma\upsilon\nu\alpha} = \dfrac{1+\eta\mu\alpha}{1-\eta\mu\alpha}$

4.26. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{\eta\mu2\alpha+\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$ **ii)** $\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta} = \varepsilon\varphi\dfrac{\theta}{2}$

iii) $\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{\eta\mu\alpha+\eta\mu\frac{\alpha}{2}} = \sigma\varphi\dfrac{\alpha}{2}$

4.27. α) Για κάθε πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι:

$\sigma\upsilon\nu x\cdot(\eta\mu2x + 4\eta\mu x) = (\sigma\upsilon\nu2x + 4\sigma\upsilon\nu x + 1)\cdot\eta\mu x$

β) Να βρείτε εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους $\sigma\upsilon\nu2x + 4\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$.

4.28. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 15^0} + \dfrac{1}{\eta\mu^2 15^0} = 16$.

4.29. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2\eta\mu\alpha+\eta\mu2\alpha} = \varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}$ **ii)** $\dfrac{\eta\mu2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}\cdot\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}$

iii) $\dfrac{\eta\mu2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}$ **iv)** $\varepsilon\varphi(\alpha+\frac{\pi}{6}).\varepsilon\varphi(\alpha-\frac{\pi}{6}) = \dfrac{1-2\sigma\upsilon\nu2\alpha}{1+2\sigma\upsilon\nu2\alpha}$

4.30. Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi2\alpha + \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu2\alpha} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha} = \varepsilon\varphi(\frac{\pi}{4}+\alpha)$

4.31. Έστω $f(x) = \alpha\cdot\eta\mu\left(\dfrac{\beta x}{2}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\beta x}{2}\right) + \beta$, $x\in[0,2\pi]$, $\alpha,\beta > 0$.

Αν η περίοδος της f είναι $T=\pi$ και η μέγιστη τιμή της είναι 5, τότε να βρείτε:

i) Να βρείτε τα α, β.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3,5$.

[Απ. i) α=6, β=2 ii) $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{17\pi}{12}$]

4.32. α) Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi\dfrac{x}{2} = \dfrac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$.

β) Να υπολογίσετε την $\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{12}$.

4.33. α) Να αποδείξετε ότι: $\sigma\varphi\dfrac{x}{2} = \dfrac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$.

β) Να υπολογίσετε την $\sigma\varphi\dfrac{\pi}{8}$.

4.34. α) Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{2\cdot\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x} = 1 + \varepsilon\varphi\dfrac{x}{2}$.

β) Να υπολογίσετε την $εφ\frac{\pi}{8}$.

4.35. **α)** Να αποδείξετε ότι: $\frac{2\cdot συνx}{1-συνx+ημx} = σφ\frac{x}{2} - 1$.

β) Να υπολογίσετε την $εφ\frac{\pi}{12}$.

4.36. Να αποδείξετε ότι: $ημ^2(\frac{\pi}{8}+\frac{\theta}{2}) - ημ^2(\frac{\pi}{8}-\frac{\theta}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot ημ\theta$.

4.37. Να αποδείξετε ότι:

i) $(ημ\alpha + ημ\beta)^2 + (συν\alpha + συν\beta)^2 = 4\cdot συν^2(\frac{\alpha-\beta}{2})$

ii) $(ημ\alpha - ημ\beta)^2 + (συν\alpha + συν\beta)^2 = 4\cdot συν^2(\frac{\alpha+\beta}{2})$

iii) $(ημ\alpha - ημ\beta)^2 + (συν\alpha - συν\beta)^2 = 4\cdot ημ^2(\frac{\alpha-\beta}{2})$

iv) $(ημ\alpha + ημ\beta)^2 + (συν\alpha - συν\beta)^2 = 4\cdot ημ^2(\frac{\alpha+\beta}{2})$

4.38. Να αποδείξετε τις επόμενες ισότητες:

i) $1 - \frac{ημ^2\theta}{1+σφ\theta} - \frac{συν^2\theta}{1+εφ\theta} = \frac{1}{2}\cdot ημ2\theta$ **ii)** $2(εφ\alpha+σφ\alpha)\cdot εφ\frac{\alpha}{2}\cdot(1-εφ^2\frac{\alpha}{2}) = (1+εφ^2\frac{\alpha}{2})^2$

4.39. Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ του οποίου οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ δεν είναι ορθές. Αν ισχύει η ισότητα $\frac{εφB}{εφ\Gamma} = \frac{ημ^2B}{ημ^2\Gamma}$, να αποδείξετε ότι αυτό είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές και αντίστροφα.

4.40. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $συνx - συν2x = 1$ **ii)** $συν2x = 2συνx - 1$

iii) $ημ2x - \sqrt{3}\ συνx = 0$ **iv)** $ημ2x + συν2x = 1$

[Απ. i)x=κπ+π/2, x=2κπ ± π/3 ii)x=κπ+π/2, x=2κπ iii)x=κπ+π/2, x=2κπ+π/3, x=2κπ+2π/3 iv)x=κπ, x=κπ+π/4]

4.41. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $ημx + συν2x = 1$ με $x \in [0, \pi]$ **ii)** $1 - συν2x = \sqrt{3}\cdot ημ2x$ με $x \in [0,2\pi]$

[Απ. i)0,π/6,5π/6,π ii)0,π/3,π,4π/3,2π]

4.42. Να λύσετε την εξίσωση $2ημ^2x + ημ^22x = 2$.

[Απ. $x=κ\pi+\frac{\pi}{2}$, $x=2κ\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $x=(2κ+1)\pi \pm \frac{\pi}{4}$]

4.43. Να λύσετε την εξίσωση $συν2x + (1+\sqrt{3})\cdot ημ2x - 2\sqrt{3}\cdot συν^2x = 1$.

[Απ. i)x=κπ+π/3 , x=κπ+π/4]

4.44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ημ(20^0-x)\cdot συν(x-70^0) + ημ(70^0+x)\cdot συν(x+20^0)$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) = συν2x$.

ii) Να βρείτε τους αριθμούς $x \in [-\pi,3\pi)$ για τους οποίους ισχύει: $f(x) + f(\frac{x}{2}) = 2$.

4.45. **Α.** Να αποδείξετε ότι: $ημ2x - συν2x = \sqrt{2}\cdot ημ(2x-\frac{\pi}{4})$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2ημx\cdot(ημx + συνx)$.

i) Να γράψετε τη συνάρτηση στη μορφή $f(x) = \rho\cdot ημ(2x+\theta) + \kappa$.

ii) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της f;
Για ποιες τιμές του x η συνάρτηση παίρνει τις προηγούμενες τιμές;

iii) Να λύσετε την εξίσωση: $2ημx\cdot(ημx + συνx) = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$.

[Απ. ii)1+ $\sqrt{2}$,1- $\sqrt{2}$,x=κπ+3π/8,x=κπ=π/8 iii)κπ+7π/24, κπ+11π/24]

4.46. Να αποδείξετε ότι:

i) $συν^2(\alpha+\beta) - συν^2(\alpha-\beta) + ημ2\alpha\cdot ημ2\beta = 0$

ii) $ημ^2(\alpha+\beta) - ημ^2(\alpha-\beta) - ημ2\alpha\cdot ημ2\beta = 0$

4.47. Χρησιμοποιώντας τους τύπους της εφαρμογής **4.3** να υπολογίσετε την παράσταση

$Π = \alpha\cdot συν2x + \beta\cdot ημ2x$, αν δίνεται ότι $εφx = \frac{\beta}{\alpha}$.

[Απ. Π=α]

4.48. Δίνονται οι τύποι $ημ2\alpha = \frac{2\cdot εφ\alpha}{1+εφ^2\alpha}$, $συν2\alpha = \frac{1-εφ^2\alpha}{1+εφ^2\alpha}$.

α) Αν $εφ\alpha = \frac{\sqrt{1+\kappa}+\sqrt{1-\kappa}}{\sqrt{1+\kappa}-\sqrt{1-\kappa}}$, με $|\kappa| \le 1$ και $\kappa \ne 0$, να αποδείξετε ότι $ημ2\alpha = \kappa$.

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x , αν $εφ\frac{x}{2} = \sqrt{2}-1$.

γ) Αν $4\cdot ημ2x + 3\cdot συν2x = 3$, να βρείτε την $εφx$.

δ) Να αποδείξετε ότι $εφ^2\alpha = 1 + 2\cdot εφ^2\beta$ αν και μόνο αν $συν2\beta = 1 + 2\cdot συν2\alpha$.

* * * * *

Β΄ Ομάδα

4.49. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{ημ10^0} - \frac{\sqrt{3}}{συν10^0} = 4$.

4.50. Να λύσετε την εξίσωση $2ημ^2x + \sqrt{3}\cdot ημ2x = 3$ στο διάστημα $[0,2\pi]$.

[Απ. x=π/3, x=4π/3]

4.51. Χρησιμοποιώντας τον τύπο $ημ2α = \frac{2\cdot εφ\alpha}{1+εφ^2\alpha}$, να υπολογίσετε την $εφx$, αν

$ημx - συνx = \frac{1}{2}$ και $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

[Απ. εφx= $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$]

4.52. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2ημxσυνx - 2ημ^2x - 4συν^2x$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{2}\cdot ημ(2x-\frac{\pi}{4}) - 3$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η συνάρτηση f παίρνει τη μέγιστη τιμή και ποια είναι αυτή.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - f(x+\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ στο διάστημα $[0,\pi]$.

4.53. Να αποδείξετε ότι: $4(\text{συν}^6\alpha + \text{ημ}^6\alpha) = 1 + 3\text{συν}^2 2\alpha$.

4.54. Να αποδείξετε τις επόμενες ισότητες:

i) $\dfrac{\text{ημ}3\alpha+\text{ημ}^3\alpha}{\text{συν}^3\alpha-\text{συν}3\alpha} = \text{σφ}\alpha$

ii) $\dfrac{3\cdot\text{συν}\alpha+\text{συν}3\alpha}{3\cdot\text{ημ}\alpha-\text{ημ}3\alpha} = \text{σφ}^3\alpha$

iii) $\dfrac{\text{συν}^3\alpha-\text{συν}3\alpha}{\text{συν}\alpha} + \dfrac{\text{ημ}^3\alpha+\text{ημ}3\alpha}{\text{ημ}\alpha} = 3.$

4.55. Να αποδείξετε τις επόμενες ισότητες:

i) $4\cdot\text{ημ}\alpha\cdot\text{ημ}(60^0+\alpha)\cdot\text{ημ}(60^0-\alpha) = \text{ημ}3\alpha$

ii) $4\cdot\text{συν}\alpha\cdot\text{συν}(60^0+\alpha)\cdot\text{συν}(60^0-\alpha) = \text{συν}3\alpha$

iii) $4\cdot\text{ημ}^3\alpha\cdot\text{συν}3\alpha + 4\cdot\text{συν}^3\alpha\cdot\text{ημ}3\alpha = 3\cdot\text{ημ}4\alpha$

iv) $\text{συν}^3\alpha\cdot\text{συν}3\alpha + \text{ημ}^3\alpha\cdot\text{ημ}3\alpha = \text{συν}^3 2\alpha$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

4.56. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* ή *Λάθος* κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Η περίοδος της συνάρτησης $f(x) = \text{ημ}x\cdot\text{συν}x$ είναι 2π.

II. Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = (2\text{ημ}x - \text{συν}x)^2 + (2\text{συν}x - \text{ημ}x)^2 - 5$ είναι 5.

4.57. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Αν $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$ και $x = 2\text{ημ}\alpha\cdot\text{συν}\alpha$ τότε

Α. $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **Β.** $x = 1$ **Γ.** $x = 0$ **Δ.** $x > 0$ **Ε.** $x < 0$

II. Αν $x = 2\text{ημ}\alpha\cdot\text{συν}\alpha$ και $y = \text{συν}^2\alpha - \text{ημ}^2\alpha$ τότε η παράσταση $x^2 + y^2$ είναι

Α. -1 **Β.** 1 **Γ.** $\sqrt{3}$ **Δ.** $\frac{1}{2}$ **Ε.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

III. Αν για τη γωνία $\hat{A}$ ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $1 - 2\text{ημ}^2\frac{A}{2} = 0$, τότε είναι:

Α. $\hat{A} = 30^0$ **Β.** $\hat{A} = 45^0$ **Γ.** $\hat{A} = 60^0$ **Δ.** $\hat{A} = 90^0$ **Ε.** $\hat{A} > 90^0$

IV. Αν $x = \dfrac{2\cdot\text{εφ}60^0}{1-\text{εφ}^2 60^0}$, $y = \dfrac{2\cdot\text{εφ}30^0}{1-\text{εφ}^2 30^0}$ τότε:

Α. $x = y$ **Β.** $x = y = 0$ **Γ.** $x > y$ **Δ.** $x = -y$ **Ε.** Δεν ορίζονται τα x, y

V. Αν για τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει

$2\text{συν}^2\frac{A}{2} - 1 = 1 - 2\text{ημ}^2\frac{B}{2}$, τότε είναι:

Α. $\hat{A} > \hat{B}$ **Β.** $\hat{A} < \hat{B}$ **Γ.** $\hat{A} = 2\hat{B}$ **Δ.** $\hat{A} = \hat{B}$ **Ε.** $2\hat{A} = \hat{B}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ – ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- Πολυώνυμα
- Διαίρεση πολυωνύμων
- Πολυωνυμικές εξισώσεις
- Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές εξισώσεις

Η έννοια του μονωνύμου και του πολυωνύμου είναι γνωστή από το Γυμνάσιο, όπου γίνεται η εισαγωγή στον Αλγεβρικό λογισμό. Εδώ γίνεται περαιτέρω μελέτη αυτών καθώς και των πολυωνυμικών εξισώσεων.

Αρχικά γίνεται ο ορισμός των πολυωνύμων, της ισότητας καθώς και των πράξεων μεταξύ αυτών. Στη συνέχεια παρουσιάζεται το θεώρημα διαιρετότητας καθώς και ο αλγόριθμος διαίρεσης πολυωνύμων. Έτσι, γίνεται φανερή η ομοιότητα που παρουσιάζεται μεταξύ ακεραίων αριθμών και πολυωνύμων. Η σημασία των ακεραίων για την κατασκευή και μελέτη των πραγματικών αριθμών είναι ανάλογη αυτής των πολυωνύμων για το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων. Η διαίρεση ενός πολυωνύμου με ένα άλλο πρώτου βαθμού παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφού γίνεται δυνατός ο υπολογισμός του υπολοίπου χωρίς την εκτέλεση της διαίρεσης. Ακόμα μία απλή παρατήρηση στις πράξεις που απαιτούνται για τον υπολογισμό της τιμής του πολυωνύμου, οδηγεί στο σχήμα του Horner, που δίνει τη δυνατότητα γρήγορης εκτέλεσης της διαίρεσης για την εύρεση του πηλίκου και του υπολοίπου.

Οι πολυωνυμικές εξισώσεις είναι οι απλούστερες που υπάρχουν και μετά από τις πρωτοβάθμιες και δευτεροβάθμιες που έχουν μελετηθεί σε προηγούμενες τάξεις, παρουσιάζεται ένα θεώρημα για τον εντοπισμό ακεραίων ριζών σε πολυωνυμικές εξισώσεις που έχουν ακέραιους συντελεστές. Αξίζει να αναφέρουμε εδώ ότι μπορεί να έχει το πολύ τόσες πραγματικές ρίζες όσες είναι ο βαθμός της. Για τις εξισώσεις τρίτου και τέταρτου βαθμού έχει επινοηθεί τρόπος επίλυσής τους χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πράξεις και ριζικά. Για εξισώσεις πέμπτου και μεγαλύτερου βαθμού έχει αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει παρόμοιος τρόπος. Τέλος παρουσιάζονται εξισώσεις όπως ρητές ή άρρητες των οποίων η λύση ανάγεται σε λύση πολυωνυμικών εξισώσεων.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Η Άλγεβρα είναι γενναιόδωρη και συχνά
μας δίνει περισσότερα από όσα της ζητάμε.
– D' ALEMBERT

1.1. ΟΡΙΣΜΟΣ:

Ονομάζουμε *μονώνυμο του* x κάθε παράσταση της μορφής $\alpha \cdot x^{\nu}$, όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός και ν ένας θετικός ακέραιος. Μονώνυμο του x ονομάζουμε επίσης και κάθε πραγματικό αριθμό.

1.1.1.*Παραδείγματα:* $4x^5$, $-\sqrt{3}\,x^8$, $\frac{5}{7}\,x^{2005}$, -4 , x , 0

1.2. ΟΡΙΣΜΟΣ:

Ονομάζουμε *πολυώνυμο του* x κάθε παράσταση της μορφής:

$$\alpha_{\nu}\cdot x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}\cdot x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\cdot x+\alpha_0 \ ,$$

όπου ν είναι ένας φυσικός αριθμός και α_0 , α_1 , … , α_{ν} είναι πραγματικοί αριθμοί.

1.2.1.*Παραδείγματα:* $2x^3+x^2-5$, $-2{,}9x^6+\frac{2}{9}x^4-x^3+x$, 3 , 0 , $3x$

1.3. ΣΗΜΕΙΩΣΗ: **(1)** Τα μονώνυμα $\alpha_{\nu}\cdot x^{\nu}$, $\alpha_{\nu-1}\cdot x^{\nu-1}$, … , $\alpha_1\cdot x$, α_0 λέγονται *όροι* του πολυωνύμου και οι αριθμοί α_{ν} , $\alpha_{\nu-1}$, α_1 , α_0 *συντελεστές* αυτού.
Ειδικότερα ο α_0 λέγεται *σταθερός όρος* του πολυωνύμου.

(2) Τα πολυώνυμα της μορφής α , δηλαδή οι πραγματικοί αριθμοί, λέγονται σταθερά πολυώνυμα.
Ειδικά το σταθερό πολυώνυμο 0 λέγεται μηδενικό πολυώνυμο.

1.4. ΟΡΙΣΜΟΣ:

Δύο πολυώνυμα $P(x)=\alpha_{\mu}\cdot x^{\mu}+\ldots+\alpha_1\cdot x+\alpha_0$ και $Q(x)=\beta_{\nu}\cdot x^{\nu}+\ldots+\beta_1\cdot x+\beta_0$ με $\mu\geq\nu$ θα λέμε ότι είναι ίσα όταν:
$\alpha_0=\beta_0$, $\alpha_1=\beta_1$, … , $\alpha_{\nu}=\beta_{\nu}$ και $\alpha_{\nu+1}=\alpha_{\nu+2}=\ldots=\alpha_{\mu}=0$.

1.5. ΟΡΙΣΜΟΣ:

Έστω το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_{\kappa}\cdot x^{\kappa}+\alpha_{\kappa-1}\cdot x^{\kappa-1}+\ldots+\alpha_1\cdot x+\alpha_0$ με $\alpha_{\kappa}\neq 0$. τότε ο αριθμός κ λέγεται βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$.
Ένα σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0.
Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.6. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = (1-\alpha^2)x^3 + (\beta^2-\alpha)x^2 + (\alpha-4\beta)x + 2$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η τιμή του $P(x)$ στο -1 είναι -4. Να βρείτε:
i) Τους α, β.
ii) Το βαθμό του πολυωνύμου $P(x)$.
iii) Το πολυώνυμο $Q(x) = P(-x) - P(x-1)$.

Λύση:

i) Είναι: $P(-1) = -4 \Leftrightarrow (1-\alpha^2)(-1)^3 + (\beta^2-\alpha)(-1)^2 + (\alpha-4\beta)(-1) + 2 = -4$
$\Leftrightarrow (1-\alpha^2)(-1) + (\beta^2-\alpha)\cdot 1 + (\alpha-4\beta)(-1) + 2 = -4$
$\Leftrightarrow -1+\alpha^2 + \beta^2-\alpha - \alpha + 4\beta + 2 = -4$
$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2-2\alpha + 4\beta + 5 = 0$
$\Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha + 1 + \beta^2 + 4\beta + 4 = 0$
$\Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 + (\beta + 2)^2 = 0$
$\Leftrightarrow \alpha - 1 = 0$ και $\beta + 2 = 0$
$\Leftrightarrow \alpha = 1$ και $\beta = -2$.

ii) Για $\alpha = 1$ και $\beta = -2$ είναι:
$P(x) = (1-1^2)x^3 + [(-2)^2-1]x^2 + [1-4(-2)]x + 2 = (1-1)x^3 + (4-1)x^2 + (1+8)x + 2 = 3x^2+9x+2$.
Άρα το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $2^{ου}$ βαθμού.

iii) Είναι: $P(-x) = 3(-x)^2 + 9(-x) + 2 = 3x^2 - 9x + 2$.
$P(x-1) = 3(x-1)^2 + 9(x-1) + 2 = 3(x^2-2x+1) - 9x + 9 + 2 = 3x^2 - 6x + 3 - 9x + 9 + 2$
$= 3x^2 - 15x + 14$.
Επομένως, $Q(x) = P(-x) - P(x-1) = 3x^2 - 9x + 2 - (3x^2 - 15x + 14)$
$= 3x^2 - 9x + 2 - 3x^2 + 15x - 14$
$= 6x - 12$.

1.7. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + 2x + 1$, να είναι τετράγωνο το πολυωνύμου $f(x) = x^2 + \gamma x - 1$.

Λύση:

Είναι $P(x) = f^2(x) \Leftrightarrow x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + 2x + 1 = (x^2+\gamma x-1)^2$
$\Leftrightarrow x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + 2x + 1 = x^4 + \gamma^2x^2 + 1 + 2\gamma x^3 - 2x^2 - 2\gamma x$
$\Leftrightarrow x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + 2x + 1 = x^4 + 2\gamma x^3 + (\gamma^2-2)x^2 - 2\gamma x + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\gamma \\ \beta = \gamma^2 - 2 \\ 2 = -2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\cdot(-1) \\ \beta = (-1)^2 - 2 \\ \gamma = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -1 \\ \gamma = -1 \end{cases}.$$

1.8. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 1$.
i) Να γράψετε το $P(x)$ στη μορφή $(x+1)^3 + \alpha(x+1)^2 + \beta(x+1) + \gamma$.
ii) Να διασπάσετε το κλάσμα $\dfrac{x^3+2x^2+3x-1}{(x+1)^4}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Λύση:

i) Είναι $x^3 + 2x^2 + 3x - 1 = (x+1)^3 + \alpha(x+1)^2 + \beta(x+1) + \gamma \Leftrightarrow$
$x^3 + 2x^2 + 3x - 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + \alpha(x^2+2x+1) + \beta x + \beta + \gamma \Leftrightarrow$
$x^3 + 2x^2 + 3x - 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + \alpha x^2 + 2\alpha x + \alpha + \beta x + \beta + \gamma \Leftrightarrow$
$x^3 + 2x^2 + 3x - 1 = x^3 + (\alpha+3)x^2 + (2\alpha+\beta+3)x + 1 + \alpha + \beta + \gamma \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha+3=2 \\ 2\alpha+\beta+3=3 \\ 1+\alpha+\beta+\gamma=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-1 \\ 2\cdot(-1)+\beta=0 \\ 1+(-1)+\beta+\gamma=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=2 \\ 2+\gamma=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=2 \\ \gamma=-3 \end{cases}.$$

Άρα $P(x) = (x+1)^3 - (x+1)^2 + 2(x+1) - 3$.

ii) Είναι $\dfrac{x^3+2x^2+3x-1}{(x+1)^4} = \dfrac{(x+1)^3-(x+1)^2+2(x+1)-3}{(x+1)^4}$

$$= \frac{(x+1)^3}{(x+1)^4} - \frac{(x+1)^2}{(x+1)^4} + \frac{2(x+1)}{(x+1)^4} - \frac{3}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^3} - \frac{3}{(x+1)^4}.$$

1.9. Δίνεται το κλάσμα $K = \dfrac{3x^2-4x+5}{x^3-x^2+x-1}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται το K.

β) Να διασπάσετε το κλάσμα ως εξής $K = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+\Gamma}{x^2+1}$.

Λύση:

α) Είναι $x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) + (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Επομένως, το Κ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ είναι $\dfrac{3x^2-4x+5}{(x-1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+\Gamma}{x^2+1} \Leftrightarrow$

$$3x^2 - 4x + 5 = A(x^2+1) + (x-1)(Bx+\Gamma) \Leftrightarrow$$

$$3x^2 - 4x + 5 = Ax^2 + A + Bx^2 + \Gamma x - Bx - \Gamma \Leftrightarrow$$

$$3x^2 - 4x + 5 = (A + B)x^2 + (\Gamma - B)x + A - \Gamma \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=3 \\ \Gamma-B=-4 \\ A-\Gamma=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3-B \\ \Gamma=B-4 \\ (3-B)-(B-4)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3-B \\ \Gamma=B-4 \\ 3-B-B+4=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3-B \\ \Gamma=B-4 \\ -2B=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ \Gamma=-3 \\ B=1 \end{cases}.$$

Επομένως, $K = \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{x-3}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

1.10. i) Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ τρίτου βαθμού τέτοιο ώστε $P(0) = 0$ και $P(x) - P(x-1) = x^2$.

ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = 1^2 + 2^2 + \dots + \nu^2$.

Λύση:

i) Έστω $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha \neq 0$.

Είναι $P(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha\cdot 0^3 + \beta\cdot 0^2 + \gamma\cdot 0 + \delta = 0 \Leftrightarrow \delta = 0$.

$$P(x) - P(x-1) = x^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - \alpha(x-1)^3 - \beta(x-1)^2 - \gamma(x-1) = x^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - \alpha(x^3-3x^2+3x-1) - \beta(x^2-2x+1) - \gamma x = x^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - \alpha x^3 + 3\alpha x^2 - 3\alpha x + \alpha - \beta x^2 + 2\beta x - \beta - \gamma x = x^2 \Leftrightarrow$$

$$3\alpha x^2 + (2\beta-3\alpha)x + \alpha - \beta + \gamma = x^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3\alpha=1 \\ 2\beta-3\alpha=0 \\ \alpha-\beta+\gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{1}{3} \\ 2\beta-3\cdot\frac{1}{3}=0 \\ \gamma=\beta-\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{1}{3} \\ 2\beta=1 \\ \gamma=\beta-\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{1}{3} \\ \beta=\frac{1}{2} \\ \gamma=\frac{1}{2}-\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{1}{3} \\ \beta=\frac{1}{2} \\ \gamma=\frac{1}{6} \end{cases}.$$

Άρα $P(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$.

ii) Στην ισότητα $P(x) - P(x-1) = x^2$ θέτουμε στη θέση του x τις τιμές $1, 2, \dots, \nu$.

$P(1) - P(0) = 1^2$
$P(2) - P(1) = 2^2$
$P(3) - P(2) = 3^2$
…………………
$P(\nu) - P(\nu-1) = \nu^2$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε:

$P(\nu) - P(0) = 1^2 + 2^2 + \dots + \nu^2 \Leftrightarrow$

$$S = \frac{1}{3}\nu^3 + \frac{1}{2}\nu^2 + \frac{1}{6}\nu - 0 = \frac{2\nu^3+3\nu^2+\nu}{6} = \frac{\nu(2\nu^2+3\nu+1)}{6} = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

1.11. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = (x-3)^{2\nu} + (x-2)^\nu - 1$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, έχει ρίζα τον αριθμό 2.

1.12. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α ώστε το πολυώνυμο $P(x) = (\alpha+1)x^3 - \alpha^2x^2 - 6\alpha x + 7$ να έχει ρίζα τον -2.

[Απ. α=1/2]

1.13. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, το πολυώνυμο
$\Pi(x) = \kappa x^5 + (5\kappa-2)x^4 + \kappa^2x^3 - (1-2\kappa)x - 2$ δεν έχει ρίζα το -1.

1.14. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^2 - 5x + 3$. Να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός α αν ισχύει: $P(2-\alpha) = -3$.

[Απ. α=0 ή α=-1]

1.15. Να βρείτε ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού το οποίο έχει ρίζα τον 3, η τιμή του για $x = -2$ είναι 5 και είναι άρτια συνάρτηση.

[Απ. $P(x)=9-x^2$]

1.16. Να βρείτε ένα πολυώνυμο $f(x)$ τρίτου βαθμού αν $f(-1) = 3$, $f(2) = 6$ και είναι περιττή συνάρτηση.

[Απ. $P(x)=2x^3-5x$]

1.17. **i)** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των συντελεστών ενός πολυωνύμου $P(x)$ ισούται με τον αριθμό $P(1)$.
ii) Έστω $P(x) = (x-2)^{2005} - x^{1005} + 5x - 1$. Να υπολογίσετε το άθροισμα των συντελεστών του.

[Απ. ii)2]

1.18. i) Να αποδείξετε ότι ο σταθερός όρος ενός πολυωνύμου $P(x)$ ισούται με τον αριθμό $P(0)$, ενώ το άθροισμα των συντελεστών του ισούται με τον αριθμό $P(1)$.

ii) Η τιμή ενός πολυωνύμου $P(x)$ στο 0 είναι 1, και η τιμή του στο 1 είναι 2. Να αποδείξετε ότι ο 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $Q(x) = P(P(x) - 2) - x$.

1.19. Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^2+(\alpha-1)x+2\alpha$ έχει ρίζα το -1, αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει και για το πολυώνυμο $Q(x) = x^3+4x^2+(1-\alpha)x$.
Ισχύει το αντίστροφο;

1.20. Θεωρούμε ένα πολυώνυμο $f(x)$. Αν το πολυώνυμο $P(x) = f(x) - x$ έχει ρίζα τον αριθμό ρ, να αποδείξετε ότι και το πολυώνυμο $Q(x) = f(f(x)) - x$ έχει ρίζα τον ρ.

1.21. Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού μ, ώστε το πολυώνυμο
$Q(x) = (\mu^2-4)x^4 - (\mu^3+8)x^3 + (3\mu^2+5\mu-2)x + \mu^2 + 2\mu$, να είναι μηδενικό.

[Απ. μ=-2]

1.22. Για ποιους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ το πολυώνυμο $P(x) = 2x^2 - 8x + 7$ παίρνει τη μορφή $P(x) = \alpha(x-1)^2 + \beta(x-1) + \gamma$;

[Απ. α=2, β=-4, γ=1]

1.23. Αν η διαφορά δύο πολυωνύμων βαθμού ν είναι το μηδενικό πολυώνυμο, να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα είναι ίσα.

1.24. Να βρείτε τα πολυώνυμα $p(x)$ τα οποία επαληθεύουν την ισότητα
$p(x) + [p(x)]^2 = 2x(2x-5) + 6$

[Απ. p(x)=2x-3, p(x)=-2x+2]

1.25. Δίνεται το κλάσμα $K = \dfrac{3x^2-2x-2}{x^3+1}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται το K.

β) Να διασπάσετε το κλάσμα ως εξής $K = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+\Gamma}{x^2-x+1}$.

[Απ. α) $x \neq -1$ ii) A=1, B=2, Γ=-3]

1.26. Να βρεθεί πολυώνυμο $p(x)$ τέτοιο ώστε το τετράγωνό του να ισούται με το $P(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4$.

[Απ. $p(x)=x^2-2x+2$ ή $p(x)=-x^2+2x-2$]

1.27. i) Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ τρίτου βαθμού τέτοιο ώστε $P(0) = P(1) = 0$ και $P(x+1) - P(x) = x(x+1)$.

ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + \nu\cdot(\nu+1)$.

[Απ. i) $P(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x$ ii) $S=\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3}$]

1.28. i) Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ τετάρτου βαθμού τέτοιο ώστε $P(0) = 0$ και $P(x) - P(x-1) = x^3$.

ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = 1^3 + 2^3 + \ldots + \nu^3$.

[Απ. i) $P(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2$ ii) $S=\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}$]

*   *   *   *   *

Β΄ Ομάδα

1.29. Να βρεθεί πολυώνυμο $f(x)$ δευτέρου βαθμού ώστε να ισχύει:
$f(f(x)) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 3$.

[Απ. $f(x)=x^2+x+1$]

1.30. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - \beta x^3 + 5x^2 + 4\alpha x + 4$. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β καθώς και το πολυώνυμο $f(x)$ ώστε $P(x) = f^2(x)$.

[Απ. $\alpha=1, \beta=-2, f(x)=x^2+x+2$ ή $\alpha=-1, \beta=2, f(x)=x^2-x+2$ ή $\alpha=-3, \beta=-6, f(x)=x^2+3x-2$ ή $\alpha=3, \beta=6, f(x)=x^2-3x-2$]

1.31. Δίνεται το πολυώνυμο $\varphi(x) = \kappa x^2+\lambda x+\mu$. Αν α, β, γ διαφορετικοί ανά δύο πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = \varphi(\gamma) = 0$, να αποδείξετε ότι το $\varphi(x)$ είναι μηδενικό πολυώνυμο.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.32. Να γράψετε τις παρακάτω προτάσεις ορθά συμπληρωμένες.

I. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το ………………… των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

II. Ο βαθμός του αθροίσματος δύο πολυωνύμων τετάρτου βαθμού είναι το ………… …………………… βαθμού.

1.33. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* ή *Λάθος* κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Οι πραγματικοί αριθμοί είναι σταθερά πολυώνυμα.

II. Κάθε σταθερό πολυώνυμο έχει βαθμό 0.

III. Τα ίσα πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x.

IV. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το γινόμενο των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

V. Αν τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ έχουν ρίζα τον ρ, τότε και το πολυώνυμο $P(x) + Q(x)$ έχει ρίζα τον ρ.

VI. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον 1, τότε και το πολυώνυμο $P(x-1)$ έχει ρίζα τον 1.

VII. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον ρ, τότε και το πολυώνυμο $P(-x)$ έχει ρίζα τον $-\rho$.

1.34. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Αν το πολυώνυμο $P(x) = (4-\lambda^2)x^3 + (\lambda^3-8)x - (\lambda+2)$, είναι πρώτου βαθμού, τότε ο πραγματικός λ μπορεί να είναι:

Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** -1 **Δ.** 0 **Ε.** -2

II. Τα πολυώνυμα $P(x) = x^3-\beta x+5$ και $Q(x) = x^3+\beta x^2+5-\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$ είναι ίσα όταν ο β ισούται με:

Α. -1 **Β.** 0 **Γ.** 1 **Δ.** 5 **Ε.** -5

III. Το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu \cdot x^\nu + \alpha_{\nu-1} \cdot x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot x + \alpha_0$ έχει για ρίζα το μηδέν. Τότε το α_0 είναι:

Α. $\alpha_0 > 0$ **Β.** $\alpha_0 < 0$ **Γ.** $\alpha_0 = \alpha_\nu$ **Δ.** $\alpha_0 = 0$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

IV. Έστω $P(x)$ σταθερό πολυώνυμο και $P(2) = 5$. Τότε το $P(-2)$ ισούται με:

Α. 5 **Β.** -5 **Γ.** 2 **Δ.** 0 **Ε.** -2

V. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι ψευδής;

Α. Αν $P(\rho) = 0$ τότε το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.
Β. Κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0.
Γ. Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.
Δ. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το γινόμενο των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.
Ε. Τα ίσα πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x.

VI. Για ποιό από τα παρακάτω πολυώνυμα μπορείτε με βεβαιότητα και χωρίς δοκιμή να πείτε ότι δεν μπορεί να έχει πραγματική ρίζα;

Α. $P(x) = x^3 - 5x^2 + x + 1$
Β. $Q(x) = x^5 + 4x + 3$
Γ. $R(x) = 2x^4 - 8x^3 + x^2 + 3x - 2$
Δ. $\Pi(x) = x^6 + 8x^4 + x^2 + 9$
Ε. $K(x) = x^6 + x^2 - 4$

VII. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^{2005} + 1$. Αν $P(\alpha+2004) = 1$, τότε για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει:

Α. $\alpha > 2004$ **Β.** $\alpha > 2005$ **Γ.** $\alpha = 2004$ **Δ.** $\alpha = -2004$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

1.35. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Πολυώνυμο	Βαθμός πολυωνύμου
$P(x) = (x-1)^2 - x(x+1)$	
$P(x) = x^3+5x^2 - x(x^2+1) -2$	
$P(x) = (x+1)(x+2) - x(x+3)$	
$P(x) = x^2-x(x+1) + x$	

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

2.1. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δυο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$, τέτοια ώστε:*

$$\Delta(x) = \delta(x)\cdot\pi(x) + \upsilon(x),$$

Όπου το $\upsilon(x)$ ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.

2.2. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$. Είναι δηλαδή $\upsilon = P(\rho)$.*

Απόδειξη: Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ γράφεται:

$$P(x) = (x-\rho)\cdot\pi(x) + \upsilon(x)$$

Επειδή ο διαιρέτης $x-\rho$ είναι πρώτου βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι ένα σταθερό πολυώνυμο υ. Έτσι έχουμε: $P(x) = (x-\rho)\cdot\pi(x) + \upsilon$.

Και αν θέσουμε $x = \rho$, παίρνουμε $P(\rho) = (\rho-\rho)\cdot\pi(\rho) + \upsilon = 0 + \upsilon = \upsilon$.

Επομένως, $P(x) = (x-\rho)\cdot\pi(x) + P(\rho)$.

2.3. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.*

Απόδειξη: Έστω ότι το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$. Τότε $P(x) = (x-\rho)\cdot\pi(x)$.

Αν θέσουμε $x = \rho$, παίρνουμε $P(\rho) = (\rho-\rho)\cdot\pi(\rho) = 0$,

που σημαίνει ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

Αντίστροφα: Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή ισχύει $P(\rho) = 0$.

Από τη σχέση $P(x) = (x-\rho)\cdot\pi(x) + P(\rho)$ παίρνουμε

$P(x) = (x-\rho)\cdot\pi(x)$, που σημαίνει ότι το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.4. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - 39x + 2\alpha$ να έχει παράγοντες τους $x-2$ και $x-3$. Μετά να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

Λύση:

Το $P(x)$ έχει παράγοντες τους $x–2$ και $x–3$ αν και μόνο αν

$$\begin{cases} P(2)=0 \\ P(3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^4-\alpha\cdot 2^3+\beta\cdot 2^2-39\cdot 2+2\alpha=0 \\ 3^4-\alpha\cdot 3^3+\beta\cdot 3^2-39\cdot 3+2\alpha=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16-8\alpha+4\beta-78+2\alpha=0 \\ 81-27\alpha+9\beta-117+2\alpha=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -6\alpha+4\beta=62 \\ -25\alpha+9\beta=36 \end{cases} \left| :2 \right. \Leftrightarrow \begin{cases} -3\alpha+2\beta=31 \\ -25\alpha+9\beta=36 \end{cases}.$$

$$D=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -25 & 9 \end{vmatrix} = -27+50 = 23,\ D_\alpha=\begin{vmatrix} 31 & 2 \\ 36 & 9 \end{vmatrix} = 279-72 = 207,\ D_\beta=\begin{vmatrix} -3 & 31 \\ -25 & 36 \end{vmatrix} = -108+775 = 667$$

Άρα $\alpha=\dfrac{D_\alpha}{D}=\dfrac{207}{23}=9$ και $\beta=\dfrac{D_\beta}{D}=\dfrac{667}{23}=29$.

Για $\alpha=9$ και $\beta=29$ το πολυώνυμο γίνεται $P(x)=x^4-9x^3+29x^2-39x+18$.
Το $P(x)$ θα διαιρείται από το $(x–2)(x–3)=x^2-5x+6$, οπότε

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
P(x) = & x^4 & - & 9x^3 & + & 29x^2 & - & 39x & + & 18 & x^2-5x+6 \\ \cline{11-11}
& -x^4 & + & 5x^3 & - & 6x^2 & & & & & x^2-4x+3 \\ \cline{2-10}
& & & -4x^3 & + & 23x^2 & - & 39x & + & 18 & \\
& & & 4x^3 & - & 20x^2 & + & 24x & & & \\ \cline{4-10}
& & & & & 3x^2 & - & 15x & + & 18 & \\
& & & & & -3x^2 & + & 15x & - & 18 & \\ \cline{6-10}
& & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Άρα $P(x)=0 \Leftrightarrow (x–2)(x–3)(x^2-4x+3)=0$
$\Leftrightarrow x–2=0$ ή $x–3=0$ ή $x^2-4x+3=0$
$\Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$ *(διπλή ρίζα)* ή $x=1$.

$x^2–4x+3=0$
$\Delta=(–4)^2–4\cdot 1\cdot 3=16–12=4$
$x_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{4}}{2\cdot 1}=\dfrac{4\pm 2}{2}\left\langle \begin{array}{l} x_1=3 \\ x_2=1 \end{array}\right.$

2.5. i) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x+\beta$ να διαιρείται από το $(x–1)^2$.
ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $P(x)$ με τον άξονα $x'x$

Λύση:
i) ***1ος τρόπος:***

Εκτελούμε τη διαίρεση $P(x):(x–1)^2=x^2–2x+1$.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
P(x) = & x^3 & + & 0x^2 & + & \alpha x & +\ \beta & x^2-2x+1 \\ \cline{8-8}
& -x^3 & + & 2x^2 & - & x & & x+2 \\ \cline{2-7}
& & & 2x^2 & + & (\alpha-1)x & +\ \beta & \\
& & & -2x^2 & + & 4x & -\ 2 & \\ \cline{4-7}
& & & & & (\alpha+3)x & +\ \beta-2 &
\end{array}$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι:
$\upsilon(x)=(\alpha+3)x+\beta-2$

Το $P(x)$ διαιρείται από το $(x–1)^2$ αν και μόνο αν $\upsilon(x)=0 \Leftrightarrow (\alpha+3)x+\beta-2=0$
$\Leftrightarrow \alpha+3=0$ και $\beta–2=0$
$\Leftrightarrow \alpha=–3$ και $\beta=2$.

2ος τρόπος:

Το $P(x)$ διαιρείται από το $(x–1)^2$ αν και μόνο $P(1)=0$ και $\pi(1)=0$, όπου $\pi(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x–1)$.
Το σχήμα του Horner για τη διαίρεση $P(x):(x–1)$ είναι:

1	0	α	β	1
	1	1	$\alpha+1$	
1	1	$\alpha+1$	$\alpha+\beta+1$	

Είναι $P(1)=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta+1=0$ **(1)**
και $\pi(x)=x^2+x+\alpha+1$

Το σχήμα του Horner για τη διαίρεση $\pi(x):(x-1)$ είναι:

1	1	$\alpha+1$	1
	1	2	
1	2	$\alpha+3$	

Είναι $\pi(1)=0 \Leftrightarrow \alpha+3=0 \Leftrightarrow \alpha=-3$
Από **(1)** έχουμε: $-3+\beta+1=0 \Leftrightarrow$
$\beta=2$.

ii) Για $\alpha=-3$ και $\beta=2$ το πολυώνυμο γίνεται $P(x)=(x-1)^2\cdot(x+2)$.
Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $P(x)$ με τον άξονα $x'x$ θα βρεθούν από τη λύση της εξίσωσης

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2\cdot(x+2)=0$$
$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } x+2=0$$
$$\Leftrightarrow x=1 \text{ (διπλή ρίζα) ή ή } x=-2.$$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι $A(-2,0)$ και $B(1,0)$.

2.6. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4+(\beta-\alpha)x^3-(\alpha+\beta)x^2-(2\beta+\alpha)x-\beta$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
i) Να προσδιορίσετε τα α, β ώστε το $P(x)$ να διαιρείται με τη μεγαλύτερη δύναμη του $x+1$.
ii) Ποια είναι η μεγαλύτερη δύναμη του $x+1$;
iii) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο.
iv) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Λύση:
i) Το σχήμα του Horner για τη διαίρεση $P(x):(x+1)$ είναι:

1	$\beta-\alpha$	$-\alpha-\beta$	$-2\beta-\alpha$	$-\beta$	-1
	-1	$\alpha-\beta+1$	$2\beta-1$	$\alpha+1$	
1	$\beta-\alpha-1$	$-2\beta+1$	$-\alpha-1$	$\alpha-\beta+1$	

Το $P(x)$ διαιρείται από το $x+1$ αν και μόνο αν $\alpha-\beta+1=0$ **(1)**
Το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$ είναι $\pi(x)=x^3+(\beta-\alpha-1)x^2+(-2\beta+1)x-\alpha-1$.

Το σχήμα του Horner για τη διαίρεση $\pi(x):(x+1)$ είναι:

1	$\beta-\alpha-1$	$-2\beta+1$	$-\alpha-1$	-1
	-1	$\alpha-\beta+2$	$-\alpha+3\beta-3$	
1	$\beta-\alpha-2$	$\alpha-3\beta+3$	$-2\alpha+3\beta-4$	

Το $\pi(x)$ διαιρείται από το $x+1$ αν και μόνο αν $-2\alpha+3\beta-4=0$ **(2)**

Από **(1)** και **(2)** έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases}\alpha-\beta+1=0\\-2\alpha+3\beta-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha-\beta=-1\\-2\alpha+3\beta=4\end{cases}\Bigg|\cdot 2 \Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha-2\beta=-2\\-2\alpha+3\beta=4 \quad (+)\end{cases}$$
$$\beta=2$$

Από την **(1)** είναι: $\alpha-2+1=0 \Leftrightarrow \alpha=1$.
Για $\alpha=1$ και $\beta=2$ το πηλίκο της διαίρεσης $\pi(x):(x+1)$ είναι
$$\pi_1(x)=x^2+(\beta-\alpha-2)x+\alpha-3\beta+3=x^2-x-2.$$

Το σχήμα του Horner για τη διαίρεση $\pi_1(x):(x+1)$ είναι:

1	–1	–2	–1
	–1	2	
1	–2	0	

Το πηλίκο της διαίρεσης $\pi_1(x):(x+1)$ είναι $\pi_2(x) = x–2$.

ii) Η μεγαλύτερη δύναμη του $x+1$ που διαιρεί το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $\nu = 3$.

iii) Είναι $P(x) = (x+1)^3\cdot(x–2)$.

iv) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x΄x$ αν και μόνο αν $P(x) < 0$.

Είναι $P(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x+1)^3\cdot(x–2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x+1 = 0$ ή $x–2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = –1$ ή $x = 2$.

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$(x+1)^3$	–	0	+		+
$x–2$	–		–	0	+
$P(x)$	+	0	–	0	+

Επομένως, $P(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; –1 < x < 2$.

2.7. Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + (1–\alpha)x^2 – (\alpha+2)x + 2\alpha$ με $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν το $P(x)$ έχει ρίζες οι οποίες είναι ανεξάρτητες του α, τότε
i) να βρείτε τις ρίζες αυτές.
ii) να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου.

Λύση:

i) Έστω ρ μια ρίζα του $P(x)$. Τότε

$$P(\rho) = 0 \;\Leftrightarrow\; \rho^3 + (1–\alpha)\rho^2 – (\alpha+2)\rho + 2\alpha = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\rho^3 + \rho^2 – \alpha\rho^2 – \alpha\rho – 2\rho + 2\alpha = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\rho^3 + \rho^2 – 2\rho – \alpha(\rho^2+\rho–2) = 0 \quad \textbf{(1)}$$

Αν θεωρήσουμε το πρώτο μέλος της **(1)** σαν ένα πολυώνυμο του α, εφ' όσον αυτή ισχύει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, θα έχουμε:

$$\begin{cases} \rho^3+\rho^2-2\rho=0 \\ \rho^2+\rho-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho(\rho^2+\rho-2)=0 \\ \rho^2+\rho-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow\; \rho^2 + \rho – 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \rho = 1 \text{ ή } \rho = –2.$$

Άρα οι ρίζες του $P(x)$ που είναι ανεξάρτητες του α είναι οι 1 και $–2$.

ii) Έστω ρ μια ρίζα του $P(x)$. Τότε

Το σχήμα του Horner για τη διαίρεση $P(x):(x–1)$ είναι:

1	$1–\alpha$	$–\alpha–2$	2α	1
	1	$2–\alpha$	$–2\alpha$	
1	$2–\alpha$	$–2\alpha$	0	

Το πηλίκο της διαίρεσης είναι
$\pi(x) = x^2 + (2–\alpha)x – 2\alpha$

Το σχήμα του Horner για τη διαίρεση $\pi(x):(x+2)$ είναι:

1	$2–\alpha$	$–2\alpha$	–2
	–2	2α	
1	$–\alpha$	0	

Άρα $P(x) = (x–1)(x+2)(x–α)$.

Επομένως, $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x–1)(x+2)(x–α) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = –2$ ή $x = α$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

2.8. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο όταν διαιρεθεί με το $x^2 – x +1$, δίνει πηλίκο $2x–3$ και υπόλοιπο $3x–4$.

[Απ. $P(x)=2x^3-5x^2+8x-7$]

2.9. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$, όπου $P(x) = 3x^{2005} – 4x^{1931} – x^2 – 5x + 2$.

[Απ. 7]

2.10. Δίνεται το πολυώνυμο $K(x) = λ^2x^2 + 2(λ^2–3λ+1)x – 3(4λ+1)$.
Αποδείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $K(x):(x+2)$ είναι ανεξάρτητο του $λ$.

2.11. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):Q(x)$, όπου
$P(x) = x^3 – αx^2 – 2β^2x – β^3$ και $Q(x) = x – α + β$.

[Απ. $-α^2β$]

2.12. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό $α$ ώστε το πολυώνυμο
$P(x) = x^3 + (2α–1)x^2 – 5x + α^2 – 3$ διαιρούμενο με το $x + 1$ να δίνει υπόλοιπο 15.

[Απ. $α=-5$ ή $α=3$]

2.13. Να αποδείξετε ότι αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x–5$, τότε το πολυώνυμο $P(2x–3)$ έχει παράγοντα το $x–4$.

2.14. Να αποδείξετε ότι το $x–1$ διαιρεί το πολυώνυμο $P(x) = x^{2ν+1} – (2ν+1)x^{ν+1} + (2ν+1)x^ν – 1$.

2.15. Αποδείξτε ότι το $x + 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $Π(x) = x^5 – λx^2 – λx + 1$.

2.16. Να αποδείξετε ότι το $x+α+β$ διαιρεί το πολυώνυμο
$$P(x) = x^3 – 3αβx + α^3 + β^3, \text{ όπου } α, β \in \mathbb{R}.$$

2.17. Να βρείτε ένα πολυώνυμο $f(x)$ τετάρτου βαθμού τέτοιο ώστε να διαιρείται από το $(x–1)^3$ και $f(2) = –1$, $f(3) = 8$.

[Απ. $f(x)=(x-1)^3(2x-5)$]

2.18. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 – 8x^3 + (5α–1)x^2 + 8x – 3α – 6$, όπου $α \in \mathbb{R}$.
α) Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ δια του $x^2–1$ και να γράψετε τη σχετική ταυτότητα.
β) Να βρείτε την τιμή του $α$, ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.
γ) Για $α = 3$, να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$ καθώς και τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι κάτω από τον άξονα $x΄x$.

[Απ. β) 3 γ) $x \in (-1,1) \cup (3,5)$]

2.19. Το πολυώνυμο $P(x) = x^4 – (α+1)x^3 + (α–3)x^2 – 3x – 2α – 2$ έχει παράγοντα το $φ(x) = x^2 – x + 2$. Να βρείτε τις τιμές
i) του πραγματικού αριθμού $α$.
ii) του x για τις οποίες η γραφική παράσταση του $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x΄x$.

[Απ. i)α=4 ii)-1<x<5]

2.20. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + (\beta-1)x^2 - 3x - 2\beta + 6$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το $x+1$ είναι ίσο με 2, τότε να δείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 4$.

β) Για τις τιμές των α και β του ερωτήματος **(α)**, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

[Απ. β) $1, -2, -\frac{1}{2}$]

2.21. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \kappa x^3 - (\kappa+\lambda)x^2 + \lambda x + 1$.

α) Αν $P(-\frac{1}{2}) = 7$ και $P(-1) = 23$, να αποδείξετε ότι $\kappa = -6$ και $\lambda = -5$.

β) Να γίνει η διαίρεση του $P(x)$, για $\kappa = -6$ και $\lambda = -5$, με το πολυώνυμο $2x+1$ και να γραφεί το $P(x)$ με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $P(x) > 7$ για $\kappa = -6$ και $\lambda = -5$.

2.22. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - \beta x^3 + (\alpha-2)x^2 + (2\beta-\alpha-1)x + 12$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τα α, β ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $(x+1)(x-3)$.

ii) Για τις τιμές των α και β του ερωτήματος **(i)**, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

[Απ. i)α=-5, β=2 ii)-1,-2,2,3]

2.23. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - (\alpha+1)x^3 - 17x^2 + (5\beta+2)x - 9$ να έχει παράγοντα τον $x^2 - 9$.

[Απ. $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta = \frac{9\alpha+7}{5}$]

2.24. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + (\lambda-4)x^2 - 2(\lambda-1)x + 2\kappa$ το οποίο έχει παράγοντα το $\varphi(x) = (x+2)^2$.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ.

β) Να εκτελέσετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το πολυώνυμο $Q(x) = x^2-4x+5$ και να γραφεί το $P(x)$ με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης

γ) Να λυθεί η ανίσωση $P(x) + 37 > 7x$.

[Απ. α)κ=-6, λ=5 γ)x>-5]

2.25. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - \alpha x^3 - (2\beta+\alpha)x^2 + 5\alpha x + 10$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τα α, β ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x^2 + x - 2$.

ii) Για τις τιμές των α και β του ερωτήματος **i)**, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

[Απ. i)α=-1, β=4 ii) $-2, 1, -\sqrt{5}, \sqrt{5}$]

2.26. Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 6x^2 + 7x - 6$ διαιρείται από το πολυώνυμο $(x+3)(x-2)$. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης.

[Απ. $\pi(x)=x^2-x+1$]

2.27. Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$P(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 12x - 4$ έχει παράγοντα το $x^2 - 4x + 4$.

Μετά να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

[Απ. $2, -1+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}$]

2.28. Να αποδείξετε ότι το $(x-2)^3$ διαιρεί το πολυώνυμο

$P(x) = x^5 - 8x^4 + 21x^3 - 14x^2 - 20x + 24$.

Μετά να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

[Απ. 2,-1,3]

* * * * *

Β΄ Ομάδα

2.29. Για ένα πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει η σχέση: $P(3x+2) = 3P(x) - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Αν ο σταθερός όρος του πολυωνύμου είναι 1, να αποδείξετε ότι $P(26) = 14$.

2.30. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε το πολυώνυμο
$$P(x) = x^6 + \alpha x^5 + (2\alpha+1)x^4 + \beta x^3 + (2\alpha+1)x^2 + \alpha x + 1$$
να διαιρείται με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη δύναμη του $x-1$.

[Απ. $\alpha=-\frac{5}{3}$ β=6 , ν=4]

2.31. Έστω $P(x) = \alpha_{100} \cdot x^{100} + \alpha_{99} \cdot x^{99} + \ldots + \alpha_1 \cdot x + \alpha_0$, ένα πολυώνυμο για το οποίο ισχύει $\alpha_0 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{100} = 7$ και $\alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{99} = 5$.
α) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με τα $x-1$ και $x+1$.
β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το x^2-1.

[Απ. α)12,2 β)5x+7]

2.32. Για ένα πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει η ισότητα:
$$x \cdot P(x+1) + (x+4) \cdot P(2-x) = -x^3 + 9x^2 - 44, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$
α) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με τα $x-5$ και $x+2$.
β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2-3x-10$.

[Απ. α)31,-11 β)6x+1]

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

2.33. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* ή *Λάθος* κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Αν $\upsilon(x)$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $\Delta(x)$ δια του $\delta(x)$, όπου $\delta(x)$ και $\upsilon(x)$ είναι μη μηδενικά πολυώνυμα, τότε ο βαθμός του $\upsilon(x)$ είναι μικρότερος από το βαθμό του $\delta(x)$.

II. Το πολυώνυμο $\Pi(x) = 6x^6 + 5x^4 + 4x^2 + 3$ έχει παράγοντα το $x - \rho$, $\rho \in \mathbb{R}$.

2.34. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το -2, τότε διαιρείται με το διώνυμο:
Α. $x-2$ **Β.** $x+2$ **Γ.** $2x+1$ **Δ.** $2x-1$ **Ε.** $2-x$

II. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \kappa^2 x^3 - 3\kappa x^2 + \kappa x + 1$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$. Για ποια από τις παρακάτω τιμές του κ το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-1)$ είναι ίσο με το μηδέν;
Α. $\kappa = 0$ **Β.** $\kappa = -1$ **Γ.** $\kappa = 1$ **Δ.** $\kappa = 2$ **Ε.** $\kappa = -2$

III. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ και ρ ένας πραγματικός αριθμός. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ και $\pi(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-\rho$ τότε:

Α. $P(x) = (x-\rho)\, \pi(x) + 1$

Β. $\pi(x) = (x-\rho)\, P(x)$

Γ. Ο βαθμός του υπολοίπου της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσος με μηδέν.

Δ. $P(\rho) = 0$.

IV. Αν ένα πολυώνυμο πέμπτου βαθμού διαιρείται με ένα τρίτου βαθμού, τότε το πηλίκο είναι:

Α. το πολύ δευτέρου βαθμού
Β. τουλάχιστον δευτέρου βαθμού
Γ. ακριβώς δευτέρου βαθμού
Δ. ακριβώς τρίτου βαθμού
Ε. τουλάχιστον τρίτου βαθμού

V. Αν σε μια διαίρεση πολυωνύμων που δεν είναι τέλεια, ο διαιρέτης είναι τρίτου βαθμού, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι:

Α. τουλάχιστον τρίτου βαθμού
Β. ακριβώς τρίτου βαθμού
Γ. ακριβώς δευτέρου βαθμού
Δ. το πολύ δευτέρου βαθμού
Ε. τουλάχιστον δευτέρου βαθμού

VI. Το πολυώνυμο $P(x) = (4x+5)^{2004} + x^{2001}$ έχει παράγοντα το:

Α. $x+1$ **Β.** $x-1$ **Γ.** x **Δ.** $x+\frac{5}{4}$

ΕΝΟΤΗΤΑ 3.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

3.1. ΟΡΙΣΜΟΣ:

α) Πολυωνυμική εξίσωση βαθμού ν ονομάζουμε κάθε εξίσωση της

$$\alpha_\nu\cdot x^\nu + \alpha_{\nu-1}\cdot x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1\cdot x + \alpha_0 = 0\,,\ \ \alpha_\nu \neq 0.$$

β) Ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης ονομάζουμε κάθε ρίζα του πολυωνύμου $P(x) = \alpha_\nu\cdot x^\nu + \alpha_{\nu-1}\cdot x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1\cdot x + \alpha_0$, δηλαδή κάθε αριθμό ρ, για τον οποίο ισχύει $P(\rho) = 0$.

3.2. ΘΕΩΡΗΜΑ: ***(ακέραιων ριζών)***

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu\cdot x^\nu+\alpha_{\nu-1}\cdot x^{\nu-1}+ \ldots +\alpha_1\cdot x+\alpha_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

Απόδειξη: Αν ο $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε έχουμε

$$\alpha_\nu\cdot\rho^\nu + \alpha_{\nu-1}\cdot\rho^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1\cdot\rho + \alpha_0 = 0 \iff \alpha_0 = -\alpha_\nu\cdot\rho^\nu - \alpha_{\nu-1}\cdot\rho^{\nu-1} - \ldots - \alpha_1\cdot\rho$$

$$\iff \alpha_0 = \rho\cdot(-\alpha_\nu\cdot\rho^{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}\cdot\rho^{\nu-2} - \ldots - \alpha_1).$$

Επειδή οι ρ , α_1 , α_2 , … , α_ν είναι ακέραιοι έπεται ότι και ο $-\alpha_\nu\cdot\rho^{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}\cdot\rho^{\nu-2} - \ldots - \alpha_1$ είναι ακέραιος. Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του α_0.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.3. i) Να λυθεί η εξίσωση $3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 16x = 0$.
ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 16x$ με τον άξονα $x'x$.

Λύση:

i)

$$3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 16x = 0 \iff x(3x^3 - 8x^2 - 6x + 16) = 0 \iff$$

$$x[x^2(3x-8) - 2(3x-8)] = 0 \iff x(3x-8)(x^2-2) = 0 \iff$$

$$x = 0 \ \text{ή}\ 3x-8 = 0 \ \text{ή}\ x^2-2 = 0 \iff x = 0 \ \text{ή}\ 3x = 8 \ \text{ή}\ x^2 = 2 \iff$$

$$x = 0 \ \text{ή}\ x = \frac{8}{3} \ \text{ή}\ x = \sqrt{2} \ \text{ή}\ x = -\sqrt{2}\,.$$

ii) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ δίνονται από τη λύση της εξίσωσης:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 3x^4-8x^3-6x^2+16x=0 \overset{(i)}{\Leftrightarrow} x=0 \text{ ή } x=\frac{8}{3} \text{ ή } x=\sqrt{2} \text{ ή } x=-\sqrt{2}.$$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι: $A(0,0)$, $B(\frac{8}{3},0)$, $\Gamma(\sqrt{2},0)$ και $\Delta(-\sqrt{2},0)$.

3.4. i) Να λυθεί η εξίσωση $x^5-x^4-7x^3-x^2+10x+6=0$.
ii) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:
$f(x)=x^5+x^4-4x^3+5x-2$ και $g(x)=2x^4+3x^3+x^2-5x-8$.

Λύση:

i) Πιθανές ακέραιες ρίζες: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6.

1	–1	–7	–1	10	6	–1
	–1	2	5	–4	–6	
1	–2	–5	4	6	0	

Άρα $x^5-x^4-7x^3-x^2+10x+6=0 \Leftrightarrow$
$(x+1)(x^4-2x^3-5x^2+4x+6)=0$ (1).

1	–2	–5	4	6	–1
	–1	3	2	–6	
1	–3	–2	6	0	

Άρα (1) $\Leftrightarrow (x+1)(x+1)(x^3-3x^2-2x+6)=0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2\cdot(x^3-3x^2-2x+6)=0$ (2).

1	–3	–2	6	3
	3	0	–6	
1	0	–2	0	

Άρα (2) $\Leftrightarrow (x+1)^2\cdot(x-3)(x^2-2)=0$
$\Leftrightarrow x+1=0$ ή $x-3=0$ ή $x^2-2=0$
$\Leftrightarrow x=-1$ ή $x=3$ ή $x^2=2$
$\Leftrightarrow x=-1$ ή $x=3$ ή $x=\sqrt{2}$ ή $x=-\sqrt{2}$.

ii) Τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων, δίνονται από τη λύση του συστήματος.

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^5+x^4-4x^3+5x-2 \\ y=2x^4+3x^3+x^2-5x-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x^4+3x^3+x^2-5x-8 \\ x^5+x^4-4x^3+5x-2=2x^4+3x^3+x^2-5x-8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=2x^4+3x^3+x^2-5x-8 \\ x^5-x^4-7x^3-x^2+10x+6=0 \end{cases} \overset{(i)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y=2x^4+3x^3+x^2-5x-8 \\ x=-1 \text{ ή } x=3 \text{ ή } x=\sqrt{2} \text{ ή } x=-\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=-3 \\ x=-1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=229 \\ x=3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=2+\sqrt{2} \\ x=\sqrt{2} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=2-\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{cases}.$$

Άρα τα σημεία τομής είναι: $A(-1,-3)$, $B(3,229)$, $\Gamma(\sqrt{2},2+\sqrt{2})$ και $\Delta(-\sqrt{2},2-\sqrt{2})$.

3.5. i) Να λυθεί η ανίσωση $5x^2+4x \geq 2x^3+3$.
ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3+2x^2+4x-1$ βρίσκεται "ψηλότερα" από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=3x^3-3x^2+2$.

Λύση:

i) Είναι $5x^2+4x \geq 2x^3+3 \Leftrightarrow -2x^3+5x^2+4x-3 \geq 0$.

Έστω $P(x)=-2x^3+5x^2+4x-3$.

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$ είναι: ± 1, ± 3.

–2	5	4	–3	–1
	2	–7	3	
–2	7	–3	0	

Άρα $P(x) = 0 \Leftrightarrow$
$(x+1)(-2x^2+7x-3) = 0 \Leftrightarrow$
$x+1 = 0$ ή $-2x^2+7x-3 = 0 \Leftrightarrow$
$x = -1$ ή $x = \frac{1}{2}$ ή $x = 3$.

Ο πίνακας προσήμων του $P(x)$ είναι:

x	$-\infty$		-1		½		3		$+\infty$
$x+1$		–	0	+		+		+	
$-2x^2+7x-3$		–		–	0	+	0	–	
$P(x)$		+	0	–	0	+	0	–	

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι:
$x \leq -1$ ή $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$.

ii) Τα x για τα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται “ψηλότερα” από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, βρίσκονται από τη λύση της ανίσωσης

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 4x - 1 > 3x^3 - 3x^2 + 2 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 4x - 1 - 3x^3 + 3x^2 - 2 > 0$$
$$\Leftrightarrow -2x^3 + 5x^2 + 4x - 3 > 0 \Leftrightarrow P(x) > 0 \overset{(i)}{\Leftrightarrow} x < -1 \text{ ή } \frac{1}{2} < x < 3.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

3.6. Να λύθούν οι εξισώσεις:
i) $x^3 - 2x^2 - 5x + 10 = 0$ **ii)** $9x^4 - 1 = x - 3x^3$ **iii)** $2x^3 = (x-5)^2 + 250$

[Απ. i) $2, \sqrt{5}, -\sqrt{5}$ ii) $-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$ iii) 5]

3.7. Να λύσετε τις εξισώσεις:
i) $x^3 - 3x + 2 = 0$ **ii)** $x^3 - 7x - 6 = 0$ **iii)** $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$
iv) $3x^3 - 7x^2 + 4 = 0$ **v)** $3x^3 - 14x^2 + 17x - 6 = 0$ **vi)** $14x^3 - 43x^2 + 9 = 0$

[Απ. i) $-2, 1$ ii) $-2, -1, 3$ iii) -2 iv) $1, 2, -\frac{2}{3}$ v) $1, 3, \frac{2}{3}$ vi) $3, \frac{1}{2}, -\frac{3}{7}$]

3.8. Να λύσετε τις εξισώσεις:
i) $x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0$ **ii)** $2x^4 - 9x^3 + 37x - 30 = 0$
iii) $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 7x + 3 = 0$ **iv)** $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 12x - 4 = 0$
v) $x^7 + 4x^5 + x^3 - 6x = 0$

[Απ. i) $1, -3$ ii) $-2, 1, 3, \frac{5}{2}$ iii) -1 iv) $-2, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$ v) $-1, 0, 1$]

3.9. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 11x^2 - 12x + 12$ με τον άξονα $x'x$.

[Απ. (2,0)]

3.10. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$ με τον άξονα $x'x$.

[Απ. (-3,0) , (1,0)]

3.11. Δίνονται τα πολυώνυμα $f(x) = 2x^3 - (\beta - \alpha)x^2 + \alpha$ και $g(x) = x^3 - (\beta+2)x + 4 - \alpha$. Αν η γραφική παράσταση του 1ου πολυωνύμου διέρχεται από το σημείο $A(-1,-7)$ και του 2ου από το σημείο $B(1,1)$, να βρείτε:

i) Τους πραγματικούς αριθμούς α, β.

ii) Τα σημεία τομής των γραφικών τους παραστάσεων.

[Απ. i)α=-1, β=3 ii)M(3,17)]

3.12. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4x^4 - 9x^2 - 2x + 3$ βρίσκεται "κάτω" από τον άξονα $x'x$.

[Απ. $\frac{1}{2}$<x<$\frac{3}{2}$]

3.13. Δίνεται η εξίσωση $x^5 - \alpha x^3 + \beta x^2 + x - 1 = 0$. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η εξίσωση να έχει το ανώτερο δυνατό πλήθος ακέραιων ριζών.

[Απ. α=2, β=1]

3.14. Αν ο κ είναι ακέραιος αριθμός να αποδείξετε ότι η εξίσωση $5x^{2005} + 9\kappa x^{2004} - 1 = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

3.15. Δίνεται η εξίσωση $x^5 + x^4 + \kappa x + \lambda = 0$. Να προσδιοριστούν οι κ, λ ώστε το πολυώνυμο να έχει ρίζα τον -1 με πολλαπλότητα 2 (διπλή ρίζα). Μετά να βρεθούν οι άλλες ρίζες της εξίσωσης.

[Απ. κ=λ=-1 , 1]

3.16. Δίνεται η εξίσωση

$$x^4 + (2\alpha+3)x^3 + (6\alpha-4)x^2 - (8\alpha+12)x - 24\alpha = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Αν η εξίσωση έχει ρίζες οι οποίες είναι ανεξάρτητες του α, τότε:

i) Να βρείτε τις ρίζες αυτές.

ii) Να βρείτε όλες τις ρίζες της εξίσωσης.

[Απ. i)-2,-3,2 ii))-2,-3,2,-2α]

* * * * *

<u>Β΄ Ομάδα</u>

3.17. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^\nu + 2\kappa x + 2 = 0$ όπου ν φυσικός, $\nu \geq 3$ και $\kappa \in \mathbb{Z}$, δεν έχει ακέραιες ρίζες.

3.18. i) Να βρεθούν οι ακέραιες τιμές του κ για τις οποίες η εξίσωση $x^3 + \kappa x^2 + \kappa x + 2 = 0$ έχει ακέραιες ρίζες.

ii) Για τις τιμές του κ που θα βρείτε να λύσετε την εξίσωση.

[Απ. i)κ=3 ii)-2]

3.19. Να λύσετε την εξίσωση $x^3 - 5x^2 - 16x + 80 = 0$, αν ξέρουμε ότι έχει δύο αντίθετες ρίζες.

[Απ. -4,4,5]

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

3.20. Να χαρακτηρίσετε *<u>Σωστή</u>* ή *<u>Λάθος</u>* κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ι. Η εξίσωση $3x^3 - 5x + 6 = 0$ έχει ρίζα το 4.

ΙΙ. Η εξίσωση $4x^4 + 5x^2 + 7x + 4 = 0$ έχει ρίζα το 2.

ΙΙΙ. Η εξίσωση $6x^6 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2 = 0$ δεν έχει ρίζα το -3.

3.21. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις δεν έχει ρίζα ακέραιο αριθμό;

A. $x^2-5x+6=0$ **B.** $x^3-2x^2+x-2=0$ **Γ.** $3x^4-2x^3+x-2=0$
Δ. $3x^4+x^2+8=0$ **E.** $2x^3+x+3=0$

II. Ποιας συνάρτησης η γραφική παράσταση αποκλείεται να τέμνει τον άξονα $x'x$;

A. $f(x)=(x-2)^2+2x-4$ **B.** $g(x)=x^3-3x$ **Γ.** $h(x)=x^4-6x^3+5$
Δ. $k(x)=x^5+x^3+x+3$ **E.** $\varphi(x)=(x-9)^4+x^2+4$

III. Για ποιας συνάρτησης τη γραφική παράσταση μπορείτε να πείτε με βεβαιότητα και χωρίς καμιά δοκιμή ότι βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$;

A. $f(x)=x^3-5x^2-2x+7$ **B.** $g(x)=x^2+5x-14$ **Γ.** $h(x)=(x^3-1)^2+2x^4$
Δ. $k(x)=(x-1)^2-4$ **E.** $\varphi(x)=x^4+2x^2-9$

IV. Η εξίσωση $x^3-3x^2+\kappa x+2$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ αποκλείεται να έχει ακέραια ρίζα τον αριθμό:

A. -1 **B.** 1 **Γ.** -2 **Δ.** 2 **E.** 3

V. Αν η εξίσωση $x^3+(\beta-1)x+\alpha=0$, $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$, έχει ρίζα τον 3, τότε ο α αποκλείεται να ισούται με:

A. 6 **B.** 10 **Γ.** 12 **Δ.** 15 **E.** 18

ΕΝΟΤΗΤΑ 4.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.1. Να λυθεί η εξίσωση: 2ημ³x + 7συν²x + 7ημx – 9 = 0.

Λύση:

$$2ημ^3x + 7συν^2x + 7ημx – 9 = 0 \Leftrightarrow 2ημ^3x + 7(1–ημ^2x) + 7ημx – 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2ημ^3x + 7 – 7ημ^2x + 7ημx – 9 = 0 \Leftrightarrow 2ημ^3x – 7ημ^2x + 7ημx – 2 = 0 \overset{ημx=y}{\Leftrightarrow}$$

$$2y^3 – 7y^2 + 7y – 2 = 0 \Leftrightarrow 2(y^3 – 1) – 7y(y – 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(y–1)(y^2+y+1) – 7y(y – 1) = 0 \Leftrightarrow (y–1)[2(y^2+y+1) – 7y] = 0 \Leftrightarrow$$

$$(y–1)(2y^2+2y+2–7y) = 0 \Leftrightarrow (y–1)(2y^2–5y+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$y–1 = 0 \text{ ή } 2y^2–5y+2 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ή } y = \frac{1}{2} \text{ ή } y = 2.$$

- $ημx = 1 \Leftrightarrow ημx = ημ\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \ \kappa \in \mathbb{Z}.$
- $ημx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow ημx = ημ\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \ \kappa \in \mathbb{Z}.$
- $ημx = 2$ *αδύνατη* γιατί $–1 \le ημx \le 1$.

4.2. Να λυθεί η εξίσωση: 2ημ³x + 7συν²x + 7ημx – 9 = 0.

Λύση:

Θέτουμε $x^2 – 4x + 20 = y \Leftrightarrow x^2 – 4x = y – 20$.

Η εξίσωση γίνεται:

$$\textbf{(1)} \quad y – 20 = 3\sqrt{y} – 10 \Rightarrow$$
$$y – 10 = 3\sqrt{y} \Rightarrow$$
$$(y–10)^2 = (3\sqrt{y})^2 \Rightarrow$$
$$y^2 – 20y + 100 = 9y \Rightarrow$$
$$y^2 – 29y + 100 = 0 \Rightarrow$$
$$y = 4 \text{ ή } y = 25.$$

$y^2–29y+100 = 0$

$\Delta = (–29)^2–4\cdot1\cdot100 = 841–400 = 441$

$y_{1,2} = \frac{29 \pm \sqrt{441}}{2\cdot1} = \frac{29 \pm 21}{2}$ με $y_1 = \frac{50}{2} = 25$, $y_2 = \frac{8}{2} = 4$

- Για $y = 4$ η **(1)** $\Leftrightarrow 4 – 20 = 3\sqrt{4} – 10 \Leftrightarrow –16 = –4$ αδύνατο.
- Για $y = 25$ η **(1)** $\Leftrightarrow 25 – 20 = 3\sqrt{25} – 10 \Leftrightarrow 5 = 5$ ισχύει.

Άρα $y = 25 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 20 = 25 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 5$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

4.3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\dfrac{x^2+2x-4}{x-2} = x^2$ **ii)** $\dfrac{2x^2}{x+1} + \dfrac{5}{3-x} = \dfrac{x^2+11}{3+2x-x^2}$

[Απ. i) 1, $1+\sqrt{5}$, $1-\sqrt{5}$ ii) $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$, $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$]

4.4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $4ημ^4x + 19συν^2x - 7 = 0$ **ii)** $2εφ^4x + εφ^2x - 3 = 0$

[Απ. i) $2κπ \pm \frac{π}{3}$, $2κπ+\frac{2π}{3}$, $2κπ+\frac{4π}{3}$ ii) $κπ \pm \frac{π}{4}$]

4.5. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $\dfrac{x^3+2x-4}{x-2} < 1$ **ii)** $\dfrac{x^2}{x+1} - \dfrac{4}{x-1} \le \dfrac{2}{x^2-1}$

[Απ. i) $1<x<2$ ii) $x<-1$ ή $1<x\le 3$]

4.6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sqrt{6-x} = x$ **ii)** $\sqrt{7-x} = x - 1$

iii) $\sqrt{5-x^2} = x - 1$ **iv)** $\sqrt{x^2+8} = 2x + 1$

[Απ. i) 2 ii) 3 iii) 2 iv) 1]

4.7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\sqrt{x-8} + \sqrt{x-5} = 3$ **β)** $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$

γ) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$ **δ)** $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5} = \sqrt{2x+18}$

ε) $\sqrt{x-5} + \sqrt{x-8} = \sqrt{3x-21}$

[Απ. α) 9 β) 4 γ) 2 δ) 9 ε) 8]

4.8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{7x+1}$ **β)** $\sqrt{3x+19} - \sqrt{x+2} = \sqrt{x+7}$

γ) $\sqrt{5x+10} - \sqrt{x+1} = \sqrt{x+6}$

[Απ. α) 5 β) 2 γ) -1, 3]

4.9. Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{1-x^2} + \sqrt[3]{x^2-3x+2} + \sqrt[4]{x^{2005}-2005x+2004} = 0$.

[Απ. 1]

4.10. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\sqrt[3]{x^3+9x^2} = x + 3$ **β)** $\sqrt[3]{5x+3} = x + 1$

γ) $\sqrt[3]{5x-7} = x - 1$ **δ)** $\sqrt[4]{2x^2-4x+1} = x - 1$

ε) $\sqrt[5]{x^3+x^2-1} = x$

[Απ. α) -1 β) 1, $-2+\sqrt{2}$ γ) 3, $\sqrt{2}$ δ) 2 ε) 1]

4.11. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$ **β)** $\sqrt{x-15} + \sqrt{x+17} = \sqrt{x+6} + \sqrt{x-10}$

γ) $\sqrt{1+\sqrt{x^4-x^2}} = x-1$

[Απ. α)9 β)19 γ)αδύνατη]

4.12. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $x^2 - x + 9 + \sqrt{x^2-x+9} = 12$

ii) $2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2+3x+9} + 3 = 0$

iii) $x^2 - 4x + 6 = \sqrt{2x^2-8x+12} =$

[Απ. α)0,1 β)$-\frac{9}{2}$,3 γ)2]

4.13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sqrt{x^2+3x+5} - \sqrt{x^2+3x} = 1$

ii) $\sqrt{3x^2-4x+34} + \sqrt{3x^2-4x-11} = 9$

[Απ. α)-4,1 β)$-\frac{5}{3}$,3]

* * * * *

Β΄ Ομάδα

4.14. Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{2x-3} + \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}-3} = 5.$

[Απ. $\frac{19}{2}$]

4.15. Να λυθεί η εξίσωση: $\dfrac{2}{x+\sqrt{2-x^2}} + \dfrac{2}{x-\sqrt{2-x^2}} = x.$

[Απ. 0]

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

4.16. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* ή *Λάθος* κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Η εξίσωση $\sqrt{x+1} = -2$ έχει λύση.

4.17. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Η εξίσωση $\sqrt{3-x} = x + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}^*$ αποκλείεται να έχει ρίζα τον αριθμό:

Α. 1 **Β.** -1 **Γ.** $\frac{2}{3}$ **Δ.** 4 **Ε.** $\frac{5}{4}$

II. Για να δεχθούμε το ρ για ρίζα της εξίσωσης $\sqrt{5-x} = \kappa^2 x$, $\kappa \in \mathbb{R}^*$ πρέπει:

Α. $\rho \in (0,+\infty)$ **Β.** $\rho \in (-\infty,0)$ **Γ.** $\rho \in [5,+\infty)$ **Δ.** $\rho \in (-\infty,5]$ **Ε.** $\rho \in [0,5]$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.

ΠΡΟΟΔΟΙ

- Ακολουθίες
- Αριθμητική πρόοδος
- Γεωμετρική πρόοδος

Η έννοια της ακολουθίας που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να θέσουμε σε απαρίθμηση μία σειρά τιμών. Έτσι, γίνεται φανερή η διαφορά μεταξύ διακριτών και συνεχών καταστάσεων. Η ακολουθία, δηλαδή η συνάρτηση της οποίας η μεταβλητή διατρέχει το σύνολο των θετικών ακεραίων, αντιστοιχεί στην πρώτη, ενώ μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών στη δεύτερη κατάσταση. Με την ακολουθία μπορούμε να έχουμε την έννοια της επόμενης θέσης, κατάστασης, όρου κ.τ.λ.

Δύο ακολουθίες που μπορούν να εφαρμοστούν σε καθημερινές καταστάσεις ή γεγονότα, μελετώνται στο κεφάλαιο αυτό αναλυτικά. Οι ακολουθίες αυτές ονομάζονται πρόοδοι γιατί επιτρέπουν την προοδευτική μετάβαση από τον ένα όρο στον επόμενο με τον ίδιο πάντοτε τρόπο. Η πρώτη πρόοδος που θα μελετήσουμε είναι η αριθμητική, ενώ η δεύτερη λέγεται γεωμετρική. Η μετάβαση στην πρώτη γίνεται με την πρόσθεση του ίδιου αριθμού, ενώ στη δεύτερη με τον πολλαπλασιασμό του ίδιου μη μηδενικού αριθμού. Πάρα πολλά καθημερινά προβλήματα μπορούν να αντιμετωπιστούν αν τα ανάγουμε σε μία από τις δύο προόδους.

Η δομή των ενοτήτων για τις δύο προόδους είναι πανομοιότυπη. Δίνεται ο ορισμός της προόδου, μετά βρίσκουμε το γενικό τύπο που δίνει οποιονδήποτε όρο της. Στη συνέχεια βρίσκουμε την ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι τρεις αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας προόδου. Τέλος βρίσκουμε το τύπο που δίνει το άθροισμα των ν πρώτων όρων της προόδου. Τα θέματα που εμφανίζονται είναι παρόμοια οπότε και οι μέθοδοι αντιμετώπισής τους είναι ίδιοι με ελάχιστες παραλλαγές.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

1.1. ΟΡΙΣΜΟΣ:

Ακολουθία λέγεται κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{N}^*$ των θετικών ακεραίων.

- Μία ακολουθία συνβολίζεται με (α_ν) ή (β_ν) ή (x_ν) κτλ.
  Οι τιμές α_1 , α_2 , α_3 κ.τ.λ. λέγονται κατά σειρά *πρώτος όρος*, *δεύτερος όρος*, *τρίτος όρος* κτλ.
- Μία ακολουθία συνήθως ορίζεται:
  - Από το γενικό όρο της, που δίνεται ως συνάρτηση του ν.
  - Από έναν αναδρομικό τύπο και όσους αρχικούς όρους χρειάζονται, ώστε ο αναδρομικός τύπος να αρχίσει να δίνει όρους.

  Υπάρχουν ακολουθίες που δεν ορίζονται (ή δεν γνωρίζουμε μέχρι τώρα) από τον γενικό όρο ή μία αναδρομική σχέση. Μία τέτοια ακολουθία είναι η ακολουθία των πρώτων αριθμών:
  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.2. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών.

i) $\alpha_\nu = \dfrac{(-1)^\nu \cdot \nu}{\nu^2+1}$ **ii)** $\alpha_\nu = \left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Λύση:

i) Είναι $\alpha_1 = \dfrac{(-1)^1 \cdot 1}{1^2+1} = -\dfrac{1}{2}$, $\alpha_2 = \dfrac{(-1)^2 \cdot 2}{2^2+1} = \dfrac{2}{5}$, $\alpha_3 = \dfrac{(-1)^3 \cdot 3}{3^2+1} = -\dfrac{3}{10}$

$\alpha_4 = \dfrac{(-1)^4 \cdot 4}{4^2+1} = \dfrac{4}{17}$, $\alpha_5 = \dfrac{(-1)^5 \cdot 5}{5^2+1} = -\dfrac{5}{26}$.

ii) Είναι $\alpha_1 = \left(1+\dfrac{1}{1}\right)^1 = 2$, $\alpha_2 = \left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4} = 2{,}25$

$\alpha_3 = \left(1+\dfrac{1}{3}\right)^3 = \left(\dfrac{4}{3}\right)^3 = \dfrac{64}{27} = 2{,}\overline{370}$, $\alpha_4 = \left(1+\dfrac{1}{4}\right)^4 = \left(\dfrac{5}{4}\right)^4 = \dfrac{625}{256} = 2{,}44140625$

$\alpha_5 = \left(1+\dfrac{1}{5}\right)^5 = \left(\dfrac{6}{5}\right)^5 = \dfrac{7776}{3125} = 2{,}48832$.

1.2.1. __**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:**__ Οι όροι της ακολουθίας αυτής "πλησιάζουν" προς τον αριθμό 2,718281829… ο οποίος συμβολίζεται με το γράμμα *e*.

1.3. Δίνεται η ακολουθία $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$ και $\alpha_{\nu+1}^2 = \alpha_\nu \cdot \alpha_{\nu+2} - 8$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$. Να βρείτε τον $5^{\text{ο}}$ όρο της ακολουθίας.

__Λύση:__

Για $\nu = 1$ είναι: $\alpha_2^2 = \alpha_1 \cdot \alpha_3 - 8 \Rightarrow 3^2 = 1 \cdot \alpha_3 - 8 \Rightarrow 9 = \alpha_3 - 8 \Rightarrow \alpha_3 = 17$.

Για $\nu = 2$ είναι: $\alpha_3^2 = \alpha_2 \cdot \alpha_4 - 8 \Rightarrow 17^2 = 3 \cdot \alpha_4 - 8 \Rightarrow 289 = 3\alpha_4 - 8 \Rightarrow 3\alpha_4 = 297$

$$\Rightarrow \alpha_4 = \frac{297}{3} \Rightarrow \alpha_4 = 99.$$

Για $\nu = 3$ είναι: $\alpha_4^2 = \alpha_3 \cdot \alpha_5 - 8 \Rightarrow 99^2 = 17 \cdot \alpha_5 - 8 \Rightarrow 9801 = 17\alpha_5 - 8 \Rightarrow 17\alpha_5 = 9809$

$$\Rightarrow \alpha_5 = \frac{9809}{17} \Rightarrow \alpha_5 = 577.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

__Α΄ Ομάδα__

1.4. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών:

i) $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu} \cdot (-1)^\nu + \frac{1+(-1)^\nu}{2}$

ii) $\alpha_\nu = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu}$

iii) $\alpha_\nu = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\nu-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2\nu)}$

iv) $\alpha_\nu = \begin{cases} \frac{\nu-1}{\nu} & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \\ \frac{\nu}{\nu-1} & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \end{cases}$

1.5. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους της ακολουθίας (α_ν) με $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{\nu+1} = \frac{5\alpha_\nu - 4}{1+\alpha_\nu}$

1.6. Δίνεται η ακολουθία του Fibonacci, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ και $\alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu$. Να βρείτε τον $17^{\text{ο}}$ όρο της ακολουθίας.

1.7. Δίνεται η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{1+\alpha_\nu^2}$

i) Να βρείτε τον $6^{\text{ο}}$ όρο της ακολουθίας.

ii) Μπορείτε να "εικάσετε" τον γενικό όρο της ακολουθίας;

1.8. Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) με $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{\nu+1} = \frac{3+\alpha_\nu}{1-\alpha_\nu}$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

i) Να βρείτε τους έξι πρώτους όρους της ακολουθίας.

ii) Τι παρατηρείτε;

* * * * *

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.9. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Σε μια ακολουθία (α_ν) κάθε όρος της α_ν είναι

Α. θετικός **Β.** $\neq 0$ **Γ.** ακέραιος **Δ.** ίσος με ν **Ε.** πραγματικός

II. Ο γενικός όρος της ακολουθίας $\alpha_\nu = |5\nu-1| - |5\nu+1|$ είναι:

Α. $\alpha_\nu = 5\nu + 2$ **Β.** $\alpha_\nu = 10\nu$ **Γ.** $\alpha_\nu = 10\nu - 2$ **Δ.** $\alpha_\nu = -2$ **Ε.** $\alpha_\nu = 2$

III. Ο γενικός όρος της ακολουθίας $\alpha_\nu = (-1)^\nu + (-1)^{\nu+1}$ είναι:

Α. $\alpha_\nu = 0$ **Β.** $\alpha_\nu = 1$ **Γ.** $\alpha_\nu = 2$ **Δ.** $\alpha_\nu = -1$ **Ε.** $\alpha_\nu = -2$

IV. Σε κάθε ακολουθία (α_ν) ισχύει::

Α. $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots$
Β. Όλοι οι όροι είναι ομόσημοι
Γ. Όλοι οι όροι είναι διάφοροι του 0
Δ. $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \ldots$
Ε. Κανένα από τα προηγούμενα

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

2.1. <u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u>

Μια ακολουθία λέγεται ***αριθμητική πρόοδος***, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

2.1.1.<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u> **(1)** Τον σταθερό αυτό αριθμό τον συμβολίζουμε με ω και τον λέμε *διαφορά της προόδου*.

(2) Η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega \,.$$

2.2. <u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> *Ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$.*

<u>Απόδειξη:</u> Από το ορισμό της αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha_1 \\
\alpha_2 &= \alpha_1 + \omega \\
\alpha_3 &= \alpha_2 + \omega \\
\alpha_4 &= \alpha_3 + \omega \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{\nu-1} &= \alpha_{\nu-2} + \omega \\
\alpha_\nu &= \alpha_{\nu-1} + \omega
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ν αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας το νόμο της διαγραφής, βρίσκουμε $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$.

2.3. <u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> *Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$.*

<u>Απόδειξη:</u> Έστω α, β, γ τρεις διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου με διαφορά ω. Τότε ισχύει: $\beta - \alpha = \omega$ και $\gamma - \beta = \omega$, επόμένως

$$\beta - \alpha = \gamma - \beta \;\Rightarrow\; \beta + \beta = \alpha + \gamma \;\Rightarrow\; 2\beta = \alpha + \gamma \;\Rightarrow\; \beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}\,.$$

Αντίστροφα, θεωρούμε τρεις αριθμούς α, β, γ για τους οποίους ισχύει:

$$\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2} \;\Rightarrow\; 2\beta = \alpha + \gamma \;\Rightarrow\; \beta - \alpha = \gamma - \beta$$

που σημαίνει ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

2.4. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) με διαφορά ω είναι:*

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\cdot(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{\nu}{2}\cdot[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega].$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Μέθοδος Εύρεσης στοιχείων μιας Αριθμητικής προόδου.

- Όταν δίνονται ορισμένα από τα στοιχεία α_1, ω, α_ν, S_ν μιας Αριθμητικής Προόδου και ζητούνται τα υπόλοιπα, τότε χρησιμοποιούμε τους τύπους

  $$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \ , \ S_\nu = \frac{\nu}{2}\cdot(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{\nu}{2}\cdot[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega]$$

  και καταλήγουμε σε εξίσωση ή σύστημα απ' όπου βρίσκουμε τα ζητούμενα.
- Παρόμοια δουλεύουμε αν μας δίνουν σχέσεις που ισχύουν μεταξύ των στοιχείων της προόδου (π.χ. άθροισμα, διαφορά όρων κ.τ.λ.).

2.5. Σε μία Α.Π. το άθροισμα του 2ου, του 4ου και του 6ου όρου είναι 0, ενώ το άθροισμα του 3ου, του 5ου και του 7ου όρου είναι 6. Να βρείτε το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου.

Λύση:

$$\begin{cases}\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6=0\\ \alpha_3+\alpha_5+\alpha_7=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+\omega+\alpha_1+3\omega+\alpha_1+5\omega=0\\ \alpha_1+2\omega+\alpha_1+4\omega+\alpha_1+6\omega=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3\alpha_1+9\omega=0\\ 3\alpha_1+12\omega=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3\alpha_1+9\omega=0 & :(-3)\\ 3\alpha_1+12\omega=6 & :3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-\alpha_1-3\omega=0\\ \alpha_1+4\omega=2\end{cases} \ (+)$$

$$\omega = 2 \qquad \text{και} \qquad \alpha_1 + 4\omega = 2 \Leftrightarrow \alpha_1 + 8 = 2 \Leftrightarrow \alpha_1 = -6.$$

Άρα $S_{30} = \frac{30}{2}(2\alpha_1 + 29\omega) = 15(-12+58) = 15\cdot 46 = 690.$

2.6. Δίνεται η ακολουθία $\alpha_\nu = \frac{3\nu^2-3}{\nu+1} - 5$.

i) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.
ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα $A = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{53}$.
iii) Να υπολογίσετε το άθροισμα $B = \alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_7 + \ldots + \alpha_{43}$.

Λύση:

i) Είναι $\alpha_\nu = \frac{3\nu^2-3}{\nu+1} - 5 = \frac{3(\nu^2-1)}{\nu+1} - 5 = \frac{3(\nu+1)(\nu-1)}{\nu+1} - 5 = 3(\nu-1) - 5 = 3\nu - 3 - 5 = 3\nu - 8.$

Έχουμε $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 3(\nu+1) - 8 - (3\nu - 8) = 3\nu + 3 - 8 - 3\nu + 8 = 3.$

Επομένως η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = 3$ και $\alpha_1 = 3\cdot 1 - 8 = -5$.

ii) Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο (β_ν) με $\beta_1 = \alpha_1 = -5$ και διαφορά $\omega' = 2\omega = 6$.

Το πλήθος των όρων της προόδου (β_ν) στο άθροισμα Α είναι: $\frac{53+1}{2} = \frac{54}{2} = 27$.

Άρα $A = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{53} = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_{27} = \frac{27}{2}(2\beta_1 + 26\omega')$

$= \frac{27}{2}(-10+156) = 1971.$

iii) Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο (γ_ν) με $\gamma_1 = \alpha_1 = -5$ και διαφορά $\omega'' = 3\omega = 9$.
Για να βρούμε το πλήθος των όρων της προόδου (γ_ν) στο άθροισμα Β θεωρούμε την ακολουθία των δεικτών $1, 4, 7, \ldots$ η οποία είναι αριθμητική πρόοδος με:
$\delta_1 = 1$ και διαφορά $\omega = 3$, οπότε $\delta_\nu = 43 \Leftrightarrow \delta_1 + (\nu-1)\omega = 43 \Leftrightarrow 1 + (\nu-1)3 = 43$

$\Leftrightarrow 1 + 3\nu - 3 = 43 \Leftrightarrow 3\nu = 45 \Leftrightarrow \nu = \frac{45}{3} \Leftrightarrow \nu = 15.$

Άρα $B = \beta_1 + \beta_4 + \beta_7 + \ldots + \beta_{43} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots + \gamma_{15} = \frac{15}{2}(2\gamma_1 + 14\omega'')$

$= \frac{15}{2}(-10+126) = 870.$

Μέθοδος — Απόδειξης διαδοχικών όρων Α.Π. ή εύρεσης αγνώστων ώστε τρεις αριθμοί να είναι διαδοχικοί όροι Α.Π.

- Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., χρησιμοποιούμε τον τύπο $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2} \Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \gamma$.
- Όταν μας ζητούν να βρούμε έναν άγνωστο για να είναι τρεις αριθμοί διαδοχικοί όροι Α.Π., απαιτούμε να ισχύει η προηγούμενη σχέση και λύνουμε μία εξίσωση.
- Όταν μας δίνουν ότι οι αριθμοί A, B, Γ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. και ζητείται να δείξουμε ότι ισχύει το ίδιο και για τους αριθμούς X, Y, Z δουλεύουμε ως εξής:
  - A, B, Γ διαδοχικοί όροι Α.Π. $\Rightarrow 2B = A+\Gamma \Rightarrow \ldots \Rightarrow 2Y = X+Z$.
  - A, B, Γ διαδοχικοί όροι Α.Π. $\Leftrightarrow 2B = A+\Gamma$
    Έστω ότι $2Y = X+Z \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow [2B = A+\Gamma]$ ή [καταλήγουμε σε σχέση που ισχύει]
    (ενδιάμεσα χρησιμοποιούμε $2B = A+\Gamma$).

2.7. Αν οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., τότε να αποδείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και για τους αριθμούς:
i) $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$.
ii) $\alpha(\beta+\gamma), \beta(\gamma+\alpha), \gamma(\alpha+\beta)$.
iii) $(\beta+\gamma-\alpha)^2, (\gamma+\alpha-\beta)^2, (\alpha+\beta-\gamma)^2$.

Λύση:

i) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ διαδοχικοί όροι Α.Π. $\Leftrightarrow 2\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow 2\alpha\gamma = \beta\gamma + \alpha\beta$
$\Leftrightarrow \beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ διαδοχικοί όροι Α.Π.

ii) Είναι $\alpha(\beta+\gamma), \beta(\gamma+\alpha), \gamma(\alpha+\beta)$ διαδοχικοί όροι Α.Π. $\Leftrightarrow$
$2\beta(\gamma+\alpha) = \alpha(\beta+\gamma) + \gamma(\alpha+\beta) \Leftrightarrow 2\beta\gamma + 2\beta\alpha = \alpha\beta + \alpha\gamma + \gamma\alpha + \gamma\beta \Leftrightarrow$
$\beta\gamma + \alpha\beta = 2\alpha\gamma \Leftrightarrow \beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ διαδοχικοί όροι Α.Π. , που ισχύει από **(i)**.

iii) Είναι $(\beta+\gamma-\alpha)^2, (\gamma+\alpha-\beta)^2, (\alpha+\beta-\gamma)^2$ διαδοχικοί όροι Α.Π. $\Leftrightarrow$
$2(\gamma+\alpha-\beta)^2 = (\beta+\gamma-\alpha)^2 + (\alpha+\beta-\gamma)^2 \Leftrightarrow$

$$2(\gamma^2+\alpha^2+\beta^2+2\gamma\alpha-2\gamma\beta-2\alpha\beta) = \beta^2+\gamma^2+\alpha^2+2\beta\gamma-2\beta\alpha-2\gamma\alpha+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta-2\alpha\gamma-2\beta\gamma \Leftrightarrow$$
$$2\gamma^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 4\gamma\alpha - 4\gamma\beta - 4\alpha\beta = 2\beta^2 + 2\gamma^2 + 2\alpha^2 - 4\gamma\alpha \Leftrightarrow$$
$$8\gamma\alpha = 4\gamma\beta + 4\alpha\beta \Leftrightarrow$$
$$2\alpha\gamma = \beta\gamma + \alpha\beta \Leftrightarrow$$

$\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ διαδοχικοί όροι Α.Π. , που ισχύει από **(i)**.

Μέθοδος → Εύρεσης διαδοχικών όρων Α.Π. αν είναι γνωστό το άθροισμά τους.

- Όταν μας ζητούν να βρούμε ένα πεπερασμένο πλήθος όρων μιας Α.Π. αν δίνεται ή μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμά τους, χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό για τους όρους της Α.Π.
  - Όταν το πλήθος των όρων είναι περιττό, τότε για:
    3 όρους : $x-\omega$, x , $x+\omega$
    5 όρους : $x-2\omega$, $x-\omega$, x , $x+\omega$, $x+2\omega$
    7 όρους : $x-3\omega$, $x-2\omega$, $x-\omega$, x , $x+\omega$, $x+2\omega$, $x+3\omega$
    κτλ (Μεσαίος όρος: x Διαφορά Α.Π.: ω)
  - Όταν το πλήθος των όρων είναι άρτιο, τότε για:
    4 όρους : $x-3\omega$, $x-\omega$, $x+\omega$, $x+3\omega$
    6 όρους : $x-5\omega$, $x-3\omega$, $x-\omega$, $x+\omega$, $x+3\omega$, $x+5\omega$
    κτλ (Διαφορά Α.Π.: 2ω)
- Γενικά μπορούμε να συμβολίσουμε κ όρους μιας Α.Π. ως εξής:
  x , $x+\omega$, $x+2\omega$, … , $x+(\kappa-1)\omega$ (ω η διαφορά).

2.8. Να βρείτε τρεις αριθμούς που να είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., αν το άθροισμά τους είναι 33 και το γινόμενό τους είναι 1287.

Λύση:

Έστω ότι οι τρεις όροι της Α.Π. είναι $x-\omega$, x , $x+\omega$. Τότε
$(x-\omega) + x + (x+\omega) = 33 \Leftrightarrow x-\omega + x + x+\omega = 33 \Leftrightarrow 3x = 33 \Leftrightarrow x = 11$.

Ακόμα $(x-\omega)\cdot x\cdot(x+\omega) = 1287 \Leftrightarrow (11-\omega)\cdot 11\cdot(11+\omega) = 1287 \Leftrightarrow 11^2-\omega^2 = \dfrac{1287}{11} \Leftrightarrow$

$121-\omega^2 = 117 \Leftrightarrow 121-117 = \omega^2 \Leftrightarrow \omega^2 = 4 \Leftrightarrow \omega = 2$ ή $\omega = -2$.
Για $x = 11$, $\omega = 2$ οι αριθμοί είναι: 9 , 11 , 13.
Για $x = 11$, $\omega = -2$ οι αριθμοί είναι: 13 , 11 , 9.

2.9. Να βρεθούν τέσσερις αριθμοί, που να είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., αν το άθροισμά τους είναι 8 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 36.

Λύση:

Έστω ότι οι ζητούμενοι αριθμοί είναι $x-3\omega$, $x-\omega$, $x+\omega$, $x+3\omega$, τότε:
$(x-3\omega) + (x-\omega) + (x+\omega) + (x+3\omega) = 8 \Leftrightarrow x-3\omega + x-\omega + x+\omega + x+3\omega = 8 \Leftrightarrow$
$4x = 8 \Leftrightarrow x = 2$.
Ακόμα $(x-3\omega)^2 + (x-\omega)^2 + (x+\omega)^2 + (x+3\omega)^2 = 36 \Leftrightarrow$
$x^2 - 2x\omega + \omega^2 + x^2 + 2x\omega + \omega^2 + x^2 + 6x\omega + 9\omega^2 = 36 \Leftrightarrow 4x^2 + 20\omega^2 = 36 \Leftrightarrow$
$4\cdot 2^2 + 20\omega^2 = 36 \Leftrightarrow 20\omega^2 = 20 \Leftrightarrow \omega^2 = 1 \Leftrightarrow \omega = 1$ ή $\omega = -1$.
Για $x = 2$, $\omega = 1$ οι αριθμοί είναι: –1 , 1 , 3 , 5.
Για $x = 2$, $\omega = -1$ οι αριθμοί είναι: 5 , 3 , 1 , –1.

Μέθοδος Εύρεσης αριθμών οι οποίοι παρεμβάλλονται μεταξύ δύο άλλων ώστε να είναι διαδοχικοί όροι Α.Π.

Όταν ζητείται να παρεμβάλλουμε μεταξύ δύο αριθμών α και β, μ αριθμούς $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ τέτοιους ώστε οι αριθμοί $\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \beta$ να είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., τότε βρίσκουμε τη διαφορά ω από τη σχέση:

$$\alpha_{\mu+2} = \alpha_1 + (\mu+2-1)\omega \iff \beta = \alpha + (\mu+1)\omega \iff \beta - \alpha = (\mu+1)\omega \iff \omega = \frac{\beta-\alpha}{\mu+1}.$$

Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι:

$$x_1 = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{\mu+1}, \quad x_2 = \alpha + 2\cdot\frac{\beta-\alpha}{\mu+1}, \quad \ldots, \quad x_\mu = \alpha + \mu\cdot\frac{\beta-\alpha}{\mu+1}.$$

2.10. Μεταξύ των αριθμών 1 και κ^2 να παρεμβάλλετε κ αριθμητικούς ενδιάμεσους.

Λύση:

Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ οι ζητούμενοι αριθμητικοί ενδιάμεσοι, δηλαδή οι αριθμοί $1, x_1, x_2, \ldots, x_\kappa, \kappa^2$ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., τότε:

$$\alpha_{\kappa+2} = \alpha_1 + (\kappa+2-1)\omega \iff \kappa^2 = 1 + (\kappa+1)\omega \iff \kappa^2 - 1 = (\kappa+1)\omega \iff$$

$$\omega = \frac{\kappa^2-1}{\kappa+1} = \frac{(\kappa+1)(\kappa-1)}{\kappa+1} = \kappa - 1.$$

Επομένως, $x_1 = 1+(\kappa-1) = 1+\kappa-1 = \kappa$, $x_2 = 1+2(\kappa-1) = 1+2\kappa-2 = 2\kappa-1$, …,
$x_\kappa = 1+\kappa(\kappa-1) = 1+\kappa^2-\kappa = \kappa^2-\kappa+1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

2.11. Ο πρώτος όρος μιας Α.Π. είναι 4 και ο όγδοος είναι 39. Να βρεθεί η διαφορά και ο δωδέκατος όρος.

[Απ. $\omega=5, \alpha_{12}=59$]

2.12. Να συμπληρώσετε το διπλανό πίνακα, στον οποίο τα στοιχεία κάθε γραμμής ανήκουν στην ίδια αριθμητική πρόοδο.

α_1	ω	ν	α_ν	S_ν
	4	6	17	
6		10	–12	
–2	$\frac{4}{3}$		$\frac{22}{3}$	
1		13		169
		13	–16	–52
–2	5			205

2.13. Σε μία Α.Π. είναι $\alpha_9 = 13$ και $\alpha_{16} = \frac{47}{2}$. Να βρεθεί ο α_{11}.

[Απ. 16]

2.14. Σε μία Α.Π. το άθροισμα του όγδοου και του ενδέκατου όρου είναι 47, ενώ η διαφορά του $15^{ου}$ από τον $21^{ο}$ όρο είναι 18. Να βρεθεί η Α.Π.

[Απ. $\alpha_\nu=3\nu-5$]

2.15. Σε μία Α.Π. το άθροισμα του 4^{ου} και του 11^{ου} όρου είναι 63, ενώ το άθροισμα του 9^{ου} και του 18^{ου} όρου είναι 123. Να βρεθεί το S_8.

[Απ. 132]

2.16. Ένα θέατρο έχει 12 σειρές καθισμάτων. Η πρώτη σειρά έχει 10 καθίσματα και κάθε επόμενη έχει 3 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενή της.

α) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

β) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

γ) Σε μια παράσταση τα εισιτήρια της 7^{ης} σειράς διανεμήθηκαν δωρεάν και όλα τα υπόλοιπα πουλήθηκαν προς 30€ το ένα. Πόσα χρήματα εισέπραξε το θέατρο από την παράσταση αυτή;

[Απ. α)43 β)318 γ)8700€]

2.17. Σε μία Α.Π. είναι $\alpha_1 = \alpha$ και το $S_\nu = \alpha\cdot\nu^2$, $\nu>1$. Να βρείτε τη διαφορά της προόδου.

[Απ. ω=2α]

2.18. Σε μία Α.Π. είναι $S_6 = 12$ και $S_{11} = 77$. Να βρεθεί το S_{15}.

[Απ. 165]

2.19. Η διαφορά μιας Α.Π. είναι διπλάσια από τον πρώτο όρο της. Να δείξετε ότι $\dfrac{S_\mu}{S_\nu} = \dfrac{\mu^2}{\nu^2}$.

2.20. Δίνεται η ακολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu^3-3\nu^2-7\nu+5}{\nu^2+\nu-1}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.

i) Να αποδείξετε ότι η (α_ν) είναι Α.Π.

ii) Να βρείτε το άθροισμα $S = \alpha_{25} + \alpha_{26} + \ldots + \alpha_{45}$.

[Απ. ii)1365]

2.21. Δίνεται η ακολουθία $\alpha_\nu = (\nu-1)^2 - (\nu-3)(\nu+2)$.

i) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.

ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\mathrm{A} = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{125}$.

iii) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\mathrm{B} = \alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_7 + \ldots + \alpha_{61}$.

[Απ. ii)-3528 iii)-618]

2.22. Μία ομάδα 324 στρατιωτών παρατάσσεται σε τριγωνικό σχήμα ώστε: στην πρώτη σειρά μπαίνει ένας, στην δεύτερη τρεις, στην τρίτη πέντε κ.τ.λ.

α) Πόσοι θα είναι στην 12^η σειρά;

β) Πόσες σειρές σχηματίστηκαν συνολικά;

[Απ. α)23 β)18]

2.23. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha_1 = \text{συν}2\alpha$, $\alpha_2 = \text{συν}^2\alpha$, $\alpha_3 = 1$, όπου η γωνία α ικανοποιεί τη σχέση $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι αυτοί οι αριθμοί, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

β) Να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου.

γ) Να βρείτε το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της προόδου

[Απ. β)ημ^{2}α γ)5]

2.24. Διαθέτουμε 9999 όμοια αντικείμενα τα οποία θέλουμε να συσκευάσουμε σε δέματα έτσι, ώστε το πρώτο δέμα να περιέχει 3 αντικείμενα, το δεύτερο δέμα να περιέχει 5 αντικείμενα και γενικά κάθε δέμα να περιέχει δύο αντικείμενα περισσότερα από το προηγούμενό του.

i) Να βρείτε πόσα δέματα θα δημιουργηθούν.

ii) Αν η συσκευασία του πρώτου δέματος κοστίζει 100 λεπτά, του δεύτερου δέματος 120 λεπτά και γενικά, αν η συσκευασία κάθε δέματος κοστίζει 20 λεπτά περισσότερο από αυτή του προηγούμενου, τότε να βρείτε πόσο θα κοστίσει η συσκευασία του δέματος που περιέχει τα περισσότερα αντικείμενα.

[Απ. i)99 ii)20,6€]

2.25. Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = -11+2\nu$ με πρώτο όρο α_1 καθώς και το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία α_ν είναι αριθμητική πρόοδος και έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = -9$ και διαφορά $\omega = 2$.

β) Να βρείτε το άθροισμα $S = \alpha_{12} + \alpha_{13} + \ldots + \alpha_{21}$ όπου $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{21}$ είναι διαδοχικοί όροι της προόδου α_ν.

γ) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$ είναι διαδοχικοί όροι της παραπάνω προόδου α_ν.

[Απ. β)220]

2.26. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ οι αριθμοί $(\alpha+\beta)^2$, $\alpha^2+\beta^2$ και $(\alpha-\beta)^2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

2.27. Να αποδείξετε ότι τα τετράγωνα των αριθμών x^2-2x-1 , x^2+1 , x^2+2x-1 είναι διαδοχικοί όροι Α.Π.

2.28. **i)** Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες οι αριθμοί $x-4, x+4$ και $3x-4$ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π.

ii) Αν ο αριθμός $x-4$ είναι ο έκτος όρος της αριθμητικής προόδου του ερωτήματος **(i)**, να βρείτε τον πρώτο όρο της.

iii) Να βρεθεί το άθροισμα των 10 πρώτων όρων αυτής της αριθμητικής προόδου.

[Απ. i)x=8 ii)α_1=-36 iii)S_{10}=0]

2.29. Να βρεθούν οι άγνωστοι, ώστε οι επόμενοι αριθμοί να είναι διαδοχικοί όροι Α.Π.

i) $\lambda^2-3\lambda+2$, $\lambda^2+6\lambda-5$, $\lambda^2-10\lambda+3$

ii) κ^2-1 , $3\kappa^2-\kappa+1$, $5-\kappa^2-13\kappa$

iii) x^4+x^2-3 , x^4+3x^3+5 , $5x^3-x+15$

[Απ. i) $\frac{3}{5}$ ii)-2, $\frac{1}{6}$ iii)-2,1]

2.30. Να αποδείξετε ότι: α, β, γ διαδοχικοί όροι Α.Π. $\Leftrightarrow$ $\alpha+x$, $\beta+x$, $\gamma+x$ διαδοχικοί όροι Α.Π.

2.31. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. αν και μόνο αν οι αριθμοί $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$, $\alpha+\beta$ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π.

2.32. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. αν και μόνο αν οι αριθμοί $\beta+\gamma-\alpha$, $\gamma+\alpha-\beta$, $\alpha+\beta-\gamma$ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π.

2.33. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. τότε το ίδιο συμβαίνει και για τους αριθμούς $\alpha^2-\beta\gamma$, $\beta^2-\gamma\alpha$, $\gamma^2-\alpha\beta$.

2.34. Αν οι αριθμοί x, y, z είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. τότε και οι αριθμοί $x^2 + xy + y^2$, $x^2 + xz + z^2$, $y^2 + yz + z^2$ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π.

2.35. Οι θετικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., αν και μόνο αν, οι αριθμοί $\dfrac{1}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{\gamma}+\sqrt{\alpha}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π.

2.36. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. τότε το ίδιο συμβαίνει και για τους α- ριθμούς $(\beta + \gamma)^2 - \alpha^2$, $(\gamma + \alpha)^2 - \beta^2$, $(\alpha + \beta)^2 - \gamma^2$.

2.37. Αν S_1, S_2, S_3 είναι τα αθροίσματα των ν πρώτων όρων, τριων Α.Π., που έχουν κοινό πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και αντίστοιχα $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 3$, να αποδείξετε ότι οι S_1, S_2, S_3 είναι διαδοχικοί όροι Α.Π.

2.38. Να αποδείξετε ότι τα τετράγωνα των πλευρών ενός τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., αν και μόνο αν, τα τετράγωνα των αντίστοιχων διαμέσων αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π.

2.39. Τρεις αριθμοί είναι ανάλογοι προς τους 2, 5 και 7. Αν ο $2^{ος}$ ελαττωθεί κατά 7, οι τρεις αριθμοί που προκύπτουν είναι διαδοχικοί όροι Α.Π.. Να βρεθούν οι τρεις αριθμοί.

[Απ. 28,70,98]

2.40. Τρεις αριθμοί είναι ανάλογοι προς τους 2, 3 και 6. Αν ο $2^{ος}$ αυξηθεί κατά 4 και ο $3^{ος}$ ελαττωθεί κατά 2, τότε σχηματίζονται τρεις αριθμοί που είναι διαδοχικοί όροι Α.Π.. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.

[Απ. 10,15,30]

2.41. Να βρεθούν τρεις αριθμοί, που να είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., αν το άθροισμά τους είναι 3 και το γινόμενό τους είναι -8.

[Απ. -2,1,4]

2.42. Να βρεθούν τέσσερις αριθμοί, που να είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., αν το άθροισμά τους είναι 14 και το γινόμενο των άκρων όρων τους είναι -8.

[Απ. -1,2,5,8]

2.43. Να βρεθούν τρεις αριθμοί, που να είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., αν έχουν άθροισμα 12 και το άθροισμα των αντιστρόφων τους είναι $\dfrac{11}{12}$.

[Απ. 2,4,6]

2.44. Να βρεθούν πέντε αριθμοί, που να είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., αν το άθροισμά τους είναι 10 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 110.

[Απ. -4,-1,2,5,8]

2.45. Να βρείτε τις γωνίες ενός τετραπλεύρου, αν αυτές αποτελούν αριθμητική πρόοδο και η μικρότερη γωνία είναι 45^0.

[Απ. 45^0,75^0,105^0,135^0]

2.46. Να βρείτε τις γωνίες κυρτού πενταγώνου, αν αυτές αποτελούν αριθμητική πρόοδο και η μεγαλύτερη γωνία είναι 152^0.

[Απ. 64^0,86^0,108^0,130^0,152^0]

2.47. Να αποδείξετε ότι, αν τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., τότε αυτά είναι ανάλογα των αριθμών 3, 4 και 5.

2.48. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, με $\alpha > \beta > \gamma$, οι $\tau, \alpha, \beta, \gamma$ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. (*τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου*).

2.49. Μεταξύ των αριθμών –8 και 34 να παρεμβληθούν πέντε αριθμητικοί ενδιάμεσοι.

[Απ. -1,6,13,20,27]

2.50. Μεταξύ των αριθμών 1 και 16 να παρεμβληθούν εννέα αριθμητικοί ενδιάμεσοι.

[Απ. $\frac{5}{2}$,4,$\frac{11}{2}$,7,$\frac{17}{2}$,10,$\frac{23}{2}$,13,$\frac{29}{2}$]

2.51. Μεταξύ των αριθμών –4 και 23 να παρεμβληθούν άλλοι αριθμοί ώστε να προκύψουν δέκα διαδοχικοί όροι Α.Π..

[Απ. -4,-1,2,5,8,11,14,17,20,23]

2.52. Να βρείτε πόσους αριθμητικούς ενδιάμεσους πρέπει να παρεμβάλλουμε μεταξύ των αριθμών –12 και 23, ώστε ο λόγος του πρώτου ενδιάμεσου προς τον τελευταίο ενδιάμεσο να είναι $-\frac{7}{18}$.

[Απ. 6]

2.53. Μεταξύ δύο αριθμών, οι οποίοι έχουν άθροισμα $\frac{28}{3}$, παρεμβάλλονται αριθμητικοί ενδιάμεσοι, ώστε το άθροισμα των όρων της Α.Π. που δημιουργείται να είναι 84. Να βρείτε το πλήθος των ενδιαμέσων.

[Απ. 16]

2.54. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x+2) + (x+5) + (x+8) + \ldots + (x+53) = 459$

β) $1 + 7 + 13 + \ldots + x = 280$ με $x > 0$.

[Απ. α)-2 β)55]

2.55. Να βρείτε το πλήθος και το άθροισμα των ακεραίων που είναι πολλαπλάσια του 7 και βρίσκονται μεταξύ του 100 και του 300.

[Απ. ν=28, S=5586]

2.56. Αν σε μία Α.Π. ισχύει $\frac{S_4}{S_{12}} = \frac{1}{9}$, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha_4}{\alpha_{12}} = \frac{7}{23}$.

2.57. Η τιμή αγοράς ενός εκτυπωτή είναι μεγαλύτερη από 620 € και μικρότερη από 640 €. Κατά την αγορά συμφωνήθηκαν τα εξής:

- Να δοθεί προκαταβολή 120 €.
- Η εξόφληση του υπόλοιπου ποσού να γίνει σε 10 μηνιαίες δόσεις.
- Κάθε δόση να είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη κατά ω €, όπου ω θετικός ακέραιος.
- Η τέταρτη δόση να είναι 48 €.

α) Να εκφράσετε το ποσό της πρώτης δόσης ως συνάρτηση του ω.

β) Να εκφράσετε την τιμή αγοράς ως συνάρτηση του ω.

γ) Να βρείτε ην τιμή του ω.

δ) Να βρείτε το ποσό της τελευταίας δόσης.

ε) Να βρείτε την τιμή αγοράς του εκτυπωτή.

[Απ. α)48-3ω β)600+15ω γ)2 δ)60 ε)630]

2.58. Έστω S_κ , S_λ , S_μ το άθροισμα των κ, λ, μ πρώτων όρων μιας Α.Π., αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $\frac{S_\kappa}{\kappa}\cdot(\lambda-\mu)+\frac{S_\lambda}{\lambda}\cdot(\mu-\kappa)+\frac{S_\mu}{\mu}\cdot(\kappa-\lambda)=0$.

2.59. Αν σε μία Α.Π. ισχύει $\alpha_2^2=\alpha_1\cdot\alpha_4$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha_6^2=\alpha_4\cdot\alpha_9$.

2.60. Α. Σε μία αμφιθεατρική αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο. Η 1^{η} σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7^{η} 28 καθίσματα.

α) Πόσα καθίσματα έχει η 10^{η} σειρά;

β) Πόσα καθίσματα υπάρχουν από την 5^{η} έως και την 15^{η} σειρά;

Β. Αν στην 1^{η} σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενα καθίσματα, στην 2^{η} υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3^{η} 12 κ.τ.λ.

α) Από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα;

β) Πόσοι θα είναι οι θεατές;

[Απ. Α.α)34 β)350 Β.α)11^{η} β)55]

2.61. Σ' ένα θέατρο, η πρώτη σειρά έχει 70 καθίσματα και η τελευταία έχει 250 καθίσματα. Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο. Η προτελευταία σειρά έχει 140 καθίσματα περισσότερα από τη δεύτερη σειρά.

i) Να αποδείξετε ότι κάθε σειρά καθισμάτων του θεάτρου έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

ii) Να υπολογίσετε το πλήθος των καθισμάτων του θεάτρου.

iii) Την πρώτη παράσταση ενός θεατρικού έργου παρακολούθησαν 100 θεατές, ενώ σε κάθε επόμενη παράσταση ο αριθμός των θεατών διπλασιαζόταν. Ποια είναι η παράσταση στην οποία για πρώτη φορά θα γεμίσει το θέατρο;

[Απ. β)1600 γ)5^{η}]

2.62. Ένα κολιέ αξίας 2290€ αποτελείται από 33 διαμάντια. Το μεσαίο διαμάντι είναι το ακριβότερο. Τα υπόλοιπα διαμάντια είναι τοποθετημένα κατά σειρά αξίας, ώστε κάθε διαμάντι μέχρι το μεσαίο να αξίζει 2€ λιγότερο από το επόμενό του και στη συνέχεια, από το μεσαίο και πέρα, κάθε διαμάντι να αξίζει 3€ λιγότερο από το προηγούμενό του.

α) Πόσα € είναι η αξία του μεσαίου διαμαντιού;

β) **i)** Πόσα € φθηνότερο από το μεσαίο διαμάντι είναι το πρώτο;

ii) Πόσα € φθηνότερο από το μεσαίο διαμάντι είναι το τελευταίο;

[Απ. α)90€ β)i)32€ ii)48€]

* * * * *

<u>Β΄ Ομάδα</u>

2.63. Σε Α.Π. με πρώτο όρο α, το άθροισμα των ν πρώτων όρων της είναι 0. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των μ επόμενων όρων της είναι $-\frac{\alpha\mu(\nu+\mu)}{\nu-1}$.

2.64. Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας ακολουθίας (α_ν) είναι $S_\nu = \nu(\beta\nu+\gamma)$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι Α.Π. και να βρείτε τους α_1 και ω.

[Απ. $\alpha_1=\beta+\gamma$, $\omega=2\beta$]

2.65. Τα ψηφία ενός τετραψήφιου αριθμού είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. Να βρεθεί ο αριθμός αν το τελευταίο ψηφίο είναι τετραπλάσιο του πρώτου.

[Απ. 1234, 2468]

2.66. Βρείτε το άθροισμα των φυσικών αριθμών που είναι μικρότεροι από το 1000 και δεν είναι πολλαπλάσια του 5.

[Απ. $4\cdot 10^5$]

2.67. Για μία Α.Π. δίνεται ότι $\alpha_\mu = 4$, $\alpha_{4\mu} = 24$ και $S_{4\mu} = 44S_\mu$. Να βρείτε τα α_1 και μ.

[Απ. $\alpha_1=-2$, $\mu=10$]

2.68. Σε μία Α.Π. έχουμε $S_\nu = 2\nu$ και $S_{2\nu} = \nu$. Βρείτε το $S_{4\nu}$.

[Απ. -10ν]

2.69. Τα αθροίσματα των ν πρώτων όρων δύο Α.Π. έχουν λόγο $\dfrac{7\nu+2}{\nu+1}$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$. Να βρεθεί ο λόγος των πεμπτων όρων τους.

[Απ. $\frac{13}{2}$]

2.70. Αν οι αριθμοί $\dfrac{1}{\beta+\gamma+2}$, $\dfrac{1}{\gamma+\alpha+2}$, $\dfrac{1}{\alpha+\beta+2}$ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., τότε και οι $\dfrac{\alpha+2}{\beta\gamma}$, $\dfrac{\beta+2}{\gamma\alpha}$, $\dfrac{\gamma+2}{\alpha\beta}$ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π.

2.71. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\dfrac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$, β , $\dfrac{\beta+\gamma}{1-\beta\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. αν και μόνο αν το ίδιο συμβαίνει για τους αριθμούς $\dfrac{1}{\alpha}$, β , $\dfrac{1}{\gamma}$.

2.72. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. αν και μόνο αν και οι αριθμοί $\beta+\gamma+\delta$, $\gamma+\delta+\alpha$, $\delta+\alpha+\beta$, $\alpha+\beta+\gamma$ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π.

2.73. Αν οι πλευρές α, β, γ ενός τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. με διαφορά ω και $\gamma < \beta < \alpha$, να προσδιορίσετε το λόγο $\dfrac{\omega}{\gamma}$ ώστε το τρίγωνο να είναι:

i) ορθογώνιο **ii)** οξυγώνιο **iii)** αμβλυγώνιο

[Απ. i) $\frac{\omega}{\gamma}=\frac{1}{3}$ ii) $0<\frac{\omega}{\gamma}<\frac{1}{3}$ iii) $\frac{\omega}{\gamma}>\frac{1}{3}$]

2.74. Αν σε μία Α.Π. ισχύει $S_\mu = S_\nu$, με $\mu\neq\nu$, τότε να αποδείξετε ότι $S_{\mu+\nu} = 0$.

2.75. Σε Α.Π. δίνονται $S_\mu = \nu$ και $S_\nu = \mu$ με $\mu > \nu$. Να αποδείξετε ότι:

i) $S_{\mu+\nu} = -(\mu+\nu)$ **ii)** $S_{\mu-\nu} = \dfrac{\mu+2\nu}{\mu}\cdot(\mu-\nu)$

2.76. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ δεν μπορεί να είναι όροι Α.Π. οποιαδήποτε τάξης.

2.77. Δίνονται οι Α.Π. 1, 4, 7, 10, … και 2, 9, 16, 23, … . Να βρεθούν οι κοινοί όροι των δύο Α.Π. και να αποδείξετε ότι οι όροι αυτοί αποτελούν μία άλλη Α.Π.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

2.78. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* ή *Λάθος* κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Οι αριθμοί –5, 5, 15, με τη σειρά που σας δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

II. Ο εικοστός όρος της αριθμητικής προόδου 10, 7, 4, … είναι ίσος με 20.

III. Σε κάθε αριθμητική πρόοδο (α_ν) για τους όρους της α_2 , α_4 , α_6 ισχύει η σχέση $2\alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_6$.

IV. Υπάρχει γωνία x ώστε οι αριθμοί 1, ημx+1 καιημx+3 να είναι διαδοχικοί όροι α.π.

2.79. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Από τις παρακάτω ακολουθίες Α.Π. είναι η

Α. 3 , 6 , 8 , 10 , 11 , … **Β.** 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , …

Γ. –3 , 1 , 5 , 9 , 13 , … **Δ.** –3 , 0 , $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, …

Ε. $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{11}$, …

II. Η αριθμητική πρόοδος: α , $\alpha + 2c$, $\alpha + 4c$, … είναι γνησίως αύξουσα όταν:

Α. $\alpha > 0$ **Β.** $c \neq 0$ **Γ.** $c < 0$ **Δ.** $c > 0$ **Ε.** πάντοτε

III. Οι αριθμοί x^2 , $x + 1$, 3 είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. Τότε το x ισούται με:

Α. 2 **Β.** –1 **Γ.** 0 **Δ.** 1 **Ε.** –2

IV. Αν σε μία αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_4 = x$ και $\alpha_6 = y$, τότε η διαφορά ω είναι ίση με

Α. $\frac{x+y}{2}$ **Β.** $\frac{x-y}{2}$ **Γ.** $y - \frac{x}{2}$ **Δ.** $\frac{y-x}{2}$ **Ε.** $\frac{y}{2} - x$

V. Αν οι αριθμοί x, y, z είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., τότε ισχύει:

Α. $y = x + z$ **Β.** $z = x + y$ **Γ.** $z = x + 2y$ **Δ.** $z - y = y - x$ **Ε.** $z - x = 2y$

VI. Αν οι αριθμοί γ , $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε:

Α. $\gamma = \beta$ **Β.** $\gamma = \beta - \alpha$ **Γ.** $\gamma = \alpha + 2\beta$ **Δ.** $\gamma = \alpha + 3\beta$ **Ε.** $\gamma = \alpha + 4\beta$

VII. Αν οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε:

Α. $\frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\gamma}{2}$ **Β.** $\frac{1}{\beta} = \frac{2}{\alpha+\gamma}$ **Γ.** $\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$

Δ. $\frac{\beta}{2} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$ **Ε.** $\frac{1}{\beta} = \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\gamma}$

2.80. Στη Στήλη Α δίνεται ο πρώτος όρος α_1 και η διαφορά ω τριών αριθμητικών προόδων και στη Στήλη Β ο νιοστός όρος α_ν τεσσάρων αριθμητικών προόδων. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης Β που αντιστοιχεί στο σωστό νιοστό όρο.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\alpha_1 = 1$, $\omega = -2$	**1.** $\alpha_\nu = -\nu$
β. $\alpha_1 = 0$, $\omega = 3$	**2.** $\alpha_\nu = 4\nu-3$
γ. $\alpha_1 = -1$, $\omega = -1$	**3.** $\alpha_\nu = 3-2\nu$
	4. $\alpha_\nu = 3\nu-3$

2.81. Να συμπληρώσετε τους όρους που λείπουν στις παρακάτω αριθμητικές προόδους:

α) 5 , 8 , … , 14 , 17 , … , … , 26 **β)** 7 , … , … , 25

γ) κ , $2\kappa+3$, … , $4\kappa+9$, … **δ)** x , … , $5x+2$, $7x+3$, … , …

2.82. Να συμπληρώσετε τους όρους που λείπουν στις παρακάτω αριθμητικές προόδους:

α) 11 15 … 23 … **β)** … … 20 29 38

γ) 4 … 18 … 32 **δ)** … 33 … 65 …

2.83. Να συμπληρώσετε τους όρους που λείπουν στις παρακάτω αριθμητικές προόδους:

α) $x+y$ $x-y$ … … …

β) … $x-y$ … $x+y$ …

γ) … $x-3y$ … … $x+3y$

δ) $x+3y$ … … … $x-3y$

ΕΝΟΤΗΤΑ 3.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

3.1. <u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Μια ακολουθία λέγεται ***γεωμετρική πρόοδος***, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

3.1.1.<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u> **(1)** Τον σταθερό αυτό αριθμό τον συμβολίζουμε με λ και τον λέμε *λόγο της προόδου*.

(2) Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν) υποθέτουμε πάντα ότι $\alpha_1 \neq 0$, οπότε, αφού και $\lambda \neq 0$, ισχύει $\alpha_\nu \neq 0$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$. Επομένως, η ακολουθία (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ, αν και μόνο αν ισχύει: $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda \iff \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda$.

3.2. <u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> *Ο νιοστός όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$.*

<u>Απόδειξη:</u> Από το ορισμό της γεωμετρικής προόδου έχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha_1 \\
\alpha_2 &= \alpha_1 \cdot \lambda \\
\alpha_3 &= \alpha_2 \cdot \lambda \\
\alpha_4 &= \alpha_3 \cdot \lambda \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{\nu-1} &= \alpha_{\nu-2} \cdot \lambda \\
\alpha_\nu &= \alpha_{\nu-1} \cdot \lambda
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ν αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής, βρίσκουμε $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$.

3.3. <u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> *Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.*

<u>Απόδειξη:</u> Έστω α, β, γ τρεις διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ.

Τότε ισχύει: $\dfrac{\beta}{\alpha} = \lambda$ και $\dfrac{\gamma}{\beta} = \lambda$, επόμένως $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\gamma}{\beta} \Rightarrow \beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.

Αντίστροφα, θεωρούμε τρεις αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ για τους οποίους ισχύει:

$$\beta^2 = \alpha \cdot \gamma \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$$

που σημαίνει ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

3.4. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι:*

$$S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}.$$

Απόδειξη: Έστω $S_\nu = \alpha_1 + \alpha_1 \cdot \lambda + \alpha_1 \cdot \lambda^2 + \ldots + \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-2} + \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$ **(1)**

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της **(1)** με το λόγο λ και έχουμε

$$\lambda \cdot S_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda + \alpha_1 \cdot \lambda^2 + \alpha_1 \cdot \lambda^3 + \ldots + \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} + \alpha_1 \cdot \lambda^\nu \quad \textbf{(2)}$$

Αφαιρούμε από τα μέλη της **(2)** τα μέλη της **(1)** και έχουμε:

$$\lambda \cdot S_\nu - S_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^\nu - \alpha_1 \quad \Leftrightarrow$$

$$(\lambda - 1) \cdot S_\nu = \alpha_1 \cdot (\lambda^\nu - 1) \quad \Leftrightarrow \qquad \text{αφού } \lambda \neq 1$$

$$S_\nu = \frac{\alpha_1 \cdot (\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1}.$$

3.4.1.ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Στην περίπτωση που ο λόγος της γεωμετρικής προόδου είναι $\lambda = 1$, τότε το άθροισμα των όρων της είναι $S_\nu = \nu \cdot \alpha_1$, αφού όλοι οι όροι της προόδου είναι ίσοι με α_1.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Μέθοδος — Εύρεσης στοιχείων μιας Γεωμετρικής προόδου.

- Όταν δίνονται ορισμένα από τα στοιχεία α_1, ω, α_ν, S_ν μιας Γεωμετρικής Προόδου και ζητούνται τα υπόλοιπα, τότε χρησιμοποιούμε τους τύπους $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$, $S_\nu = \dfrac{\alpha_1 \cdot (\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1}$, $\lambda \neq 1$.
  και καταλήγουμε σε εξίσωση ή σύστημα απ' όπου βρίσκουμε τα ζητούμενα.
- Παρόμοια δουλεύουμε αν μας δίνουν σχέσεις που ισχύουν μεταξύ των στοιχείων της προόδου (π.χ. άθροισμα, διαφορά όρων κ.τ.λ.).

3.5. Να βρείτε τη Γ.Π. της οποίας ο 4ος όρος ισούται με 108 και ο 8ος όρος ισούται με 8748.

Λύση:

$$\begin{cases} \alpha_4 = 108 \\ \alpha_8 = 8748 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \cdot \lambda^3 = 108 \\ \alpha_1 \cdot \lambda^7 = 8748 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \cdot \lambda^3 = 108 \\ \dfrac{\alpha_1 \cdot \lambda^7}{\alpha_1 \cdot \lambda^3} = \dfrac{8748}{108} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \cdot \lambda^3 = 108 \\ \lambda^4 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \cdot \lambda^3 = 108 \\ \lambda = \pm\sqrt[4]{81} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot \lambda^3 = 108 \\ \lambda = \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \cdot 3^3 = 108 \\ \lambda = 3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \alpha_1 \cdot (-3)^3 = 108 \\ \lambda = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 4 \\ \lambda = 3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \alpha_1 = -4 \\ \lambda = -3 \end{cases}.$$

Άρα η ζητούμενη Γ.Π. είναι: $4, 12, 36, 108, \ldots$ ή $-4, 12, -36, 108, \ldots$.

Μέθοδος → Απόδειξης διαδοχικών όρων Γ.Π. ή εύρεσης αγνώστων ώστε τρεις αριθμοί να είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π.

Όταν το πρόβλημα αναφέρεται για διαδοχικούς αριθμούς (α, β, γ) Γ.Π., δουλεύουμε όπως και στην Α.Π.

Ο τύπος όμως στη Γ.Π. είναι $\beta^2 = \alpha\cdot\gamma$.

3.6. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha-\beta}$, $\frac{1}{\alpha-\gamma}$, $\frac{1}{\alpha+\beta}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Λύση:

Οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha-\beta}$, $\frac{1}{\alpha-\gamma}$, $\frac{1}{\alpha+\beta}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν

$2\cdot\frac{1}{\alpha-\gamma} = \frac{1}{\alpha-\beta} + \frac{1}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow 2(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = (\alpha-\gamma)(\alpha+\beta) + (\alpha-\gamma)(\alpha-\beta) \Leftrightarrow$

$2(\alpha^2-\beta^2) = \alpha^2 + \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma + \alpha^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma + \beta\gamma \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 2\beta^2 = 2\alpha^2 + -2\alpha\gamma \Leftrightarrow$

$-2\beta^2 = -2\alpha\gamma \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha\gamma \Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma$ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Μέθοδος → Εύρεσης διαδοχικών όρων Γ.Π. αν είναι γνωστό το γινόμενό τους.

Η παράσταση διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου, μπορεί να γίνει ως εξής:.

- Γενικά: α , $\alpha\cdot\lambda$, $\alpha\cdot\lambda^2$, …
- Όταν το πλήθος τους είναι περιττό, τότε για:

  3 όρους : $\frac{x}{\lambda}$, x , $x\cdot\lambda$

  5 όρους : $\frac{x}{\lambda^2}$, $\frac{x}{\lambda}$, x , $x\cdot\lambda$, $x\cdot\lambda^2$

  κτλ (Μεσαίος όρος: x Λόγος Γ.Π.: $\lambda \neq 0$)
- Όταν το πλήθος τους είναι άρτιο, τότε διακρίνουμε δύο υπεριπτώσεις

	Λόγος : λ^2	Λόγος : $-\lambda^2$
Για 4 όρους :	$\frac{x}{\lambda^3}$, $\frac{x}{\lambda}$, $x\cdot\lambda$, $x\cdot\lambda^3$	$-\frac{x}{\lambda^3}$, $\frac{x}{\lambda}$, $-x\cdot\lambda$, $x\cdot\lambda^3$

3.7. Να βρεθούν τρεις διαδοχικοί όροι Γ.Π. με γινόμενο 1728 και άθροισμα –28.

Λύση:

Συμβολίζουμε τους ζητούμενους όρους ως εξής: $\frac{x}{\lambda}$, x , $x\cdot\lambda$.

Τότε $\frac{x}{\lambda}\cdot x\cdot x\cdot\lambda = 1728 \Leftrightarrow x^3 = 1728 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1728} \Leftrightarrow x = 12$.

Ακόμα $\frac{x}{\lambda} + x + x\cdot\lambda = -28 \Leftrightarrow \frac{12}{\lambda} + 12 + 12\cdot\lambda = -28 \Leftrightarrow \frac{12}{\lambda} + 12\cdot\lambda = -40 \Leftrightarrow$

$12 + 12\lambda^2 = -40\lambda \Leftrightarrow 12\lambda^2 + 40\lambda + 12 = 0 \Leftrightarrow 3\lambda^2 + 10\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3$ ή $\lambda = -\frac{1}{3}$.

- Για $x = 12$, $\lambda = -3$ οι αριθμοί είναι: –4 , 12 , –36.
- Για $x = 12$, $\lambda = -\frac{1}{3}$ οι αριθμοί είναι: –36 , 12 , –4.

3.8. Να βρεθούν τέσσερις αριθμοί που να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν έχουν γινόμενο 729 και ο τέταρτος αριθμός ισούται με το γινόμενο των δύο μεσαίων.

Λύση:

Συμβολίζουμε τους ζητούμενους όρους ως εξής: α , $\alpha{\cdot}\lambda$, $\alpha{\cdot}\lambda^2$, $\alpha{\cdot}\lambda^3$.

Είναι $\alpha{\cdot}\lambda^3 = \alpha{\cdot}\lambda \cdot \alpha{\cdot}\lambda^2 \Leftrightarrow \alpha{\cdot}\lambda^3 = \alpha^2{\cdot}\lambda^3 \Leftrightarrow \alpha = \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

Τότε $\alpha \cdot \alpha{\cdot}\lambda \cdot \alpha{\cdot}\lambda^2 \cdot \alpha{\cdot}\lambda^3 = 729 \Leftrightarrow \alpha^4{\cdot}\lambda^6 = 729 \Leftrightarrow \lambda^6 = 729 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt[6]{729} \Leftrightarrow \lambda = \pm 3$.

- Για $\alpha = 1$, $\lambda = 3$ οι αριθμοί είναι: 1 , 3 , 9 , 27.
- Για $\alpha = 1$, $\lambda = -3$ οι αριθμοί είναι: 1 , –3 , 9 , –27.

Μέθοδος — Εύρεσης αριθμών οι οποίοι παρεμβάλλονται μεταξύ δύο άλλων ώστε να είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π.

Όταν ζητείται να παρεμβάλλουμε μεταξύ δύο μη μηδενικών αριθμών α και β, μ αριθμούς $x_1 , x_2 , \dots , x_\mu$ τέτοιους ώστε οι αριθμοί $\alpha , x_1 , x_2 , \dots , x_\mu , \beta$ να είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π., τότε για να βρούμε το λόγο λ θα έχουμε:

$$\alpha_{\mu+2} = \alpha_1{\cdot}\lambda^{\mu+2-1} \Leftrightarrow \beta = \alpha{\cdot}\lambda^{\mu+1} \Leftrightarrow \lambda^{\mu+1} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Άρα το πρόβλημα εξαρτάται από τη λύση της παραπάνω εξίσωσης.

3.9. Μεταξύ των αριθμών 3 και 48 να παρεμβάλλετε τρεις γεωμετρικούς ενδιάμεσους.

Λύση:

Αν x_1 , x_2 , x_3 οι ζητούμενοι γεωμετρικοί ενδιάμεσοι, δηλαδή οι αριθμοί
3 , x_1 , x_2 , x_3 , 48 είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π., τότε:

$\alpha_5 = \alpha_1{\cdot}\lambda^4 \Leftrightarrow 48 = 3{\cdot}\lambda^4 \Leftrightarrow \lambda^4 = \dfrac{48}{3} \Leftrightarrow \lambda^4 = 16 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt[4]{16}$ ή $\lambda = -\sqrt[4]{16} \Leftrightarrow$
$\lambda = 2$ ή $\lambda = -2$.

- Αν $\lambda = 2$ τότε οι ζητούμενοι αριθμοί είναι 6 , 12 , 24.

Αν $\lambda = -2$ τότε οι ζητούμενοι αριθμοί είναι –6 , 12 , –24.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

3.10. Σε μια Γ.Π. ο λόγος είναι $\lambda = -2$ και ο 6$^{\text{ος}}$ όρος ισούται με 96. Να βρεθεί ο 3$^{\text{ος}}$ όρος.
[Απ. -12]

3.11. Σε μια Γ.Π. είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_4 = -54$. Να βρεθεί ο 7$^{\text{ος}}$ όρος.
[Απ. 1458]

3.12. Σε μια Γ.Π. δίνεται $\alpha_1 = -4$ και $\alpha_5 = -64$. Να βρεθεί ο 8$^{\text{ος}}$ όρος.
[Απ. 512 ή -512]

3.13. Σε μια Γ.Π. δίνεται $\alpha_7 = -72$ και $\alpha_1 = 8$. Να βρεθεί η Γ.Π.
[Απ. Δεν υπάρχει]

3.14. Έστω γεωμετρική πρόοδος της οποίας ο τρίτος όρος είναι ίσος με 16 και ο έκτος όρος είναι ίσος με 2.

α) Ο πρώτος όρος α_1 και ο λόγος λ της γεωμετρικής προόδου είναι:

Α. $\alpha_1 = 64$ και $\lambda = -\frac{1}{2}$ **Β.** $\alpha_1 = -64$ και $\lambda = \frac{1}{2}$

Γ. $\alpha_1 = 64$ και $\lambda = \frac{1}{2}$ **Δ.** $\alpha_1 = 32$ και $\lambda = \frac{1}{2}$

β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της γεωμετρικής προόδου.

3.15. Να βρείτε τη Γ.Π. της οποίας ο $3^{ος}$ όρος ισούται με 24 και ο $8^{ος}$ όρος ισούται με 768.
[Απ. α_1=6, λ=2]

3.16. Σε μια Γ.Π. δίνονται $\alpha_\nu = 160$, $\alpha_1 = 5$ και $\lambda = 2$. Να βρεθεί ο ν.
[Απ. 6]

3.17. Σε μια Γ.Π. δίνονται $\alpha_7 = 320$ και $\lambda = 2$. Να βρεθεί το S_8.
[Απ. 1275]

3.18. Παρατηρήθηκε ότι η ποσότητα του πετρελαίου που διαρρέει προς τη θάλασσα από ένα βυθισμένο δεξαμενόπλοιο διπλασιάζεται κάθε ημέρα (λόγω αύξησης του ρήγματος που προκάλεσε η διαρροή). Το πετρέλαιο που διέρρευσε κατά τη διάρκεια της πρώτης ημέρας ήταν 20 τόνοι.

α) Πόσοι τόνοι πετρελαίου θα διαρρεύσουν κατά τη διάρκεια της $7^{ης}$ ημέρας;

β) Πόσοι τόνοι πετρελαίου θα διαρρεύσουν συνολικά κατά τις 7 πρώτες ημέρες;

γ) Αν η διαρροή σταματήσει στο τέλος της $7^{ης}$ ημέρας και το κόστος καθαρισμού του πετρελαίου είναι 1000€ ανά τόνο, πόσο θα στοιχίσει ο καθαρισμός της θάλασσας από τη ρύπανση που προκάλεσε το δεξαμενόπλοιο;
[Απ. α)1280 τόνοι β)2540 τόνοι γ)2540000€]

3.19. Σε μια Γ.Π. δίνονται $\alpha_1 = 7, \lambda = 3$ και $S_\nu = 2548$. Να βρεθούν οι ν και α_ν.
[Απ. ν=6, α_6=1701]

3.20. Σε μια Γ.Π. είναι $S_2 = 12$ και $S_4 = 312$. Να βρεθεί η Γ.Π.
[Απ. 2,10,50,… ή -3,15,-75,…]

3.21. Να βρείτε Γ.Π. της οποίας το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της να ισούται με 1 και το διπλάσιο του δεύτερου όρου της συν ένα να ισούται με τον πρώτο όρο της.

3.22. Ένας πληθυσμός βακτηριδίων τριπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μία ώρα:

Α) Αν αρχικά υπάρχουν 10 βακτηρίδια, να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων ύστερα από 6 ώρες.

Β) Στο τέλος της έκτης ώρας ο πληθυσμός των βακτηριδίων ψεκάζεται με μια ουσία, η οποία σταματά τον πολλαπλασιασμό τους και συγχρόνως προκαλεί την καταστροφή $3^3 \cdot 10$ βακτηριδίων κάθε ώρα.

Β.1) Να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων που απομένουν 20 ώρες μετά τον ψεκασμό.

Β.2) Μετά από πόσες ώρες από τη στιγμή του ψεκασμού θα καταστραφούν τα βακτηρίδια;
[Απ. Α)7290 Β.1)1890 Β.2)27]

3.23. Στους δίσκους Α και Β μιας ζυγαριάς υπάρχουν βάρη 40 και 20 γραμμαρίων αντίστοιχα. Στον δίσκο Α τοποθετούμε διαδοχικά βάρη των 20 γραμμαρίων το καθένα. Στον δίσκο Β τοποθετούμε τριπλάσιο βάρος του αρχικού και συνεχίζουμε προσθέτοντας βάρη, καθένα από τα οποία είναι τριπλάσιο του βάρους που είχε τοποθετηθεί την αμέσως προηγούμενη φορά.

i) Αν το συνολικό βάρος στον δίσκο Β είναι 2420 γραμμάρια, να βρείτε πόσες φορές χρειάστηκε να τοποθετήσουμε βάρη στον δίσκο αυτό.

ii) Πόσα βάρη των 20 γραμμαρίων πρέπει να τοποθετήσουμε στον δίσκο Α, ώστε να ισορροπήσει η ζυγαριά;

[Απ. i)5 ii)120]

3.24. Έστω δύο κοινωνίες βακτηριδίων Α και Β. Αν συμβολίσουμε με A_0 τον αρχικό πληθυσμό της κοινωνίας Α και με B_0 τον αρχικό πληθυσμό της κοινωνίας Β, τότε $9 \cdot A_0 = 10^{11} \cdot B_0$. Ο πληθυσμός της κοινωνίας Α μειώνεται κάθε ώρα κατά το $\frac{1}{100}$ του αρχικού πληθυσμού της, ενώ ο πληθυσμός της κοινωνίας Β αυξάνεται ανά ώρα με γεωμετρική πρόοδο με λόγο λ. Οι δύο πληθυσμοί γίνονται ίσοι σε 10 ώρες μετά την αρχική στιγμή.

i) Να αποδείξετε ότι ο λόγος της γεωμετρικής προόδου που αναφέρεται στον πληθυσμό Β είναι $\lambda = 10$.

ii) Πέντε ώρες μετά την αρχική στιγμή ο πληθυσμός της κοινωνίας Β είναι $9 \cdot 10^{10}$ βακτηρίδια. Να αποδείξετε ότι ο αρχικός πληθυσμός της κοινωνίας Β ήταν $9 \cdot 10^5$ βακτηρίδια.

iii) Να βρείτε τον πληθυσμό της κοινωνίας Α, 99 ώρες μετά την αρχική στιγμή.

[Απ. iii)10^{14}]

3.25. Να βρεθεί ο x ώστε οι αριθμοί $x + 4$, $3x$, $4 - 7x$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

[Απ. -2, 1/2]

3.26. Να βρεθεί ο αριθμός x που αν προστεθεί στους 1, 3, 5 θα σχηματιστούν τρεις διαδοχικοί όροι Γ.Π.

[Απ. Δεν υπάρχει]

3.27. Αν οι αριθμοί x , 10 , y είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., ενώ οι αριθμοί x , 6 , y είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π., να βρεθούν οι x, y.

[Απ. 2, 18]

3.28. Αν $\alpha_2 = \text{συν}\theta$, $\alpha_3 = \sqrt{2} \cdot \text{ημ}\theta$, $\alpha_4 = \sqrt{3} \cdot \text{εφ}\theta$, με $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, είναι όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν), τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\theta = \frac{\pi}{3}$.

ii) Να βρείτε το λόγο λ και τον πρώτο όρο α_1 της γεωμετρικής προόδου (α_ν).

iii) Να βρείτε το άθροισμα των τεσσάρων όρων της (α_ν).

[Απ. ii) $\sqrt{6}$ iii) $\frac{7(6+\sqrt{6})}{12}$]

3.29. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha+\beta}$, $\frac{1}{2\beta}$, $\frac{1}{\beta+\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

3.30. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν οι αριθμοί $2\alpha - \beta$, β , $2\gamma - \beta$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

3.31. Αν οι αριθμοί α, β, γ αποτελούν συγχρόνως διαδοχικούς όρους, αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

3.32. Αν α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. και β, γ, α είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π., να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$ ή $\alpha = 4\beta = -2\gamma$.

3.33. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π. να αποδείξετε ότι

$$\frac{\beta^2\gamma^2-\alpha^4}{\alpha} + \frac{\alpha^2\gamma^2-\beta^4}{\beta} + \frac{\alpha^2\beta^2-\gamma^4}{\gamma} = 0.$$

3.34. Αν οι αριθμοί x, y, ω, z είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π. να αποδείξετε ότι

i) $(x+z)(y+\omega) - (x+\omega)(y+z) = (y-\omega)^2$.

ii) $\dfrac{y+z}{x} = \dfrac{\omega^2 z+z^3}{\omega^3}$.

3.35. Να βρεθούν τρεις αριθμοί που να είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π., αν το γινόμενό τους είναι 216 και το άθροισμα των άκρων όρων είναι -20.

[Απ. -2,6,-18]

3.36. Να βρεθούν τέσσερις αριθμοί που να είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π., αν το γινόμενό τους είναι 64 και ο τέταρτος ισούται με το γινόμενο των δύο μεσαίων όρων.

[Απ. 1,2,4,8 και 1,-2,4,-8]

3.37. Να βρείτε τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου αν αυτές είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π. και το άθροισμα όλων των ακμών του είναι 168, ενώ ο όγκος του είναι 512.

[Απ. 2,8,32]

3.38. Μεταξύ των αριθμών -2 και 6250 να παρεμβάλετε τέσσερις γεωμετρικούς ενδιάμεσους.

[Απ. 10,-50,250,-1250]

3.39. Να βρείτε τέσσερις αριθμούς που να είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π., αν το γινόμενο των δύο άκρων όρων ισούται με 108, ενώ το άθροισμα των δύο πρώτων όρων ισούται με 8.

[Απ. 2,6,18,54]

3.40. Μεταξύ των αριθμών $\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}$ και $\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$ να παρεμβληθούν τρεις γεωμετρικοί ενδιάμεσοι.

[Απ. $\frac{\alpha^2}{\beta^2}, \frac{\alpha}{\beta}, 1, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta^2}{\alpha^2}$ και $\frac{\alpha^2}{\beta^2}, -\frac{\alpha}{\beta}, 1, -\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta^2}{\alpha^2}$]

3.41. **α)** Δίνεται η Γ.Π. 1, 3, 9, 27, … . Να αποδείξετε ότι οι διαφορές των διαδοχικών όρων της σχηματίζουν μια νέα Γ.Π..

β) Να αποδείξετε την ιδιότητα αυτή γενικά για μία οποιδήποτε Γ.Π.

3.42. Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) με $\alpha_1 = 3$ και

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{1}{3}\alpha_\nu + \frac{4}{3}, \ \nu \in \mathbb{N}^*.$$

α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) με $\beta_\nu = \alpha_\nu - 2$ είναι Γ.Π., της οποίας να βρείτε το νιοστό όρο της. Μετά βρείτε το νιοστό όρο της (α_ν).

β) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\Pi = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_\nu$.

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S_\nu = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu$.

δ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S'_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu$.

[Απ. α) $\alpha_\nu = 2 + \frac{1}{3^{\nu-1}}$ β) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}$ γ) $S_\nu = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^{\nu-1}}$ δ) $S'_\nu = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^{\nu-1}} + 2\nu$]

* * * * *

Β΄ Ομάδα

3.43. Αν οι $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π., να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \delta^2 \geq \beta^2 + \gamma^2$.

3.44. Αν οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π., να αποδείξετε ότι

$$\alpha^2\cdot\beta^2\cdot\gamma^2\left(\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3}\right) = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3.$$

3.45. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι θετικοί διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου, να αποδείξετε ότι $|\alpha - \delta| \geq |\beta - \gamma|$.

3.46. Για τους μη μηδενικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 0$ και $\alpha^3 + \beta^3 = \gamma^3$. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha, \gamma, \beta\sqrt[3]{4}$ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π.

3.47. Να υπολογίσετε τρεις διαδοχικούς όρους μιας Γ.Π. οι οποίοι έχουν άθροισμα 12, όταν γνωρίζουμε ότι εάν από τους όρους αυτούς αφαιρέσουμε αντίστοιχα τρεις αριθμούς που αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π., τότε οι αριθμοί που προκύπτουν αποτελούν Α.Π.

[Απ. 4,4,4]

3.48. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π. τότε να αποδείξετε ότι $\alpha_1\cdot\alpha_\nu = \alpha_2\cdot\alpha_{\nu-1} = \ldots = \alpha_{1+\mu}\cdot\alpha_{\nu-\mu} = \ldots$. Αν επί πλέον ισχύει $\alpha_\nu \in \mathbb{R}^+$ και $\mu \geq 0$ τότε $\alpha_1 + \alpha_\nu \geq \alpha_{1+\mu} + \alpha_{\nu-\mu}$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

3.49. Να γράψετε στο *τετράδιό* σας τις παρακάτω προτάσεις ορθά συμπληρωμένες:

α) Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι …………. προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\cdot\gamma$.

3.50. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* ή *Λάθος* κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Ο λόγος λ μιας γεωμετρικής προόδου μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

II. Αν ο λόγος μιας γεωμετρικής προόδου είναι 1, τότε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της είναι $\lambda\cdot\alpha_1$.

3.51. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Αν σε μία Γ.Π. είναι $\alpha_1 = 5$, $\lambda = 2$, τότε ο α_5 είναι:

Α. -25 **Β.** $\sqrt{5}$ **Γ.** 10 **Δ.** 80 **Ε.** 320

II. Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι ίσος με 1 και ο λόγος ίσος με 2, τότε το άθροισμα των πρώτων ν όρων της είναι ίσο με:

Α. $\frac{2^\nu - 1}{2}$ **Β.** $2^\nu - 1$ **Γ.** $2^{\nu-1}$ **Δ.** $1-2^\nu$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

III. Αν σε μία Γ.Π. είναι $\alpha_4 = x$ και $\alpha_6 = y$ (όπου x, y ομόσημοι), τότε έχουμε:

Α. $\lambda = \frac{xy}{2}$ **Β.** $\lambda = \frac{x}{y}$ **Γ.** $\lambda = \frac{y^2}{x^2}$ **Δ.** $\lambda^2 = \frac{y}{x}$ **Ε.** $\lambda = \frac{x^2 y^2}{2}$

3.52. Να συμπληρώσετε τους όρους που λείπουν στις παρακάτω γεωμετρικές προόδους:

α) $\frac{1}{4}\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ \dots\ ,\ \dots\ ,\ \dots$

β) $\dots\ ,\ \dots\ ,\ 6\ ,\ -2\ ,\ \dots$

γ) $2\ ,\ \dots\ ,\ 8\ ,\ \dots\ ,\ \dots$

δ) $\dots\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ \dots\ ,\ -\frac{1}{8}\ ,\ \dots$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

- Εκθετική συνάρτηση
- Λογάριθμοι
- Λογαριθμική συνάρτηση

Μία συνηθισμένη ενέργεια που επιχειρείται επανειλημμένα στα Μαθηματικά είναι αυτή της επέκτασης. Η μετάβαση, δηλαδή, μιας έννοιας από ένα σύνολο σε ένα άλλο ευρύτερο. Στο κεφάλαιο αυτό δίνεται η επέκταση την έννοιας της δύναμης, από το σύνολο των ακεραίων που ξέραμε μέχρι τώρα στο σύνολο των ρητών και τέλος στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Η επέκταση της δύναμης στο σύνολο των πραγματικών δίνει τη δυνατότητα ορισμού της εκθετικής συνάρτησης. Αμέσως μετά προχωρούμε στη μελέτη της συνάρτησης, την εύρεση του πεδίου ορισμού, του συνόλου τιμών, της μονοτονίας της και της γραφικής της παράστασης. Μία βασική ιδιότητα της εκθετικής συνάρτησης, της ένα προς ένα αντιστοιχίας των σημείων του πεδίου ορισμού της με τις τιμές αυτής, μας δίνει τη δυνατότητα επίλυσης εκθετικών εξισώσεων. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι πλέον συνηθισμένες περιπτώσεις εκθετικών εξισώσεων, ανισώσεων και συστημάτων και οι μέθοδοι αντιμετώπισής τους.

Στην επόμενη ενότητα δίνεται ο ορισμός του λογάριθμου ενός θετικού αριθμού. Παρουσιάζονται οι ιδιότητες τους και δίνονται παραδείγματα και ασκήσεις για την κατανόηση τους.

Τέλος ορίζεται η λογαριθμική συνάρτηση, γίνεται μελέτη αυτής και σχεδιάζεται η γραφική της παράσταση. Η ιδιότητα της ένα προς ένα αντιστοιχίας ισχύει και στη λογαριθμική συνάρτηση, οπότε μπορούμε να την εφαρμόσουμε και εδώ για την επίλυση εξισώσεων, ανισώσεων και συστημάτων.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1.1. ΟΡΙΣΜΟΣ:

Αν $\alpha > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}\ .$$

Επιπλέον, αν μ, ν, θετικοί ακέραιοι, ορίζουμε: $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$.

1.2. ΟΡΙΣΜΟΣ:

Έστω $\alpha > 0$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η δύναμη α^x. Επομένως αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in \mathbb{R}$ στη δύναμη α^x, ορίζουμε τη συνάρτηση:

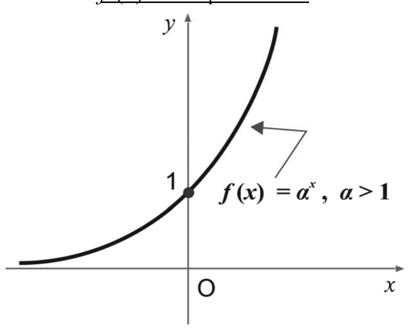
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha^x$,

η οποία, στην περίπτωση που είναι $\alpha \neq 1$, λέγεται *εκθετική συνάρτηση με βάση* α.

Αν είναι $\alpha = 1$, τότε έχουμε τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$.

Για την εκθετική συνάρτηση έχουμε τα επόμενα:

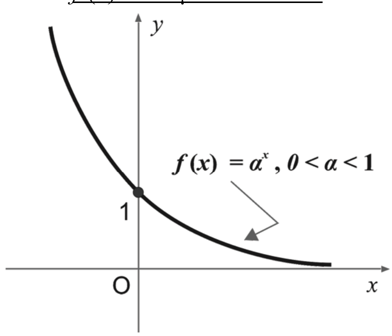
$f(x) = \alpha^x$ με $\alpha > 1$



- Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$
- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

  αν $x_1 < x_2$ τότε $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}$.
- Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,1)$ και έχει άξονα ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα των x.

$f(x) = \alpha^x$ με $0 < \alpha < 1$



- Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

  αν $x_1 < x_2$ τότε $\alpha^{x_1} > \alpha^{x_2}$.
- Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,1)$ και έχει άξονα ασύμπτωτο τον θετικό ημιάξονα των x.

1.2.1.ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Από τη μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$, με $0<\alpha\neq 1$, προκύπτει ότι:

Αν $x_1\neq x_2$ τότε $\alpha^{x_1}\neq\alpha^{x_2}$ που είναι ισοδύναμη με την: αν $\alpha^{x_1}=\alpha^{x_2}$ τότε $x_1=x_2$.

Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία: αν $\alpha^{x_1}=\alpha^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$.

Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα φυσικό μέγεθος, που μεταβάλλεται με το χρόνο t και εκφράζεται από τη συνάρτηση $Q(t)=Q_0\cdot e^{ct}$.
Το Q_0 είναι η *αρχική τιμή* του Q (για $t=0$) και είναι $Q_0>0$, ενώ το c είναι μια σταθερά που εξαρτάται κάθε φορά από τη συγκεκριμένη εφαρμογή. Η συνάρτηση αυτή είναι γνωστή ως *νόμος της εκθετικής μεταβολής*.
Αν $c>0$ η *συνάρτηση* Q είναι γνησίως αύξουσα και εκφράζει το νόμο της *εκθετικής αύξησης*, ενώ αν $c<0$ η συνάρτηση Q είναι γνησίως φθίνουσα και εκφράζει το νόμο της *εκθετικής απόσβεσης*.
Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής αποτελεί ένα ικανοποιητικό μοντέλο για πάρα πολλές εφαρμογές της Φυσικής, της Βιολογίας, της Στατιστικής και άλλων επιστημών.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Μέθοδος → Εύρεσης χαρακτηριστικών μιας εκθετικής συνάρτησης ή εύρεσης παραμέτρων για να έχει αυτή ένα συγκεκριμμένο χαρακτηριστικό (π.χ. μονοτονία, ασύμπτωτες κ.τ.λ.).

Αν ζητείται να μελετήσουμε μία εκθετική συνάρτηση ή να σχεδιάσουμε τη γραφική της παράσταση, τότε ελέγχουμε τη βάση αν αυτή είναι μεγαλύτερη του 1 ή στο διάστημα $(0,1)$. Έτσι μπορούμε να απαντήσουμε για τη συμπεριφορά της συνάρτησης.
Αν ζητείται να βρούμε παράμετρο ώστε η συνάρτηση να έχει συγκεκριμμένες ιδιότητες, απαιτούμε η βάση να παίρνει τις κατάλληλες τιμές

1.3. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-1}\right)^x$ να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση:

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν:

$$\frac{3-\alpha}{\alpha-1}>1\Leftrightarrow\frac{3-\alpha}{\alpha-1}-1>0\Leftrightarrow\frac{3-\alpha-\alpha+1}{\alpha-1}>0\Leftrightarrow\frac{4-2\alpha}{\alpha-1}>0\Leftrightarrow\frac{2(2-\alpha)}{\alpha-1}>0\Leftrightarrow$$

$(2-\alpha)(\alpha-1)>0\Leftrightarrow 1<\alpha<2$.

Άρα $\alpha\in(1,2)$.

α	$-\infty$		1		2		$-\infty$
$(2-\alpha)(\alpha-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

1.4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2^{|x|}$.

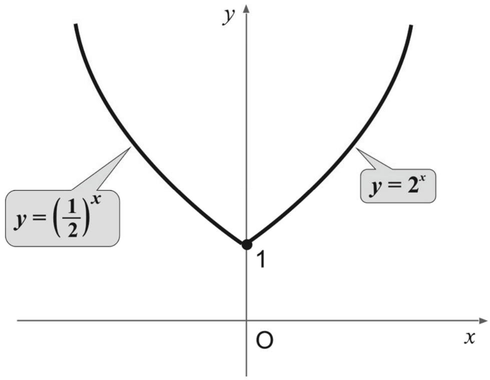
Λύση:

Είναι $f(x) = 2^{|x|} = \begin{cases} 2^{-x} & \text{αν} \quad x<0 \\ 2^{x} & \text{αν} \quad x\geq 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} \dfrac{1}{2^x} & \text{αν} \quad x<0 \\ 2^{x} & \text{αν} \quad x\geq 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x & \text{αν} \quad x<0 \\ 2^{x} & \text{αν} \quad x\geq 0 \end{cases}$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Μέθοδος Επίλυσης εκθετικών εξισώσεων.

Οι πιο συνηθισμένες εκθετικές εξισώσεις μπορούν να πάρουν μία από τις επόμενες μορφές, και να λυθούν όπως φαίνεται στα παραδείγματα.
Σε όλες τις περιπτώσεις χρησιμοποιείται η βασική σχέση στις εκθετικές συναρτήσεις:

$$\alpha^{x_1} = \alpha^{x_2} \iff x_1 = x_2 \ , \quad \text{για} \quad 0<\alpha \neq 1.$$

➢ **$\alpha^x = \beta$ ή $\alpha^{f(x)} = \beta$ όπου $0 < \alpha \neq 1$ και $\beta > 0$.**

1.5. Να λυθούν οι εξισώσεις: i) $3^x = \frac{1}{243}$ ii) $5^{x^2-9x+11} = 125$.

Λύση:

i) $3^x = \dfrac{1}{243} \iff 3^x = 3^{-5} \iff x = -5.$

ii) $5^{x^2-9x+11} = 125 \iff 5^{x^2-9x+11} = 5^3 \iff x^2-9x+11 = 3 \iff x^2-9x+8 = 0 \iff x = 1$ ή $x = 8.$

➢ **$\alpha^{f(x)} = \alpha^{g(x)}$ ή $\alpha^{f(x)} = \beta^{g(x)}$ όπου $0<\alpha,\beta \neq 1$.**

1.6. Να λυθούν οι εξισώσεις: i) $2^{x^2-x+3} = 8^{2-x}$ ii) $\left(\sqrt[4]{9^x}\right)^{x-1} = 27$

Λύση:

i) $2^{x^2-x+3} = 8^{2-x} \iff 2^{x^2-x+3} = \left(2^3\right)^{2-x} \iff 2^{x^2-x+3} = 2^{3(2-x)} \iff 2^{x^2-x+3} = 2^{6-3x} \iff$
$x^2-x+3 = 6-3x \iff x^2+2x-3 = 0 \iff x = 1$ ή $x = -3.$

ii) $\left(\sqrt[4]{9^x}\right)^{x-1} = 27 \iff \left(\sqrt[4]{(3^2)^x}\right)^{x-1} = 27 \iff \left(\sqrt[4]{3^{2x}}\right)^{x-1} = 27 \iff \left(3^{\frac{2x}{4}}\right)^{x-1} = 27 \iff$
$\left(3^{\frac{x}{2}}\right)^{x-1} = 27 \iff 3^{\frac{x(x-1)}{2}} = 3^3 \iff \dfrac{x(x-1)}{2} = 3 \iff x(x-1) = 6 \iff$
$x^2 - x - 6 = 0 \iff x = -2$ ή $x = 3.$

➢ **$f(\alpha^x) = g(\alpha^x)$ όπου $0 < \alpha \neq 1$, οι οποίες με αντικατάσταση: $\alpha^x = y$ μετατρέπονται σε εξισώσεις αλγεβρικής μορφής.**

1.7. Να λυθούν οι εξισώσεις: i) $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 363$
ii) $2^x + 4^x = 272$

Λύση:

i) $3^x+3^{x-1}+3^{x-2}+3^{x-3}+3^{x-4}=363 \Leftrightarrow 3^x+3^x\cdot3^{-1}+3^x\cdot3^{-2}+3^x\cdot3^{-3}+3^x\cdot3^{-4}=363 \Leftrightarrow$

$3^x+\dfrac{3^x}{3}+\dfrac{3^x}{3^2}+\dfrac{3^x}{3^3}+\dfrac{3^x}{3^4}=363 \Leftrightarrow 3^x+\dfrac{3^x}{3}+\dfrac{3^x}{9}+\dfrac{3^x}{27}+\dfrac{3^x}{81}=363 \overset{3^x=y>0}{\Leftrightarrow}$

$y+\dfrac{y}{3}+\dfrac{y}{9}+\dfrac{y}{27}+\dfrac{y}{81}=363 \Leftrightarrow 81y+27y+9y+3y+y=363 \Leftrightarrow 121y=29403 \Leftrightarrow$

$y=\dfrac{29403}{121} \Leftrightarrow y=243 \Leftrightarrow 3^x=3^5 \Leftrightarrow x=5.$

ii) $2^x+4^x=272 \Leftrightarrow 2^x+\left(2^2\right)^x=272 \Leftrightarrow 2^x+\left(2^x\right)^2=272 \overset{2^x=y>0}{\Leftrightarrow} y+y^2=272 \Leftrightarrow$

$y^2+y-272=0 \Leftrightarrow y=16$ ή $y=-17$ (*απορρίπτεται*).

Άρα $2^x=16 \Leftrightarrow 2^x=2^4 \Leftrightarrow x=4.$

➢ **<u>$f(\alpha^x)=g(\beta^x)$ όπου $0<\alpha,\beta\neq1$, οι οποίες με αντικατάσταση: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x=y$ μετατρέπονται σε προηγούμενες μορφές.</u>**

1.8. Να λυθούν οι εξισώσεις: i) $3\cdot2^{x-4}-2^{x-1}=5^{x-2}-6\cdot5^{x-3}$.
ii) $2\cdot4^x+3\cdot9^x=5\cdot6^x$.

Λύση:

i) $3\cdot2^{x-4}-2^{x-1}=5^{x-2}-6\cdot5^{x-3} \Leftrightarrow 3\cdot2^x\cdot2^{-4}-2^x\cdot2^{-1}=5^x\cdot5^{-2}-6\cdot5^x\cdot5^{-3} \Leftrightarrow$

$\dfrac{3}{2^4}\cdot2^x-\dfrac{1}{2}\cdot2^x=\dfrac{1}{5^2}\cdot5^x-\dfrac{6}{5^3}\cdot5^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{16}-\dfrac{1}{2}\right)2^x=\left(\dfrac{1}{25}-\dfrac{6}{125}\right)5^x \Leftrightarrow -\dfrac{5}{16}\cdot2^x=-\dfrac{1}{125}\cdot5^x \Leftrightarrow$

$\dfrac{2^x}{5^x}=\dfrac{\frac{1}{125}}{\frac{5}{16}} \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{5}\right)^x=\dfrac{16}{625} \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{5}\right)^x=\left(\dfrac{2}{5}\right)^4 \Leftrightarrow x=4.$

ii) $2\cdot4^x+3\cdot9^x=5\cdot6^x \Leftrightarrow 2\cdot(2^2)^x+3\cdot(3^2)^x=5\cdot(2\cdot3)^x \Leftrightarrow$

$2\cdot(2^2)^x+3\cdot(3^2)^x=5\cdot2^x\cdot3^x \Leftrightarrow 2\cdot\dfrac{(2^x)^2}{(3^x)^2}+3\cdot\dfrac{(3^x)^2}{(3^x)^2}=5\cdot\dfrac{2^x\cdot3^x}{(3^x)^2} \Leftrightarrow$

$2\cdot\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\right]^2+3\cdot1=5\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^x \overset{\left(\frac{2}{3}\right)^x=y>0}{\Leftrightarrow} 2y^2-5y+3=0 \Leftrightarrow y=1$ ή $y=\dfrac{3}{2}$.

Για $y=1$ έχουμε $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\left(\dfrac{2}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x=0.$

Για $y=\dfrac{3}{2}$ έχουμε $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow x=-1.$

❑ **<u>Η εξίσωση</u> $(f(x))^{g(x)}=1 \Leftrightarrow f(x)=1$ ή $\begin{cases}f(x)\neq0\\g(x)=0\end{cases}$ ή $\begin{cases}f(x)=-1\\g(x)\ \text{άρτιος}\end{cases}$.**

1.9. Να λυθεί η εξίσωση $(x^2-7x+11)^{x^2-3x}=1$.

Λύση:

Είναι $(x^2-7x+11)^{x^2-3x}=1 \Leftrightarrow x^2-7x+11=1$ ή $\begin{cases}x^2-7x+11\neq0\\x^2-3x=0\end{cases}$ ή $\begin{cases}x^2-7x+11=-1\\x^2-3x\ \ \text{άρτιος}\end{cases}$.

○ $x^2-7x+11=1 \Leftrightarrow x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=5.$

○ $\begin{cases} x^2-7x+11\neq 0 \\ x^2-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+11\neq 0 \\ x(x-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+11\neq 0 \\ x=0 \ \text{ή} \ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$ ή $x=3$.

○ $\begin{cases} x^2-7x+11=-1 \\ x^2-3x \ \text{άρτιος} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+12=0 \\ x^2-3x \ \text{άρτιος} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \ \text{ή} \ x=4 \\ x^2-3x \ \text{άρτιος} \end{cases} \Leftrightarrow x=3$ ή $x=4$.

Άρα η εξίσωση έχει τις λύσεις: $0 , 2 , 3 , 4 , 5$.

Μέθοδος **Επίλυσης εκθετικών συστημάτων.**

Για να επιλύσουμε εκθετικά συστήματα, προσπαθούμε να τα μετασχηματίσουμε σε γραμμικά ή συστήματα ανώτερου βαθμού. Στη προσπάθεια αυτή εμφανίζονται, πολλές φορές, εμφανίζονται περιπτώσεις σαν αυτές στις εκθετικές εξισώσεις.

1.10. Να λυθούν τα συστήματα: **i)** $\begin{cases} 2^{x-1}\cdot 4^{x+2y}=512 \\ 5^{x-1}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{3y}=1 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} 5^{x-1}-2^{x+3}=-11 \\ 2^{y-1}+5^{x+1}=126 \end{cases}$.

Λύση:

i) $\begin{cases} 2^{x-1}\cdot 4^{x+2y}=512 \\ 5^{x+1}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{3y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x-1}\cdot(2^2)^{x+2y}=512 \\ 5^{x+1}\cdot 5^{-3y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x-1}\cdot 2^{2x+4y}=2^9 \\ 5^{x+1-3y}=5^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x-1+2x+4y}=2^9 \\ x+1-3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 3x+4y-1=9 \\ x-3y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y=10 \\ x-3y=-1 \end{cases} \Big| \cdot(-3) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y=10 \\ -3x+9y=3 \quad (+) \end{cases}$

$13y = 13 \Leftrightarrow y = 1$.

και $x-3y=-1 \Leftrightarrow x-3=-1 \Leftrightarrow x=2$.

ii) $\begin{cases} 5^{x-1}-2^{y+3}=-11 \\ 2^{y-1}+5^{x+1}=126 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x\cdot 5^{-1}-2^y\cdot 2^3=-11 \\ 2^y\cdot 2^{-1}+5^x\cdot 5=126 \end{cases} \overset{\substack{5^x=\kappa>0 \\ 2^y=\lambda>0}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \frac{\kappa}{5}-8\lambda=-11 \\ \frac{\lambda}{2}+5\kappa=126 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa-40\lambda=-55 \\ 10\kappa+\lambda=252 \end{cases} \Big| \cdot(-10)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -10\kappa+400\lambda=550 \\ 10\kappa+\lambda=252 \quad (+) \end{cases}$

$401\lambda = 802 \Leftrightarrow \lambda = 2$

$\kappa-40\lambda=-55 \Leftrightarrow \kappa-40\lambda=-55 \Leftrightarrow \kappa-80=-55 \Leftrightarrow \kappa=25$.

Άρα $5^x=25 \Leftrightarrow 5^x=5^2 \Leftrightarrow x=2$ και $2^y=2 \Leftrightarrow y=1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

1.11. Για ποιες τιμές του α η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{\alpha^2-7}{\alpha-1}\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$;

[Απ. $\alpha\in(-2,1)\cup(3,+\infty)$]

1.12. Να βρείτε τις τιμές του λ, για τις οποίες η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{3-\lambda}{\lambda+2}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

[Απ. $\lambda\in(\frac{1}{2},3)$]

1.13. Να βρείτε τις τιμές του κ, για τις οποίες η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{3-\kappa^2}{\kappa+1}\right)^x$ έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα Ox'.

[Απ. $\kappa\in(-\infty,-2)\cup(-1,1)$]

1.14. Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{8-\alpha}{\alpha^2+2}\right)^x$ έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Ox.

[Απ. $\alpha\in(-\infty,-3)\cup(2,8)$]

1.15. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $5^x=\dfrac{1}{625}$ **ii)** $\left(3^{x+2}\right)^{4-x}=1$ **iii)** $2^{3x^2-1}=\dfrac{1}{2^{5x-1}}$

iv) $3^{x-2}=9^{6-x}$ **v)** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5x-2}=\left(\dfrac{9}{4}\right)^{2x+1}$ **vi)** $3^{2|x|+1}=27^{x^2}$

[Απ. i) -4 ii) -2, 4 iii) -2, $\frac{1}{3}$, iv) $\frac{14}{3}$ v) 0 vi) -1, 1]

1.16. Για να πάρουμε τον αριθμό 8^8, σε ποια δύναμη πρέπει να υψώσουμε τον 4^4;

[Απ. 3]

1.17. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\sqrt[3]{4^{x-2}}=\sqrt[6]{2^{3x-1}}$ **ii)** $100\cdot 10^x=1000^{\frac{5}{x}}$

[Απ. i) 7 ii) -5, 3]

1.18. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\sqrt[x-2]{27^{x+1}}=3^{2x-4}$ **ii)** $\sqrt[x+1]{81}=27\cdot\sqrt[x+1]{3^{-8}}$

[Απ. i) 5 ii) 3]

1.19. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $3^{x+2}+5\cdot 3^x+3^{x-1}-3^{x-2}=128$ **ii)** $3^{x+1}+3^{x-2}-\dfrac{15}{3^{x-1}}=\dfrac{247}{3^{x-2}}$

iii) $8\cdot 4^x+15\cdot 2^x=2$ **iv)** $2^x+2^{4-x}=10$ **v)** $8^x=3\cdot 2^x+2$

vi) $25^{-x}+5^{-x+1}=50$ **vii)** $3^x-4\cdot\sqrt{3^x}+3=0$

[Απ. i) 2 ii) 3 iii) -3 iv) 1, 3 v) 1 vi) -1 vii) 0, 2]

1.20. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $3^{x+1}-2^x=3^{x-1}+2^{x+3}$ **ii)** $5^{x-4}-5^{x-5}=2\cdot 5^{x-6}+2\cdot 3^{x-4}$

iii) $4\cdot 3^x+2\cdot 12^x=9\cdot 6^x$ **iv)** $25\cdot 4^x+21\cdot 10^x=4\cdot 5^{2x}$

[Απ. i) 3 ii) 6 iii) -1, 2 iv) 2]

1.21. Να λυθεί στο σύνολο των φυσικών αριθμών η εξίσωση: $2+2^2+2^3+\ldots+2^x=510$.

[Απ. 8]

1.22. Αν $f(x)=2^x$, να λύσετε την εξίσωση: $f(x)+f(x+1)+\ldots+f(x+9)=8184$.

[Απ. 3]

1.23. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 9{\cdot}4^x + 5{\cdot}6^x$ και $g(x) = 4{\cdot}9^x$. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

[Απ. Α(2,324)]

1.24. Σ' έναν ασθενή με υψηλό πυρετό χορηγείται ένα αντιπυρετικό φάρμακο. Η θερμοκρασία $\Theta(t)$ του ασθενούς t ώρες μετά την λήψη του φαρμάκου δίνεται από τον τύπο

$\Theta(t) = 36 + 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t$ σε βαθμούς Κελσίου.

α) Να βρείτε πόσο πυρετό είχε ο ασθενής τη στιγμή που του χορηγήθηκε το φάρμακο.

β) Να βρείτε σε πόσες ώρες η θερμοκρασία του ασθενούς θα πάρει τη φυσιολογική τιμή των $36{,}5^0$ C.

γ) Αν η επίδραση του αντιπυρετικού διαρκεί 6 ώρες πόση θα είναι η θερμοκρασία του α-σθενούς μόλις σταματήσει η επίδραση του φαρμάκου;

[Απ. α) 40^0 C β) 3 γ) $36{,}06^0$ C]

1.25. Δίνεται η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha-1}{5}\right)^x$.

i) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

iii) Αν $\alpha = 11$, να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + f(x+1) = 6.$$

[Απ. i) $\alpha\in(1,6)\cup(6,+\infty)$ ii) $\alpha>6$ iii) $x=1$]

1.26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^x$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε η f να ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

ii) Αν $\alpha = \frac{1}{3}$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει η ισότητα: $f(2x) + f(x+1) = 3$.

[Απ. i) $0<\alpha<1$ ii) $x=0$]

1.27. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν) δίνονται: $\alpha_2 = \frac{1}{2}\cdot$ ημθ, $\alpha_3 =$ συνθ, $\alpha_4 =$ σφθ, με

$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$.

i) Να δείξετε ότι $\theta = \frac{\pi}{3}$.

ii) Να βρείτε το λόγο λ και τον $1^{\text{ο}}$ όρο της προόδου.

iii) Να βρείτε τον όρο της προόδου ο οποίος ισούται με $\frac{128}{81}$.

[Απ. ii) $\lambda=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\alpha_1=\frac{3}{8}$ iii) $\nu=11$]

1.28. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} 16^{x-\frac{9}{2}}\cdot 2^{3y-2} = 1024 \\ 3^x\cdot 3^{y-3} = 1 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} 9^{x-1}\cdot 3^y = 243 \\ 2^{x+3}\cdot 2^{y-5} = 16 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} \sqrt[5]{4^x}\cdot\sqrt[3]{4^y} = 2^{y+5} \\ \sqrt[3]{3^y}\cdot\sqrt[5]{9^x} = 3^{2y+1} \end{cases}$ **iv)** $\begin{cases} \sqrt[3]{2^x}\cdot\sqrt[5]{8^y} = 2 \\ \sqrt[6]{27^x}\cdot\sqrt{81^y} = 3\sqrt{3} \end{cases}$

[Απ. i) x=21, y=-18 ii) x=1, y=5 iii) x=15, y=3 iv) x=3, y=0]

1.29. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} 2\cdot 5^x + 3^y = 53 \\ 5^{x+1} - 3^{y+1} = 116 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} 3^x - 2^{y+3} = 49 \\ 2^y - 3^{x-3} = 1 \end{cases}$ **iii)** $\begin{cases} 2^{x+y} + 3^{2x-y-1} = 11 \\ 5\cdot 2^{x+y} - 3^{2x-y} = -17 \end{cases}$

[Απ. i)x=2,y=1 ii)x=4,y=2 iii)x= $\frac{4}{3}$,y=- $\frac{1}{3}$]

1.30. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} 3^x + 4^y = 13 \\ 9^x - 16^y = 65 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} 3^{x+1} + 5^y = 10 \\ 3^{2x-1} + 2\cdot 5^{y+1} = 13 \end{cases}$ **iii)** $\begin{cases} 3^x = 4^y + 77 \\ \sqrt{3^x} = 2^y + 7 \end{cases}$

[Απ. i)x=2,y=1 ii)x=1,y=0 iii)x=4,y=1]

1.31. Να λυθούν τα συστήματα: **i)** $\begin{cases} 2^x = 3y \\ 3^x = 2y \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} 2^x = 3^y \\ 3^x = 2^y \end{cases}$

[Απ. i)x=-1,y= $\frac{1}{6}$ ii)x=y=0]

1.32. Να λυθούν τα συστήματα: **i)** $\begin{cases} \sqrt[x]{x+y} = 4 \\ 3^x(x+y) = 12 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} 3^y \cdot \sqrt[x]{64} = 36 \\ 5^y \cdot \sqrt[x]{512} = 200 \end{cases}$

[Απ. i)x=1,y=3 ii)x=3,y=2]

1.33. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $3^{x-5} < 1$ **ii)** $2^{4x-1} > \frac{1}{32}$ **iii)** $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-3} > 25$

[Απ. i)x<5 ii)x>-1 iii)-1<x<1]

1.34. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $\left(\frac{1}{64}\right)^x > \frac{1}{2\sqrt{2}}$ **ii)** $5^{\sqrt[x]{64}} \geq 625$

iii) $512 - \frac{16}{\sqrt[4]{2^x}} \geq 0$ **iv)** $9^{5^x} \geq 59049$

[Απ. i)x< $\frac{1}{4}$ ii)x=1,2,3 iii)x ≥ 20 iv) x ≥ 1]

1.35. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $\frac{6^{x^2}}{2^{-15}} \leq \frac{3^{-15}}{6^{12-12x}}$ **ii)** $5^{x-3} \geq 7^{3-x}$

iii) $3^{x+2} - 3^x - 72 > 0$ **iv)** $2^x - 2^{x-4} - 15 < 0$

[Απ. i)3 ≤ x ≤ 9 ii)x>3 iii)x>2 iv) x<4]

1.36. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt[4]{10\cdot 3^x - 9^x - 9}$.

[Απ. Α=[0,2]]

1.37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (3-\alpha)^x$ με $\alpha \in \mathbb{N}$.

i) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του α που θα βρείτε προηγούμενα, ορίζονται δύο εκθετικές συναρτήσεις: η $f_1(x) = 2^x$ και η $f_2(x) = 3^x$. Μετά να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f_1 βρίσκεται "ψηλότερα" από αυτή της f_2.

[Απ. i)0,1 ii)x<0]

1.38. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $3^{x-10} - 2^{x-9} - 3^{x-11} - 2^{x-12} > 0$

ii) $2^{x+1} + 4^{x} \leq 80$ **iii)** $2^{2x+1} - 5\cdot 6^{x} + 3^{2x+1} \leq 0$

[Απ. i)x>13 ii)x ≤ 3 iii)-1 ≤ x ≤ 0]

1.39. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους: $f(x) = \dfrac{\alpha^x + \alpha^{-x}}{2}$ και $g(x) = \dfrac{\alpha^x - \alpha^{-x}}{2}$, με $0 < \alpha \neq 1$.

Να αποδείξετε ότι:

i) Η f είναι άρτια και η g περιττή συνάρτηση.

ii) $f(x+y) = f(x)\cdot f(y) + g(x)\cdot g(y)$.

iii) $g(x+y) = f(x)\cdot g(y) + f(y)\cdot g(x)$.

iv) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται "ψηλότερα" από τη γραφική παράσταση της g.

v) Η εξίσωση: $f^2(x) + g^2(x) = \dfrac{\alpha + \alpha^{-1}}{2}$ έχει λύσεις δύο αντίθετους αριθμούς.

[Απ. v) $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$]

* * * * *

Β΄ Ομάδα

1.40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left|2^x - 2\right|$.

i) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία που έχει εξίσωση $y = 2$.

[Απ. ii)(2,2)]

1.41. Να λύσετε την εξίσωση: $18^{8-4x} = (54\sqrt{2}\,)^{3x-2}$.

[Απ. $\frac{22}{17}$]

1.42. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $(x^2 - 5x + 7)^{x^2 - x} = 1$ **ii)** $x^x - x^{-x} = 3(1 + x^{-x})$

[Απ. i) 0,1,2,3 ii)-1,2]

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.43. Να γράψετε τις παρακάτω προτάσεις ορθά συμπληρωμένες

I. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = 3^x$ είναι το … .

II. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \left(\dfrac{2}{7}\right)^x$ είναι το ……… .

1.44. Να διατάξετε τους αριθμούς από το μικρότερο προς τον μεγαλύτερο.

$\alpha = \dfrac{1}{3}$ $\beta = 1$ $\gamma = 3$ $\delta = \sqrt{3}$ $\varepsilon = \sqrt[3]{3}$

1.45. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=4^x$:

Α. έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$

Β. τέμνει μόνο τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,1)$

Γ. τον άξονα $y'y$ σε δύο σημεία

Δ. έχει ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα Ox

Ε. τίποτα από τα προηγούμενα

II. Η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ είναι:

Α. γνησίως φθίνουσα **Β.** άρτια **Γ.** περιττή

Δ. γνησίως αύξουσα **Ε.** δεν είναι μονότονη

III. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=0{,}9^x$ τότε:

Α. η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Β. η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$

Γ. η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ στο $(0,1)$

Δ. η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα Ox'

Ε. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

IV. Για τη συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ισχύει

Α. $f(2)<f(3)$ **Β.** $f(5)\geq f(3)$ **Γ.** $f(6)=f(7)$ **Δ.** $f(2)<f(-1)$ **Ε.** $f(0)=2$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

2.1. ΟΡΙΣΜΟΣ:

Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ και $\theta > 0$, τότε: $\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_\alpha\theta$.
Ισοδύναμα διατυπώνεται ως εξής:
Ο $\log_\alpha\theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να βρούμε το θ.

Άμεσες ιδιότητες λογαρίθμων

- Από τον προηγούμενο ορισμό στην ισότητα $x = \log_\alpha\theta$, αν στη θέση του θ θέσουμε α^x θα πάρουμε: $\log_\alpha\alpha^x = x$.
- Ενώ αν στην ισότητα $\alpha^x = \theta$ θέσουμε στη θέση του x τον $\log_\alpha\theta$ θα πάρουμε: $\alpha^{\log_\alpha\theta} = \theta$.
- Επειδή $\alpha^0 = 1$ τότε $\log_\alpha 1 = 0$
- Επειδή $\alpha^1 = \alpha$ τότε $\log_\alpha\alpha = 1$.

2.1. ΠΡΟΤΑΣΗ:

Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιουσδήποτε θ_1, θ_2, $\theta > 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

α) $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$

β) $\log_\alpha\left(\dfrac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log_\alpha\theta_1 - \log_\alpha\theta_2$

γ) $\log_\alpha\theta^\kappa = \kappa \cdot \log_\alpha\theta$.

Απόδειξη: **α)** Έστω ότι είναι $\log_\alpha\theta_1 = x_1 \Leftrightarrow \alpha^{x_1} = \theta_1$ και $\log_\alpha\theta_2 = x_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_2} = \theta_2$.

Οπότε $\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \theta_1 \cdot \theta_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_1 + x_2} = \theta_1 \cdot \theta_2 \Leftrightarrow \log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = x_1 + x_2 \Leftrightarrow$

$\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$.

β) Έστω ότι είναι $\log_\alpha\theta_1 = x_1 \Leftrightarrow \alpha^{x_1} = \theta_1$ και $\log_\alpha\theta_2 = x_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_2} = \theta_2$.

Οπότε $\dfrac{\alpha^{x_1}}{\alpha^{x_2}} = \dfrac{\theta_1}{\theta_2} \Leftrightarrow \alpha^{x_1 - x_2} = \dfrac{\theta_1}{\theta_2} \Leftrightarrow \log_\alpha\dfrac{\theta_1}{\theta_2} = x_1 - x_2 \Leftrightarrow$

$\log_\alpha\left(\dfrac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log_\alpha\theta_1 - \log_\alpha\theta_2$.

γ) Έστω ότι είναι $\log_\alpha\theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta$.

Οπότε $\alpha^{\kappa x} = \theta^\kappa \Leftrightarrow \log_\alpha\theta^\kappa = \kappa \cdot x \Leftrightarrow \log_\alpha\theta^\kappa = \kappa \cdot \log_\alpha\theta$.

2.1.1.<u>ΠΑΤΑΤΗΡΗΣΗ:</u> Για κάθε $\theta > 0$ ισχύει $\log_\alpha \sqrt[\nu]{\theta} = \log_\alpha \theta^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\nu} \cdot \log_\alpha \theta$.

2.1.2.<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u> **(1)** Οι λογάριθμοι με βάση το 10 λέγονται *δεκαδικοί* ή *κοινοί λογάριθμοι*.
Ο δεκαδικός λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ, συμβολίζεται απλά με $\log\theta$ και όχι με $\log_{10}\theta$. Επομένως $\log\theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$.
(2) Οι λογάριθμοι με βάση το e λέγονται *φυσικοί* ή *νεπέριοι λογάριθμοι*.
Ο φυσικός λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ, συμβολίζεται με $\ln\theta$ και όχι με $\log_e\theta$.
Επομένως $\ln\theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$.

2.2. <u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> Αν $\alpha, \beta > 0$ με $\alpha, \beta \neq 1$, τότε για κάθε $\theta > 0$ ισχύει:

$$\log_\beta\theta = \frac{\log_\alpha \theta}{\log_\alpha \beta}.$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Μέθοδος → Υπολογισμού παραστάσεων ή απόδειξης ισοτήτων.

Για να υπολογίσουμε μία παράσταση που περιέχει λογάριθμους ή για να αποδείξουμε μια ισότητα, εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των λογαρίθμων. Στην εκτέλεση των πράξεων χρησιμοποιούνται ιδιότητες των δυνάμεων, ταυτότητες κ.τ.λ.
Αν οι βάσεις των λογαρίθμων δεν είναι ίδιες, εφαρμόζουμε την ιδιότητα αλλαγής βάσεων με κάποια που παρουσιάζεται στην παράσταση. Πολλές φορές χρησιμοποιούμε για βάση το 10.

2.3. Να βρείτε τον x στις επόμενες ισότητες:

i) $\log_3 x = -2$ **ii)** $\log_{\frac{4}{9}} \frac{27}{8} = x$ **iii)** $\log_x \frac{81}{625} = 3$

<u>Λύση:</u>

i) $\log_3 x = -2 \Leftrightarrow 3^{-2} = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

ii) $\log_{\frac{4}{9}} \frac{27}{8} = x \Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{27}{8} \Leftrightarrow \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^x = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow$
$x = -\frac{3}{2}$.

iii) $\log_x \frac{81}{625} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = \frac{81}{625} \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[4]{\frac{81}{625}} \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$.

2.4. Να αποδείξετε ότι:

i) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 = 3$.

ii) $\log_\alpha \beta \cdot \log_\beta \gamma \cdot \log_\gamma \alpha = 1$, όπου $0 < \alpha, \beta, \gamma \neq 1$.
Να γενικεύσετε την προηγούμενη ισότητα.

Λύση:

i) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 = \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} \cdot \frac{\log 5}{\log 4} \cdot \frac{\log 6}{\log 5} \cdot \frac{\log 7}{\log 6} \cdot \frac{\log 8}{\log 7}$

$= \frac{\log 8}{\log 2} = \frac{\log 2^3}{\log 2} = \frac{3 \cdot \log 2}{\log 2} = 3.$

ii) $\log_\alpha \beta \cdot \log_\beta \gamma \cdot \log_\gamma \alpha = \frac{\log \beta}{\log \alpha} \cdot \frac{\log \gamma}{\log \beta} \cdot \frac{\log \alpha}{\log \gamma} = 1.$

Για τους αριθμούς $0 < \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \neq 1$ ισχύει η ισότητα:

$\log_{\alpha_1} \alpha_2 \cdot \log_{\alpha_2} \alpha_3 \cdot \log_{\alpha_3} \alpha_4 \cdot \ldots \cdot \log_{\alpha_\nu} \alpha_1 = 1.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

2.5. Να βρεθούν τα x στις επόμενες ισότητες:

α) $\log_4 x = -1$ **β)** $\log_{\sqrt{2}} x = 3$ **γ)** $\log_3 \frac{1}{27} = x$ **δ)** $\log_{\frac{1}{3}} (9\sqrt{3}) = x$ **ε)** $\log_x \frac{4}{9} = 2$

[Απ. α) x= $\frac{1}{4}$ · β) x=2 $\sqrt{2}$ · γ) x=-3 · δ) x=- $\frac{5}{2}$ ε) x= $\frac{2}{3}$]

2.6. Να αποδείξετε ότι:

α) $\log 3 + 2 \cdot \log 4 - 2 \cdot \log 2 = \log 12$ **β)** $\log 32 + 2 \cdot \log 4 - 6 \cdot \log 2 = 3 \cdot \log 2$

γ) $\frac{1}{2} \cdot \log 25 + \frac{1}{3} \cdot \log 8 + \frac{1}{5} \cdot \log 32 = 1 + \log 2$ **δ)** $\log_3 \sqrt{81 \sqrt[3]{27}} = \frac{5}{2}$

2.7. Αν $\log 2 \simeq 0{,}3$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$A = \log \sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot \log(2+\sqrt{2}) + \frac{1}{2} \cdot \log(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}) + \frac{1}{2} \cdot \log(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}).$

[Απ. A=0,3]

2.8. Αν $\log 2 \simeq 0{,}3$, $\log 3 \simeq 0{,}5$ να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $\log \frac{\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[10]{2}}{\sqrt[3]{18\sqrt{2}}}$ **β)** $\log \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{500\sqrt{3}}$ **γ)** $\log_3 \frac{12}{5 \cdot \sqrt[3]{2}}$

[Απ. α)-0,278 β)-1,82 γ)0,6]

2.9. Αν $\alpha > 1, \beta > 1$ να αποδείξετε ότι: $\log(\alpha^2-1) + \log(\beta^2-1) - \log[(\alpha\beta+1)^2-(\alpha+\beta)^2] = 0$

2.10. Αν $\alpha > \beta > 0$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 11\alpha\beta$, να αποδείξετε ότι: $\log(\frac{\alpha-\beta}{3}) = \frac{1}{2}(\log\alpha + \log\beta)$.

2.11. Αν $\alpha > \beta > 0$ και $\alpha^3 + \beta^3 = 6\alpha\beta(\alpha+\beta)$ να αποδείξετε ότι: $\log(\frac{\alpha+\beta}{3}) = \frac{1}{2}(\log\alpha + \log\beta)$.

2.12. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = \log 3 + \log 3^2 + \log 3^3 + \ldots + \log 3^{50}$.

[Απ. S=1275·log3]

2.13. Θεωρούμε μία Γ.Π. (α_ν) με θετικούς όρους και την ακολουθία (β_ν) με $\beta_\nu = \log\alpha_\nu$.

α) Να αποδείξετε ότι η (β_ν) είναι Α.Π.

β) Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της ακολουθίας $\beta_\nu = \log 2^\nu$.

[Απ. $S_\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2} \cdot \log 2$]

2.14. Θεωρούμε μία Α.Π. με $\alpha_1 = \log\alpha$, $\alpha_2 = \log\beta$ τότε να αποδείξετε ότι

$$S_\nu = \frac{1}{2}\cdot\log\left(\frac{\beta^{\nu(\nu-1)}}{\alpha^{\nu(\nu-3)}}\right),\ \text{όπου } \alpha, \beta > 0.$$

2.15. Ο τρίτος όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) είναι ίσος με $\alpha_3 = \log125$ και η διαφορά της είναι ίση με $\omega = \log5$.

α) Να δείξετε ότι ο πρώτος όρος α_1 της προόδου είναι ίσος με τη διαφορά ω .

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα $A = \alpha_{21} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{29}$.

γ) Έστω (β_ν) μία γεωμετρική πρόοδος με $\beta_1 = \alpha_1$ και $\beta_2 = \alpha_2$, όπου α_1 και α_2 ο πρώτος και ο δεύτερος όρος της παραπάνω προόδου αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$B = \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \ldots + \beta_{1999} + \beta_{2001}.$$

[Απ. β) $225\log5$ γ) $\frac{1}{3}(4^{1001}-1)\log5$]

2.16. Αν $x, y > 0$ να αποδείξετε ότι $\log\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\log x + \log y}{2}$

2.17. Αν $\alpha > 1$ να αποδείξετε ότι: $\log(\alpha+1) - \log\alpha < \log\alpha - \log(\alpha-1)$.

2.18. Να βρεθεί ο φυσικός αριθμός $\alpha > 1$ αν $2 < \log_\alpha 30 < 3$.

[Απ. α=4 ή α=5]

2.19. Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{1}{\log_\nu x} + \dfrac{1}{\log_\mu x} = \dfrac{1}{\log_{\mu\nu} x}$, $0 < \mu, \nu, x \neq 1$.

β) $\dfrac{1}{\log_\alpha(\alpha\beta\gamma)} + \dfrac{1}{\log_\beta(\alpha\beta\gamma)} + \dfrac{1}{\log_\gamma(\alpha\beta\gamma)} = 1$, $0 < \alpha, \beta, \gamma \neq 1$.

γ) $\log_{\alpha\beta} x = \dfrac{\log_\beta x}{1+\log_\beta \alpha}$, $0 < \alpha, \beta \neq 1$, $x > 0$.

δ) $\log_\alpha x \cdot \log_{\alpha^2} x = \dfrac{1}{2}\cdot(\log_\alpha x)^2$, $0 < \alpha \neq 1$, $x > 0$.

2.20. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\log_2 \alpha} + \frac{1}{\log_3 \alpha} + \ldots + \frac{1}{\log_{100} \alpha} = \frac{1}{\log_{100!} \alpha},\ \text{όπου } 0 < \alpha \neq 1 \quad (100! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 100).$$

2.21. Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης: $\Pi = \dfrac{(\log_2 5 + \log_3 5)\cdot\log_6 5}{\log_2 5\cdot\log_3 5}$.

[Απ. Π=1]

2.22. Αν $0 < \alpha, \beta, \gamma \neq 1$ τότε οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν οι αντίστροφοι των αριθμών $\log_\alpha x$, $\log_\beta x$, $\log_\gamma x$ $(0 < x \neq 1)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

2.23. Έστω $Q(t)$ η τιμή ενός προϊόντος (σε εκατοντάδες χιλιάδες δραχμές), t έτη μετά την κυκλοφορία του προϊόντος στην αγορά. Η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 300.000 δραχμές, ενώ μετά από 6 μήνες η τιμή του είχε μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει $\ln Q(t) = \alpha t + \beta$, $t \geq 0$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $Q(t) = 3\cdot 4^{-t}$, $t \geq 0$

β) Να βρείτε σε πόσο χρόνο η τιμή του προϊόντος θα γίνει ίση με το $\frac{1}{16}$ της αρχικής του τιμής.

γ) Να βρείτε τον ελάχιστο χρόνο για τον οποίο η τιμή του προϊόντος δεν υπερβαίνει το $\frac{1}{9}$ της αρχικής του τιμής.

[Απ. β)2 γ) $\frac{\ln 3}{\ln 2}$]

*　　*　　*　　*　　*

Β΄ Ομάδα

2.24. Αν α, β, γ είναι όροι μιας γεωμετρικής πρόόδου, με θετικούς όρους, τάξεων λ, μ, ν αντίστοιχα, τότε να αποδείξετε ότι:

$$(\mu - \nu)\cdot\log\alpha + (\nu - \lambda)\cdot\log\beta + (\lambda - \mu)\cdot\log\gamma = 0.$$

2.25. Να αποδείξετε ότι: $\frac{7}{16}\cdot\log(3+2\sqrt{2}) - 4\cdot\log(\sqrt{2}+1) = \frac{25}{8}\cdot\log(\sqrt{2}-1)$

2.26. Αν x, y, z θετικοί πραγματικοί αριθμοί και $y = 10^{\frac{1}{1-\log x}}$ $z = 10^{\frac{1}{1-\log y}}$, να αποδείξετε ότι $x = 10^{\frac{1}{1-\log z}}$.

2.27. Οι αριθμοί α, β, γ είναι θετικοί και διαφορετικοί ανά δύο. Αν ισχύει η σχέση $\frac{\log\alpha}{\beta-\gamma} = \frac{\log\beta}{\gamma-\alpha} = \frac{\log\gamma}{\alpha-\beta}$ να αποδείξετε ότι $\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma} = 1$.

2.28. Οι αριθμοί α, β, γ είναι διαφορετικοί ανά δύο και κατέχουν τις θέσεις κ, λ, μ σε μια αριθμητική και σε μια γεωμετρική πρόοδο, οι οποίες έχουν θετικούς πρώτους όρους, διαφορά και λόγο θετικό. Να αποδείξετε ότι

$$(\beta - \gamma)\cdot\log\alpha + (\gamma - \alpha)\cdot\log\beta + (\alpha - \beta)\cdot\log\gamma = 0.$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

2.29. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* ή *Λάθος* κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. $e^x = \theta \Leftrightarrow \ln\theta = x$, $\theta > 0$.

II. Αν $\alpha>0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2>0$ ισχύει: $\log_\alpha(\theta_1\cdot\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 \cdot \log_\alpha\theta_2$.

III. Ισχύει ότι $\ln e^3 = 3$.

IV. Ισχύει ότι $\ln e < \log 10$.

V. Αν $\theta > 0$ ισχύει ότι $\log(10\theta) = 1 + \log\theta$.

VI. Αν $\theta > 0$ ισχύει ότι $\log(\frac{\theta}{10}) = 1 - \log\theta$.

VII. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει: $\log x^4 = 4\cdot\log x$.

VIII. Ισχύει ότι $\log_3 10 = \dfrac{1}{\log 3}$.

2.30. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Αν $\log_\alpha \theta = x$ τότε:
Α. $\alpha^\theta = x$ **Β.** $x^\alpha = \theta$ **Γ.** $\alpha^x = \theta$

II. Αν $\log_x 32 = 5$ τότε το x είναι ίσο με
Α. $\frac{1}{2}$ **Β.** 2 **Γ.** –2 **Δ.** 1 **Ε.** 10

III. Αν $\log_3 x = 4$ τότε το x είναι ίσο με
Α. 7 **Β.** 12 **Γ.** 64 **Δ.** 81 **Ε.** 9

IV. Αν $\log_2 64 = x$ τότε το x είναι ίσο με
Α. 32 **Β.** 16 **Γ.** 128 **Δ.** 12 **Ε.** 6

V. Η παράσταση $\log 1000$ είναι ίση με
Α. 4 **Β.** 10 **Γ.** 2 **Δ.** 3 **Ε.** 100

VI. Η παράσταση $9^{\log_3 5}$ είναι ίση με
Α. 5 **Β.** $\log_3 5$ **Γ.** 25 **Δ.** 1 **Ε.** 9^5

VII. Η παράσταση $\log 12 - \log 3$ είναι ίση με
Α. $12\log 3$ **Β.** $2\log 2$ **Γ.** $\log 15$ **Δ.** $\log 9$ **Ε.** $\log 36$

VIII. Η παράσταση $\dfrac{\log 2}{\log 3}$ είναι ίση με
Α. $\log\frac{2}{3}$ **Β.** $\log 3$ **Γ.** $\log 2$ **Δ.** $\log\frac{3}{2}$ **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

IX. Η παράσταση $\frac{1}{2}\log 25 + \frac{1}{3}\log 8$ είναι ίση με
Α. $\frac{1}{6}$ **Β.** $\frac{1}{6}\log 200$ **Γ.** $\frac{5}{6}\log 34$ **Δ.** 1 **Ε.** $\log 200$

ΕΝΟΤΗΤΑ 3.

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

3.1. ΟΡΙΣΜΟΣ:

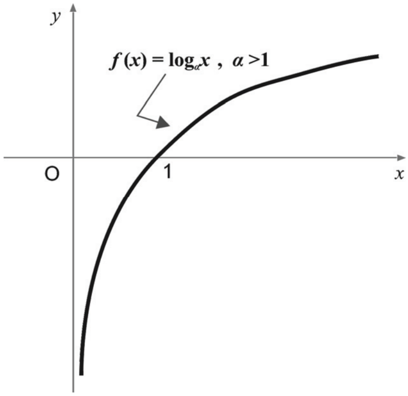
Έστω $0<\alpha\neq 1$. Για κάθε $x>0$ ορίζεται ο $\log_\alpha x$. Επομένως αντιστοιχίζοντας κάθε $x\in(0,+\infty)$ στο $\log_\alpha x$, ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R} \quad \text{με} \quad f(x)=\log_\alpha x,$$

η οποία λέγεται *λογαριθμική συνάρτηση με βάση* α.

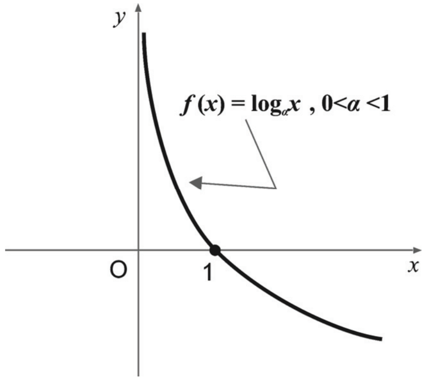
Για την λογαριθμική συνάρτηση έχουμε τα επόμενα:

$f(x)=\log_\alpha x$ με $\alpha>1$



- Έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.
- Έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2\in(0,+\infty)$ ισχύει: αν $x_1<x_2$ τότε $\log_\alpha x_1<\log_\alpha x_2$.
- Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$ και έχει άξονα ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy'.

$f(x)=\log_\alpha x$ με $0<\alpha<1$



- Έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.
- Έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2\in(0,+\infty)$ ισχύει: αν $x_1<x_2$ τότε $\log_\alpha x_1>\log_\alpha x_2$.
- Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$ και έχει άξονα ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy.

3.1.1.ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Από τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x)=\log_\alpha x$, με $0<\alpha\neq 1$, προκύπτει ότι:

Αν $x_1\neq x_2$ τότε $\log_\alpha x_1\neq\log_\alpha x_2$ που είναι ισοδύναμη με την:

αν $\log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2$ τότε $x_1 = x_2$.

Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία: $\log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Μέθοδος Εύρεσης χαρακτηριστικών μιας εκθετικής συνάρτησης ή εύρεσης παραμέτρων για να έχει αυτή ένα συγκεκριμένο χαρακτηριστικό (π.χ. μονοτονία, ασύμπτωτες κ.τ.λ.).

Αν ζητείται να μελετήσουμε μία λογαριθμική συνάρτηση ή να σχεδιάσουμε τη γραφική της παράσταση, τότε ελέγχουμε τη βάση αν αυτή είναι μεγαλύτερη του 1 ή στο διάστημα $(0,1)$. Έτσι μπορούμε να απαντήσουμε για τη συμπεριφορά της συνάρτησης.

Αν ζητείται να βρούμε παράμετρο ώστε η συνάρτηση να έχει συγκεκριμένες ιδιότητες, απαιτούμε η βάση να παίρνει τις κατάλληλες τιμές.

3.2. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \log_{\frac{3-2\alpha}{\alpha+1}} x$ να είναι γνησίως αύξουσα.

Λύση:

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ αν και μόνο αν:

$$\frac{3-2\alpha}{\alpha+1} > 1 \Leftrightarrow \frac{3-2\alpha}{\alpha+1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{3-2\alpha-\alpha-1}{\alpha+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2-3\alpha}{\alpha+1} > 0 \Leftrightarrow$$

$$(2-3\alpha)(\alpha+1) > 0 \Leftrightarrow -1 < \alpha < \frac{2}{3}.$$

α	$-\infty$		1		2		$-\infty$
$(2-3\alpha)(\alpha+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Άρα $\alpha \in (-1, \frac{2}{3})$.

Μέθοδος Επίλυσης λογαριθμικών εξισώσεων και ανισώσεων.

- Ξεκινώντας να λύσουμε μία λογαριθμική εξίσωση, θέτουμε πρώτα τους περιορισμούς ώστε τα περιεχόμενα των λογαρίθμων να είναι θετικά.
  - Για να λύσουμε γενικά μία λογαριθμική εξίσωση εφαρμόζουμε τις ιδιότητες ώστε να την μετασχηματίσουμε στη μορφή $\log_\alpha A(x) = \log_\alpha B(x) \Leftrightarrow A(x) = B(x) \Leftrightarrow \ldots$, χρησιμοποιώντας τη βασική σχέση στις λογαριθμικές συναρτήσεις: $\log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, για $0 < \alpha \neq 1$.
  - Σε κάποιες εξισώσεις χρειάζεται να θέσουμε $\log_\alpha A(x) = y$ και να λύσουμε μία άλλη εξίσωση, συνήθως πολυωνυμική ή εκθετική. Για τις τιμές του y που θα βρούμε λύνουμε τη λογαριθμική εξίσωση για να βρούμε τα x.
  - Μερικές φορές απαιτείται να λογαριθμίσουμε, με κατάλληλη βάση, τα δύο μέλη της εξίσωσης και παίρνουμε εξίσωση η οποία λύνεται όπως προηγούμενα.
- Στις λογαριθμικές ανισώσεις απαιτούμε πάλι τους περιορισμούς για να έχουν έννοια οι λογάριθμοι που παρουσιάζονται. Μετά λύνουμε την ανίσωση δουλεύοντας παρόμοια όπως στις εξισώσεις και τέλος βρίσκουμε τις τιμές του x για τις οποίες ικανοποιούνται οι περιορισμοί και η λύση

3.3. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις: α) $\log_4(x+3) - \log_4(x-1) = 2 - \log_4 8$
β) $\log x - 2\cdot\log_x 10 = 1$
γ) $x^{\log_3(3x)} = 9$.

Λύση:

α) Απαιτούμε $\begin{cases} x+3>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

$\log_4(x+3) - \log_4(x-1) = 2 - \log_4 8 \Leftrightarrow \log_4\left(\frac{x+3}{x-1}\right) = \log_4 4^2 - \log_4 8 \Leftrightarrow$

$\log_4\left(\frac{x+3}{x-1}\right) = \log_4\left(\frac{16}{8}\right) \Leftrightarrow \frac{x+3}{x-1} = 2 \Leftrightarrow 2x - 2 = x + 3 \Leftrightarrow x = 5$ *(δεκτή γιατί 5>1)*.

β) Απαιτούμε $0 < x \neq 1$. $\log x - 2\cdot\log_x 10 = 1 \Leftrightarrow \log x - 2\cdot\frac{1}{\log x} = 1$.

Θέτουμε $\log x = y$. Τότε $y - \frac{2}{y} = 1 \overset{y\neq 0}{\Leftrightarrow} y^2 - 2 = y \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$ ή $y = -1$.

Άρα $\log x = 2 \Leftrightarrow x = 10^2 = 100$, $\log x = -1 \Leftrightarrow x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$.

γ) Απαιτούμε $x > 0$. $x^{\log_3(3x)} = 9 \Leftrightarrow \log_3 x^{\log_3(3x)} = \log_3 9 \Leftrightarrow \log_3(3x)\cdot\log_3 x = \log_3 3^2 \Leftrightarrow$

$(\log_3 3 + \log_3 x)\cdot\log_3 x = 2\cdot\log_3 3 \Leftrightarrow (1 + \log_3 x)\cdot\log_3 x = 2 \Leftrightarrow \log_3 x + (\log_3 x)^2 = 2 \Leftrightarrow$

$(\log_3 x)^2 + \log_3 x - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = -2$ ή $\log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3^{-2} = \frac{1}{9}$ ή $x = 3$.

3.4. Να λύσετε την εξίσωση: $\log x^2 + \log x^4 + \log x^6 + \ldots + \log x^{100} = 1275$.

Λύση:

Η εξίσωση ορίζεται αν και μόνο αν $x \neq 0$.

$\log x^2 + \log x^4 + \log x^6 + \ldots + \log x^{100} = 1275 \Leftrightarrow$

$\log|x|^2 + \log|x|^4 + \log|x|^6 + \ldots + \log|x|^{100} = 1275 \Leftrightarrow$

$2\cdot\log|x| + 4\cdot\log|x| + 6\cdot\log|x| + \ldots + 100\cdot\log|x| = 1275 \Leftrightarrow$

$(2 + 4 + 6 + \ldots + 100)\cdot\log|x| = 1275 \Leftrightarrow \overset{(*)}{\Leftrightarrow}$

$\frac{50}{2}\cdot(2 + 100)\cdot\log|x| = 1275 \Leftrightarrow 25\cdot 102\cdot\log|x| = 1275 \Leftrightarrow 2250\cdot\log|x| = 1275 \Leftrightarrow$

$\log|x| = \frac{1270}{2250} \Leftrightarrow \log|x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x| = 10^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{10} \Leftrightarrow x = \sqrt{10}$ ή $x = -\sqrt{10}$.

3.4.1.<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u> (*) Οι όροι του αθροίσματος είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 2$. Το πλήθος τους είναι 50.

3.5. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{1}{2}\cdot\log_{\frac{2}{3}}(x+30) + \log_{\frac{2}{3}}\sqrt{x-30} \geq 1 + 2\cdot\log_{\frac{2}{3}} 2$.

Λύση:

Απαιτούμε $\begin{cases} x+30>0 \\ x-30>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-30 \\ x>30 \end{cases} \Leftrightarrow x > 30$ **(1)**.

$$\frac{1}{2}\cdot\log_{\frac{1}{2}}(x+30) + \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{x-30} \geq 1+2\cdot\log_{\frac{1}{2}}2 \Leftrightarrow$$

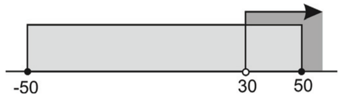
$$\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{x+30} + \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{x-30} \geq \log_{\frac{1}{2}}10 + \log_{\frac{1}{2}}2^2 \Leftrightarrow$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{x+30}\cdot\sqrt{x-30}\right) \geq \log_{\frac{1}{2}}(10\cdot4) \Leftrightarrow \sqrt{(x+30)(x-30)} \leq 40 \Leftrightarrow$$

$$x^2-30^2 \leq 1600 \Leftrightarrow x^2 \leq 1600+900 \Leftrightarrow x^2 \leq 2500$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{2500} \Leftrightarrow$$

$$|x| \leq 50 \Leftrightarrow -50 \leq x \leq 50 \quad \textbf{(2)}.$$

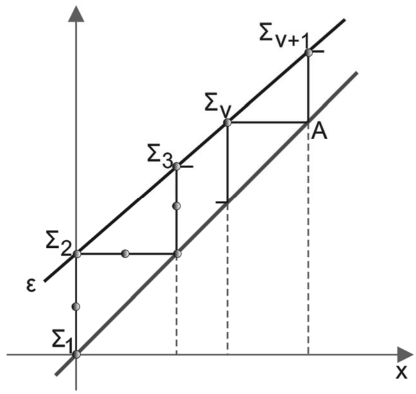


Από **(1)** και **(2)** έχουμε: $30 < x \leq 50$.

3.6. Μία σφαίρα που αρχικά βρίσκεται στη θέση Σ_1 (στην αρχή των αξόνων) κινείται προς τα επάνω και μόλις συναντήσει την ευθεία ε: $y = \frac{4}{5}x + 6$ κινείται δεξιά και οριζόντια. Όταν συναντά την ευθεία της διχοτόμου των αξόνων, $y = x$ κινείται προς τα επάνω.

α) Να αποδείξετε ότι η ισότητα $\alpha_{\nu+1} = \frac{4}{5}\alpha_\nu + 6$ συνδέει το ύψος $\alpha_{\nu+1}$ της θέσης $\Sigma_{\nu+1}$ από τον άξονα $x'x$ με το ύψος α_ν της προηγούμενης θέσης Σ_ν.

β) Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) με $\beta_\nu = \alpha_\nu - 30$ είναι γεωμετρική πρόοδος και έπειτα ότι $\alpha_\nu = 30\cdot\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^{\nu-1}\right]$.



γ) Να βρείτε την πρώτη θέση της σφαίρας κατά την οποία το ύψος της ξεπερνά το 15. ***(Δίνεται $\log2 = 0{,}3$).***

<u>Λύση:</u>

α) Η τεταγμένη του σημείου Σ_ν είναι α_ν. Το σημείο Α έχει τεταγμένη α_ν και επειδή ανήκει στην ευθεία $y = x$ θα έχει και τετμημένη α_ν. Το σημείο $\Sigma_{\nu+1}$ θα έχει τετμημένη α_ν και το ύψος του θα είναι όσο η τεταγμένη του $\alpha_{\nu+1}$. Επειδή το σημείο $\Sigma_{\nu+1}$ ανήκει στην ευθεία ε θα είναι $\alpha_{\nu+1} = \frac{4}{5}\alpha_\nu + 6$.

β) $\beta_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} - 30 = \frac{4}{5}\alpha_\nu + 6 - 30 = \frac{4}{5}\alpha_\nu - 24 = \frac{4}{5}(\alpha_\nu - 30) = \frac{4}{5}\beta_\nu$.

Άρα η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda = \frac{4}{5}$ και πρώτο όρο

$\beta_1 = \alpha_1 - 30 = 0 - 30 = -30$. Επομένως $\beta_\nu = \beta_1\lambda^{\nu-1} = -30\left(\frac{4}{5}\right)^{\nu-1}$.

Άρα $\beta_\nu = \alpha_\nu - 30 \Leftrightarrow \alpha_\nu = \beta_\nu + 30 \Leftrightarrow \alpha_\nu = -30\left(\frac{4}{5}\right)^{\nu-1} + 30 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 30\cdot\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^{\nu-1}\right]$.

γ) Πρέπει $\alpha_\nu > 15 \Leftrightarrow 30\cdot\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^{\nu-1}\right] > 15 \Leftrightarrow 1-\left(\frac{4}{5}\right)^{\nu-1} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2} > \left(\frac{4}{5}\right)^{\nu-1} \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2} > \left(\frac{4}{5}\right)^{\nu-1} \Leftrightarrow \log\frac{1}{2} > \log\left(\frac{4}{5}\right)^{\nu-1} \Leftrightarrow \log1 - \log2 > (\nu-1)\log\left(\frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow$$

$$-\log2 > (\nu-1)(\log4-\log5) \Leftrightarrow -\log2 > (\nu-1)\left(\log2^2-\log\left(\frac{10}{2}\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$-\log2 > (\nu-1)[2\log2-(\log10-\log2)] \Leftrightarrow -\log2 > (\nu-1)(2\log2-1+\log2) \Leftrightarrow$$

$-\log 2 > (\nu-1)(3\log 2 - 1) \Leftrightarrow -0{,}3 > (\nu-1)(3\cdot 0{,}3 - 1) \Leftrightarrow -0{,}3 > (\nu-1)(-0{,}1) \Leftrightarrow$
$-0{,}3 > -0{,}1\nu + 0{,}1 \Leftrightarrow -0{,}4 > -0{,}1\nu \Leftrightarrow 0{,}1\nu > 0{,}4 \Leftrightarrow \nu > 4.$

Άρα στη θέση Σ_5 η σφαίρα για πρώτη φορά θα ξεπεράσει σε ύψος το 15.

Μέθοδος Επίλυσης λογαριθμικών συστημάτων.

Ξεκινώντας να λύσουμε ένα λογαριθμικό σύστημα, θέτουμε πρώτα τους περιορισμούς ώστε τα περιεχόμενα των λογαρίθμων να είναι θετικά. Αν ο άγνωστος βρίσκεται σε βάση λογαρίθμου απαιτούμε αυτή να είναι διάφορη του 1.

Για να επιλύσουμε λογαριθμικά συστήματα, προσπαθούμε να τα μετασχηματίσουμε σε γραμμικά ή συστήματα ανώτερου βαθμού. Στη προσπάθεια αυτή χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των λογαρίθμων.

3.7. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \log x^3 + \log y^2 = \log 100 \\ \log\frac{1}{x} + \log y^4 = -3 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2\cdot\log x + \log y = 2 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2 \\ x^2 + y = 12 \end{cases}$.

Λύση:

i) Απαιτούμε $x, y > 0$. Τότε έχουμε:

$$\begin{cases} \log x^3 + \log y^2 = \log 100 \\ \log\frac{1}{x} + \log y^4 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\cdot\log x + 2\cdot\log y = \log 10^2 \\ \log x^{-1} + 4\cdot\log y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\cdot\log x + 2\cdot\log y = 2 \\ -\log x + 4\cdot\log y = -3 \end{cases}.$$

Θέτουμε $\log x = \kappa$, $\log y = \lambda$ οπότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} 3\kappa + 2\lambda = 2 \\ -\kappa + 4\lambda = -3 \,|\cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\kappa + 2\lambda = 2 \\ 3\kappa + 12\lambda = -9 \quad (+) \end{cases}$$

$$14\lambda = -7 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{7}{14} \quad \lambda = -\frac{1}{2}.$$

$$-\kappa + 4\lambda = -3 \Leftrightarrow -\kappa + 4(-\frac{1}{2}) = -3 \Leftrightarrow -\kappa - 2 = -3 \Leftrightarrow -\kappa = -1 \Leftrightarrow \kappa = 1.$$

Άρα $\log x = 1 \Leftrightarrow x = 10$ και $\log y = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Επομένως το σύστημα έχει τη λύση $(x, y) = (10, \frac{1}{\sqrt{10}})$.

ii) Απαιτούμε $x, y > 0$. Τότε έχουμε:

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2\cdot\log x + \log y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 6 \\ \log x^2 + \log y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6 = y \\ \log(x^2\cdot y) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 6 \\ x^2 y = 10^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2x - 6 \\ x^2(2x-6) - 100 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 6 \\ 2x^3 - 6x^2 - 100 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 6 \\ x^3 - 3x^2 - 50 = 0 \end{cases}.$$

Πιθανές ακέραιες ρίζες: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, ± 25, ± 50

Το σχήμα του Horner για τη διαίρεση $(x^3-3x^2-50):(x-5)$ είναι:

1	–3	0	–50	5
	5	10	50	
1	2	10	0	

Επομένως είναι:

$x^3-3x^2-50 = 0 \Leftrightarrow$

$(x-5)(x^2+2x+10) = 0 \Leftrightarrow$

$x-5 = 0$ ή $x^2+2x+10 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 5$.

Τότε $y = 2\cdot 5 - 6 = 10 - 6 = 4$. Δηλαδή το σύστημα έχει τη λύση $(x, y) = (5,4)$.

iii) Απαιτούμε $0 < x, y \neq 1$. Τότε έχουμε:

$$\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2 \\ x^2 + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x y + \dfrac{1}{\log_x y} = 2 \\ x^2 + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\log_x y)^2 + 1 = 2\log_x y \\ x^2 + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (\log_x y)^2 - 2\log_x y + 1 = 0 \\ x^2 + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\log_x y - 1)^2 = 0 \\ x^2 + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x y - 1 = 0 \\ x^2 + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x y = 1 \\ x^2 + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 3 \text{ ή } x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Επομένως το σύστημα έχει τη λύση $(x, y) = (3,3)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

3.8. Να συγκρίνετε τα επόμενα ζεύγη αριθμών:

i) $\log_2 5$, $\log_2 8$ **ii)** $\log_{0,3} 9$, $\log_{0,3} 11$ **iii)** $\ln 3\sqrt{2}$, $\ln 2\sqrt{3}$

3.9. Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \log_{\frac{3\alpha+1}{\alpha-1}} x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

[Απ. $\alpha \in (-1, -\frac{1}{3})$]

3.10. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \log_{x-1}(3-x)$ **ii)** $g(x) = \log(\log x - 1)$

[Απ. i) $A=(1,2) \cup (2,3)$ ii) $A=(10,+\infty)$]

3.11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log|\log x|$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

ii) Για ποιες τιμές του x μηδενίζεται η συνάρτηση;

iii) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x ώστε $f(x) < 0$.

[Απ. i) $A=(0,1) \cup (1,+\infty)$ ii) $10, \frac{1}{10}$ iii) 2,3,4,5,6,7,8,9]

3.12. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\log(x-1) + \log(x+1) = 3\log 2 + \log(x-2)$

β) $\log(4x-1) = 2\log 2 + \log(x^2-1)$

γ) $\frac{1}{2}\cdot\log(x+2) + \log\sqrt{x-3} = 1 + \log\sqrt{3}$

δ) $\frac{1}{2}\cdot\log(x^2-10x+25) + 2\log(x+5) - \log(x^2-25) = \log(2x-108)$

ε) $\log(x^3+1) - \log(x^2-3x+2) = \log(x^2-x+1)$

[Απ. α) 3,5 β) $\frac{3}{2}$ γ) 18 δ) 113 ε) $2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}$]

3.13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x + \log(1+2^x) = x\cdot\log 5 + \log 6$ **β)** $\log_2(4^x+4) = x + \log_2(2^{x+1}-3)$

[Απ. α) 1 β) 2]

3.14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\dfrac{1}{5-4\log x}+\dfrac{4}{1+\log x}=3$ **ii)** $\dfrac{3+\log x}{3-\log x}+\dfrac{2+\log x}{2-\log x}=5$

[Απ. α)10, $\sqrt{10}$ β)10,$10^{18/7}$]

3.15. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\log^2 x-\log x^6=\log^2 3-9$ **ii)** $\log^2 x^3-10\log x+1=0$

[Απ. i) $\frac{1000}{3}$,3000 ii)10, $\sqrt[9]{10}$]

3.16. Αν σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ο πρώτος όρος είναι $\alpha_1=\log_3 3$ και ο δεύτερος όρος της είναι $\alpha_2=\log_3 81$, τότε

α) Να βρείτε την διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{\log_\omega x^3}-9\cdot 3^{\log_\omega x^2}-9\cdot 3^{\log_\omega x}+81=0$.

[Απ. α)ω=3 β)3, 9]

3.17. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $x^{1-\log x}=0{,}01$ **ii)** $x^{1+\log x}=100$ **iii)** $x^{\frac{1}{4}(\log x+7)}=10^{\log x+1}$

[Απ. i)100, $\frac{1}{10}$ ii) $\frac{1}{100}$,10 iii)10, $\frac{1}{10^4}$]

3.18. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}}=10$ **β)** $\dfrac{x^{\log x}}{x^2\cdot\sqrt{x}}=\dfrac{1}{10}$ **γ)** $x^{\log_2 x+2}=256$

[Απ. α)100, $\frac{1}{100}$ β)100, $\sqrt{10}$ γ)4, $\frac{1}{16}$]

3.19. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2^{\log x}+2^{5-\log x}=12$ **ii)** $2^{\log x}+3\cdot 4^{\log x}=52$

[Απ. i)100,1000 ii)100]

3.20. **i)** Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log\sqrt{3}}$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{2\log x}-2\cdot 3^{\log x}-100^{\log\sqrt{3}}=0$.

[Απ. ii)10]

3.21. **i)** Να αποδείξετε ότι: $3^{\log x}=x^{\log 3}$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{\log x}=54-x^{\log 3}$.

[Απ. ii)1000]

3.22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\dfrac{3-x}{3+x}\right)$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

iii) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(0)$ και $f(\frac{1}{3})$.

iv) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f(x+1)=0$.

[Απ. i)A=(-3,3) iii)f(0)>f($\frac{1}{3}$) iv)x=- $\frac{1}{2}$]

3.23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot(\log x)^4+8(\log x)^2\cdot\log(100x)$, $x>0$ και $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Αν $f(10) = 25$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

β) Για την τιμή $\alpha = 1$:

i) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ γράφεται στη μορφή $f(x) = (\log^2 x + 4\log x)^2$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

[Απ. β)ii)1,10^{-4}]

3.24. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $\log_3(x-5) - \log_3 2 - \frac{1}{2}\cdot\log_3(3x-20) < 0$

ii) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) + 3\cdot\log_{\frac{1}{3}}(x-1) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x^2-1) + 2$

[Απ. i)x∈(7,15) ii)x∈(1, $\frac{4}{3}$]]

3.25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2\cdot\ln 2$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

[Απ. α)Α=(0,+∞) β)ln7 γ)x>ln3]

3.26. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x}-2e^x+3)$ και $g(x) = \ln 3 + \ln(e^x-1)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2g(x)$.

[Απ. α)$A_f=\mathbb{R}$, A_g=(0,+∞) β)ln2, ln3 γ)0<x<ln$\frac{3}{2}$]

3.27. Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{-2\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{5}\right)^{x} - 1}$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 5^x$. Να λύσετε την εξίσωση:

$$g(x) + g(x+1) + g(x+2) + \ldots + g(x+49) = \frac{125(5^{50}-1)}{4}.$$

[Απ. Α.[0, $\frac{\log 2}{\log 5}$] Β.x=3]

3.28. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\log[\log(2x^2 + x - 11)] = 0$

β) $\log_{16}x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

γ) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$

δ) $\log x + \log_x 10 = \frac{5}{2}$

[Απ. α)$-\frac{7}{2}$, 3 β)16 γ)27 δ)100, $\sqrt{10}$]

3.29. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\log_{\sqrt{2}} x\cdot\log_2 x\cdot\log_{2\sqrt{2}}\cdot\log_4 x = 54$

β) $\log_2(\log_2 x) = \log_4(\log_4 x)$

γ) $\log_4[\log_3(\log_2 x)] = 0$

[Απ. α)8, $\frac{1}{8}$ β) $\sqrt{2}$ γ)8]

3.30. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\log_2(\log_3 x) \leq 1$

β) $x^{\log_2 x} \leq 4x$

γ) $\log_5(x^2-11x+43) < 2$

[Απ. α) $x \in (1,9]$ β) $x \in [\frac{1}{2},4]$ γ) $x \in (2,9]$]

3.31. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \log(x\cdot y)=3 \\ \log(\frac{x}{y})=1 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} \log x^3+\log y^2=1 \\ \log x^2-\log y=-4 \end{cases}$ **iii)** $\begin{cases} \log\frac{1}{x^2}+\log y=2 \\ \log x^3+\log\sqrt{y}=5 \end{cases}$ **iv)** $\begin{cases} \log^2 x+\log^2 y=10 \\ \log x-\log y=2 \end{cases}$

[Απ. i) $(x,y)=(100,10)$ ii) $(x,y)=(\frac{1}{10},100)$ iii) $(x,y)=(10,10^4)$
iv) $(x,y)=(\frac{1}{10},\frac{1}{1000})$, $(x,y)=(1000,10)$]

3.32. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \log x+\log y=\log 14 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \log x+\log y=3 \\ x+y=65 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} x^2+y^2=425 \\ \log x+\log y=2 \end{cases}$

[Απ. α) $(x,y)=(\frac{7}{3},6)$ β) $(x,y)=(40,25)$ ή $(x,y)=(25,40)$ γ) $(x,y)=(20,5)$ ή $(x,y)=(5,20)$]

3.33. i) Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ οι αριθμοί $\log(3\cdot 2^x-1)$, $\log(4\cdot 2^x-1)$ και $\log(8\cdot 2^x-2)$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου;

ii) Εάν ο τέταρτος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου είναι ο $\alpha_4=-\log 2$, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου.

[Απ. i) $x=-1$ ii) $\alpha_1=-4\log 2$]

3.34. Να βρείτε τον θετικό αριθμό x ώστε να ισχύει:

$$\log x+\log x^3+\log x^5+\ldots+\log x^{2\nu-1}=2\nu^2.$$

[Απ. $x=100$]

3.35. Να λυθεί η εξίσωση: $\log x^2+\log x^4+\log x^6+\ldots+\log x^{2\nu}=\nu(\nu+1)$.

[Απ. $x=-10$ ή $x=10$]

3.36. Να λύσετε την εξίσωση: $\ln x^2+\ln x^4+\ln x^8+\ldots+\ln x^{2^\nu}=2(2^\nu-1)$.

[Απ. $x=-e$ ή $x=e$]

*　　*　　*　　*　　*

Β΄ Ομάδα

3.37. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\log_2\frac{x-2}{x^2-x}-\log_{\sqrt{2}}2\cdot\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να δείξετε ότι $f(x)=\log_2\frac{(x-2)(x-1)}{x}$.

γ) Να λύσετε ως προς $\lambda\in\mathbb{R}$ την εξίσωση: $2\lambda\cdot f(4)=\log_2 3^{\lambda-2}+(2-\lambda)\cdot\log_2 2$.

[Απ. α) $A=(2,+\infty)$ γ) $\lambda=-2$]

3.38. Να λυθούν τα συστήματα: **α)** $\begin{cases} x^{\log y}=4 \\ x\cdot y=40 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 5^{\frac{4x}{\log y}}=25 \\ y^{\frac{\log y}{x+2}}=10^4 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 2^x+2^y=12 \\ \log(2x+2)-\log(3+y)=0 \end{cases}$

[Απ. α) $(x,y)=(10,4)$ ή $(x,y)=(4,10)$ β) $(x,y)=(2,10^4)$ ή $(x,y)=(-1,\frac{1}{100})$ γ) $(x,y)=(2,3)$]

3.39. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \log_y x+\log_x y=\dfrac{17}{4} \\ x\cdot y=243 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} 2^{\log x}-3^{\log y}=1 \\ 4^{\log x}+9^{\log y}=25 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x^4+y^4=641 \\ \log x+\log y=1 \end{cases}$ **iv)** $\begin{cases} y^x\cdot(1+y^x)=10100 \\ \log\sqrt{xy}-\log\sqrt{\dfrac{x}{y}}=3 \end{cases}$

[Απ. i)(x,y)=(81,3) ή (3,81) ii)(x,y)=(100,10) iii)(x,y)=(2,5) ή (5,2) iv)(x,y)=($\frac{2}{3}$,1000)]

3.40. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x^{\log y}+y^{\log x}=20 \\ \log\sqrt{xy}=1 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} x^{\log y}+y^{\log x}=200 \\ x^{\log y}\cdot y^{\log x}=y^4 \end{cases}$

[Απ. i)(x,y)=(10,10) ii)(x,y)=(100,10)]

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

3.41. Να γράψετε *στο* τετράδιό σας τις παρακάτω προτάσεις ορθά συμπληρωμένες:

I. Η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ έχει πεδίο ορισμού το διάστημα ……… και σύνολο τιμών το …… .

II. $\log_5\sqrt{5}=\ldots$, $\log_6\dfrac{1}{6}=\ldots$, $\log\sqrt[3]{100}=\ldots$

III. $\log_5\ldots=2$, $\log_{\frac{1}{2}}\ldots=-3$, $\ln\ldots=-1$

IV. $\log_{\ldots}3=1$, $\log_{\ldots}1=0$, $\log_{\ldots}81=4$

3.42. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* ή *Λάθος* κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Ισχύει ότι $\log x>\ln e$, για κάθε $x>0$.

II. Αν $x<y$ τότε $\ln x>\ln y$.

III. Οι γραφικές παραστάσεις όλων των λογαριθμικών συναρτήσεων διέρχονται από το σημείο (1,0).

3.43. Να τοποθετήσετε σε μια σειρά από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

I. $A=\log 0{,}5$ $B=\log\sqrt{2}$ $\Gamma=\log\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\Delta=0$ $E=1$

II. $A=\log_2\dfrac{1}{2}$ $B=\log_2\dfrac{1}{3}$ $\Gamma=\log_2\sqrt{5}$ $\Delta=0$ $E=1$

III. $A=\log_{0,3}\dfrac{1}{4}$ $B=\log_{0,3}4$ $\Gamma=\log_{0,3}10$ $\Delta=0$ $E=1$

3.44. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Από τις παρακάτω σχέσεις σωστή είναι η

A. $\log_5 2<\log_5\dfrac{1}{2}$ **B.** $\log_5 2\leq\log_5\dfrac{1}{2}$ **Γ.** $\log_5 2>\log_5\dfrac{1}{2}$

Δ. $\log_5 2 = \log_5 \frac{1}{2}$ **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

II. Από τις παρακάτω σχέσεις σωστή είναι η

Α. $\log_{\frac{1}{3}} 5 < \log_{\frac{1}{3}} 7$ **Β.** $\log_{\frac{1}{3}} 5 \leq \log_{\frac{1}{3}} 7$ **Γ.** $\log_{\frac{1}{3}} 5 = \log_{\frac{1}{3}} 7$

Δ. $\log_{\frac{1}{3}} 5 > \log_{\frac{1}{3}} 7$ **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

III. Ο $\log(4 - x^2)$ ορίζεται όταν

Α. $x > 2$ **Β.** $-2 < x < 2$ **Γ.** $x < -2$ **Δ.** $x = 2$ **Ε.** $x = -2$

IV. Ο $\log|x-1|$ δεν ορίζεται αν

Α. $x > 1$ **Β.** $x \neq 1$ **Γ.** $-1 < x < 1$ **Δ.** $x < -1$ **Ε.** $x = 1$

V. Η συνάρτηση $f(x) = \log(x-6) + \log(7-x)$ ορίζεται όταν

Α. $x = 6$ **Β.** $x < 6$ **Γ.** $x > 7$ **Δ.** $x = 7$ **Ε.** $6 < x < 7$

VI. Αν $\log[\log(x-2)] = 0$ τότε το x είναι ίσο με

Α. 10 **Β.** 2 **Γ.** 3 **Δ.** 4 **Ε.** 12

VII. Αν $\log(\eta\mu x) = 0$ τότε είναι

Α. $x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}$ **Β.** $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ **Γ.** $x = 2\kappa\pi$ **Δ.** $x = 2\kappa\pi + \pi$ **Ε.** $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$

VIII. Αν ισχύει $\log(\varepsilon\varphi x) = 0$ τότε είναι

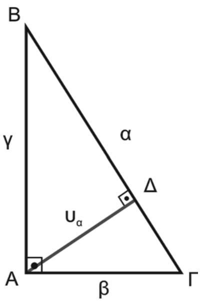
Α. $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3}$ **Β.** $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ **Γ.** $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ **Δ.** $x = \kappa\pi$ **Ε.** $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4}$

IX. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και $y = \frac{1}{2}$ τέμνονται στο σημείο $A(x_0, \frac{1}{2})$. Τότε το x_0 είναι ίσο με

Α. e **Β.** 1 **Γ.** $\frac{1}{2}$ **Δ.** $\sqrt{e}$ **Ε.** $\frac{3}{2}$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ



Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^0$ και ύψος ΑΔ, ισχύουν οι επόμενες μετρικές σχέσεις:

1. $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ ή $\gamma^2 = \alpha \cdot B\Delta$

$A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$ ή $\beta^2 = \alpha \cdot \Gamma\Delta$

2. $\dfrac{AB^2}{A\Gamma^2} = \dfrac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$ ή $\dfrac{\gamma^2}{\beta^2} = \dfrac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$

3. $B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2$ ή $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

4. $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$ ή $\upsilon_\alpha^{\,2} = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$

5. $A\Gamma \cdot AB = B\Gamma \cdot A\Delta$ ή $\beta \cdot \gamma = \alpha \cdot \upsilon_\alpha$

Εφαρμογές:

1. Σε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^0$ και $\beta = \gamma$ είναι:
$\alpha = \beta\sqrt{2}$.

2. Αν ΑΔ είναι το ύψος ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΓ, τότε ισχύει:

$$\frac{1}{\upsilon_\alpha^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

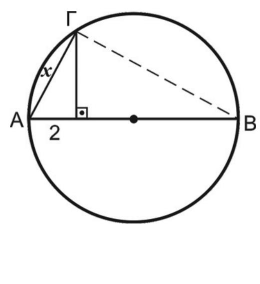
Α΄ Ομάδα

1.1. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 2R και φέρνουμε στο Β την εφαπτόμενη. Αν η προέκταση μιας χορδής ΑΓ τέμνει την εφαπτόμενη στο σημείο Δ, να αποδείξετε ότι $A\Gamma \cdot A\Delta = 4R^2$.

1.2. Από σημείο Ρ εξωτερικό ενός κύκλου (Κ,R) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν τα ΑΒ και ΡΚ τέμνονται στο Δ, να δείξετε ότι $K\Delta \cdot KP = R^2$.

1.3. Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος έχει ακτίνα ίση με 5. Η ΑΒ είναι διάμετρός του και η ΑΓ είναι χορδή του. Η προβολή της χορδής ΑΓ στην ΑΒ ισούται με 2. Να βρείτε την ΑΓ.

[Απ. $2\sqrt{5}$]



1.4. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) με ΑΒ = 3ΑΓ και φέρνουμε το ύψος του ΑΔ. Να δείξετε ότι ΔΒ = 9ΔΓ.

1.5. Αν οι πλευρές α, β, γ ενός τριγώνου ΑΒΓ επαληθεύουν τη σχέση $\frac{\alpha+\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\gamma} = \frac{2\alpha}{\beta}$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

1.6. Τα μήκη των καθέτων πλευρών ΑΒ, ΑΓ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι $\frac{3\lambda}{5}$ και $\frac{4\lambda}{5}$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

α) Το μήκος της υποτείνουσας.
β) Τα μήκη των προβολών των καθέτων πλευρών στην υποτείνουσα
γ) Το μήκος του ύψους ΑΔ.

1.7. Οι προβολές των καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι 2cm και 8cm. Να βρεθούν το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα και οι κάθετες πλευρές του τριγώνου.

1.8. Να βρεθούν οι πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου που έχει περίμετρο 40cm και υποτείνουσα 17cm.

1.9. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ με ύψος ΑΔ έχει $\hat{A} = 90^0$, $\hat{\Gamma} = 30^0$ και ΑΓ = 6. Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΑΔ, ΔΓ, ΒΓ, ΑΒ και ΒΔ.

1.10. (*Θεώρημα Carnot*) Αν Ρ είναι τυχαίο σημείο στο εσωτερικό ενός τριγώνου ΑΒΓ και Δ, Ε, Ζ είναι οι προβολές του Ρ στις ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, δείξετε ότι:
$$Β\Delta^2 + \Gamma E^2 + AZ^2 = \Delta\Gamma^2 + EA^2 + ZB^2.$$

1.11. Έστω ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{A} = 90^0$). Στην κάθετη πλευρά ΑΒ παίρνουμε τυχαίο σημείο Δ. Να δείξετε ότι $B\Gamma^2 + A\Delta^2 = AB^2 + \Gamma\Delta^2$.

1.12. Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) οι μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ και ΒΓ τέμνονται κάθετα. Να δείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των βάσεών του.

1.13. Να δείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών τριγώνου ισούται με τη διαφορά των τετραγώνων των προβολών αυτών στην τρίτη πλευρά.

1.14. Σε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ παίρνουμε τα μέσα Ε, Ζ των πλευρών του ΑΔ και ΓΔ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $BE^2 + BZ^2 = \frac{5}{4}B\Delta^2$.

1.15. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαμέσων ορθογωνίου τριγώνου, είναι ίσο με τα $\frac{3}{2}$ του τετραγώνου της υποτείνουσάς του.

1.16. Δίνεται κύκλος (O, ρ) ένα σημείο Σ εκτός του κύκλου και το εφαπτόμενο τμήμα ΣΑ. Αν $\mathrm{A\Delta} \perp \mathrm{O\Sigma}$ και $\mathrm{O\Delta} = \alpha$, να δείξετε ότι:

α) $\mathrm{O\Sigma} = \dfrac{\rho^2}{\alpha}$ **β)** $\mathrm{\Sigma A} = \dfrac{\rho}{\alpha} \cdot \sqrt{\rho^2 - \alpha^2}$

1.17. Για ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται ότι $\beta - \gamma = \sqrt{3}$ και $\upsilon_\alpha = 1$. Να υπολογίσετε την υποτείνουσα α.

[Απ. α=3]

1.18. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά α, το ύψος του ΑΔ και το μέσο Ε του ΑΔ.

α) Να υπολογίσετε το ΑΔ και το ΒΕ ως συνάρτηση του α.

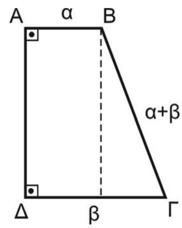
β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα τμήματα ΑΒ , ΑΔ , ΒΔ και ΒΕ.

1.19. Δίνεται γωνία $x\hat{\mathrm{O}}y = 45^0$ και από εσωτερικό σημείο Ρ φέρουμε $\mathrm{PA} \perp \mathrm{O}x$ η οποία τέμνει την Οy στο σημείο Β. Να δείξετε ότι $\mathrm{OP}^2 = \mathrm{AP}^2 + \mathrm{AB}^2$.

1.20. Δίνεται ένα τεταρτοκύκλιο ΑΟΒ. Από ένα σημείο Γ του τόξου ΑΒ φέρουμε $\mathrm{\Gamma E} \perp \mathrm{OA}$, που τέμνει τη διχοτόμο της ορθής γωνίας $\mathrm{A\hat{O}B}$ στο σημείο Δ. Να δείξετε ότι:

$$\mathrm{\Gamma E}^2 + \mathrm{\Delta E}^2 = \mathrm{OA}^2.$$

1.21. Στο διπλανό αχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο με $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\Delta} = 90^0$. Δίνονται ακόμα οι πλευρές του $\mathrm{AB} = \alpha$, $\mathrm{\Gamma\Delta} = \beta$ και $\mathrm{B\Gamma} = \alpha + \beta$. Να αποδείξετε ότι η πλευρά του $\mathrm{A\Delta} = 2\sqrt{\alpha\beta}$.



1.22. Σε κύκλο (K, ρ) φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους ΑΒ και ΓΔ. Από το μέσο Ε της ΚΒ φέρουμε την $\mathrm{EZ} \perp \mathrm{AB}$, που τέμνει τον κύκλο στο Ζ. Να δειχθεί ότι $\mathrm{E\Gamma}^2 + \mathrm{EZ}^2 = 2\rho^2$.

1.23. Δίνεται κύκλος (K, ρ) με διάμετρο ΑΒ. Με διάμετρο την ΑΚ γράφουμε ημικύκλιο. Από τυχαίο σημείο Γ της ΑΚ φέρουμε κάθετη στην ΑΒ που τέμνει τον ημικύκλιο στο Δ και τον κύκλο στο Ε. Να δείξετε ότι $\dfrac{\mathrm{A\Delta}^2}{\mathrm{AE}^2} = \dfrac{1}{2}$.

1.24. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των προβολών δύο κάθετων ακτίνων ενός κύκλου σε μία διάμετρό του, ισούται με το τετράγωνο της ακτίνας του.

1.25. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο και φέρουμε τη διάμετρό του ΑΕ. Αν $\mathrm{BM} \perp \mathrm{AE}$ και $\mathrm{\Gamma N} \perp \mathrm{AE}$, να δείξετε ότι $\mathrm{AB}^2 \cdot \mathrm{AN} = \mathrm{A\Gamma}^2 \cdot \mathrm{AM}$.

1.26. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{\mathrm{A}} = 90^0$) φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ. Αν οι ΑΔ και ΑΕ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $\mathrm{B\hat{A}M}$ και $\mathrm{\Gamma\hat{A}M}$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

i) $\dfrac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{\Delta M}} = \dfrac{2\gamma}{\alpha}$ και $\dfrac{\mathrm{\Gamma E}}{\mathrm{EM}} = \dfrac{2\beta}{\alpha}$ **ii)** $\dfrac{\mathrm{B\Delta}^2}{\mathrm{\Delta M}^2} + \dfrac{\mathrm{\Gamma E}^2}{\mathrm{EM}^2} = 4.$

1.27. Θεωρούμε κύκλο (K,ρ), μια διάμετρό του ΑΒ και τις εφαπτόμενες Ax, By στα σημεία Α, Β. Από τυχαίο σημείο Ρ του κύκλου φέρουμε εφαπτόμενη που τέμνει τις Ax, By στα Γ, Δ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΓΚΔ είναι ορθογώνιο.

β) Το γινόμενο ΑΓ·ΒΔ είναι σταθερό.

1.28. Θεωρούμε σημείο Ε της διαγωνίου ΒΔ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ. Να δείξετε ότι:

α) $AB^2 - AE^2 = EB \cdot E\Delta$

β) $BE^2 + E\Delta^2 = 2AE^2$

1.29. Δίνονται δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΜΒΓ που έχουν κοινή υποτείνουσα ΒΓ. Αν Δ και Ε είναι οι προβολές των Β και Γ στην ΑΜ, να δείξετε ότι:

$$A\Delta^2 + AE^2 = M\Delta^2 + ME^2.$$

1.30. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τις διαμέσους ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Αν $BE \perp \Gamma Z$ να δείξετε ότι οι τρεις διάμεσοι είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου.

1.31. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΒΓ και οι χορδές ΑΒ, ΑΓ. Από τυχαίο σημείο Δ της ΒΓ φέρνουμε φέρουμε κάθετη σ'αυτήν η οποία τέμνει το ημικύκλιο στο Ε και τις δύο χορδές στα Ζ και Η. Να δείξετε ότι $\Delta E^2 = \Delta Z \cdot \Delta H$.

1.32. Δίνεται τετράγωνο πλευράς α. Πάνω στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Ε και Ζ έτσι, ώστε $BE = \frac{\alpha}{3}$ και $\Gamma Z = \frac{2\alpha}{9}$. Να αποδείξετε ότι $AE \perp EZ$.

1.33. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) φέρνουμε το ύψος του ΑΔ. Έστω $\Delta E \perp AB$ και $\Delta Z \perp A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $AE \cdot AB = AZ \cdot A\Gamma$.

β) $A\Delta^2 = \Delta Z^2 + \Delta E^2$.

γ) $\Delta B \cdot \Delta \Gamma = EA \cdot EB + ZA \cdot Z\Gamma$.

1.34. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) παίρνουμε τυχαίο σημείο Ρ της ΒΓ και φέρνουμε $P\Delta \perp AB$ και $PE \perp A\Gamma$. Να δείξετε ότι:

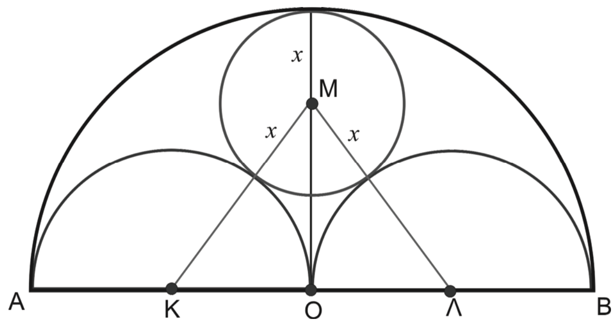
$$BP \cdot P\Gamma = A\Delta \cdot \Delta B + AE \cdot E\Gamma$$

* * * * *

Β΄ Ομάδα

1.35. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) παίρνουμε τυχαίο σημείο Δ στην ΒΓ και φέρνουμε τις $\Delta E \perp AB$ και $\Delta Z \perp A\Gamma$. Να δείξετε ότι $\Delta B \cdot \Delta \Gamma = EA \cdot EB + ZA \cdot Z\Gamma$.

1.36. Στο επόμενο σχήμα η ΑΒ είναι διάμετρος του ημικυκλίου $(O, \frac{R}{2})$. Εντός αυτού είναι εγγεγραμμένα δύο ημικύκλια των οποίων τα κέντρα Κ, Λ είναι τα μέσα των ΟΑ και ΟΒ.



Να βρείτε την ακτίνα x του κύκλου ο οποίος είναι εγγεγραμμένος στο μεγάλο ημικύκλιο και εφάπτεται των δύο άλλων.

[Απ.]

1.37. Από την κορυφή Α ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ φέρουμε ευθεία που τέμνει τις ΒΓ και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι $\frac{1}{\text{ΑΕ}^2} + \frac{1}{\text{ΑΖ}^2} = \frac{1}{\text{ΑΔ}^2}$.

1.38. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) με $\hat{\text{Α}} = \hat{\text{Δ}} = 90^0$ του οποίου οι διαγώνιες είναι κάθετες. Να αποδείξετε ότι $\text{ΑΔ}^2 = \text{ΑΒ}\cdot\text{ΓΔ}$.

1.39. Δίνεται τεταρτοκύκλιο ΑΟΒ και από τυχαίο σημείο Σ του τόξου ΑΒ φέρουμε παράλληλο στην ΑΒ που τέμνει τις ΟΑ και ΟΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι: $\text{ΣΓ}^2 + \text{ΣΔ}^2 = \text{ΑΒ}^2$.

1.40. Σε κύκλο (Κ,R) εγγράφουμε ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Αν Ρ είναι τυχαίο σημείο του κύκλου, να δείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του Ρ από τις πλευρές του ορθογωνίου ισούται με $4R^2$.

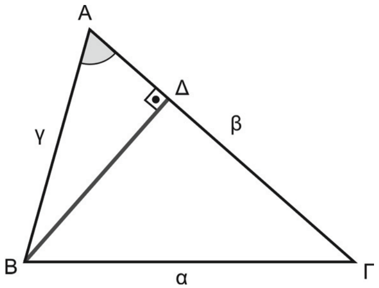
1.41. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και δύο κάθετες χορδές του ΑΒ , ΓΔ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Σ. Να δείξετε ότι:

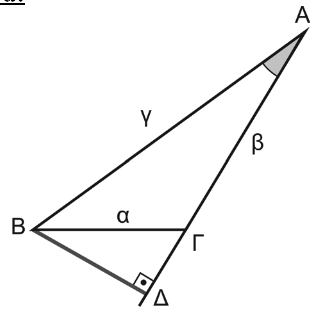
α) $\text{ΣΑ}^2 + \text{ΣΒ}^2 + \text{ΣΓ}^2 + \text{ΣΔ}^2 = 4R^2$.

β) $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2 + \text{ΒΔ}^2 + \text{ΔΑ}^2 = 8R^2$.

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

Γενίκευση Πυθαγόρειου θεωρήματος για οξεία γωνία:

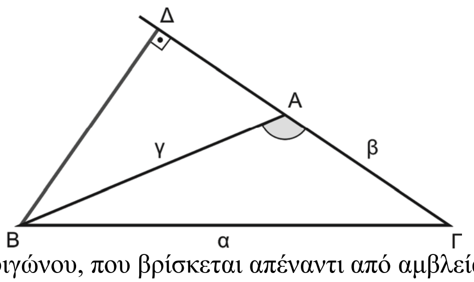




Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \mathrm{A\Delta}$$

Γενίκευση Πυθαγόρειου θεωρήματος για αμβλεία γωνία:



Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot \mathrm{A\Delta}$$

Προσδιορισμός του είδους τριγώνου ως προς τις γωνίες:

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι ισοδυναμίες:
(i) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ αν και μόνο αν $\hat{A} = 90^0$
(ii) $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ αν και μόνο αν $\hat{A} < 90^0$
(iii) $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ αν και μόνο αν $\hat{A} > 90^0$

Νόμος συνημιτόνων:

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι σχέσεις:

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cdot$συνΑ ή συνΑ $= \dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$

$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\cdot$συνΒ ή συνΒ $= \dfrac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2\gamma\alpha}$

$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cdot$συνΓ ή συνΓ $= \dfrac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}$

Μήκη υψών τριγώνου:

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\upsilon_\alpha = \frac{2}{\alpha}\cdot\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$
$$\upsilon_\beta = \frac{2}{\beta}\cdot\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$
$$\upsilon_\gamma = \frac{2}{\gamma}\cdot\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

2.1. Δίνεται ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 2R. Στην προέκταση μιας τυχαίας χορδής ΑΓ προς το μέρος του Γ θεωρούμε ένα σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι:

$A\Delta^2 - B\Delta^2 = 2A\Delta\cdot A\Gamma - 4R^2$.

2.2. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του, αν οι πλευρές του είναι:

i) $\alpha = 3\lambda$, $\beta = 4\lambda$, $\gamma = 6\lambda$ **ii)** $\alpha = \lambda$, $\beta = \dfrac{\lambda}{2}$, $\gamma = \dfrac{2\lambda}{3}$

iii) $\alpha = 8\lambda$, $\beta = 17\lambda$, $\gamma = 15\lambda$ **iv)** $\alpha = 7\lambda$, $\beta = 6\lambda$, $\gamma = 8\lambda$

2.3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha = 5, \beta = 6$ και $\gamma = 4$.

i) Να βρείτε το είδος της $\hat{B}$.

ii) Να υπολογίσετε την προβολή της ΑΒ στη ΒΓ.

iii) Να βρείτε το ύψος του υ_α.

2.4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha = 14, \beta = 15$ και $\gamma = 13$. Να βρείτε:
i) Το είδος του τριγώνου, ως προς τις γωνίες του,
ii) Την προβολή της ΑΒ στη ΒΓ.
iii) Το ύψος του υ_α.

2.5. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha = 7, \beta = 5$ και $\gamma = 4\sqrt{2}$. Να βρεθεί:
i) Το είδος του τριγώνου, ως προς τις γωνίες του,
ii) Η προβολή της ΑΒ στη ΒΓ.
iii) Το ύψος του υ_α.
iv) Η γωνία $\hat{B}$.

2.6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 28cm , ΑΓ = 12cm και ΒΓ = 2dm. Να υπολογίσετε την $\hat{\Gamma}$.

[Απ. 120^0]

2.7. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha = 1+\sqrt{3}$, $\beta = \sqrt{6}$ και $\gamma = 2$. Να δείξετε ότι $\hat{B} = 60^0$.

2.8. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 150^0$. Να δείξετε ότι: $\alpha^2 - \beta^2 = \gamma^2 + \beta\gamma\sqrt{3}$.

2.9. Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι $AB = \kappa$, $B\Gamma = \lambda$ και $A\Gamma = \sqrt{\kappa^2+\lambda^2-\kappa\lambda}$, όπου κ, λ γνωστά τμήματα. Να βρείτε την $\hat{B}$.

[Απ. 60^0]

2.10. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη βάση του ΒΓ προς το μέρος του Γ, κατά τμήμα ΓΔ = 2ΒΓ. Να αποδείξετε ότι: $A\Delta^2 = A\Gamma^2 + 6\cdot B\Gamma^2$.

2.11. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 11. Αν Δ είναι σημείο της βάσης ΒΓ και είναι ΒΔ = 3, ΔΓ = 7, να υπολογίσετε το τμήμα ΑΔ.

[Απ. 10]

2.12. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά α. Με βάσεις τις πλευρές του και εκτός του τετραγώνου κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ, ΔΑΘ. Να αποδείξετε ότι το ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο και να υπολογίσετε την πλευρά του.

2.13. Δίνονται τα τμήματα $\alpha = x^2 + x + 1$, $\beta = x^2 - 1$ και $\gamma = 2x + 1$.
α) Να βρεθούν οι συνθήκες για το x, ώστε τα α, β, γ να είναι πλευρές τριγώνου.
β) Να υπολογιστεί η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου που δημιουργείται με τις παραπάνω πλευρές.

[Απ. α) $x>1$ β) 120^0]

2.14. Σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{B} = 45^0$. Αν $AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$, $A\Gamma = x$ και $B\Delta = y$, να δείξετε ότι $x\cdot y = \sqrt{\alpha^4+\beta^4}$.

* * * * *

Β΄ Ομάδα

2.15. Επί των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά τα τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΖΗΓ και ΓΘΙΒ. Να υπολογιστεί το άθροισμα $ΕΖ^2 + ΗΘ^2 + ΙΔ^2$ ως συνάρτηση των πλευρών $α, β, γ$ του τριγώνου.

2.16. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ το οποίο έχει $\hat{Α} = 90^0$, $\hat{Β} = 150^0$ και $ΑΔ = ΑΒ = ΒΓ = α$. Να υπολογίσετε την πλευρά του ΓΔ.

[Απ. $α\sqrt{\sqrt{3}+1}$]

2.17. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και $ΑΒ = 3α$, $ΑΔ = ΓΔ = α$ και $\hat{Α} = 60^0$. Να υπολογίσετε:

i) Τη διαγώνιό του ΑΓ.

ii) Την πλευρά του ΒΓ.

[Απ. i) $α\sqrt{3}$ ii) $α\sqrt{3}$]

2.18. Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει $β^2 + γ^2 = 2α^2$. Έστω ΒΕ, ΓΖ δύο ύψη του και Η το ορθόκεντρό του.

α) Να βρεθεί το είδος της γωνίας $\hat{Α}$.

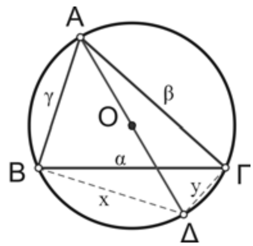
β) Να αποδείξετε ότι $α^2 = β\cdot ΑΕ + γ\cdot ΑΖ$.

γ) Να αποδείξετε ότι $ΒΗ^2 + ΓΗ^2 = 2ΑΗ^2$.

2.19. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο και είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Ο, R).

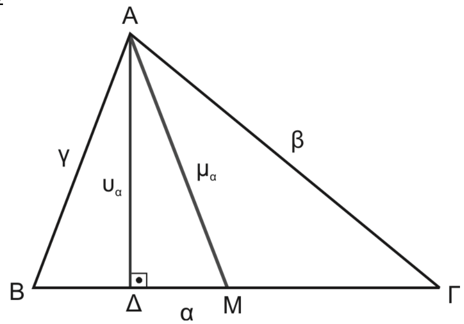
α) Βρείτε το είδος της γωνίας $Β\hat{Δ}Γ$

β) Δείξτε ότι
$α^2 + β^2 + γ^2 > 8R^2$.



ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΑΜΕΣΩΝ

1ο Θεώρημα Διαμέσων:



Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\,\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε τους τύπους:

(i) $\beta^2 + \gamma^2 = 2\,\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$ ή $\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$

(ii) $\gamma^2 + \alpha^2 = 2\,\mu_\beta^2 + \frac{\beta^2}{2}$ ή $\mu_\beta^2 = \frac{2\gamma^2 + 2\alpha^2 - \beta^2}{4}$

(iii) $\alpha^2 + \beta^2 = 2\,\mu_\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{2}$ ή $\mu_\gamma^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}$

2ο Θεώρημα Διαμέσων:

Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha\cdot \text{ΜΔ}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

3.1. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται ΑΒ = 3m , ΑΓ = 5m και $\hat{A} = 60^0$. Να υπολογίσετε:
i) Το μήκος της πλευράς ΒΓ.
ii) Το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

3.2. Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ΑΒ = 6, ΒΓ = 12 και ΓΑ = 8.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι αμβλυγώνιο.
β) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.
γ) Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της διαμέσου ΑΜ στην πλευρά ΒΓ.

3.3. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8\,\mu_\alpha^2$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^0$ και αντίστροφα.

3.4. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $5\,\mu_\alpha^2 = \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^0$ και αντίστροφα.

3.5. Να αποδείξετε ότι σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν:
i) $9\alpha^2 = 4(2\,\mu_\beta^2 + 2\,\mu_\gamma^2 - \mu_\alpha^2)$.
ii) $2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow 2\,\mu_\alpha^2 = \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2$
iii) $2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow 2\mu_\alpha = \alpha\sqrt{3}$.
iv) $\mu_\alpha^2 = \beta\cdot\gamma \Leftrightarrow \alpha = (\beta - \gamma)\sqrt{2}$, $\beta > \gamma$.
v) $\mu_\alpha^2 + \beta\cdot\gamma > \dfrac{\alpha^2}{4} > \mu_\alpha^2 - \beta\cdot\gamma$.
vi) $\mu_\alpha^4 + \mu_\beta^4 + \mu_\gamma^4 = \dfrac{9}{16}(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4)$.

3.6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και διάμεσο ΑΜ = μ_α. Αν ισχύει η σχέση $2\,\mu_\alpha^2 - \beta\gamma = \dfrac{\alpha^2}{2}$.
α) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$,
β) Να υπολογιστεί η γωνία $\hat{A}$.

3.7. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ για το οποίο ισχύει ΑΒ = $2\sqrt{2}$ και ΒΓ = $2\sqrt{6}$. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι $AM = \dfrac{AB\cdot A\Gamma}{B\Gamma}$.

3.8. Θεωρούμε δύο ίσα τμήματα ΑΒ και ΓΔ καθώς και τα μέσα τους Μ και Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $NA^2 + NB^2 = M\Gamma^2 + M\Delta^2$.

3.9. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη βάση του ΒΓ κατά τμήμα ΓΔ = ΒΓ. Να δείξετε ότι: $A\Delta^2 = A\Gamma^2 + 2\cdot B\Gamma^2$.

3.10. Θεωρούμε κύκλο (K,R) του οποίου το κέντρο συμπίπτει με το σημείο τομής των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Αν Ρ είναι τυχαίο σημείο του κύκλου, να δείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του Ρ από τις κορυφές του παραλληλογράμμου είναι σταθερό.

3.11. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι (Ο,R) και (Ο,ρ). Μία ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο τους Ο και τέμνει τους κύκλους κατά σειρά στα σημεία Α , Γ, Δ και Β. Θεωρούμε τα σημεία Κ και Μ των δύο κύκλων αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

$$ΜΑ^2 + ΜΒ^2 = ΚΓ^2 + ΚΔ^2.$$

3.12. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της πλευράς του ΑΒ.

i) Να αποδείξετε ότι $2ΜΓ^2 + 2ΜΔ^2 = ΑΒ^2 + 4ΒΓ^2$.

ii) Αν δίνεται επί πλέον ότι ΑΒ = 8 , ΒΓ = 4 και $\hat{Α} > 120^0$, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔΜΓ είναι ορθογώνιο.

3.13. Αν Η είναι το ορθόκεντρο ενός τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

$$ΗΓ^2 – ΗΒ^2 = ΑΓ^2 – ΑΒ^2.$$

3.14. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται ότι $3\beta^2 + 2\gamma^2 = 2\alpha^2$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\mu_\alpha^2 = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{4}$

ii) $\hat{Α} > 90^0$

iii) Αν ΚΜ είναι η προβολή της διαμέσου ΒΜ στην πλευρά β, τότε αυτή ισούται με $\dfrac{3\beta}{4}$.

3.15. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ το σημείο Θ είναι το βαρύκεντρό του και $Β\hat{Θ}Γ = 120^0$, να δείξετε ότι $\mu_\beta \cdot \mu_\gamma = \dfrac{5\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{4}$.

3.16. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Δ τυχαίο σημείο της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι: $ΑΒ^2 – ΑΔ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ$.

3.17. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ. Να δείξετε ότι:

$$ΑΒ \cdot ΓΔ = ΑΓ^2 – ΒΓ^2.$$

3.18. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και μια χορδή του ΑΒ. Αν Γ είναι ένα σημείο της ΑΒ , να δείξετε ότι: $ΟΓ^2 + ΓΑ \cdot ΓΒ = R^2$.

* * * * *

Β΄ Ομάδα

3.19. Αν τα σημεία Δ, Ε τριχοτομούν την υποτείνουσα ΒΓ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (δηλ. ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ), να δείξετε ότι: $ΑΔ^2 + ΔΕ^2 + ΕΑ^2 = \dfrac{2}{3}\alpha^2$.

3.20. Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Αν δ_1, δ_2 είναι οι διαγώνιοί του και μ_1, μ_2 τα τμήματα που ενώνουν τα μέσα των απέναντι πλευρών του, να αποδείξετε ότι:

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 = 2(\mu_1^2 + \mu_2^2)$$

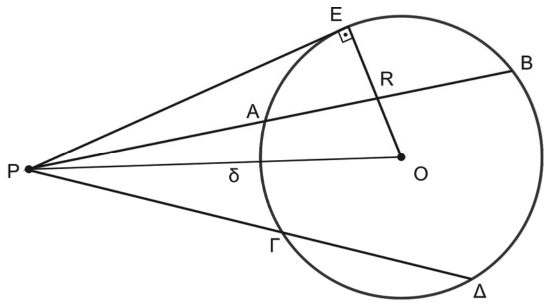
3.21. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta > \gamma$ και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Αν Κ είναι το μέσο του ΔΕ, να δείξετε ότι:

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2(\text{ΚΓ}^2 - \text{ΚΒ}^2)$$

3.22. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, το ύψος του ΑΗ, η διχοτόμος του ΑΔ και Μ το μέσο της ΒΓ. Να δείξετε ότι: $4 \cdot \text{ΜΗ} \cdot \text{ΜΔ} = (\beta - \gamma)^2$.

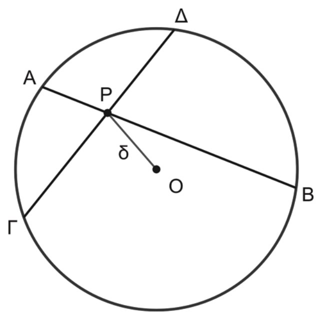
3.23. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε // ΒΓ διερχόμενη από το κέντρο του ΑΒΓ. Αν Μ τυχαίο σημείο της ε, να δείξετε ότι: $\text{ΜΒ}^2 + \text{ΜΓ}^2 = 2 \cdot \text{ΜΑ}^2$

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΚΥΚΛΟ



Όταν οι προεκτάσεις των χορδών ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο σημείο Ρ, τότε:

$$PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta = \delta^2 - R^2 = PE^2$$



Όταν οι χορδές ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο σημείο Ρ, τότε:

$$PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta = R^2 - \delta^2$$

<u>Δύναμη σημείου Ρ ως προς κύκλο (Ο,R):</u>

Θεωρούμε κύκλο (Ο,R) και σημείο Ρ του επιπέδου του. Τότε:

$$\Delta^{P}_{(O,R)} = \delta^2 - R^2 = OP^2 - R^2.$$

- Το Ρ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (Ο,R) αν και μόνο αν $\Delta^{P}_{(O,R)} > 0$.
- Το Ρ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (Ο,R) αν και μόνο αν $\Delta^{P}_{(O,R)} < 0$.
- Το Ρ είναι σημείο του κύκλου (Ο,R) αν και μόνο αν $\Delta^{P}_{(O,R)} = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

4.1. Ένα σημείο Δ απέχει 10cm από το κέντρο ενός κύκλου που έχει ακτίνα 8cm. Από το Δ φέρνουμε την τέμνουσα ΔΑΒ που ορίζει τη χορδή ΑΒ = 6cm. Να βρεθεί το μήκος ΔΒ.

4.2. Δίνεται κύκλος με ακτίνα 8cm και σημείο Α, που απέχει από το κέντρο 120mm. Φέρνουμε από το Α ευθεία που τέμνει τον κύκλο κατά χορδή ΒΓ = 2cm. Να βρεθεί το μήκος της ΑΓ.

4.3. Δίνεται ένας κύκλος με ακτίνα R = 1,2dm και ένα σημείο Ε, που απέχει από το κέντρο 6cm. Φέρνουμε τη χορδή ΑΕΒ, που έχει μήκος 21cm. Να βρεθούν τα μήκη των τμημάτων ΑΕ και ΕΒ.

4.4. Στο εσωτερικό ενός κύκλου (Ο,13m) παίρνουμε ένα σημείο Δ, που απέχει από το κέντρο 11m και φέρνουμε την ΑΔΒ. Αν το τμήμα ΔΒ είναι τριπλάσιο από το ΑΔ, να βρεθεί το μήκος της χορδής ΑΒ.

4.5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 5cm, ΑΓ = 7cm και ΒΓ = 8cm. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ και τη διάμεσο ΑΜ η οποία τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο σημείο Ε. Να υπολογίσετε:

α) Το μήκος του τμήματος ΔΜ.

β) Το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

γ) Το γινόμενο ΔΜ·ΜΕ.

4.6. Θεωρούμε κύκλο (Κ, ρ), μια διάμετρό του ΑΒ και μια χορδή του ΑΓ. Από το μέσο Μ της ΑΚ φέρνουμε ΜΔ ⊥ ΑΚ, που τέμνει την ΑΓ στο Δ. Δείξτε ότι:

$$ΑΓ \cdot ΑΔ = \rho^2.$$

4.7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ τέτοιες, ώστε να ισχύει $\beta^2 + \gamma^2 = 3\alpha^2$. Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ στο Ε.

α) Να εκφράσετε τη διάμεσο ΑΜ ως συνάρτηση της πλευράς α.

β) Να αποδείξετε ότι $ΑΜ \cdot ΑΕ = \dfrac{3\alpha^2}{2}$

4.8. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ και σημείο Μ της προέκτασης της διαγωνίου του ΑΓ. Να δείξετε ότι: $ΜΑ \cdot ΜΓ = ΜΔ^2 - ΑΔ^2$.

4.9. Αν Η είναι το ορθόκεντρο οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ με ύψη ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ, να δείξετε ότι:

i) $ΑΗ \cdot υ_α = ΑΖ \cdot γ = ΑΕ \cdot β$

ii) $ΒΗ \cdot υ_β + ΓΗ \cdot υ_γ = α^2$

iii) $ΑΗ \cdot υ_α + ΒΗ \cdot υ_β + ΓΗ \cdot υ_γ = \frac{1}{2}(α^2+β^2+γ^2)$

4.10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Σ στη βάση του ΒΓ. Αν οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΒΣ και ΑΓΣ τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα στα σημεία

Μ και Ν, να δείξετε ότι το άθροισμα ΒΝ+ΓΜ είναι σταθερό, οποιοδήποτε σημείο της βάσης κι αν είναι το Σ.

4.11. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και διάμεσος του ΑΜ. Παίρνουμε σημείο Δ της πλευράς ΑΓ τέτοιο ώστε $A\widehat{M}\Delta = \hat{B}$, και από το Δ φέρνουμε παράλληλο προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την ΑΜ στο σημείο Ε. Να δείξετε ότι: $\Delta E^2 = AE \cdot EM$.

4.12. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 2R και δύο χορδές του ΑΓ, ΒΔ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι: $A P \cdot A\Gamma + BP \cdot B\Delta = 4R^2$.

4.13. Δίνεται κύκλος (Ο,R), μια διάμετρος αυτού ΑΒ και τα σημεία Γ και Δ της ΑΒ ώστε $O\Gamma = O\Delta = \alpha$. Αν Μ τυχαίο σημείο του κύκλου και ΜΕ , ΜΖ οι χορδές του που διέρχονται από τα Γ, Δ , δείξτε ότι:

i) $M\Gamma \cdot \Gamma E = M\Delta \cdot \Delta Z = R^2 - \alpha^2$ **ii)** $M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 2(R^2 + \alpha^2)$

iii) $\dfrac{M\Gamma}{\Gamma E} + \dfrac{M\Delta}{\Delta Z} = 2 \cdot \dfrac{R^2 + \alpha^2}{R^2 - \alpha^2}$

4.14. Δίνεται κύκλος (Ο,R), μια διάμετρος αυτού ΑΒ και τα σημεία Γ και Δ της ΑΒ ώστε $O\Gamma = O\Delta = \delta$. Αν Ρ τυχαίο σημείο του κύκλου και ΡΕ , ΡΖ οι χορδές του που διέρχονται από τα Γ, Δ , δείξτε ότι:

i) $\Gamma E = \dfrac{R^2 - \delta^2}{\Gamma P}$ **ii)** $\Delta Z = \dfrac{R^2 - \delta^2}{\Delta P}$ **iii)** $\dfrac{\Gamma P}{\Gamma E} + \dfrac{\Delta P}{\Delta Z}$ σταθερό

4.15. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και πάνω σε μια διάμετρό του παίρνουμε τα σημεία Α, Δ τέτοια ώστε $OA = O\Delta = \alpha$. Φέρνουμε χορδή ΒΓ του κύκλου που διέρχεται από το Δ. Να δείξετε ότι:

α) $AB^2 + B\Delta^2 = A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 = 2(R^2 + \alpha^2)$.

β) Το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με $2(3R^2+\alpha^2)$.

4.16. Θεωρούμε τρεις κύκλους με κέντρα Κ, Λ και Ο που διέρχονται από δύο σημεία Α, Β ώστε το Ο να είναι το μέσο της ΚΛ. Αν Ρ ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου, να δείξετε ότι:

$$\Delta^{P}_{(K)} + \Delta^{P}_{(\Lambda)} = 2\,\Delta^{P}_{(O)}$$

4.17. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τις διαμέσους ΒΕ και ΓΔ και το βαρύκεντρό του Θ. Αν το τετράπλευρο ΑΔΘΕ είναι εγγράψιμο, να δείξετε ότι $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$.

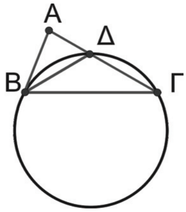
4.18. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Μια ευθεία που διέρχεται από το Α τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ρ και τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο σημείο Σ. Να δείξετε ότι η ΑΒ εφάπτεται του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΒΣΡ στο σημείο Β.

* * * * *

Β΄ Ομάδα

4.19. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και γράφουμε τον κύκλο που διέρχεται από το Α και τα μέσα των ΑΒ και ΑΔ. Αν από το Γ φέρουμε την εφαπτομένη ΓΕ στον κύκλο, να δείξετε ότι ΓΕ = ΑΒ.

4.20. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ , στο οποίο ισχύει ότι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και έχουμε φέρει τη διχοτόμο του ΒΔ. Επίσης έχει σχεδιαστεί ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΔΓ. Να δείξετε ότι $\beta^2 - \gamma^2 = \alpha\gamma$.



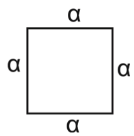
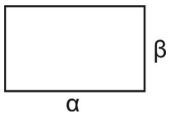
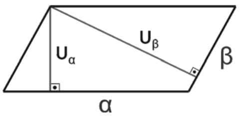
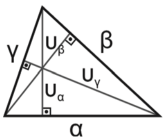
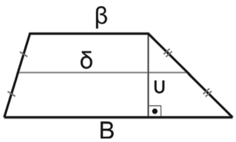
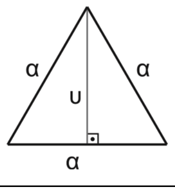
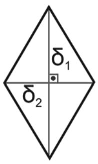
4.21. Με πλευρά τη χορδή ΑΒ = 1 κύκλου (Ο, R) κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΒΓΔ που η πλευρά του ΒΓ δεν έχει σημείο εσωτερικό του κύκλου. Αν το εφαπτόμενο τμήμα ΓΚ είναι ΓΚ = 2, να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου.

4.22. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και Θ το κέντρο βάρους του. Η διάμεσος ΑΔ του τριγώνου τέμνει τον κύκλο στο Ε. Να δείξετε ότι:

$$\Delta^{\Theta}_{(\mathrm{O},R)} = -\frac{1}{9}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

4.23. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ οι διάμεσοί του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ στα σημεία Κ, Λ και Ρ αντίστοιχα. Αν Θ είναι το κέντρο βάρους του ΑΒΓ να δείξετε ότι: $\frac{\Theta\mathrm{A}}{\Theta\mathrm{K}} + \frac{\Theta\mathrm{B}}{\Theta\Lambda} + \frac{\Theta\Gamma}{\Theta\mathrm{P}} = 3$.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΕΥΘΥΓΑΜΜΟ ΣΧΗΜΑ		ΕΜΒΑΔΟΝ
Τετράγωνο		$Ε = α^2$
Ορθογώνιο		$Ε = α\cdot β$
Παραλληλόγραμμο		$Ε = α\cdot υ_α = α\cdot υ_β$
Τρίγωνο		$Ε = \frac{1}{2}\cdot α\cdot υ_α = \frac{1}{2}\cdot α\cdot υ_β = \frac{1}{2}\cdot α\cdot υ_γ$
Τραπέζιο		$Ε = \frac{Β+β}{2}\cdot υ = δ\cdot υ$
Ισόπλευρο τρίγωνο		$Ε = \frac{α^2\cdot\sqrt{3}}{4}$
Ρόμβος		$Ε = \frac{δ_1\cdot δ_2}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.1. Να υπολογιστούν οι πλευρές παραλληλογράμμου, που έχει περίμετρο 24cm και το ένα ύψος του είναι διπλάσιο του άλλου.

[Απ. 8cm,4cm]

5.2. Σε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ > ΒΓ, τα μήκη των ΒΓ, ΑΒ και ΑΓ είναι διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί. Να υπολογίσετε:

α) Το εμβαδόν του ορθογωνίου

β) Την απόσταση της κορυφής Α από την ΒΔ.

5.3. Ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ έχει ΒΓ = ΓΔ = ΑΔ και τη βάση ΑΒ κατά 2cm μικρότερη από το άθροισμα των τριών αυτών πλευρών. Αν το ύψος του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι 5cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

5.4. Σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ παίρνουμε τυχαίο σημείο Μ της πλευράς ΑΒ.

i) Δείξτε ότι: $(ΔΜΓ) = \frac{(ΑΒΓΔ)}{2}$.

ii) Δείξτε ότι: (ΔΜΓ) = (ΔΑΜ) + (ΜΒΓ)

iii) Αν (ΔΜΓ) = 8, να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου.

[Απ. iii)16]

5.5. Αν Σ είναι σημείο της διαγωνίου ΑΓ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να δείξετε ότι (ΣΒΓ) = (ΣΓΔ).

5.6. Να διαιρέσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ σε τρία ισοδύναμα μέρη με ευθείες που άγονται από την κορυφή Α.

5.7. Αν ΑΜ είναι διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ και ΜΔ, ΜΕ οι αποστάσεις του Μ από τις ΑΒ και τις ΑΓ αντίστοιχα, να δειχθεί ότι: $ΑΒ \cdot ΜΔ = ΑΓ \cdot ΜΕ$.

5.8. Να αποδείξετε ότι αν ένα ισόπλευρο τρίγωνο και ένα τετράγωνο έχουν την ίδια περίμετρο, τότε δεν μπορεί να είναι ισοδύναμα.

5.9. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά του ΒΓ κατά τμήμα $ΓΕ = \frac{1}{3} \cdot ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $(ΑΒΕ) = \frac{4}{3} \cdot (ΑΔΕ)$

β) $ΑΕ^2 = ΔΕ^2 + \frac{5}{3} \cdot ΒΓ^2$

5.10. Ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ = \alpha$ και $ΒΓ = \beta$. Αν Κ είναι το κέντρο του και Ε είναι το μέσο της ΓΔ τότε να υπολογίσετε:

i) Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΚΕ.

ii) Το ΒΕ.

iii) Την απόσταση του Κ από το ΒΕ.

[Απ. i) $\frac{\alpha\beta}{8}$ ii) $\frac{\sqrt{\alpha^2+4\beta^2}}{2}$ iii) $\frac{\alpha\beta}{2\sqrt{\alpha^2+4\beta^2}}$]

5.11. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι διάμεσοί του ΒΔ και ΓΕ. Αν Θ το κέντρο βάρους του τριγώνου, να αποδείξετε ότι:
α) (ΑΒΔ) = (ΑΓΕ) = (ΒΕΓ)
β) (ΘΒΓ) = (ΑΕΘΔ)
γ) (ΒΕΘ) = (ΓΔΘ)

5.12. Σε τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν Ν είναι το μέσο του ΒΖ και Κ, Λ τα σημεία στα οποία τέμνει η ΔΕ τα ΑΝ και ΑΖ, να αποδείξετε ότι

$$(ΑΚΛ) = \frac{1}{16}(ΑΒΓ).$$

5.13. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τις διαμέσους του ΒΔ και ΓΕ. Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των ΒΔ και ΓΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $(ΒΚΛΓ) = \frac{5}{16}$ (ΑΒΓ)

5.14. Σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ και παίρνουμε τα σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι (ΕΓΔ) = (ΖΑΔ).

5.15. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, ένα τυχαίο σημείο Ε της ΑΒ και την ΓΚ ⊥ ΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

$$(ΑΒΓΔ) = ΔΕ \cdot ΓΚ.$$

5.16. Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ένα σημείο Σ στην προέκταση της πλευράς ΔΓ προς το μέρος του Γ. Να αποδείξετε ότι:
α) $(ΑΒΔ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓΔ)$
β) (ΒΔΣ) = (ΣΑΔ)
γ) αν η ΑΣ τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Ε, τότε (ΕΔΣ) – (ΕΑΒ) = (ΣΒΓ)

5.17. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 4 και σημείο Σ της πλευράς ΑΒ, ώστε ΑΣ = 1. Να υπολογιστεί η απόσταση του Δ από την ΓΣ.

[Απ. $\frac{16}{5}$]

5.18. Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^0$, ΑΔ = ΑΒ = 3 και ΒΓ = 5. Να υπολογίσετε:
α) Το εμβαδόν του τραπεζίου.
β) Την απόσταση της κορυφής Α από την ευθεία ΒΓ.

5.19. Με υποτείνουσες τις κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, με $\beta + \gamma = 20$, κατασκευάζουμε ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ εκτός αυτού.
α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Α και Ε είναι συνευθειακά.
β) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΒΓΕΔ.

5.20. Να δείξετε ότι το άθροισμα των αποστάσεων ενός σημείου της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ από τις πλευρές είναι σταθερό.

5.21. Να δείξετε ότι το άθροισμα των αποστάσεων ενός εσωτερικού σημείου ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ από τις πλευρές του είναι ίσο με $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

5.22. Τα τρίγωνα με κοινή κορυφή το σημείο τομής των διαγωνίων ενός τραπεζίου και βάσεις τις μη παράλληλες πλευρές του είναι ισοδύναμα.

5.23. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διάμεσός του ΑΔ, το μέσο Μ του τμήματος ΑΔ, το μέσο Ν του τμήματος ΓΜ και το μέσο Σ του τμήματος ΒΝ. Να αποδείξετε ότι:

$$(\Sigma M N) = \frac{1}{8}(AB\Gamma)$$

5.24. Να αποδειχθεί ότι κάθε ευθεία που διέρχεται από το μέσο της διαμέσου ενός τραπεζίου και τέμνει τις βάσεις του, χωρίζει το τραπέζιο σε δύο ισοδύναμα τραπέζια.

5.25. Η διάμεσος ενός τραπεζίου είναι 10cm και χωρίζει το εμβαδόν του σε δύο εμβαδά με λόγο 3:5. Να υπολογιστούν οι βάσεις του τραπεζίου.

5.26. Ένας ρόμβος έχει περίμετρο 48cm και άθροισμα διαγωνίων 26cm. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του.

5.27. Αν ΑΒΓΔ είναι ένα τραπέζιο και Ε, Ζ τα μέσα των βάσεών του ΑΒ, ΓΔ. Να δείξετε ότι $(HA\Delta) = (HB\Gamma)$, αν Η είναι σημείο της ΕΖ.

5.28. Αν Σ τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και ΒΒ΄, ΓΓ΄ οι αποστάσεις των Β, Γ από ευθεία (ε), που περνάει από το Α και είναι κάθετη στην ΑΣ, να δειχθεί ότι:
$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot A\Sigma \cdot B'\Gamma'$.

5.29. Οι διαγώνιες ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ σχηματίζουν γωνία 30^0. Να δειχθεί ότι:

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{4} \cdot A\Gamma \cdot B\Delta.$$

5.30. Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ $(AB > \Gamma\Delta)$ φέρουμε τη $\Gamma Z \perp AB$. Να αποδειχθεί ότι $(AB\Gamma\Delta) = 2(A\Gamma Z)$.

5.31. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $AB = 2$ cm και η διάμεσος $B\Delta = 1$. είναι $B\hat{\Delta}A = 30^0$, να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

5.32. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο και ένα τετράγωνο έχουν την ίδια περίμετρο. Μπορεί να έχουν το ίδιο εμβαδόν;

5.33. Θεωρούμε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις $AB = \alpha$, $\Gamma\Delta = \beta$, όπου $\alpha > \beta$ και ύψος υ. Αν Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του, να αποδείξετε ότι

$$(OAB) - (O\Gamma\Delta) = \frac{(\alpha-\beta)\upsilon}{2}$$

ΑΛΛΟΙ ΤΥΠΟΙ ΓΙΑ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

- $\mathrm{E} = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ ***(Τύπος του Ήρωνα)***

  όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου: $\tau = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$.
- $\mathrm{E} = \tau\cdot\rho$, όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.
- $\mathrm{E} = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4\mathrm{R}}$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.
- $\mathrm{E} = \frac{1}{2}\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\eta\mu\mathrm{A} = \frac{1}{2}\cdot\gamma\cdot\alpha\cdot\eta\mu\mathrm{B} = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\eta\mu\Gamma$
- $\mathrm{E} = (\tau-\alpha)\cdot\rho_\alpha = (\tau-\beta)\cdot\rho_\beta = (\tau-\gamma)\cdot\rho_\gamma$,

  όπου ρ_α , ρ_β , ρ_γ οι ακτίνες του παρεγεγραμμένων κύκλων του τριγώνου.

Νόμος των ημιτόνων: $\dfrac{\alpha}{\eta\mu\mathrm{A}} = \dfrac{\beta}{\eta\mu\mathrm{B}} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = 2\mathrm{R}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ Ομάδα</u>

6.1. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = 40mm , ΑΓ = 6cm και $\hat{\mathrm{A}} = 30^0$. Να υπολογίσετε:
α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Τα ύψη υ_β και υ_γ.

[Απ. α)6cm^2 β)2cm , 3cm]

6.2. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει $\beta = 6$m , $\gamma = 5$m και (ΑΒΓ) = 15m^2. Να βρείτε τη γωνία $\hat{\mathrm{A}}$.

6.3. Ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει ΑΒ = 18cm , ΒΓ = 2dm και ΑΓ = 34cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

6.4. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται ότι: ΑΒ = 12, ΒΓ = 13 και ΑΓ = 5.
i) Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Α.
ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.
iii) Να υπολογίσετε το υ_α.
iv) Να υπολογίσετε τις ακτίνες του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

[Απ. ii)30 iii)60/13 iv)R=26, ρ=2]

6.5. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2\alpha$, $A\Delta = \alpha$ και $\hat{A} = 120^0$. Παίρνουμε το μέσο Ε της ΑΒ. Να δείξετε ότι:

α) (ΑΕΔ) = (ΕΒΓ).

β) $(AB\Gamma\Delta) = \alpha^2 \cdot \sqrt{3}$.

6.6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma = 1$ και $B\Gamma = \sqrt{3}$. Να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία $\hat{A}$.

β) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Τη διάμεσο $BM = \mu_\beta$.

6.7. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, πλευράς α. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, Ε, Ζ τέτοια, ώστε να είναι $A\Delta = BE = \Gamma Z = \frac{1}{3}\alpha$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ως συνάρτηση του α:

α) του τριγώνου ΑΔΖ

β) του τριγώνου ΔΕΖ

γ) του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ.

6.8. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ , τις ακτίνες του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ρ, R και την ημιπερίμετρό του τ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 4\tau \cdot \rho \cdot R$

β) $2R \cdot \rho = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}$

γ) $\dfrac{1}{\alpha\beta} + \dfrac{1}{\beta\gamma} + \dfrac{1}{\gamma\alpha} = \dfrac{1}{2\rho R}$

δ) $\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma = \dfrac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{2R}$

6.9. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $E = 2R^2 \cdot \dfrac{\upsilon_\alpha \cdot \upsilon_\beta \cdot \upsilon_\gamma}{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}$.

6.10. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\upsilon_\alpha = 3\rho$ τότε δείξτε ότι $\beta + \gamma = 2\alpha$.

6.11. Για ένα τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται ότι $\tau(\tau - \gamma) = 4\left(\dfrac{E}{\gamma}\right)^2$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

6.12. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα

$$(\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma)\left(\frac{1}{\upsilon_\alpha} + \frac{1}{\upsilon_\beta} + \frac{1}{\upsilon_\gamma}\right) = (\alpha + \beta + \gamma)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)$$

6.13. Να δείξετε ότι σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση: $4 \cdot \rho \cdot \rho_\alpha = \alpha^2$.

6.14. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\beta+\gamma=2\alpha$. Αν ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του, να αποδείξετε ότι:

i) $\beta\cdot\gamma = 6\,\rho\cdot R$ **ii)** $\dfrac{1}{\upsilon_\beta}+\dfrac{1}{\upsilon_\gamma}=\dfrac{2}{\upsilon_\alpha}$

6.15. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^0$ και τα ισόπλευρα τρίγωνα ΒΓΔ, ΑΒΕ και ΑΓΖ, που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία με το τρίγωνο ΑΒΓ.. Να αποδείξετε ότι:

(ΒΓΔ) = (ΑΒΕ) + (ΑΓΖ)

6.16. Δίνονται τρεις ίσες διαδοχικές γωνίες $x\hat{O}y$, $y\hat{O}z$ και $z\hat{O}x$. Στις ημιευθείες Οx, Οy και Οz παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Α, Β και Γ έτσι, ώστε ΟΑ = 1, ΟΒ = 4 και ΟΓ = 6. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

6.17. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών $\gamma=2$, $\beta=1+\sqrt{2}$ και εμβαδόν (ΑΒΓ) = $\dfrac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος της πλευράς $\alpha=\sqrt{3}$.
β) Να υπολογίσετε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.
γ) Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της πλευράς ΑΒ πάνω στη πλευρά ΒΓ.

6.18. Οι παράλληλες πλευρές ενός τραπεζίου έχουν μήκος 11m και 25m, ενώ οι μη παράλληλες πλευρές του έχουν μήκος 13m και 15m. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

6.19. Δίνεται ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά $\alpha=4$. Στο εσωτερικό του κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΚ. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΚ, ΑΔΚ, ΒΓΚ και ΓΔΚ.

6.20. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος του ΑΜ είναι ίση με την πλευρά ΑΒ. Αν R και x είναι αντίστοιχα οι ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων στα τρίγωνα *ΑΒΓ* και ΑΜΓ, να αποδείξετε ότι R = x.

6.21. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι (ΑΒΓ) = $\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$. Να αποδείξετε ότι

$\beta+\gamma = \alpha\sqrt{2}$.

6.22. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και κύκλος (Ο,R) που έχει το κέντρο του στην πλευρά ΒΓ και εφάπτεται των ΑΒ και ΑΓ. Να δειχθεί ότι:

$$R = \frac{2}{\beta+\gamma}\cdot\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}\,.$$

6.23. Ο εγγεγραμμένος κύκλος ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ εφάπτεται της υποτείνουσας στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι:

i) $ΔΒ = \tau-\gamma$ και $ΔΓ = \tau-\beta$
ii) (ΑΒΓ) = ΔΒ·ΔΓ.

6.24. Θεωρούμε ένα τρίγωνο *ΑΒΓ* και το βαρύκεντρό του Θ. Να δείξετε ότι:

α) (ΘΒΓ) = (ΘΑΓ) = (ΘΑΒ)

β) (ΒΚΗΓ) = $\frac{1}{4}$(ΑΒΓ) , όπου Κ , Η είναι τα μέσα των ΒΘ και ΓΘ αντίστοιχα.

* * * * *

Β΄ Ομάδα

6.25. Για κάθε τρίγωνο ΑΒΓ, να αποδειχθούν οι τύποι:

i) $\frac{1}{\rho_\alpha} + \frac{1}{\rho_\beta} + \frac{1}{\rho_\gamma} = \frac{1}{\rho}$

ii) $\frac{\beta-\gamma}{\rho_\alpha} + \frac{\gamma-\alpha}{\rho_\beta} + \frac{\alpha-\beta}{\rho_\gamma} = 0$

iii) $E = \sqrt{\rho\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma}$

iv) $\rho\cdot\rho_\alpha\cdot\rho_\beta\cdot\rho_\gamma = \tau\cdot E = \tau^2\cdot\rho$

v) $\rho_\alpha\cdot\rho_\beta + \rho_\beta\cdot\rho_\gamma + \rho_\gamma\cdot\rho_\alpha = \tau^2$

vi) $\rho_\alpha + \rho_\beta + \rho_\gamma = 4R + \rho$

6.26. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\rho_\alpha\cdot\rho_\gamma = \rho\cdot\rho_\beta$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

6.27. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει η ισότητα: $\frac{\upsilon_\beta+\upsilon_\gamma}{\rho_\alpha} + \frac{\upsilon_\gamma+\upsilon_\alpha}{\rho_\beta} + \frac{\upsilon_\alpha+\upsilon_\beta}{\rho_\gamma} = 6$.

6.28. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^0$ να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα:
$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\sqrt{2}}{\delta_\alpha}.$$

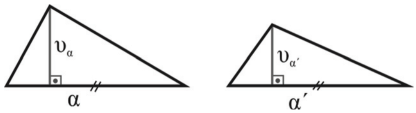
6.29. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα $\frac{\upsilon_\alpha+\upsilon_\beta}{\upsilon_\gamma} + \frac{\upsilon_\beta+\upsilon_\gamma}{\upsilon_\alpha} + \frac{\upsilon_\gamma+\upsilon_\alpha}{\upsilon_\beta} = 6$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

6.30. Σε κάθε τρίγωνο *ΑΒΓ* να αποδείξετε ότι $\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma \geq 9\rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.
Πότε ισχύει η ισότητα;

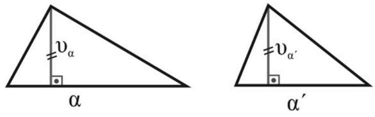
ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

❖ Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών, ενώ αν έχουν ίσα ύψη, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.

- Αν $\alpha = \alpha'$, τότε $\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}'} = \dfrac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}}$



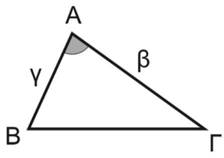
- Αν $\upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'}$, τότε $\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}'} = \dfrac{\alpha}{\alpha'}$

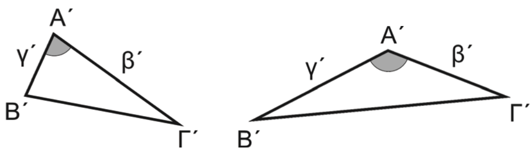


❖ Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

Δηλαδή $\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}'} = \lambda^2$, όπου λ ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων.

❖ Αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τος γωνίες αυτές.





Δηλαδή, αν $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{A}}'$ ή $\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{A}}' = 180^0$ τότε: $\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}'} = \dfrac{\beta \cdot \gamma}{\beta' \cdot \gamma'}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

7.1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 13$, $\beta = 12$, $\gamma = 5$ και ΑΔ το ύψος του.

α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου.

β) Να υπολογίσετε το λόγο $\dfrac{(\text{ΑΔΒ})}{(\text{ΑΔΓ})}$.

7.2. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) παίρνουμε στη βάση του σημείο Μ ώστε $\text{ΒΜ} = \frac{1}{4}\text{ΒΓ}$. Από το Μ φέρνουμε στις ΑΒ, ΑΓ καθέτους, τις ΜΔ, ΜΕ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $(\text{ΜΕΓ}) = 9(\text{ΜΔΒ})$

β) Αν το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων ΜΔΒ και ΜΕΓ είναι 20cm^2, να βρείτε το εμβαδόν καθενός τριγώνου.

7.3. Θεωρούμε τρεις διαδοχικές γωνίες $x\hat{\text{O}}y$, $y\hat{\text{O}}z$ και $z\hat{\text{O}}x$ έτσι ώστε $x\hat{\text{O}}y = y\hat{\text{O}}z = 150^0$. Στις ημιευθείες Ο$x$, Ο$y$, Ο$z$ παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Γ αντίστοιχα έτσι ώστε ΟΑ = 2, ΟΒ = 4 και ΟΓ = 6.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $\text{Ε}_{\text{ΟΓΑ}}$ του τριγώνου ΟΓΑ.

β) Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\dfrac{\text{Ε}_{\text{ΟΑΒ}}}{\text{Ε}_{\text{ΟΒΓ}}}$.

7.4. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ παίρνουμε τμήματα $\text{ΑΕ} = \text{ΒΖ} = \frac{2\alpha}{3}$. Αν οι ΑΖ και ΔΕ τέμνονται στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι

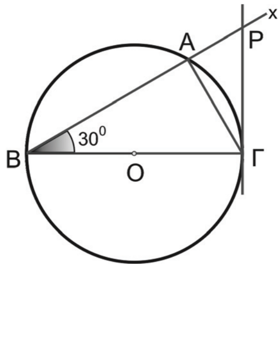
$(\text{ΑΜΕ}) = \dfrac{4\alpha^2}{39}$.

7.5. Στο σχήμα που ακολουθεί, δίνεται κύκλος (Ο,R) διαμέτρου ΒΓ και ημιευθεία Βx τέτοια, ώστε η γωνία $\text{Γ}\hat{\text{Β}}x$ να είναι 30^0. Έστω ότι η Βx τέμνει τον κύκλο στο σημείο Α. Φέρουμε την εφαπτόμενη του κύκλου στο Γ, η οποία τέμνει τη Βx στο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΓ = R.

β) $\dfrac{(\text{ΡΒΓ})}{(\text{ΡΑΓ})} = 4$.

γ) $\text{ΡΓ} = \dfrac{2\text{R}\sqrt{3}}{3}$.



7.6. Να υπολογιστούν οι ίσες πλευρές ενός ισοσκελούς τριγώνου, που είναι ισοδύναμο με τρίγωνο ΑΒΓ, όταν η γωνίατων ίσων πλευρών του είναι ίση με $\hat{\text{Α}}$ και είναι ΑΒ = 10dm, ΑΓ = 64cm.

7.7. Μια ευθεία που είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ, τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$(\text{ΑΒΕ})^2 = (\text{ΑΔΕ})\cdot(\text{ΑΒΓ}).$$

7.8. Στο εξωτερικό ενός τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Να αποδείξετε ότι (ΑΒΓ) = (ΑΕΗ).

7.9. Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα $ΑΔ = \frac{1}{4}\cdot ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{2}{3}\cdot ΑΓ$. Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $54cm^2$, να βρεθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΔΕΓΒ.

[Απ. $45cm^2$]

7.10. Θεωρούμε ένα κύκλο (Ο,R) και μία ευθεία (ε) που απέχει από το κέντρο Ο του κύκλου απόσταση ίση με 2R. Φέρνουμε μία διάμετρο ΑΒ που τέμνει κάθετα την (ε) στο σημείο Κ με το Β να βρίσκεται μεταξύ του Α και του Κ. Παίρνουμε τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Η ΑΓ προεκτεινόμενη τέμνει την (ε) στο σημείο Ε. Να δείξετε ότι:

i) $ΑΓ\cdot ΑΕ = 6R^2$

ii) Αν η $\hat{Α} = 30^0$ τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, ως συνάρτηση της ακτίνας R.

iii) $\dfrac{(ΚΒΓΕ)}{(ΑΒΓ)} = 2$.

7.11. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και $\mu_\alpha = \dfrac{\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma}}{2}$. Φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ και το ύψος ΑΔ.

i) Να δείξετε ότι: $\hat{Α} = 120^0$

ii) Αν ΑΒ = 2, ΑΓ = 3 να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

iii) Αν πάρουμε σημείο Ν της ΑΜ ώστε $ΑΝ = \frac{1}{3}\cdot ΑΜ$ τότε δείξτε ότι

$$\frac{(ΔΜΝ)}{(ΑΜΓ)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2}.$$

7.12. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε , Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΓΔ. Να αποδείξετε ότι $(ΑΕΖ) = \frac{3}{8}\cdot(ΑΒΓΔ)$.

7.13. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90^0$) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών του $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{(ΒΙΓ)}{(ΑΙΓ)} = \dfrac{ΙΒ\cdot ΙΓ}{ΙΑ\cdot ΑΓ}$.

7.14. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ένα εσωτερικό σημείο του Ρ. Από το Ρ φέρνουμε κάθετες στις πλευρές ΑΒ , ΒΓ , ΑΓ και παίρνουμε σε αυτές τμήματα ΡΔ = ΑΒ, ΡΕ = ΒΓ , ΡΖ = ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i) (ΡΔΖ) = (ΑΒΓ)

ii) (ΔΕΖ) = 3(ΑΒΓ).

7.15. Από εσωτερικό σημείο Ο κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ φέρνουμε ΟΑ΄ , ΟΒ΄ , ΟΓ΄ , ΟΔ΄ κάθετες και ίσες προς τις ΑΒ , ΒΓ , ΓΔ , ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

(Α΄Β΄Γ΄Δ΄) = 2(ΑΒΓΔ)

7.16. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ , ΒΓ και ΓΑ ενός τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ = ΓΕ = ΑΖ = 4. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΔΕΖ και ΑΒΓ , αν $\alpha = 2$, $\beta = 3$ και $\gamma = 4$.

7.17. Στις πλευρές ΒΓ , ΓΑ , ΑΒ ενός τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα σημεία Δ , Ε , Ζ ώστε ΒΔ = $\frac{1}{3}$ ΒΓ , ΓΕ = $\frac{1}{3}\cdot$ ΓΑ και ΑΖ = $\frac{1}{3}\cdot$ ΑΒ. Να αποδείξετε ότι: (ΔΕΖ) = $\frac{1}{3}\cdot$ (ΑΒΓ).

7.18. Στις πλευρές ΑΒ , ΒΓ , ΓΑ ενός τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα ώστε ΑΔ = $\frac{3}{5}$ ΑΒ , ΒΕ = $\frac{3}{5}$ ΒΓ και ΓΖ = $\frac{3}{5}$ ΑΓ. Να αποδείξετε ότι: (ΔΕΖ) = $\frac{7}{25}$ (ΑΒΓ).

7.19. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ , ΒΓ , ΓΔ και ΔΑ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατά τμήματα ΒΕ = ΑΒ , ΓΖ = ΒΓ , ΔΗ = ΓΔ και ΑΘ = ΔΑ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ΕΖΗΘ είναι πενταπλάσιο του εμβαδού του ΑΒΓΔ.

*   *   *   *   *

Β΄ Ομάδα

7.20. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ. Αν (ΑΒΓ) = $\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\cdot$ (ΑΔΕ) , να αποδείξετε ότι το τριγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με κορυφή το σημείο Α.

7.21. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε τυχαίο σημείο Δ στην ΒΓ. Από το Δ φέρνουμε παράλληλο προς την ΑΓ που τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε και παράλληλο προς την ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ. Αν Ε = (ΑΒΓ) , E_1 = (ΑΕΖ) , E_2 = (ΒΔΕ) , E_3 = (ΓΔΖ) να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt{E} = \sqrt{E_2} + \sqrt{E_3}$

β) $E_1 = \sqrt{E_2 \cdot E_3}$

7.22. Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου ΑΒΓ να αποδείξετε ότι: $\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)} = \frac{2\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}$.

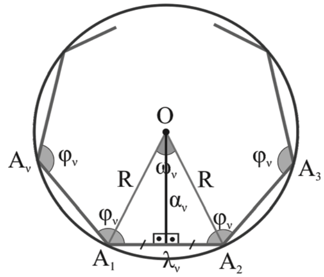
<u>Εφαρμογή:</u> Αν $\alpha = 9, \beta = 10$ και $\gamma = 17$, να δείξετε ότι (ΔΕΖ) = $\frac{2040}{247}$.

7.23. Από το βαρύκεντρο Θ ενός τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε ΘΚ ⊥ ΒΓ, ΘΛ ⊥ ΑΓ και ΘΜ ⊥ ΑΒ. Να δείξετε ότι: (ΚΛΜ) = $\frac{4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)E^3}{9\alpha^2\beta^2\gamma^2}$, όπου Ε = (ΑΒΓ).

7.24. Θεωρούμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Μια ευθεία που διέρχεται από την κορυφή *Α* τέμνει την πλευρά ΔΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της ΒΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι (ΒΓΕ) = (ΔΕΖ).

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R ισχύουν οι σχέσεις:



- Κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου: $\hat{\omega}_\nu = \dfrac{360^0}{\nu}$
- Γωνία κανονικού πολυγώνου:
  $$\hat{\varphi}_\nu = 180^0 - \frac{360^0}{\nu} = 180^0 - \hat{\omega}_\nu \,.$$
- $\alpha_\nu^2 + \dfrac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$
- Περίμετρος κανονικού πολυγώνου: $P_\nu = \nu \cdot \lambda_\nu$
- Εμβαδόν κανονικού πολυγώνου: $E_\nu = \dfrac{1}{2} \cdot P_\nu \cdot \alpha_\nu$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8.1. Να βρείτε την κεντρική γωνία και την γωνία ενός κανονικού
α) 8-γώνου **β)** 12-γώνου
γ) 18-γώνου **δ)** 32-γώνου

8.2. Ποιο κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία
α) 40^0 **β)** $22{,}5^0$ **γ)** 18^0
δ) 15^0 **ε)** 10^0 **στ)** 8^0

8.3. Ποιο κανονικό πολύγωνο έχει γωνία ίση με
α) 160^0 **β)** 165^0 **γ)** 150^0 **δ)** $172{,}8^0$ **ε)** 174^0

8.4. Να αποδείξετε ότι τέσσερις διαδοχικές πλευρές ενός κανονικού ν-γώνου σχηματίζουν ισοσκελές τραπέζιο.

8.5. Βρείτε τα κανονικά πολύγωνα των οποίων η γωνία τους είναι οξεία.

8.6. Δίνεται κανονικό πολύγωνο $A_1A_2 \ldots A_\nu$ εγγεγραμμένο σς κύκλο με κέντρο το O και ακτίνα R. Αν η γωνία του πολυγώνου είναι $\hat{\varphi}_\nu = 150^0$, να βρείτε:
α) Τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου.
β) Την κεντρική γωνία του πολυγώνου $\hat{\omega}_\nu$.
γ) Το εμβαδόν του πολυγώνου συναρτήσει της ακτίνας R.

ΕΓΓΡΑΦΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΣΕ ΚΥΚΛΟ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥΣ

Για τα στοιχεία του τετραγώνου, κανονικού εξαγώνου και ισόπλευρου τριγώνου, εγγεγραμμένα σε κύκλο ακτίνας R έχουμε:

	Τετράγωνο	Κανονικό Εξάγωνο	Ισόπλευρο τρίγωνο
Πλευρά λ_ν	$\lambda_4 = R\sqrt{2}$	$\lambda_6 = R$	$\lambda_3 = R\sqrt{3}$
Απόστημα α_ν	$\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\alpha_3 = \frac{R}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

9.1. Το εμβαδόν ενός τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,R) είναι κατά $(8-3\sqrt{3})\text{cm}^2$ μεγαλύτερο του εμβαδού του εγγεγραμμένου ισοπλεύρου τριγώνου. Να βρεθεί η ακτίνα του κύκλου και τα εμβαδά των πολυγώνων.

[Απ. R=2cm, $E_4=8\text{cm}^2$, $E_4=3\sqrt{3}\text{ cm}^2$]

9.2. Ένα κανονικό πολύγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R = 12cm. Αν το απόστημά του είναι $6\sqrt{2}$ cm , να υπολογιστεί η πλευρά του και η γωνία του.

9.3. Ένα τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,4cm) με πλευρές ΑΒ = $4\sqrt{2}$ cm και ΑΓ = $4\sqrt{3}$ cm. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.

9.4. Δύο χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου τέμνονται στο σημείο Ρ. Αν ΡΑ = λ_4 και ΡΔ = λ_6 , να αποδείξετε ότι (ΡΑΓ) = 2(ΡΒΔ).

9.5. Δύο χορδές ΑΔ και ΒΓ ενός κύκλου τέμνονται στο σημείο Μ. Αν ΑΒ = λ_4 και ΓΔ = λ_3 , να αποδείξετε ότι: (ΜΑΒ) = $\frac{2}{3}$ (ΜΓΔ).

9.6. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και Ε το μέσο της πλευράς ΒΓ. Αν η ΑΕ τέμνει τον κύκλο στο Ζ, να υπολογίσετε το τμήμα ΕΖ.

[Απ. $\frac{R\sqrt{10}}{10}$]

9.7. Σε κύκλο (O,R) δύο παράλληλες χορδές προς το ίδιο μέρος του κέντρου O, έχουν μήκη $AB = \lambda_3$ και $\Gamma\Delta = \lambda_6$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τραπεζίου που έχει βάσεις τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$.

[Απ. $\frac{R^2}{2}$]

9.8. Σε κύκλο (O,R) παίρνουμε διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB} = 60^0$, $\overset{\frown}{B\Gamma} = 90^0$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 120^0$. Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

[Απ. $\frac{R^2(2+\sqrt{3})}{2}$]

9.9. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) , Δ το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{A\Gamma}$ και E το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Αν η ΔE τέμνει τον κύκλο στο Z, να υπολογίσετε τα τμήματα ΔE και EZ.

[Απ. $\Delta E=\frac{R\sqrt{7}}{2}$, $EZ=\frac{3R\sqrt{7}}{14}$]

9.10. Θεωρούμε δύο ομόκεντρους κύκλους ακτίνων R και ρ και τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο στον εξωτερικό κύκλο. Να αποδειχθεί ότι για κάθε σημείο M του εσωτερικού κύκλου ισχύει: $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 4R^2 + 4\rho^2$.

9.11. Δίνεται κύκλος (O,R) και χορδή του $AB = \lambda_3$. Αν M σημείο του κυρτογώνιου τόξου $\overset{\frown}{AB}$ ώστε $AM = 2$ και $MB = 5$ να υπολογιστεί η ακτίνα R του κύκλου.

[Απ. $\sqrt{13}$]

9.12. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) , Δ το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{A\Gamma}$. Αν η $E\Delta$ τέμνει τον κύκλο στο H, να υπολογιστεί το τμήμα ΔH.

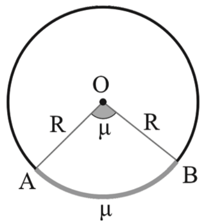
9.13. Δίνεται κύκλος (O,R) και χορδή του $AB = \lambda_6$. Προεκτείνουμε την $B\Gamma$ κατά τμήμα $AB = B\Gamma$ και φέρνουμε το εφαπόμενο τμήμα $\Gamma\Delta$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει τις $B\Delta$, $A\Delta$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα , δείξτε ότι:

$$BE\cdot AZ = \Delta E\cdot \Delta Z.$$

ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΟΥ

Μήκος κύκλου: $L = 2\pi \cdot R = \pi \cdot \delta$

Μήκος τόξου: $l = \dfrac{\pi R \mu}{180^0} = \alpha \cdot R$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

10.1. Να υπολογίσετε το μήκος ενός κύκλου, όταν δύο κάθετες χορδές του $ΑΒ$ και $ΑΓ$ έχουν μήκη 6cm και 8cm αντίστοιχα.

10.2. Να υπολογίσετε το μήκος του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου
α) ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές 3cm και 4cm
β) ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α
γ) ισοσκελούς τριγώνου με βάση 12cm και ίσες πλευρές 10cm.

10.3. Σε κύκλο (Κ,R) θεωρούμε διαδοχικές χορδές $ΑΒ = R$, $ΒΓ = R\sqrt{2}$ και $ΓΔ = R\sqrt{3}$. Να υπολογίσετε τα μήκη των τόξων $\overparen{ΑΒ}$, $\overparen{ΒΓ}$, $\overparen{ΓΔ}$ και $\overparen{ΔΑ}$.

10.4. Δύο ίσοι κύκλοι ακτίνας R εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α και ΒΓ είναι μια κοινή εξωτερική εφαπτόμενη αυτων. Να υπολογίσετε την περίμετρο του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

10.5. Δύο κύκλοι (Κ, R) και $(Λ, \frac{R}{2})$ εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο Α. Από το κέντρο Κ φέρνουμε μια ημιευθεία Κx, η οποία τέμνει το μικρό κύκλο στο σημείο Β και το μεγάλο στο σημείο Γ. Να συσκρίνετε τα μήκη των τόξων $\overparen{ΑΒ}$ και $\overparen{ΑΓ}$.

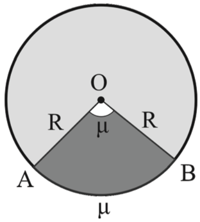
10.6. Με κέντρα τις κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ πλευράς α και ακτίνα $\frac{\alpha}{2}$ γράφουμε τρεις κύκλους. Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά και των τριών κύκλων.

10.7. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Με κέντρα τις κορυφές Α, Β και ακτίνα α γράφουμε δύο τεταρτοκύκλια μέσα στο τετράγωνο που τέμνονται στο σημείο Ε. Να υπολογιστεί η περίμετρος του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΓΕΔ.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΔΙΣΚΟΥ

Εμβαδόν κυκλικού δίσκου: $E = \pi \cdot R^2$

Εμβαδόν κυκλικού τομέα: $E_{\kappa\tau} = \dfrac{\pi R^2 \mu}{360^0}$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

11.1. Σε κύκλο με διάμετρο ΑΒ φέρνουμε τις χορδές ΑΜ και ΒΜ. Αν ΑΜ = 9cm και ΒΜ = 1,2dm, να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου.

[Απ. $E=56{,}25\pi cm^2$]

11.2. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A} = 90^0$ και ΒΓ = 16. Με κέντρο το Α και ακτίνα ίση με το μισό του ύψους ΑΔ γράφουμε κύκλο. Να βρεθεί το εμβαδόν του μέρους του κύκλου που είναι εκτός του τριγώνου.

[Απ. $E=12\pi$]

11.3. Στο εσωτερικό ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ, πλευράς 2α, σχηματίζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μέρους του τετραγώνου που βρίσκεται εκτός των κυκλικών τομέων.

[Απ. $E=(4-\pi)\alpha^2$]

11.4. Δίνεται ένας κύκλος (Ο,R), μια χορδή του ΑΒ = R και η εφαπτόμενη ε στο σημείο Α. Φέρνουμε $B\Gamma \perp \varepsilon$. Να υπολογίσετε:

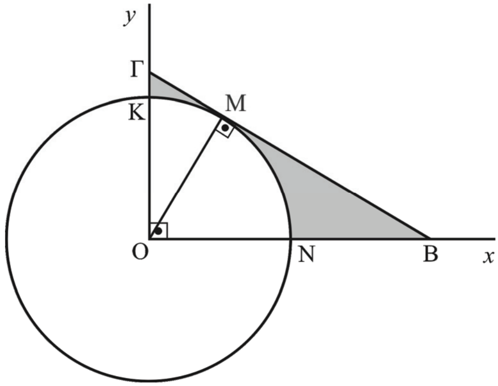
α) Τη γωνία $A\hat{O}B$ και τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

[Απ. α) 60^0 β) $\Pi=\dfrac{R(3+3\sqrt{3}+2\pi)}{6}$ γ) $E=\dfrac{R^2(9\sqrt{3}-4\pi)}{24}$]

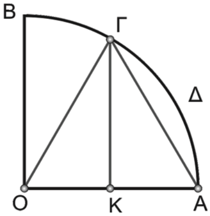
11.5. Στο εσωτερικό ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α, κατασκευάζουμε δύο τεταρτοκύκλια με κέντρα τις κορυφές Α, Γ και ακτίνα α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μέρους στο εωτερικό του τετραγώνου που έχει σχήμα “φύλλου”.



11.6. Στο διπλανό σχήμα δίνονται η ορθή γωνία $x\hat{O}y$, ο κύκλος (Ο,R), με R = 12, ο οποίος τέμνει τις πλευρές Οx, Οy της γωνίας στα σημεία Ν, Κ αντίστοιχα και το σημείο Β της Οx, για το οποίο ισχύει ΟΒ = 24. Αν η εφαπτόμενη του κύκλου που άγεται από το Β, εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Μ και τέμνει την πλευρά Οy στο σημείο Γ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $M\hat{O}N$ είναι κεντρική γωνία κανονικού εξαγώνου και να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $O\overset{\frown}{M}N$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του τριγώνου ΟΒΓ.



11.7. Η επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ του κυκλικού τομέα του παρακάτω σχήματος είναι ορθή και η ακτίνα του είναι 6.
Η κάθετη ευθεία στο μέσο K της ακτίνας ΟΑ τέμνει το τόξο του κυκλικού τομέα στο σημείο Γ.

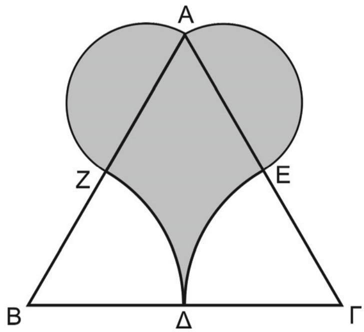
α) Να δείξετε ότι η γωνία $A\hat{O}\Gamma$ είναι 60^0.

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{A\Gamma}$.

γ) Ο λόγος του μήκους του τόξου $\overset{\frown}{A\Gamma}$ προς το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{\Gamma B}$ είναι:

Α. 3 **Β.** $\frac{1}{2}$ **Γ.** 2 **Δ.** $\frac{1}{3}$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος ΑΔΓΑ.



11.8. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς $α$. Παίρνουμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Στο εσωτερικό του τριγώνου κατασκευάζουμε τους κυκλικούς τομείς με κέντρα τις κορυφές Β, Γ και ακτίνα $\frac{α}{2}$. Στο εξωτερικό του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ημικύκλια με διαμέτρους ΑΖ και ΑΕ. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν της σκιασμένης καρδιάς, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

11.9. Κατασκευάζουμε δύο ομόκεντρους κύκλους (Ο,R) και (Ο,2R). Από ένα σημείο Α του κύκλου (Ο,2R) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΜ και ΑΝ στον κύκλο (Ο,R). Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΜΝ.

[Απ. $E=\frac{R^2(3\sqrt{3}-\pi)}{3}$]

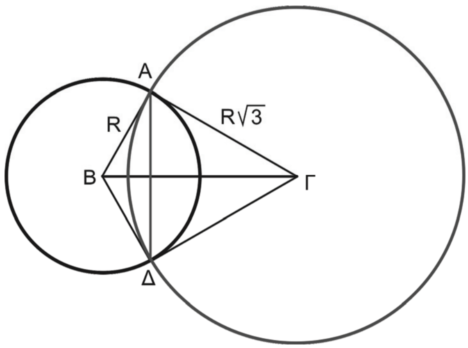
11.10. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^0$) με μήκη πλευρών ΑΒ = R και ΑΓ = R$\sqrt{3}$. Γράφουμε τους κύκλους (Β, R) και (Γ, R$\sqrt{3}$). Να υπολογίσετε:

α) Το μήκος της πλευράς ΒΓ συναρτήσει του R.

β) Τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

γ) Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ συναρτήσει του R.

δ) Το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κύκλων συναρτήσει του R.



11.11. Στην διάμετρο ΑΒ ενός ημικυκλίου παίρνουμε τυχαίο σημείο Μ και κατασκευάζουμε εντός αυτού ημικύκλια με διαμέτρους τις ΑΜ και ΜΒ. Αν Ε είναι το εμβαδόν του μεγάλου ημικυκλίου και S το εμβαδόν του μέρους που βρίσκεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων, να αποδείξετε ότι: $S \le \frac{1}{2}E$.

11.12. Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΒ = 2R. Στην προέκταση του ΑΒ προς το Β, θεωρούμε ένα σημείο Γ, τέτοιο ώστε ΒΓ = 2R. Από το Γ φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΕ του ημικυκλιου. Η εφαπτομένη του ημικυκλίου στο σημείο Α τέμνει την προέκταση του τμήματος ΓΕ στο σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι ΓΕ = 2$\sqrt{2}$ R.

β) Να αποδείξετε ότι ΓΑ·ΓΟ = ΓΔ·ΓΕ.

γ) Να υπολογίσετε το τμήμα ΓΔ συναρτήσει του R.

δ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των εμβαδών των μικτόγραμμων τριγώνων ΒΓΕ και ΑΔΕ συναρτήσει του R.

11.13. Τρεις κύκλοι (O_1, R_1) , (O_2, R_2) και (O_3, R_3) εφάπτονται ανά δύο εξωτερικά στα σημεία Α, Β και Γ.Αν $R_1 = R_2 = \sqrt{2}$ και $R_3 = 2 - \sqrt{2}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $O_1O_2O_3$ είναι ορθογώνιο.

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

11.14. Δύο κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) τέμνονται στα σημεία Α και Β με ΑΒ = 10cm, ΚΑ = 5$\sqrt{2}$ cm και (ΛΑΒ) = 25$\sqrt{3}$ cm^2. Να υπολογιστούν:

α) Η γωνία $A\widehat{K}B$.

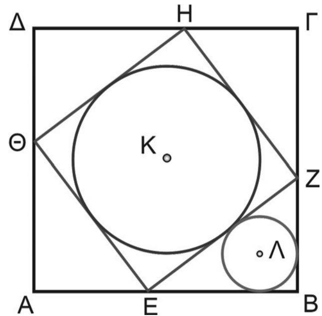
β) Η γωνία $A\widehat{\Lambda}B$ και η ακτίνα ρ.

γ) Τα εμβαδά των κυκλικών τομέων $K\overset{\frown}{AB}$ και $\Lambda\overset{\frown}{AB}$.

δ) Το εμβαδόν του κοινού τμήματος των δύο κύκλων.

11.15. Στο σχήμα που ακολουθεί , σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 7cm, εγγράφουμε τετράγωνο ΕΖΗΘ έτσι ώστε: ΑΕ = ΒΖ = ΓΗ = ΔΘ = 3cm.

α) Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ.



β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΕΒΖ και να αποδείξετε ότι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου (Λ,ρ) στο τρίγωνο ΕΒΖ είναι ρ = 1cm.

γ) Εάν (Κ,R) είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος στο τετράγωνο ΕΖΗΘ, να υπολογίσετε το λόγο του εμβαδού του κύκλου (Κ,R) προς το εμβαδόν του κύκλου (Λ,ρ).

11.16. Δύο κύκλοι (Κ,α) και (Λ,3α) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Έστω ΒΓ ένα κοινό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων. Να υπολογίσετε:

α) Τις γωνίες $B\widehat{K}\Lambda$ και $\Gamma\widehat{\Lambda}K$.

β) Την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

[Απ. β) $\frac{\alpha(6\sqrt{3}+5\pi)}{3}$ γ) $\frac{\alpha^2(24\sqrt{3}-11\pi)}{6}$]

* * * * *

Β΄ Ομάδα

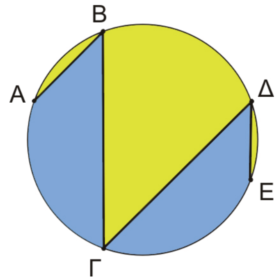
11.17. Μία τετράγωνη στάνη ΑΒΓΔ με περίμετρο $2s$ είναι περιφραγμένη με φράκτη και περιβάλλεται από μεγάλη έκταση όπου μπορεί να βοσκήσει ένα πρόβατο. Το πρόβατο δεσμεύεται από σχοινί μήκους s, που το ένα άκρο του είναι δεμένο στο σημείο Α του φράκτη και το άλλο άκρο του συγκρατεί το πρόβατο. Να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής μέσα στην οποία μπορεί να βοσκήσει το πρόβατο.

[Απ.Ε=$\frac{7}{8}\pi s^2$]

11.18. Να λύσετε ανάλογο πρόβλημα όπως το προηγούμενο όταν το σχήμα της στάνης είναι κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ περιμέτρου $2s$.

[Απ.Ε=$\frac{23}{27}\pi s^2$]

11.19. Όλες οι κορυφές μιας πολυγωνικής γραμμής βρίσκονται πάνω σε μια περιφέρεια και οι γωνίες στις κορυφές Β, Γ και Δ είναι όλες 45^0.
Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των δύο γραμμοσκιασμένων τμημάτων του κυκλικού δίσκου είναι ίσα.



ΜΕΡΟΣ Β΄ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

- Η έννοια του διανύσματος. Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων
- Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα
- Συντεταγμένες στο επίπεδο
- Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Υπάρχουν δύο είδη φυσικών μεγεθών:
Εκείνα που μπορούν να οριστούν με τη χρησιμοποίηση ενός αριθμού, ο οποίος λέγεται μέτρο του μεγέθους και τα μεγέθη αυτά λέγονται αριθμητικά ή βαθμωτά. Τέτοια π.χ. μεγέθη είναι η μάζα, ο όγκος, η πυκνότητα, η θερμοκρασία, η απόσταση κ.τ.λ.
Όλα εκείνα που απαιτούν για τον πλήρη καθορισμό τους μία ένδειξη ως προς τον “τρόπο ενέργειάς τους”, αυτά που δεν μπορούν να οριστούν χωρίς τη μεσολάβηση των εννοιών της διεύθυνσης και της φοράς, αυτά που εμφανίζονται με ένα συμφυή προσανατολισμό. Τα μεγέθη αυτά, όπως η δύναμη, η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η πίεση κ.τ.λ λέγονται διανυσματικά μεγέθη.

Η λέξη διάνυσμα μας θυμίζει γενικά όχι μόνο τη “μετάβαση” από μία αρχική κατάσταση Α σε μία τελική Β, αλλά ακόμα και τον “τρόπο μετάβασης” από την κατάσταση Α στη Β.
Διάνυσμα, λοιπόν, μπορούμε γενικά να πούμε ότι είναι η μαθηματική εικόνα, η μαθηματική παράσταση, ενός διανυσματικού μεγέθους.

Ο διανυσματικός λογισμός είναι μια από τις περιοχές των Μαθηματικών η οποία επηρεάστηκε αποφασιστικά από την εξέλιξη και τις ανάγκες της Φυσικής. Στις δύο πρώτες ενότητες δίνονται οι απαραίτητοι ορισμοί, διατυπώνεται η ορολογία για χαρακτηριστικά διανύσματα, η ισότητα διανυσμάτων καθώς επίσης οι πράξεις που μπορούμε να εκτελέσουμε με τις ιδιότητές τους. Τα προβλήματα εδώ αντιμετωπίζονται κάτω από γεωμετρικό πρίσμα.

Στην τρίτη ενότητα εισάγεται η αναλυτική έκφραση των διανυσμάτων με καρτεσιανές συντεταγμένες. Οι σχέσεις που έχουμε δει μέχρις εδώ μετατρέπονται τώρα σε σχέσεις που αναφέρονται σε συντεταγμένες διανυσμάτων.

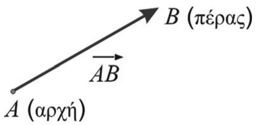
Στην τελευταία ενότητα εισάγεται η σημαντική έννοια του εσωτερικού γινομένου, η πρώτη εξωτερική πράξη συνόλου που μαθαίνουμε. Δίνονται οι ιδιότητές του και παρατίθεται ένα μεγάλο πλήθος ασκήσεων.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Τι ονομάζουμε διάνυσμα;

Διάνυσμα ονομάζουμε ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα. Το πρώτο άκρο λέγεται *αρχή* ή *σημείο εφαρμογής* του διανύσματος, ενώ το δεύτερο λέγεται πέρας του διανύσματος.



Συμβολισμός διανύσματος

Το διάνυσμα με αρχή το A και πέρας το B συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$. Για το συμβολισμό των διανυσμάτων χρησιμοποιούμε πολλές φορές τα μικρά γράμματα του ελληνικού ή του λατινικού αλφαβήτου, για παράδειγμα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, … , $\vec{u}$, $\vec{v}$, …

Μηδενικό διάνυσμα

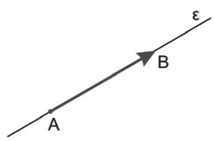
Μηδενικό διάνυσμα ονομάζουμε εκείνο του οποίου η αρχή και το πέρας συμπίπτουν και συμβολίζεται $\vec{0}$. Δηλαδή, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Μέτρο διανύσματος

Η απόσταση των άκρων ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, δηλαδή το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB, λέγεται *μέτρο* ή *μήκος* του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και συμβολίζεται $|\overrightarrow{AB}|$.

Φορέας διανύσματος

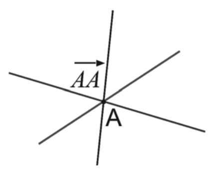
Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ λέγεται φορέας του $\overrightarrow{AB}$.



Μέτρο και φορέας του μηδενικού διανύσματος;

Το μηδενικό διάνυσμα έχει μέτρο 0.

Ως φορέα ενός μηδενικού διανύσματος $\overrightarrow{AA}$ μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε από τις ευθείες που διέρχονται από το A.



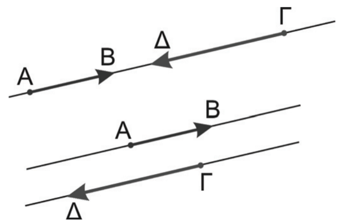
Διάνυσμα παράλληλο προς μία ευθεία

Αν ο φορέας ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλος ή συμπίπτει με μια ευθεία ζ, τότε λέμε ότι το $\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλο προς τη ζ και γράφουμε

$\overrightarrow{AB} // \zeta$.

Παράλληλα ή συγγραμμικά διανύσματα

Δύο μη μηδενικά διάνυσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, λέγονται παράλληλα ή συγγραμμικά όταν έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς.

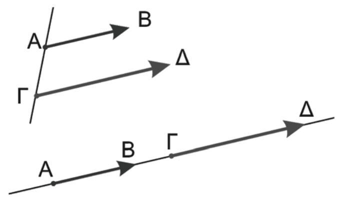


Ομόρροπα διανύσματα

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται *ομόρροπα*:

α) όταν έχουν παράλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΓ που ενώνει τις αρχές τους ή

β) όταν έχουν τον ίδιο φορέα και μία από τις ημιευθείες AB και $\Gamma\Delta$ περιέχει την άλλη.

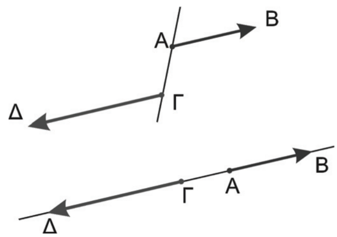


Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν την *ίδια κατεύθυνση* (ίδια διεύθυνση και ίδια φορά) και γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Αντίρροπα διανύσματα

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται *αντίρροπα*, όταν είναι συγγραμμικά και δεν είναι ομόρροπα.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν την *αντίθετη κατεύθυνση* (ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά) και γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



Ίσα διανύσματα

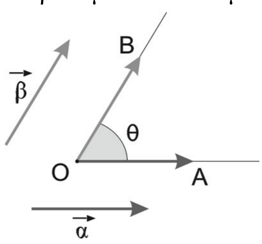
Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται *ίσα* όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα. Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα, γράφουμε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Τα μηδενικά διανύσματα θεωρούνται ίσα μεταξύ τους.

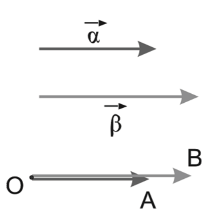
Αντίθετα διανύσματα

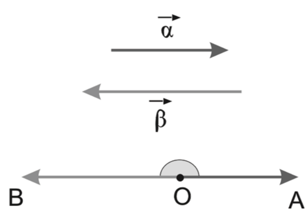
Δύο διάνυσματα λέγονται *αντίθετα*, όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα.

Γωνία δύο μη μηδενικών διανυσμάτων

Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$.







Ως γωνία *των διανυσμάτων* $\vec{\alpha}$ *και* $\vec{\beta}$ ορίζουμε την κυρτή γωνία $A\hat{O}B$ που σχηματίζουν οι ημιευθείες OA και OB.

Τη γωνία *αυτή* τη συμβολίζουμε με $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ ή $(\widehat{\vec{\beta},\vec{\alpha}})$ ή με ένα μικρό γράμμα, π.χ. θ.

Οι τιμές της γωνίας είναι $0^0 \le \theta \le 180^0$ ή $0 \le \theta \le \pi$.

Αν ένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε ως γωνία των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μπορούμε να θεωρήσουμε οποιδήποτε γωνία θ με $0 \le \theta \le \pi$.

Δύο ομόρροπα διάνυσματα σχηματίζουν γωνία 0^0, ενώ δύο αντίρροπα διανύσματα σχηματίζουν γωνία 180^0.

Ιδιότητες της πρόσθεσης διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι τρία διανύσματα, τότε ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

(1) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$ (*Αντιμεταθετική ιδιότητα*)

(2) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ (*Προσεταιριστική ιδιότητα*)

(3) $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$ (*Ουδέτερο στοιχείο*)

(4) $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$ (*Αντίθετο στοιχείο*)

Διάνυσμα θέσεως ή διανυσματική ακτίνα ενός σημείου Μ

Έστω O ένα σταθερό σημείο του χώρου. Τότε για κάθε σημείο M του χώρου ορίζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$, το οποίο λέγεται *διάνυσμα θέσεως του* M ή *διανυσματική ακτίνα του* M.

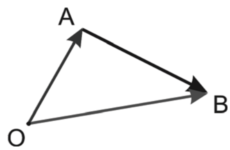
Σημείο αναφοράς

Το σημείο O, που είναι η κοινή αρχή όλων των διανυσματικών ακτίνων των σημείων του χώρου, λέγεται *σημείο αναφοράς* στο χώρο.

1.1. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Κάθε διάνυσμα στο χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.*

Απόδειξη:

Αν O είναι ένα σημείο αναφοράς, τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχουμε:



$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

1.2. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Για οποιαδήποτε διανύσματα* $\vec{\alpha}$ *και* $\vec{\beta}$ *ισχύει η σχέση:*

$$\left||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\right| \le |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|.$$

Πότε ισχύουν οι ισότητες;

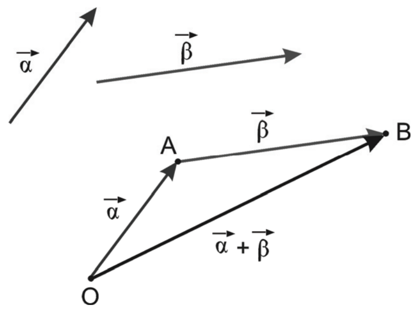
Απόδειξη:

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι:

$$|(OA)-(AB)| \le (OB) \le (OA)+(AB).$$

Επομένως,

$$\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \le |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|.$$



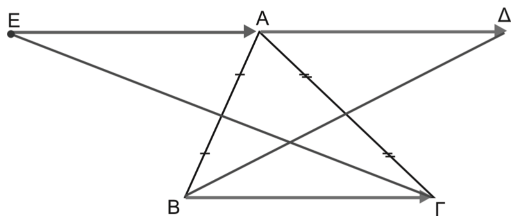
Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

- $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| < |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$.
- $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| = |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| < |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$.
- $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| = |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$.
- $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| < |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| < |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.3. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, Δ είναι το συμμετρικό του B ως προς το μέσο του $A\Gamma$ και E είναι το συμμετρικό του Γ ως προς το μέσο του AB. Να αποδείξετε ότι το A είναι το μέσο του $E\Delta$.

Λύση:



Το τετράπλευρο $EA\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιοί του AB και $E\Gamma$ διχοτομούνται. Άρα $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{B\Gamma}$.
Όμοια το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$.
Τότε θα έχουμε $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{A\Delta}$ από το οποίο συμπεραίνουμε ότι τα σημεία E, A, Δ είναι συνευθειακά και το A είναι το μέσο του $E\Delta$.

1.4. Για διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ δίνεται ότι $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{2} = \frac{|\vec{\beta}|}{3} = \frac{|\vec{\gamma}|}{5}$. Να αποδείξετε ότι:

i) Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπο του $\vec{\beta}$.

ii) Το διάνυσμα $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπο του $\vec{\gamma}$.

Λύση:

i) Έστω ότι $\frac{|\vec{\alpha}|}{2} = \frac{|\vec{\beta}|}{3} = \frac{|\vec{\gamma}|}{5} = \lambda \ge 0$. Τότε $|\vec{\alpha}| = 2\lambda$, $|\vec{\beta}| = 3\lambda$, $|\vec{\gamma}| = 5\lambda$.

Είναι $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha}+\vec{\beta} = -\vec{\gamma}$.

Έχουμε $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |-\vec{\gamma}| = |\vec{\gamma}| = 5\lambda$ και $|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| = 2\lambda + 3\lambda = 5\lambda$.

Δηλαδή $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$, επομένως τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.

ii) Είναι $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\beta}+\vec{\gamma} = -\vec{\alpha}$.

Έχουμε $|\vec{\beta}+\vec{\gamma}| = |-\vec{\alpha}| = |\vec{\alpha}| = 2\lambda$ και $\big||\vec{\beta}|-|\vec{\gamma}|\big| = |3\lambda-5\lambda| = |-2\lambda| = 2\lambda.$

Δηλαδή $\big||\vec{\beta}|-|\vec{\gamma}|\big| = |\vec{\beta}+\vec{\gamma}|$, επομένως τα διανύσματα $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι αντίρροπα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

1.5. Σε ένα παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ παίρνουμε το συμμετρικό $Ε$ του $Δ$ ως προς το μέσο του $ΑΒ$. Να αποδείξετε ότι το $Β$ είναι το μέσο του $ΓΕ$.

1.6. Σε κάθε τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ να αποδείξετε ότι ισχύει: $\overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΒΓ} = \overrightarrow{ΑΓ} + \overrightarrow{ΒΔ}$.

1.7. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ έχουν μέτρα 2, 4 και 6 αντίστοιχα. Αν ισχύει η ισότητα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} = \vec{0}$ να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ **ii)** $\vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$

1.8. i) Για δύο οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ να αποδείξετε τη σχέση:

$$\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big| \le |\vec{\alpha}-\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| .$$

ii) Έστω τα σημεία $Ο, Α, Β$ του επιπέδου. Αν $|\overrightarrow{ΟΑ}| = 8$ και $|\overrightarrow{ΟΒ}| = 5$, να αποδείξετε ότι: $3 \le |\overrightarrow{ΑΒ}| \le 13.$

1.9. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = \kappa-1$, $|\vec{\beta}| = 5\kappa-6$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = \kappa^2+2$. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ.

[Απ. κ=3]

* * * * *

Β΄ Ομάδα

1.10. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Παίρνουμε το συμμετρικό $Μ$ του σημείου $Α$ ως προς το μέσο $Ε$ του $ΒΓ$ και το συμμετρικό $Ν$ του σημείου $Α$ ως προς το μέσο $Ζ$ του $ΔΓ$. Να αποδείξετ ότι:

i) Το σημείο $Γ$ είναι το μέσο των $ΔΜ, ΒΝ$.

ii) $\overrightarrow{ΔΒ} = \overrightarrow{ΝΜ}$.

iii) $\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΝ} = \overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΑΜ}$.

iv) $\overrightarrow{ΓΑ} + \overrightarrow{ΓΜ} + \overrightarrow{ΓΝ} = \vec{0}$.

1.11. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ τα οποία έχουν μέτρα 1, 2 και 4 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} \neq \vec{0}$.

1.12. Σε ένα υλικό σημείο του χώρου επενεργούν τέσσερις συνεπίπεδες δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ και $\vec{F}_4$, με μέτρα 8Kp, 15Kp, 36Kp και 12Kp αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το υλικό σημείο κινείται με μεταβαλλόμενη ταχύτητα.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.13. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* ή *Λάθος* κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow\uparrow \vec{\gamma}$, τότε $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\gamma}$.

II. Ισχύει $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow -(-\vec{\alpha})$.

III. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$, τότε $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\gamma}$.

IV. Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει

$$(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = (\widehat{-\vec{\alpha},-\vec{\beta}}) .$$

V. Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει

$$(\widehat{-\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 180^0 - (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) .$$

VI. Ισχύει $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ αν και μόνο αν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

VII. Ισχύει $|\vec{\alpha}| = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$.

VIII. Αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = 0$, τότε τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίθετα.

IX. Αν $|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$, τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα.

1.14. Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες προτάσεις.

I. Το μέτρο ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ φανερώνει το …………… του ευθυγράμμου τμήματος AB ή την ………………… του σημείου … από το σημείο … .

II. Αν A και B είναι δύο διακεκριμμένα σημεία και για ένα σημείο M είναι $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{BM}|$, τότε το σημείο … ισαπέχει από τα άκρα … και … του ευθυγράμμου τμήματος …… . Επομένως το σημείο … βρίσκεται πάνω στην …………………… του ευθυγράμμου τμήματος …… .

III. Θεωρούμε ένα σταθερό σημείο O και για ένα τυχαίο σημείο A είναι $|\overrightarrow{OA}| = \rho$, με $\rho>0$. Τότε το σημείο … βρίσκεται πάνω σε …………… που έχει το O ως …………… και το ρ ως ……………… .

IV. Όταν $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Gamma}$, τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = \ldots$, οπότε τα σημεία A και B ……………………… .

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

2.1. ΟΡΙΣΜΟΣ:

Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \neq 0$ και $\vec{\alpha}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Ονομάζουμε γινόμενο του λ με το $\vec{\alpha}$ και το συμβολίζουμε $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα το οποίο:

- είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda < 0$ και
- έχει μέτρο $|\lambda| \cdot |\vec{\alpha}|$.

Αν είναι $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε ως $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$.

2.2. ΠΡΟΤΑΣΗ:

Οι ιδιότητες πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα είναι:

(1) $\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$

(2) $(\lambda+\mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}$

(3) $\lambda(\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu)\vec{\alpha}$

Επι πλέον ως συνέπεια του ορισμού του γινομένου αριθμού με διάνυσμα και των παραπάνω ιδιοτήτων έχουμε:

(i) $\lambda\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$

(ii) $(-\lambda\vec{\alpha}) = \lambda(-\vec{\alpha}) = -(\lambda\vec{\alpha})$

(iii) $\lambda(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$

(iv) $(\lambda-\mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} - \mu\vec{\alpha}$

(v) Αν $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$

(vi) Αν $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε $\lambda = \mu$.

2.3. ΟΡΙΣΜΟΣ:

Γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, ονομάζεται κάθε διάνυσμα της μορφής

$$\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}, \text{ όπου } \kappa, \lambda \in \mathbb{R}.$$

2.4. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα, με $\vec{\beta}\neq\vec{0}$, τότε*

$$\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta},\ \mu\varepsilon\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Απόδειξη: Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με $\vec{\beta}\neq\vec{0}$ ισχύει η ισότητα $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$.

Αντίστροφα, αν $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}\neq\vec{0}$, τότε θέτουμε $\kappa=\dfrac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|=\kappa|\vec{\beta}|$. Συνεπώς:

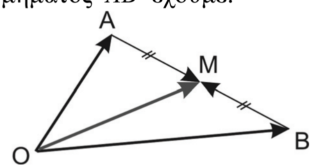
- Αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}=\kappa\vec{\beta}$.
- Αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}=-\kappa\vec{\beta}$.
- Αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$, τότε $\vec{\alpha}=0\cdot\vec{\beta}$.

Σε κάθε περίπτωση υπάρχει λ και μάλιστα μοναδικός τέτοιος, ώστε $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$.

2.5. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Αν O σημείο αναφοράς και M το μέσον ενός ευθυγράμμου τμήματος AB, τότε να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$.*

Απόδειξη: Για τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μέσου M του τμήματος AB έχουμε:

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)$$
$$=\frac{2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}}{2}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}.$$



2.6. ΠΡΟΤΑΣΗ: Για δύο μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\kappa\cdot\vec{\alpha}+\lambda\cdot\vec{\beta}=\vec{0} \Leftrightarrow \kappa=\lambda=0.$$

Απόδειξη:

- Αν $\kappa\neq0$ τότε $\kappa\cdot\vec{\alpha}+\lambda\cdot\vec{\beta}=\vec{0} \Leftrightarrow \kappa\cdot\vec{\alpha}=-\lambda\cdot\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}=-\dfrac{\lambda}{\kappa}\cdot\vec{\beta}$ δηλαδή $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$, άτοπο. Επομένως, $\kappa=0$ και $\lambda\cdot\vec{\beta}=\vec{0} \Leftrightarrow \lambda=0$.
- *Αντίστροφα*, αν $\kappa=\lambda=0$ τότε $\kappa\cdot\vec{\alpha}+\lambda\cdot\vec{\beta}=0\cdot\vec{\alpha}+0\cdot\vec{\beta}=\vec{0}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Μέθοδος — Απόδειξης διανυσματικών ισοτήτων.

Για να αποδείξουμε μία διανυσματική ισότητα συνήθως δουλεύουμε ως εξής:

- ❑ Ξεκινούμε από το ένα μέλος της ισότητας γράφοντας τα διανύσματα που παρουσιάζονται σ' αυτό ως συνάρτηση άλλων διανυσμάτων και καταλήγουμε στο άλλο μέλος.

Αν το ένα μέλος είναι της μορφής $\lambda \cdot \vec{u}$, λ θετικός ακέραιος, τότε μπορούμε να γράψουμε το $\vec{u}$ με λ διαφορετικούς τρόπους και μετά να προσθέσουμε κατά μέλη τις ισότητες.

- Παίρνουμε ένα σημείο αναφοράς και γράφουμε κάθε διάνυσμα ως συνάρτηση των διανυσματικών ακτίνων των άκρων τους. Μετά ισοδυνάμως καταλήγουμε σε μία προφανή ισότητα.
  Αν δίνεται κάποια ισόητα στην υπόθεση μπορούμε να ξεκινήσουμε από αυτήν και να καταλήξουμε στη ζητούμενη.

2.7. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ παίρνουμε το μέσο E της διαμέσου του $B\Delta$ και το σημείο Z της $B\Gamma$ ώστε $Z\Gamma = 3BZ$.

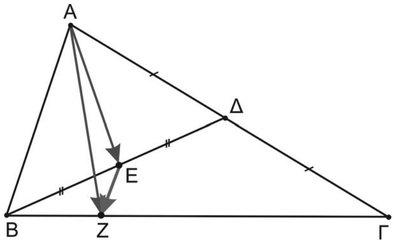
α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$

β) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AZ}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $EZ//AB$.

δ) Ποια σχέση έχουν τα μήκη των τμημάτων AB και EZ.

Λύση:



α) $\overrightarrow{AE} = \dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$
$= \dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.

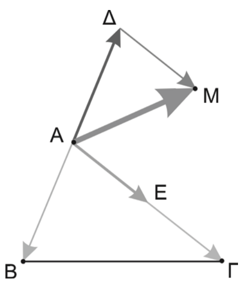
β) $\overrightarrow{Z\Gamma} = 3\cdot\overrightarrow{BZ} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AZ} = 3(\overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow$
$\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AZ} = 3\cdot\overrightarrow{AZ} - 3\cdot\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$
$\overrightarrow{A\Gamma} + 3\cdot\overrightarrow{AB} = 3\cdot\overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{AZ} \Leftrightarrow 4\cdot\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{A\Gamma} + 3\cdot\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AZ} = \dfrac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.

γ) $\overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{AE} = \dfrac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} - (\dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\cdot\overrightarrow{A\Gamma})$
$= \dfrac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} - \dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{4}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = \dfrac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Άρα $\overrightarrow{EZ} // \overrightarrow{AB}$ επομένως $EZ//AB$.

δ) $|\overrightarrow{EZ}| = \left|\dfrac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AB}\right| = \left|\dfrac{1}{4}\right|\cdot|\overrightarrow{AB}| = \dfrac{1}{4}\cdot|\overrightarrow{AB}|$. Επομένως $EZ = \dfrac{1}{4}\cdot AB$.

2.8. Θεωρούμε στο επίπεδο ένα τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρείτε και να σχεδιάσετε τα σημεία M του επιπέδου τα οποία έχουν την ιδιότητα $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{M\Gamma} = 2\overrightarrow{MB}$.



Λύση:

Έστω A σημείο αναφοράς. Τότε

$3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{M\Gamma} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow$
$-3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AM} = 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) \Leftrightarrow$
$-3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow$
$-3\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow$

$$-2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} \quad \Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{AM} = -\tfrac{1}{2}(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma}) \quad \Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}.$$

Μέθοδος — Απόδειξης ότι τρία σημεία είναι συνευθειακά.

Για να αποδείξουμε ότι τρία σημεία π.χ. A, B και Γ είναι συνευθειακά αρκεί να αποδείξουμε ότι δύο από τα διανύσματα που αυτά δημιουργούν π.χ. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, είναι παράλληλα. Τότε οι ευθείες AB, $B\Gamma$ θα είναι παράλληλες και εφ' όσον έχουν ένα κοινό σημείο θα ταυτίζονται. Για να αποδείξουμε ότι $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{B\Gamma}$ αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.9. Θεωρούμε τα σημεία του επιπέδου Σ, P, A, B, Γ για τα οποία ισχύει η ισότητα:

$$5\overrightarrow{P\Sigma} + \overrightarrow{\Sigma B} - 4\overrightarrow{\Gamma\Sigma} = 5\overrightarrow{PA}.$$

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

β) Να βρείτε τη σχετική θέση των σημείων A, B, Γ και να κατασκευάσετε ένα σχήμα.

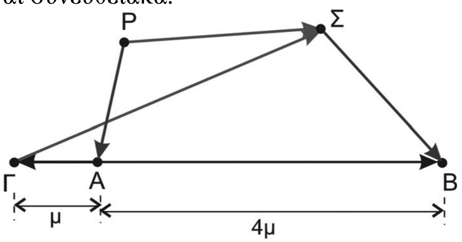
Λύση:

α) Θεωρούμε το A σαν σημείο αναφοράς στο επίπεδο.

Είναι:
$$5\overrightarrow{P\Sigma} + \overrightarrow{\Sigma B} - 4\overrightarrow{\Gamma\Sigma} = 5\overrightarrow{PA} \quad \Leftrightarrow$$
$$5(\overrightarrow{A\Sigma} - \overrightarrow{AP}) + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Sigma} - 4(\overrightarrow{A\Sigma} - \overrightarrow{A\Gamma}) = -5\overrightarrow{AP} \quad \Leftrightarrow$$
$$5\overrightarrow{A\Sigma} - 5\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Sigma} - 4\overrightarrow{A\Sigma} + 4\overrightarrow{A\Gamma} = -5\overrightarrow{AP} \quad \Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{AB} = -4\overrightarrow{A\Gamma}.$$

Άρα $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{A\Gamma}$. Επομένως, τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

β) Επειδή $\overrightarrow{AB} = -4\overrightarrow{A\Gamma}$ θα είναι $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{A\Gamma}$ και $|\overrightarrow{AB}| = |-4\cdot\overrightarrow{A\Gamma}| = |-4|\cdot|\overrightarrow{A\Gamma}| = 4|\overrightarrow{A\Gamma}|$. Επομένως, το σημείο A βρίσκεται μεταξύ των Γ και B με $(AB) = 4\cdot(A\Gamma)$.



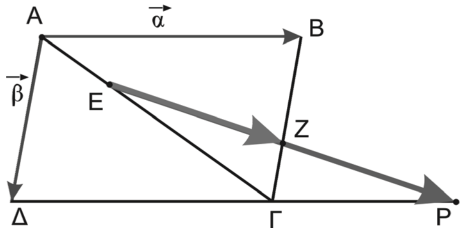
2.10. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$. Στη διαγώνιο $A\Gamma$ παίρνουμε σημείο E ώστε $AE = \frac{1}{4}A\Gamma$. Στην πλευρά $B\Gamma$ παίρνουμε σημείο Z ώστε $BZ = \frac{2}{3}B\Gamma$ και στην προέκταση της πλευράς $\Delta\Gamma$ σημείο P ώστε $\Gamma P = \frac{3}{5}\Delta\Gamma$.

i) Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AZ}$ και $\overrightarrow{AP}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

ii) Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{EZ}$ και $\overrightarrow{EP}$, ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

iii) Να αποδείξετε ότι τα σημεία E, Z και P είναι συνευθειακά.

Λύση:



i) $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{1}{4}\cdot(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = \frac{1}{4}\cdot\vec{\alpha}+\frac{1}{4}\cdot\vec{\beta}$.

$\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BZ} = \overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\alpha}+\frac{2}{3}\cdot\vec{\beta}$.

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta P} = \overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma P}$

$= \vec{\beta}+\vec{\alpha}+\frac{3}{5}\cdot\vec{\alpha} = \frac{8}{5}\cdot\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

ii) $\overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{AE} = (\vec{\alpha}+\frac{2}{3}\cdot\vec{\beta})-(\frac{1}{4}\cdot\vec{\alpha}+\frac{1}{4}\cdot\vec{\beta}) = \vec{\alpha}+\frac{2}{3}\cdot\vec{\beta}-\frac{1}{4}\cdot\vec{\alpha}-\frac{1}{4}\cdot\vec{\beta}$

$= \frac{3}{4}\cdot\vec{\alpha}+\frac{5}{12}\cdot\vec{\beta}$.

$\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AE} = (\frac{8}{5}\cdot\vec{\alpha}+\vec{\beta})-(\frac{1}{4}\cdot\vec{\alpha}+\frac{1}{4}\cdot\vec{\beta}) = \frac{8}{5}\cdot\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\frac{1}{4}\cdot\vec{\alpha}-\frac{1}{4}\cdot\vec{\beta}$

$= \frac{27}{20}\cdot\vec{\alpha}+\frac{3}{4}\cdot\vec{\beta}$.

iii) $\overrightarrow{EP} = \frac{27}{20}\cdot\vec{\alpha}+\frac{3}{4}\cdot\vec{\beta} = \frac{9}{5}\cdot(\frac{3}{4}\cdot\vec{\alpha}+\frac{5}{12}\cdot\vec{\beta}) = \frac{9}{5}\cdot\overrightarrow{EZ}$.

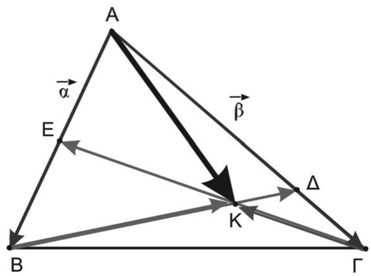
Άρα, $\overrightarrow{EP} /\!/ \overrightarrow{EZ}$ οπότε τα σημεία E, Z και P είναι συνευθειακά.

2.11. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$. Παίρνουμε το μέσο E της πλευράς AB και στην πλευρά $A\Gamma$ παίρνουμε σημείο Δ ώστε $A\Delta = \frac{3}{4}A\Gamma$. Τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE τέμνονται στο σημείο K.

i) Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Delta}$ και $\overrightarrow{\Gamma E}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

ii) Να βρείτε το διάνυσμα θέσης του σημείου K με αρχή το A.

Λύση:



i) $\overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\cdot\vec{\beta}-\vec{\alpha}$.

$\overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{A\Gamma} = \frac{1}{2}\cdot\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

ii) $\overrightarrow{BK} = x\cdot\overrightarrow{B\Delta} = x\cdot(\frac{3}{4}\cdot\vec{\beta}-\vec{\alpha}) = -x\vec{\alpha}+\frac{3x}{4}\vec{\beta}$.

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK} = \vec{\alpha}-x\vec{\alpha}+\frac{3x}{4}\vec{\beta} = (1-x)\vec{\alpha}+\frac{3x}{4}\vec{\beta}$.

$\overrightarrow{\Gamma K} = y\cdot\overrightarrow{\Gamma E} = y\cdot(\frac{1}{2}\cdot\vec{\alpha}-\vec{\beta}) = \frac{y}{2}\vec{\alpha}-y\vec{\beta}$.

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma K} = \vec{\beta}+\frac{y}{2}\vec{\alpha}-y\vec{\beta} = \frac{y}{2}\vec{\alpha}+(1-y)\vec{\beta}$.

Η γραφή του διανύσματος $\overrightarrow{AK}$ σαν γραμμικού συνδυασμού των μη συγγραμμικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μοναδική, οπότε:

$$\begin{cases} 1-x=\frac{y}{2} \\ \frac{3x}{4}=1-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-2x \\ y=1-\frac{3x}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-2x \\ 2-2x=1-\frac{3x}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-2x \\ 8-8x=4-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-2x \\ -5x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=2-2x \\ x=\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-2\cdot\frac{4}{5} \\ x=\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-\frac{8}{5} \\ x=\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{2}{5} \\ x=\frac{4}{5} \end{cases}.$$

Άρα $\overrightarrow{AK} = (1-\frac{4}{5})\vec{\alpha} + \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\,\vec{\beta} = \frac{4}{5}\,\vec{\alpha} + \frac{3}{5}\,\vec{\beta}$.

Μέθοδος → Εύρεση γεωμετρικού τόπου ενός σημείου το οποίο επαληθεύει μία ισότητα.

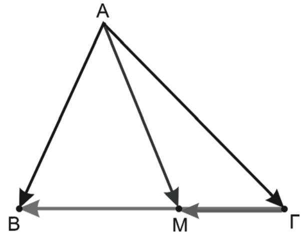
Αν ζητείται να βρούμε το γεωμετρικό τόπο ενός σημείου M όταν δίνεται μία διανυσματική ισότητα τότε:

- Γράφουμε την σχέση στη μορφή $\overrightarrow{AM} = \lambda\cdot\vec{u}$, όπου A γνωστό σημείο, $\vec{u}$ γνωστό διάνυσμα και λ πραγματικός αριθμός ή ανήκει σε κάποιο διάνυσμα. Ο γεωμετρικός τόπος είναι ευθεία ή ημιευθεία ή ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το A.
- Αν στην ισότητα υπάρχουν μέτρα διανυσμάτων την μετασχηματίζουμε στη μορφή
  - $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$, όπου A, B σταθερά σημεία, οπότε ο γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος του τμήματος AB.
  - $|\overrightarrow{AM}| = \rho > 0$, όπου A σταθερό σημείο, οπότε ο γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος κέντρου A και ακτίνας ρ.

2.12. Θεωρούμε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει η ισότητα:

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\cdot\overrightarrow{AB} + (1-\lambda)\cdot\overrightarrow{A\Gamma} \quad \text{με} \quad 0\le\lambda\le 1.$$

Λύση:



Έχουμε: $\overrightarrow{AM} = \lambda\cdot\overrightarrow{AB} + (1-\lambda)\cdot\overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AM} = \lambda\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} - \lambda\cdot\overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda\cdot\overrightarrow{AB} - \lambda\cdot\overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma}) \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{\Gamma M} = \lambda\cdot\overrightarrow{\Gamma B}$

Επειδή $0\le\lambda\le 1$ τότε $\overrightarrow{\Gamma M}\uparrow\uparrow\overrightarrow{\Gamma B}$ και $|\overrightarrow{\Gamma M}| = |\lambda\cdot\overrightarrow{\Gamma B}|$

$= |\lambda|\cdot|\overrightarrow{\Gamma B}| = \lambda\cdot|\overrightarrow{\Gamma B}|$

Είναι $0\le\lambda\le 1 \Rightarrow 0\le\lambda\cdot|\overrightarrow{\Gamma B}| \le |\overrightarrow{\Gamma B}| \Rightarrow 0\le|\overrightarrow{\Gamma M}| \le |\overrightarrow{\Gamma B}|$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι το τμήμα $B\Gamma$.

2.13. Δίνεται ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του ε-

πιπέδυο για τα οποία ισχύει η ισότητα:

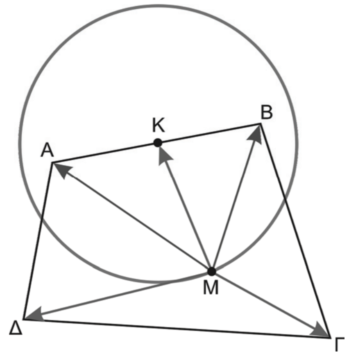
$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{M\Gamma}-\overrightarrow{M\Delta}\right| .$$

Λύση:

Θεωρούμε το μέσο K του τμήματος AB. Έχουμε:

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{M\Gamma}-\overrightarrow{M\Delta}\right| \Leftrightarrow \left|2\cdot\overrightarrow{MK}\right| = \left|\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right| \Leftrightarrow$$

$$2\cdot\left|\overrightarrow{MK}\right| = \left|\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{KM}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right|.$$

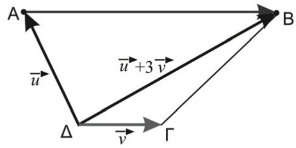


Άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου είναι ο κύκλος με κέντρο το K και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right|$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

2.14. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ στο διπλανό σχήμα είναι τραπέζιο.



2.15. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και παίρνουμε το μέσο E της $\Delta\Gamma$. Αν Z σημείο της $A\Gamma$ τέτοιο, ώστε $AZ = \frac{3}{5}A\Gamma$, να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{EZ}$ σαν γραμμικό συνδυαδμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$.

[Απ. $\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{10}\vec{\alpha} - \frac{2}{5}\vec{\beta}$]

2.16. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία A, B, Γ, Δ, E του επιπέδου ισχύει η ισότητα:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{E\Gamma} + \overrightarrow{E\Delta} + 3\,\overrightarrow{AE}.$$

2.17. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και θεωρούμε τα μέσα E, Z των πλευρών $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AZ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A\Gamma}$.

2.18. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{x}$ ισχύει η ισότητα:

$$\frac{1}{3}(\vec{x}-2\vec{\alpha}) + \frac{1}{6}(\vec{\beta}-\vec{x}) = \frac{1}{2}(\vec{x}-4\vec{\alpha}+\vec{\beta}).$$

Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{x}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

[Απ. $\vec{x} = 4\vec{\alpha} - \vec{\beta}$]

2.19. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{x}$ και $\vec{y}$ επαληθεύουν τις ισότητες:

$$4\vec{x}+5\vec{y} = 11\vec{\beta}-22\vec{\alpha} \quad \text{και} \quad 6\vec{x}-4\vec{y} = 36\vec{\alpha}-18\vec{\beta}.$$

Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι αντίρροπα.

2.20. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{x}$ και $\vec{y}$ ισχύουν οι ισότητες:

$$5(\vec{x}-2\vec{\beta}) = 3\vec{y}-4\vec{\alpha} \quad \text{και} \quad 2(3\vec{y}+7\vec{\alpha}) = 35\vec{\beta}-\vec{x},$$

να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι ίσα.

2.21. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}+3\vec{\beta}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{O\Gamma} = 3\vec{\alpha}-5\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι το σημείο B είναι το μέσο του $A\Gamma$.

2.22. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{\alpha}-3\vec{\beta}+2\vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{O\Gamma} = -5\vec{\alpha}+13\vec{\beta}-10\vec{\gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

2.23. Για τα σημεία O, M, A, B, Γ ισχύει η ισότητα: $\overrightarrow{M\Gamma}+3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{AO}+4\overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{MA}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

2.24. Θεωρούμε τα σημεία του επιπέδου M, A, B, Γ για τα οποία ισχύει η ισότητα $4\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB} = 6\overrightarrow{M\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

β) Να βρείτε τη σχετική θέση των σημείων A, B, Γ και να κατασκευάσετε ένα σχήμα.

[Απ. β) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{A\Gamma}$]

2.25. Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία E και Z της διαγωνίου $A\Gamma$, τέτοια ώστε να είναι $AE = Z\Gamma = \frac{1}{4}A\Gamma$.

i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$ ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$.

ii) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

2.26. Θεωρούμε τέσσερα σημεία του επιπέδου A, B, Γ, Δ εκ των οποίων τα B, Γ είναι διακεκριμμένα και $\overrightarrow{A\Delta} = 3\overrightarrow{B\Gamma}$. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό x, για τον οποίο ισχύει η ισότητα $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta} = x\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$.

[Απ. x=2]

2.27. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ το μέσο της AB. Στην $B\Gamma$ παίρνουμε σημείο E ώστε $BE = 3B\Gamma$ και στην $A\Gamma$ σημείο Z ώστε $AZ = \frac{3}{5}A\Gamma$.

i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta Z}$ και $\overrightarrow{\Delta E}$ ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$.

ii) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, E, Z είναι συνευθειακά.

2.28. Θεωρούμε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία M, N με $\overrightarrow{BM} = \kappa\cdot\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma N} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, Γ, M είναι συνευθειακά

β) Να βρείτε τον $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε $MN \parallel AB$.

Στην περίπτωση αυτή αποδείξτε ότι το $ABNM$ είναι παραλληλόγραμμο.

2.29. Σε ένα τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ παίρνουμε τα σημεία $Ε, Ζ$ στις πλευρές $ΑΒ, ΓΔ$ αντίστοιχα ώστε $\overrightarrow{ΑΕ} = κ\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΔΖ} = κ\overrightarrow{ΔΓ}$. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των $ΑΔ, ΕΖ$ και $ΒΓ$ είναι συνευθειακά.

2.30. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και ένα τυχαίο σημείο $Μ$ του επιπέδου του. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{u} = 3\overrightarrow{ΜΑ} + 5\overrightarrow{ΜΒ} - 8\overrightarrow{ΜΓ}$ είναι σταθερό.

2.31. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Να προσδιορίσετε σημείο $Κ$ του επιπέδου του ώστε να ισχύει η ισότητα: $\overrightarrow{ΑΚ} + 3\overrightarrow{ΒΚ} - 2\overrightarrow{ΓΚ} = \vec{0}$.

2.32. Αν $\vec{α} + \vec{β} + 2\vec{γ} = \vec{0}$ και $|\vec{α}| = \dfrac{|\vec{β}|}{3} = \dfrac{|\vec{γ}|}{2}$, να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{α} \uparrow\uparrow \vec{β}$ **ii)** $\vec{β} = 3\vec{α}$ και $\vec{γ} = -2\vec{α}$.

2.33. Θεωρούμε τα μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{α}$, $\vec{β}$. Έστω $\vec{γ} = 2\vec{α} + \vec{β}$ και $\vec{δ} = \vec{α} - 2\vec{β}$.

i) Να αποδείξετε ότι τα $\vec{γ}$ και $\vec{δ}$ δεν είναι παράλληλα.

ii) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u} = 3\vec{α} + 4\vec{β}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{γ}$ και $\vec{δ}$.

[Απ. $\vec{u} = 2\vec{γ} - \vec{δ}$]

2.34. Έστω τρίγωνο $ΟΑΒ$. Τα διανύσματα θέσης των σημείων $Α$ και $Β$ με αρχή το $Ο$ είναι $\vec{α}$ και $\vec{β}$ αντίστοιχα. Παίρνουμε σημείο $Γ$ του $ΟΑ$ με $ΟΓ = \frac{1}{3}ΟΑ$ και το μέσο $Δ$ του $ΟΒ$.

i) Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΔ}$, $\overrightarrow{ΒΓ}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{α}$, $\vec{β}$.

ii) Να βρείτε το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$, του σημείου τομής των τμημάτων $ΑΔ$ και $ΒΓ$.

[Απ. $\vec{r} = \frac{1}{5}\vec{α} + \frac{2}{5}\vec{β}$]

2.35. Έστω ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ και τα σημεία $Δ, Ε$ ώστε $\overrightarrow{ΑΔ} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΕ} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{ΑΓ}$. Οι ευθείες ΒΕ και ΓΔ τέμνονται στο σημείο Μ.

i) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{ΑΜ} = \frac{1}{5}\cdot\overrightarrow{ΑΒ} + \frac{2}{5}\cdot\overrightarrow{ΑΓ}$.

ii) Παίρνουμε το σημείο $Ζ$ ώστε $\overrightarrow{ΒΖ} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{ΒΓ}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $Α, Μ, Ζ$ είναι συνευθειακά.

2.36. Θεωρούμε τρίγωνο $ΑΒΓ$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $Μ$ του επιπέδου του για τα οποία ισχύει η ισότητα:

$$\overrightarrow{ΜΒ} + λ\cdot\overrightarrow{ΒΓ} = \overrightarrow{ΓΜ} + λ\cdot\overrightarrow{ΑΓ}, \text{ όπου } λ \in \mathbb{R}.$$

2.37. Δίνεται τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $Μ$ για τα οποία ισχύει: $|\overrightarrow{ΜΑ} + \overrightarrow{ΜΒ}| = |\overrightarrow{ΜΓ} + \overrightarrow{ΜΔ}|$.

2.38. Σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ η διάμεσός του $ΑΔ$ έχει μήκος 6. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ τα ιποία ικανοποιούν την σχέση:

$$3\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{ΓB}\right| = \left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MΓ}-2\cdot\overrightarrow{MA}\right|.$$

*   *   *   *   *

Β΄ Ομάδα

2.39. Αν G το σημείο τομής των τμημάτων που ενώνουν τα μέσα των απέναντι πλευρών τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$ και O τυχαίο σημείο του επιπέδου, να αποδείξετε ότι:

i) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GΓ} + \overrightarrow{GΔ} = \vec{0}$.

ii) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OΓ} + \overrightarrow{OΔ})$.

2.40. Δίνεται πεντάγωνο $ΑΒΓΔΕ$ και $Κ, Λ, Μ$ τα μέσα των $ΑΒ, ΓΔ, ΚΛ$ αντίστοιχα. Παίρνουμε σημείο G του $ΜΕ$ ώστε $MG = \frac{1}{4}GE$ και τυχαίο σημείο O του επιπέδου.

Να αποδείξετε ότι:

i) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GΓ} + \overrightarrow{GΔ} + \overrightarrow{GE} = \vec{0}$.

ii) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OΓ} + \overrightarrow{OΔ} + \overrightarrow{OE})$.

2.41. Έστω $Μ$ το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων που ενώνουν τα μέσα των απέναντι πλευρών ενός τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$. Στο επίπεδο του τετραπλεύρου ορίζονται τα σημεία $Κ$ και $Λ$ ώστε $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{KΛ} = \overrightarrow{MΓ}$. Να αποδείξετε ότι το $Μ$ είναι το μέσο του $ΑΔ$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

2.42. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* ή *Λάθος* κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Αν $\vec{α}$ και $\vec{β} \neq \vec{0}$ τότε τα διανύσματα $\frac{\vec{α}}{|\vec{α}|}$ και $\frac{\vec{β}}{|\vec{β}|}$ έχουν ίσα μέτρα.

II. Αν $\vec{u} = 3\vec{w}$, τότε η γωνία των $\vec{u}$ και $\vec{w}$ είναι 180^0.

III. Αν $\vec{x} = -\frac{3}{4}\vec{y}$, τότε η γωνία των $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι 180^0.

IV. Αν $|\vec{α}| = λ|\vec{β}|$, τότε $\vec{α} \parallel \vec{β}$.

V. Αν το $\vec{α}+\vec{β}$ είναι συγγραμμικό του $\vec{α}$, τότε το $\vec{α}+\vec{β}$ είναι συγγραμμικό του $\vec{β}$.

VI. Ισχύει $\left|2\vec{α}-4\vec{β}+7\vec{γ}\right| = 0 \Leftrightarrow \vec{α} = 2\vec{β} - 3{,}5\vec{γ}$

VII. Αν $\vec{α}$, $\vec{β}$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα, τότε το διάνυσμα $2\vec{α}+3\vec{β}$ δεν μπορεί να είναι συγγραμμικό με κάποιο από αυτά.

VIII. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε $\lambda = \mu = 0$.

IX. Αν $(\lambda^2+3)\cdot\vec{u} = 2\lambda\cdot\vec{u}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε $\vec{u} = \vec{0}$.

2.43. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Αν A, B είναι δύο διακεκριμμένα σημεία του επιπέδου και ισχύει $(1 - 4\kappa + 4\kappa^2)\cdot\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ τότε το κ ισούται με:

Α. 2 **Β.** –2 **Γ.** 0 **Δ.** 1/2 **Ε.** 3/2

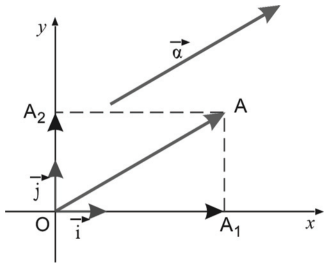
ΕΝΟΤΗΤΑ 3

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

3.1. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}$.*

Απόδειξη: Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα του επιπέδου. Με αρχή το O σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$. Αν A_1 και A_2 είναι οι προβολές του A στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, έχουμε:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} \quad \textbf{(1)}.$$



Αν x, y οι συντεταγμένες του A, τότε ισχύει $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i}$ και $\overrightarrow{OA_2} = y\vec{j}$. Επομένως η **(1)** γράφεται $\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}$, δηλαδή το $\vec{\alpha}$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{i}$ και $\vec{j}$.

Έστω ότι το $\vec{\alpha}$ μπορεί να γραφεί $\vec{\alpha} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.

Τότε θα έχουμε:

$$x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j} \iff (x-x')\vec{i} = (y'-y)\vec{j}.$$

Αν $x-x' \neq 0 \iff x \neq x'$, τότε θα ισχύει $\vec{i} = \dfrac{y'-y}{x-x'}\vec{j} \iff$ $\vec{i} \,//\, \vec{j}$, που είναι άτοπο.

Επομένως $x = x'$ οπότε $\vec{0} = (y'-y)\vec{j} \iff y'-y = 0 \iff y = y'$.

Άρα το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

3.2. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι*

(i) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1+x_2, y_1+y_2)$

(ii) $\lambda\vec{\alpha} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

Απόδειξη: **i)** $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = (x_1+x_2)\vec{i} + (y_1+y_2)\vec{j}$.

Άρα $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1+x_2, y_1+y_2)$.

ii) $\lambda\vec{\alpha} = \lambda(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) = (\lambda x_1)\vec{i} + (\lambda y_1)\vec{j}$.

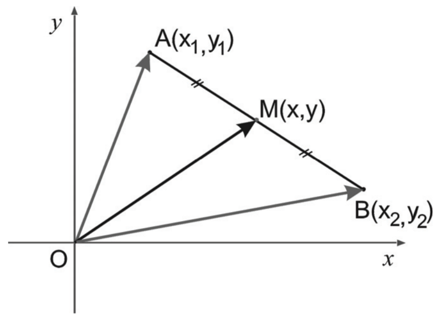
Άρα $\lambda\vec{\alpha} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$.

3.2.1. ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Γενικότερα, για το γραμμικό συνδυασμό $\lambda\cdot\vec{\alpha}+\mu\cdot\vec{\beta}$ έχουμε:

$$\lambda\cdot\vec{\alpha}+\mu\cdot\vec{\beta} = \lambda\cdot(x_1\,,\,y_1)+\mu\cdot(x_2\,,\,y_2) = (\lambda x_1\,,\,\lambda y_1)+(\mu x_2\,,\,\mu y_2) = (\lambda x_1+\mu x_2\,,\,\lambda y_1+\mu y_2)$$

3.3. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Οι συντεταγμένες του μέσου ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι είναι ίσες με το ημιάθροισμα των ομόνυμων συντεταγμένων των άκρων του τμήματος.*

Απόδειξη: Θεωρούμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και υποθέτουμε ότι (x, y) είναι οι συντεταγμένες του μέσου M του AB. Τότε $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$ και $\overrightarrow{OM} = (x, y)$.



Είναι $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow$

$(x, y) = \frac{1}{2}[(x_1, y_1)+(x_2, y_2)] \Leftrightarrow$

$(x, y) = \frac{1}{2}[(x_1+x_2, y_1+y_2)] \Leftrightarrow (x, y) = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}) \Leftrightarrow x = \frac{x_1+x_2}{2}$ και $y = \frac{y_1+y_2}{2}$.

3.4. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Οι συντεταγμένες του διανύσματος με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις*

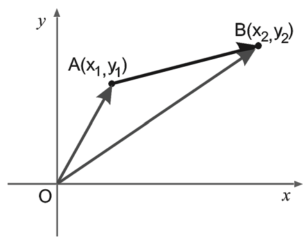
$x = x_2 - x_1$ *και* $y = y_2 - y_1$.

Απόδειξη: Θεωρούμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και υποθέτουμε ότι (x, y) είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

Τότε $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$ και

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow (x, y) = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) \Leftrightarrow$

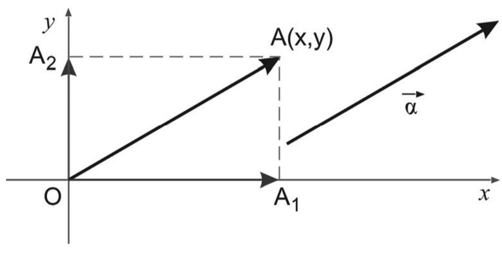
$(x, y) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \Leftrightarrow x = x_2 - x_1$ και $y = y_2 - y_1$.



3.5. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Αν* $\vec{\alpha} = (x, y)$ *τότε* $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Απόδειξη:

Έστω $\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου και A το σημείο με διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$. Αν A_1 και A_2 είναι οι προβολές του A στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, επειδή το σημείο A έχει τετμημένη x και τεταγμένη y, θα είναι $(OA_1) = |x|$ και $(OA_2) = |y|$. Τότε θα είναι:



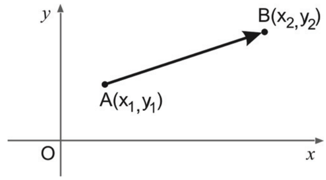
$$|\vec{\alpha}|^2 = (OA)^2 = (OA_1)^2 + (A_1A)^2 = (OA_1)^2 + (OA_2)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2.$$

Επομένως, $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2+y^2}$.

3.6. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι ίση με*

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

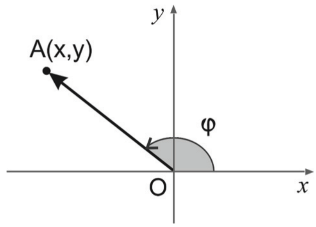
Απόδειξη: Θεωρούμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου. Είναι $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.
Τότε $(AB) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.



3.7. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι δύο διανύσματα, τότε ισχύει:*

$$\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0\ .$$

3.8. ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $\vec{\alpha} = (x, y)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα και A το σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$. Τη γωνία φ, που διαγράφει ο ημιάξονας Ox αν στραφεί γύρω από το O κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία OA, την ονομάζουμε *γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$.*
Είναι $0 \leq \varphi < 2\pi$.



3.9. ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $\vec{\alpha} = (x, y)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα, με $x \neq 0$ και φ είναι η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$. Ορίζουμε ως *συντελεστή διεύθυνσης* του $\vec{\alpha}$ το πηλίκο $\frac{y}{x} = \text{εφ}\varphi$ και το συμβολίζουμε με $\lambda_{\vec{\alpha}}$ ή λ. Επομένως $\lambda = \frac{y}{x} = \text{εφ}\varphi$.
Αν $x = 0$, δηλαδή αν $\vec{\alpha} \,// y'y$, τότε δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

3.10. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα, τότε:*

$$\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2\ .$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντιστοίχως. Τότε θα έχουμε:

$$\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1 \quad \Leftrightarrow$$

$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2.$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.11. Για δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν οι ισότητες:

$$3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta} = (4,15) \quad \text{και} \quad 2\vec{\beta} - 4\vec{\alpha} = (-20,2).$$

i) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = (4,1)$ και $\vec{\beta} = (-2,3)$.

ii) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (-24,1)$ σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις εκείνες των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Λύση:

i) Είναι $\begin{cases} 3\vec{\alpha}+4\vec{\beta}=(4,15) \\ -4\vec{\alpha}+2\vec{\beta}=(-20,2) \end{cases} \Big| \cdot(-2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\vec{\alpha}+4\vec{\beta}=(4,15) \\ 8\vec{\alpha}-4\vec{\beta}=(40,-4) \end{cases} \ (+)$

$11\vec{\alpha} = (44,11) \Leftrightarrow \frac{1}{11}\cdot 11\vec{\alpha} = \frac{1}{11}\cdot(44,11) \Leftrightarrow$

$\vec{\alpha} = (4,1).$

$3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta} = (4,15) \Leftrightarrow 3\cdot(4,1) + 4\vec{\beta} = (4,15) \Leftrightarrow (12,3) + 4\vec{\beta} = (4,15) \Leftrightarrow$

$4\vec{\beta} = (4,15) - (12,3) \Leftrightarrow 4\vec{\beta} = (-8,12) \Leftrightarrow \frac{1}{4}\cdot 4\vec{\beta} = \frac{1}{4}\cdot(-8,12) \Leftrightarrow \vec{\beta} = (-2,3).$

ii) Για να αναλύσουμε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις εκείνες των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αρκεί να βρούμε $x, y \in \mathbb{R}$ τέτοιους, ώστε

$\vec{\gamma} = x\cdot\vec{\alpha} + y\cdot\vec{\beta} \Leftrightarrow (-24,1) = x\cdot(4,1) + y\cdot(-2,3) \Leftrightarrow (-24,1) = (4x,x) + (-2y,3y) \Leftrightarrow$

$(-24,1) = (4x-2y, x+3y) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2y=-24 \\ x+3y=1 \end{cases} \Big| \cdot(-4) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2y=-24 \\ -4x-12y=-4 \end{cases} \ (+)$

$-14y = -28 \Leftrightarrow y = \frac{-28}{-14} = 2.$

$x + 3y = 1 \Leftrightarrow x + 3\cdot 2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 - 6 \Leftrightarrow x = -5.$ Άρα $\vec{\gamma} = -5\cdot\vec{\alpha} + 2\cdot\vec{\beta}$.

3.11.1. <u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:</u> Η έκφραση *"Να αναλύσετε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις δύο άλλων διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$"* είναι ισοδύναμη με τις προτάσεις: *"Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$"* και *"Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$"*.

3.12. Δίνονται τα σημεία $A(3,2)$, $B(1,0)$ και $\Gamma(0,4)$. Αν η $A\Gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Δ και η AB τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο E, τότε.

i) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και E.

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες των μέσων K, Λ, M των OA, $E\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

iii) Να αποδείξετε ότι τα μέσα K, Λ, M είναι συνευθειακά και να βρείτε το λόγο στον οποίο χωρίζει το K το τμήμα ΛM.

Λύση:

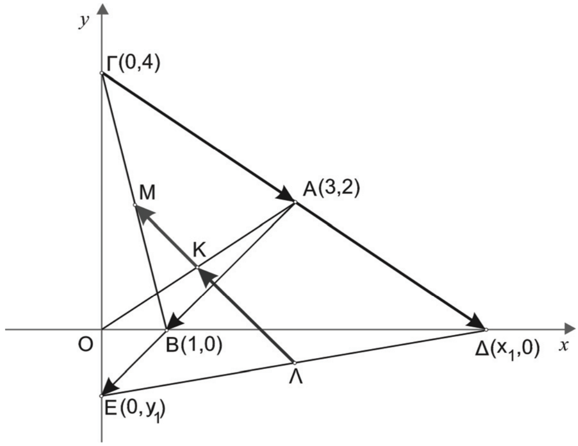
i) Έστω $\varDelta(x_1,0)$ και $E(0, y_1)$. Τότε $\overrightarrow{\varGamma A} = (3–0, 2–4) = (3, –2)$ και $\overrightarrow{\varGamma \varDelta} = (x_1–0, 0–4) = (x_1, –4)$. Επειδή τα διανύσματα $\overrightarrow{\varGamma A}$ και $\overrightarrow{\varGamma \varDelta}$ είναι συγγραμμικά θα έχουμε

$$\det(\overrightarrow{\varGamma A}, \overrightarrow{\varGamma \varDelta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ x_1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -12+2x_1 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 = 12 \Leftrightarrow x_1 = 6.$$

Άρα $\varDelta(6,0)$.

Ακόμα $\overrightarrow{AB} = (1–3,0–2) = (–2,–2)$ και $\overrightarrow{BE} = (0–1, y_1–0) = (–1, y_1)$.



Επειδή τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BE}$ είναι συγγραμμικά θα έχουμε

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BE}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & y_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2y_1-2 = 0 \Leftrightarrow -2y_1 = 2 \Leftrightarrow y_1 = -1.$$

Άρα $E(0,–1)$.

ii) Το μέσο K του τμήματος OA έχει συντεταγμένες:

$$x_K = \frac{x_O + x_A}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2} \text{ και } y_K = \frac{y_O + y_A}{2} = \frac{0+2}{2} = 1. \text{ Άρα } K(\tfrac{3}{2},1).$$

Όμοια βρίσκουμε $\varLambda(3,-\frac{1}{2})$ και $M(\frac{1}{2},2)$.

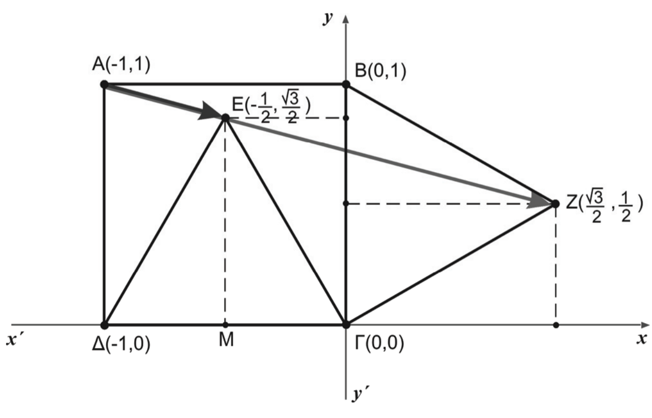
iii) $\overrightarrow{KM} = (\frac{1}{2}-\frac{3}{2}, 2-1) = (-1,-1)$ $\qquad \overrightarrow{\varLambda K} = (\frac{3}{2}-3, 1+\frac{1}{2}) = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{3}{2}(-1,1) = \frac{3}{2}\overrightarrow{KM}$.

$$\text{Άρα } |\overrightarrow{\varLambda K}| = \left|\frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{KM}\right| = \frac{3}{2}|\overrightarrow{KM}| \Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{\varLambda K}|}{|\overrightarrow{KM}|} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\varLambda K}{KM} = \frac{3}{2}.$$

3.13. Δίνεται ένα τετράγωνο *ΑΒΓΔ*. Στο εσωτερικό του τετραγώνου κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο *ΓΔΕ* και στο εξωτερικό του κατασκευάζουμε ένα άλλο ισόπλευρο τρίγωνο *ΒΓΖ*. Να αποδείξετε ότι τα σημεία *Α*, *Ε*, *Ζ* είναι συνευθειακά.

Λύση:

Κατασκευάζουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με άξονα $x'x$ την ευθεία $\varDelta\varGamma$ και άξονα $y'y$ την ευθεία $B\varGamma$. Τότε οι συντεταγμένες των κορυφών του τετραγώνου θα είναι $\varGamma(0,0)$, $B(0,1)$, $\varDelta(–1,0)$ και $A(–1,1)$. Αν EM είναι το ύψος του ισοπλεύρου τριγώνου $\varGamma\varDelta E$, τότε $\varDelta M = M\varGamma = \frac{1}{2}$ και $EM = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα $E(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Όμοια



βρίσκουμε ότι $Z(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$.

$\overrightarrow{AE} = (-\frac{1}{2}+1, \frac{\sqrt{3}}{2}-1) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}-2}{2})$ και $\overrightarrow{AZ} = (\frac{\sqrt{3}}{2}+1, \frac{1}{2}-1) = (\frac{\sqrt{3}+2}{2}, -\frac{1}{2})$

Είναι $\det(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AZ}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}-2}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+2}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{3}+2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-2}{2} = -\frac{1}{4} - \frac{(\sqrt{3}+2)\cdot(\sqrt{3}-2)}{4} =$

$-\frac{1}{4} - \frac{(\sqrt{3})^2-2^2}{4} = -\frac{1}{4} - \frac{3-4}{4} = -\frac{1}{4} - \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0.$

Επομένως, $\overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{AZ}$. Άρα τα σημεία A, E, Z είναι συνευθειακά.

3.13.1. <u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:</u> **(1)** *Σαν σύστημα αξόνων μπορούμε να επιλέξουμε όποιο θέλουμε . Π.χ. μπορούμε να πάρουμε ως άξονες τις ευθείες ΔΓ και ΔΑ.*

(2) *Επιλέξαμε αυθαίρετα ως μονάδα μήκους την πλευρά του τετραγώνου. Μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε θέλουμε και τότε οι συντεταγμένες των σημείων αλλάζουν κατάλληλα.*

Με την κατάλληλη επιλογή της μονάδας μήκους επιδιώκουμε την απλοποίηση των πράξεων.

3.14. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy, δίνονται τα σημεία $B(-3,-3)$ και $\Gamma(3,9)$.

i) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Α για το οποίο ισχύει: $\overrightarrow{A\Gamma} = -2\overrightarrow{AB}$.

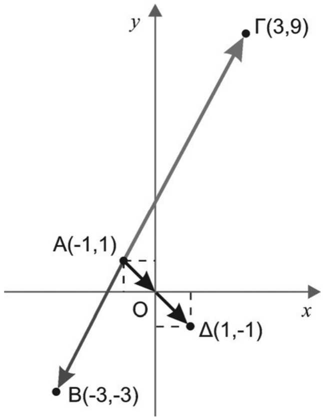
ii) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{AO}$ με τον άξονα $x'x$.

<u>Λύση:</u>

i) Έστω $A(x, y)$. Τότε $\overrightarrow{A\Gamma} = (3-x, 9-y)$ και $\overrightarrow{AB} = (-3-x, -3-y)$.

Είναι $\overrightarrow{A\Gamma} = -2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (3-x, 9-y) = -2(-3-x, -3-y) \Leftrightarrow$ $(3-x, 9-y) = (6+2x, 6+2y) \Leftrightarrow$.

$\begin{cases} 3-x=6+2x \\ 9-y=6+2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x=3 \\ -3y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{-3}=-1 \\ y=\frac{-3}{-3}=1 \end{cases}$. Άρα $A(-1,1)$.



ii) $\overrightarrow{AO} = (0+1, 0-1) = (1,-1) = \overrightarrow{O\Delta}$ όπου $\Delta(1,-1)$.

Επομένως, η γωνία $\hat{\varphi}$ που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{AO}$ με τον άξονα $x'x$ είναι $\hat{\varphi} = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ Ομάδα</u>

3.15. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^2+3\lambda-4)\vec{i} + (2\lambda^2+11\lambda+12)\vec{j}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον λ ώστε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$

i) να είναι το μηδενικό διάνυσμα.
ii) να είναι μη μηδενικό και παράλληλο στον άξονα $x'x$.
iii) να είναι μη μηδενικό και παράλληλο στον άξονα $y'y$.

[Απ. i)λ=-4 ii)λ=$-\frac{3}{2}$ iii)λ=1]

3.16. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό κ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\kappa^2-\kappa+4)\vec{i} + (5-\kappa)\vec{j}$ και $\vec{\beta} = (\kappa+12)\vec{i} - (3\kappa-1)\vec{j}$, να είναι ίσα.

[Απ. κ=-2]

3.17. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda+3\mu, \mu+3)$, $\vec{\beta} = (2\lambda, \mu-\lambda+1)$ και $\vec{\gamma} = (7\mu, 2\lambda-\mu)$. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί λ, μ ώστε να ισχύει η ισότητα:

$$2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} - 2\vec{\gamma} = \vec{0}.$$

[Απ. λ=2 , μ=-1]

3.18. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(2,5)$, $B(-4,1)$, $\Gamma(2,-1)$ και $\Delta(8,3)$ είναι κορυφές παραλληλογράμμου. Έπειτα να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του.

3.19. Δίνονται τα σημεία $A(-2,3)$, $B(5,0)$, $\Gamma(4,-5)$.
i) Να βρεθεί σημείο Δ, ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο.
ii) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του κέντρου K του $AB\Gamma\Delta$.

[Απ. i)Δ(-3,-2) ii)Κ(1,-1)]

3.20. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με Α(–1,1), Β(5,–1) και Γ(3,7) και ΑΜ είναι η διάμεσός του. Να βρείτε:
i) Τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$.
ii) Σημείο Δ ώστε το ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο.

[Απ. ii)Δ(-3,9)]

3.21. Για ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ δίνονται οι κορυφές Α(–2,3), Β(5,7) και το κέντρο του Κ(1,2). Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ.

[Απ. Γ(4,1),Δ(-3,-3)]

3.22. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$, για το οποίο δίνεται ότι: $\vec{\alpha} = (-6, |\vec{\alpha}|-2)$.

[Απ. $\vec{\alpha}=(-6,8)$]

3.23. Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ αν δίνεται ότι: $\vec{\alpha} = (-2, |\vec{\beta}|)$ και $\vec{\beta} = (2-|\vec{\alpha}|, 4)$

[Απ. $\vec{\alpha}=(-2,4\sqrt{2})$, $\vec{\beta}=(-4,4)$]

3.24. Δίνονται τα σημεία $A(-2,-3)$, $B(6,1)$, $\Gamma(-1,2)$ και $\Delta(4,-3)$. Να αποδείξετε ότι το μέσο του τμήματος AB είναι σημείο της ευθείας $\Gamma\Delta$.

3.25. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (6,-13)$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (4,-5)$ και $\vec{\beta} = (2,3)$.

[Απ. $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$]

3.26. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{u} = (-13,19)$ σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις παράλληλες των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (\frac{3}{2},4)$ και $\vec{\beta} = (-5,2)$.

[Απ. $\vec{u} = 3\vec{\alpha} + \frac{7}{2}\vec{\beta}$]

3.27. Για δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν οι ισότητες:

$$3\vec{\alpha} + 7\vec{\beta} = (-1,-12) \quad \text{και} \quad 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-16,15).$$

i) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = (-5,3)$ και $\vec{\beta} = (2,-3)$.

ii) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (\frac{17}{3},-7)$ σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις εκείνες των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

[Απ. ii) $\vec{\gamma} = -\frac{1}{3}\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$]

3.28. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda,-1)$ και $\vec{\beta} = (1,\lambda)$ είναι μη συγγραμμικά και μετά να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{u} = (\lambda^3,1)$ σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις εκείνες των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

[Απ. $\vec{u} = (\lambda^2-1)\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$]

3.29. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (6+\lambda,1-\lambda)$ και $\vec{\beta} = (8,4-\lambda)$ να είναι παράλληλα.

[Απ. $\lambda=-2$ ή $\lambda=8$]

3.30. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1-\kappa, \kappa)$ και $\vec{\beta} = (\kappa-5,6)$ να είναι αντίρροπα.

[Απ. $\kappa=-3$]

3.31. Δίνονται τα σημεία Α$(2\lambda, -1)$, Β$(3\lambda-1, \lambda-2)$ και Γ$(4,-5)$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες σχηματίζεται τρίγωνο ΑΒΓ..

β) Αν $\lambda = 2$, να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΒΜ.

[Απ. α) $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 4$ β) $\lambda = \sqrt{53}$]

3.32. Δίνονται τα σημεία $A(1,-\frac{3}{2})$, $B(2,-1)$ και $M(\alpha, \frac{\alpha-4}{2})$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και M είναι συνευθειακά.

β) Να βρείτε την τιμή του α ώστε $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}$.

γ) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ δεν μπορεί να είναι μικρότερο από $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

[Απ. β) $\alpha=7/3$]

3.33. Στο καρτεσιανό επίπεδο δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(-5,3)$.

i) Να βρείτε σημείο P, του άξονα $x'x$, τέτοιο ώστε $(PA) = (PB)$.

ii) Να βρείτε το μήκος του ύψους $P\Delta$, του τριγώνου APB.

[Απ. i) $P(-1,0)$ ii) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$]

3.34. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,2)$ και $\vec{\beta} = (2,3)$.

α) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$.

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{\gamma}$ με τον άξονα $x'x$.

[Απ. i) $\sqrt{2}$ ii) 135^0]

3.35. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy, δίνονται τα σημεία $A(3,-2)$ και $B(-5,10)$.

i) Να βρείτε σημείο M του επιπέδου ώστε να ισχύει: $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{AM}$.

ii) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{MO}$ με τον άξονα $x'x$.

[Απ. i) $M(1,1)$ ii) $\frac{5\pi}{4}$]

3.36. Θεωρούμε τρίγωνο $ΑΒΓ$ με κορυφές $A(3,3)$, $B(-3,-1)$ και $Γ(5,-3)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των μέσων M, N των πλευρών του AB, $AΓ$ αντίστοιχα.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού $Δ$, της κορυφής $Γ$ ως προς το M.

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού E, της κορυφής B ως προς το N.

δ) Να αποδείξετε ότι το A είναι το μέσο του τμήματος $ΔE$.

3.37. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1,2)$ και $\vec{\beta} = (2\alpha-\beta, \alpha+\beta-1)$.

i) Αν τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ είναι συγγραμμικά, να εκφράσετε τις συντεταγμένες του $\vec{\gamma}$ ως συνάρτηση του α.

ii) Για ποιες τιμές των α και β το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ είναι μοναδιαίο;

[Απ. i) $\vec{\gamma} = (-9\alpha, 12\alpha)$ ii) $\alpha = \frac{1}{15}$, $\beta = -\frac{4}{15}$ ή $\alpha = -\frac{1}{15}$, $\beta = -\frac{26}{15}$]

3.38. Τα σημεία $Δ(1,3)$, $E(-4,1)$, $Z(-1,-1)$ είναι τα μέσα των πλευρών AB, $AΓ$ και $BΓ$ ενός τριγώνου $ΑΒΓ$ αντίστοιχα. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του.

[Απ. $A(-2,5)$, $B(4,1)$, $Γ(-6,-3)$]

* * * * *

Β΄ Ομάδα

3.39. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, y)$ και $\vec{\beta} = (5,12)$

i) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

ii) Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-5)^2+(y-12)^2} \geq 13$.

iii) Πότε ισχύει η ισότητα στη σχέση του ερωτήματος **(ii)**.

3.40. Έστω $\vec{\alpha} = (-7,1)$ και $\vec{\beta} = (2,-1)$. Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{v}$, για τα οποία ισχύει $\vec{v} = \vec{\alpha} + |\vec{v}| \cdot \vec{\beta}$.

[Απ. $\vec{v} = (3,-4)$, $\vec{v} = (-2,-\frac{3}{2})$]

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

3.41. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* ή *Λάθος* κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διεύθυνσης.

II. Δύο διανύσματα με ίσους συντελεστές διεύθυνσης είναι ομόρροπα.

3.42. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ = (ημθ, συνθ), είναι το μηδενικό με:

Α. $\theta = 2\kappa\pi$ **Β.** $\theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ **Γ.** $\theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

Δ. $\theta = 2\kappa\pi + \pi$ **Ε.** καμία τιμή του θ

II. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ = (ημθ, συνθ), είναι παράλληλο στο $\vec{\beta}$ = (συνθ, ημθ) με:

Α. $\theta = 0$ **Β.** $\theta = \pi / 6$ **Γ.** $\theta = \pi / 2$ **Δ.** $\theta = 3\pi / 4$ **Ε.** $\theta = \pi$

III. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, \lambda–1)$ και $\vec{\beta} = (4, \lambda)$. Για ποια από τις παρακάτω τιμές του λ τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα;

Α. $\lambda = 1$ **Β.** $\lambda = 3$ **Γ.** $\lambda = 2$ **Δ.** $\lambda = –2$ **Ε.** $\lambda = –3$

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

4.1. ΟΡΙΣΜΟΣ:

- Ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot$συν$\varphi$, όπου φ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$
- Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$.

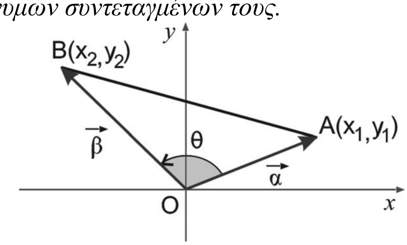
4.1.1. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: **(1)** Άμεσες συνέπειες του παραπάνω ορισμού είναι οι εξής:

- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$ (*Αντιμεταθετική ιδιότητα*)
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$
- $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

(2) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\vec{\alpha}^2$ και λέγεται *τετράγωνο του* $\vec{\alpha}$.
Έχουμε: $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\alpha}|\cdot$συν$0 = |\vec{\alpha}|^2$. Επομένως, $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$.

4.2. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομόνυμων συντεταγμένων τους.*

Απόδειξη: Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Με αρχή το O παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$. Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο OAB έχουμε την ισότητα



$$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA)\cdot(OB)\cdot\text{συν}\, A\hat{O}B \quad \textbf{(1)},$$

η οποία ισχύει και στην περίπτωση που τα σημεία O, A, B είναι συνευθειακά.

Όμως είναι $(AB)^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$, $(OA)^2 = x_1^2 + y_1^2$, $(OB)^2 = x_2^2 + y_2^2$ και

$(OA)(OB)$συν $A\hat{O}B = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

Επομένως η **(1)** $\Leftrightarrow$ $(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2(OA)\cdot(OB)\cdot$συν $A\hat{O}B$

$$\Leftrightarrow\ x_2^2-2x_2\cdot x_1+x_1^2+y_2^2-2y_2\cdot y_1+y_1^2=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$$
$$\Leftrightarrow\ 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2x_2\cdot x_1+2y_2\cdot y_1$$
$$\Leftrightarrow\ \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2\,.$$

Αν ένα τουλάχιστον από τα δύο διανύσματα είναι το μηδενικό ισχύει πάλι η ισότητα.

4.3. ΠΡΟΤΑΣΗ:

Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ και $\lambda\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

(i) $(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=\lambda\cdot(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$

(ii) $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$

(iii) $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\ \Leftrightarrow\ \lambda_1\cdot\lambda_2=-1$

όπου $\lambda_1=\lambda_{\vec{\alpha}}$ και $\lambda_2=\lambda_{\vec{\beta}}$, ($\vec{\alpha},\vec{\beta}\not\parallel y'y$).

Απόδειξη: Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ και $\vec{\gamma}=(x_3,y_3)$, τότε έχουμε:

α) $(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=(\lambda x_1,\lambda y_1)\cdot(x_2,y_2)=(\lambda x_1)x_2+(\lambda y_1)y_2=\lambda x_1x_2+\lambda y_1y_2=\lambda(x_1x_2+y_1y_2)=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$

και

$\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=(x_1,y_1)\cdot(\lambda x_2,\lambda y_2)=x_1(\lambda x_2)+y_1(\lambda y_2)=\lambda x_1x_2+\lambda y_1y_2=\lambda(x_1x_2+y_1y_2)=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$

Άρα $(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$.

β) $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=(x_1,y_1)\cdot(x_2+x_3,y_2+y_3)=x_1(x_2+x_3)+y_1(y_2+y_3)=x_1x_2+x_1x_3+y_1y_2+y_1y_3$

$=(x_1x_2+y_1y_2)+(x_1x_3+y_1y_3)=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$.

γ) $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\ \Leftrightarrow\ \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\ \Leftrightarrow\ x_1x_2+y_1y_2=0\ \Leftrightarrow\ y_1y_2=-x_1x_2\ \Leftrightarrow\ \dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=-1$

$\Leftrightarrow\ \lambda_1\cdot\lambda_2=-1$.

4.4. ΠΡΟΤΑΣΗ:

Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ είναι δύο μη μεδενικά διανύσματα που σχηματίζουν γωνία $\hat{\theta}$ τότε:

$$\text{συν}\theta=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\,.$$

Απόδειξη: Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ που σχηματίζουν γωνία $\hat{\theta}$, έχουμε:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\text{συν}\theta\ \Leftrightarrow\ \text{συν}\theta=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$$

Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2$, $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ και $|\vec{\beta}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$.

Επομένως,

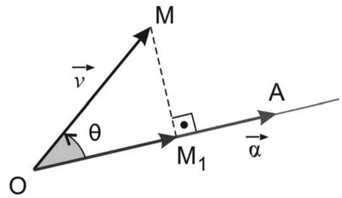
$$\text{συν}\theta=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\,.$$

4.5. ΠΡΟΤΑΣΗ:

Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{v}$ είναι δύο διανύσματα του επιπέδου, με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ τότε:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}.$$

Απόδειξη: Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{v}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$.



Φέρνουμε την προβολή $\overrightarrow{OM_1}$ του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$.

Έχουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot (\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}) = \vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{OM_1} + \vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{M_1M}$

$= \vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{OM_1} + 0 = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$.

4.6. ΕΦΑΡΜΟΓΗ: **(Ανισότητα *Cauchy – Schwarz – Buniakowski*)**

Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει

$$|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Απόδειξη: **i)**

- Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ τότε προφανώς ισχύει $|0| \leq 0$.
- Αν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ και $\theta = (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$ τότε:

$$|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = \left||\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \text{συν}\theta\right| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot |\text{συν}\theta| \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot 1 = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ ή $|\text{συν}\theta| = 1 \quad \Leftrightarrow$

$\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ ή $\text{συν}\theta = 1$ ή $\text{συν}\theta = -1 \quad \Leftrightarrow$

$\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.7. Δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ έχουν μέτρα 3, $2\sqrt{3}$ αντίστοιχα και η γωνία που σχηματίζουν είναι $\frac{5\pi}{6}$. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

i) Να υπολογίσετε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

ii) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

iii) Να υπολογίσετε το $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

iv) Να αποδείξετε ότι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι αμβλεία.

Λύση:

i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \text{συν}\frac{5\pi}{6} = 3 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -9.$

ii) $|\vec{u}|^2 = |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 = 3^2+2\cdot(-9)+(2\sqrt{3})^2$

$= 9-18+12 = 3$. Άρα $|\vec{u}| = \sqrt{3}$.

$|\vec{v}|^2 = |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha}\ \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 = 3^2-2\cdot(-9)+(2\sqrt{3})^2$

$= 9+18+12 = 39$. Άρα $|\vec{v}| = \sqrt{39}$.

iii) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (\vec{\alpha}+\vec{\beta})(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\beta}|^2 = 3^2 - (2\sqrt{3})^2 = 9 - 12 = -3$.

iv) $\text{συν}(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{-3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{39}} = \dfrac{-3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{13}} = \dfrac{-3}{3\cdot\sqrt{13}} = -\dfrac{1}{\sqrt{13}} < 0$.

Άρα η γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι αμβλεία.

4.8. i) Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει η ισότητα $\vec{\alpha}^2 = 3\vec{\beta}\cdot(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})$ τότε $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.
ii) Αν για τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ ισχύει η ισότητα $\vec{\gamma}^2 = -8\vec{\beta}\cdot(\vec{\gamma}+2\vec{\beta})$ τότε $\vec{\beta}\uparrow\downarrow\vec{\gamma}$.
iii) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$.

Λύση:

i) Είναι $\vec{\alpha}^2 = 3\vec{\beta}\cdot(\vec{\alpha}-3\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 = 3\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 - 3\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow$

$(\vec{\alpha}-3\cdot\vec{\beta})^2 = 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}-3\vec{\beta}|^2 = 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}-3\vec{\beta}| = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}-3\cdot\vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = 3\vec{\beta}$.

Επομένως $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

ii) Είναι $\vec{\gamma}^2 = -8\vec{\beta}\cdot(\vec{\gamma}+2\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\gamma}^2 = -8\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} - 16\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow \vec{\gamma}^2 + 8\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} + 16\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow$

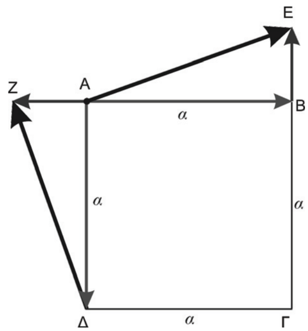
$(\vec{\gamma}+4\vec{\beta})^2 = 0 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}+4\vec{\beta}|^2 = 0 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}+4\vec{\beta}| = 0 \Leftrightarrow \vec{\gamma}+4\vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\gamma} = -4\vec{\beta}$.

Επομένως $\vec{\gamma}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.

iii) Είναι $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} = 3\vec{\beta}+\vec{\beta}-4\vec{\beta} = \vec{0}$. Επομένως, $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}| = 0$.

4.9. Σε ένα τετράγωνο *ΑΒΓΔ* προεκτείνουμε τις πλευρές του *ΓΒ* και *ΒΑ* κατά ίσα τμήματα *ΒΕ* και *ΑΖ* αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
i) Οι ευθείες στις οποίες ανήκουν τα τμήματα *ΑΕ* και *ΔΖ* τέμνονται κάθετα.
ii) *ΑΕ* = *ΔΖ*.

Λύση:



i) Τα διανύσματα $\overrightarrow{BE}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$ είναι αντίρροπα, άρα

$\overrightarrow{BE} = \lambda\cdot\overrightarrow{A\Delta}$, $\lambda < 0$.

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \lambda\cdot\overrightarrow{A\Delta}$.

Τα διανύσματα $\overrightarrow{AZ}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι αντίρροπα.

Επειδή $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A\Delta}|$ και $|\overrightarrow{BE}| = |\overrightarrow{AZ}|$ θα είναι

$\overrightarrow{AZ} = \lambda\cdot\overrightarrow{AB}$,

$\lambda < 0$. $\overrightarrow{\Delta Z} = \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{A\Delta} = \lambda\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Delta}$.

Έχουμε: $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{\varDelta Z} = (\overrightarrow{AB} + \lambda\cdot\overrightarrow{A\varDelta})(\lambda\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\varDelta})$

$$= \lambda\cdot\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\varDelta} + \lambda^2\cdot\overrightarrow{A\varDelta}\cdot\overrightarrow{AB} - \lambda\cdot\overrightarrow{A\varDelta}^2$$

$$= \lambda\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - 0 + \lambda^2\cdot 0 - \lambda\cdot\left|\overrightarrow{A\varDelta}\right|^2$$

$$= \lambda\cdot\alpha^2 - \lambda\,\alpha^2$$

$$= 0$$

Επομένως, οι φορείς των δύο διανυσμάτων τέμνονται κάθετα.

ii) $\left|\overrightarrow{AE}\right|^2 = \overrightarrow{AE}^2 = (\overrightarrow{AB} + \lambda\cdot\overrightarrow{A\varDelta})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2\lambda\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\varDelta} + \lambda^2\cdot\overrightarrow{A\varDelta}^2 = \alpha^2 + 0 + \lambda^2\,\alpha^2 = (1+\lambda^2)\alpha^2.$

$\left|\overrightarrow{\varDelta Z}\right|^2 = \overrightarrow{\varDelta Z}^2 = (\lambda\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\varDelta}.)^2 = \lambda^2\cdot\overrightarrow{AB}^2 - 2\lambda\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\varDelta} + \overrightarrow{A\varDelta}^2 = \lambda^2\,\alpha^2 + 0 + \alpha^2 = (\lambda^2+1)\alpha^2.$

Άρα $\left|\overrightarrow{AE}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\varDelta Z}\right|^2 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AE}\right| = \left|\overrightarrow{\varDelta Z}\right| \Leftrightarrow AE = \varDelta Z.$

4.10. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\left|\vec{\beta}\right| - 1\,,\,2)$ και $\vec{\beta} = (1\,,\,|\vec{\alpha}| - 2)$.

i) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

ii) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

iii) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 \geq 5$.

Λύση:

i) Είναι $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (\left|\vec{\beta}\right| - 1\,,\,2) + (1\,,\,|\vec{\alpha}| - 2) = (\left|\vec{\beta}\right|, |\vec{\alpha}|)$.

ii) Είναι $\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right| = \sqrt{\left|\vec{\beta}\right|^2 + |\vec{\alpha}|^2} \Leftrightarrow \left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right|^2 = \left|\vec{\beta}\right|^2 + |\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)^2 = \vec{\beta}^2 + \vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}^2 + 2\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow 2\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

iii) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow (\left|\vec{\beta}\right| - 1)\cdot 1 + 2\cdot(|\vec{\alpha}| - 2) = 0 \Leftrightarrow \left|\vec{\beta}\right| - 1 + 2|\vec{\alpha}| - 4 = 0 \Leftrightarrow \left|\vec{\beta}\right| = 5 - 2|\vec{\alpha}|$.

Είναι $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 + \left|\vec{\beta}\right|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + (5 - 2|\vec{\alpha}|)^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 25 - 20|\vec{\alpha}| + 4|\vec{\alpha}|^2$

$$= 5|\vec{\alpha}|^2 - 20|\vec{\alpha}| + 25 = 5(|\vec{\alpha}|^2 - 4|\vec{\alpha}| + 5) \geq 5\cdot 1 = 5.$$

Γιατί το τριώνυμο $|\vec{\alpha}|^2 - 4|\vec{\alpha}| + 5$, ως προς $|\vec{\alpha}|$, έχει ελάχιστη τιμή την

$$-\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 5}{4\cdot 1} = -\frac{16-20}{4} = -\frac{-4}{4} = 1.$$

4.11. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα C-S-B να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης,

$F(x,y) = 8x - 15y$ αν δίνεται ότι $x^2 + y^2 = 1$,

καθώς και τις τιμές των x, y για τις οποίες η συνάρτηση παίρνει την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

Λύση:

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (8,-15)$ και $\vec{\beta} = (x, y)$. Από την ανισότητα C-S-B έχουμε:

$\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right| \le |\vec{\alpha}|\cdot\left|\vec{\beta}\right| \Leftrightarrow |8x-15y| \le \sqrt{8^2+(-15)^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow$

$|\mathrm{F}(x,y)| \le \sqrt{289}\cdot\sqrt{1} \Leftrightarrow |\mathrm{F}(x,y)| \le 17 \Leftrightarrow -17 \le \mathrm{F}(x,y) \le 17.$

Θα εξετάσουμε αν υπάρχουν (x_1, y_1) και (x_2, y_2) με $\mathrm{F}(x_1, y_1) = 17$ και $\mathrm{F}(x_2, y_2) = -17$.

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 8 & -15 \\ x & y \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$8y + 15x = 0 \Leftrightarrow 8y = -15x \Leftrightarrow y = -\frac{15x}{8}$.

Είναι $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + \left(-\frac{15x}{8}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{225x^2}{64} = 1 \Leftrightarrow 64x^2 + 225x^2 = 64 \Leftrightarrow$

$289x^2 = 64 \Leftrightarrow x^2 = \frac{64}{289} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{64}{289}}$ ή $x = -\sqrt{\frac{64}{289}} \Leftrightarrow x = \frac{8}{17}$ ή $x = -\frac{8}{17}$.

Για $x_1 = \frac{8}{17}$ είναι $y_1 = -\frac{15}{8}\cdot\frac{8}{17} = -\frac{15}{17}$ και για $x_2 = -\frac{8}{17}$ είναι $y_2 = -\frac{15}{8}\cdot\left(-\frac{8}{17}\right) = \frac{15}{17}$.

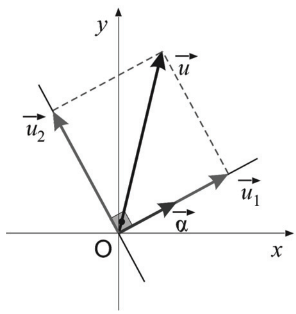
Επομένως, για $(x_1, y_1) = (\frac{8}{17}, -\frac{15}{17})$ η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή την $\mathrm{F}(x_1, y_1) = 17$

και για $(x_2, y_2) = (-\frac{8}{17}, \frac{15}{17})$ η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή την $\mathrm{F}(x_2, y_2) = -17$.

4.12. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(4,2)$ και , $\vec{u} = (3,14)$. Να βρείτε τις δύο κάθετες συνιστώσες στις οποίες αναλύεται το $\vec{u}$ εκ των οποίων η μια είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$.

Λύση:

1ος τρόπος:



Έστω $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ οι ζητούμενες συνιστώσες. Τότε $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$,

$\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$ και $\vec{u}_1 \,//\, \vec{\alpha}$.

Είναι $\vec{u}_1 \,//\, \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{u}_1 = \lambda\cdot\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{u}_1 = \lambda(4,2) \Leftrightarrow \vec{u}_1 = (4\lambda, 2\lambda)$.

Έχουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{u} = \vec{\alpha}\cdot\vec{u}_1 \Leftrightarrow 4\cdot3 + 2\cdot14 = 4\cdot4\lambda + 2\cdot2\lambda \Leftrightarrow$

$12+28 = 16\lambda+4\lambda \Leftrightarrow 40 = 20\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{40}{20} \Leftrightarrow \lambda = 2.$

Οπότε $\vec{u}_1 = (4\lambda, 2\lambda) = (4\cdot2, 2\cdot2 = (8,4)$.

Ακόμα $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \Leftrightarrow \vec{u}_2 = \vec{u} - \vec{u}_1 \Leftrightarrow \vec{u}_2 = (3,14) - (8,4)$

$\Leftrightarrow \vec{u}_2 = (-5,10)$.

2ος τρόπος:

Έστω το διάνυσμα $\vec{\beta} = (-1,2) \perp \vec{\alpha}$.

Αν $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ οι δύο κάθετες συνιστώσες του διανύσματος $\vec{u}$ τότε

$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{\alpha} + y\vec{\beta} \Leftrightarrow (3,14) = x(4,2) + y(-1,2) \Leftrightarrow (3,14) = (4x,2x) + (-y,2y)$

$\Leftrightarrow (3,14) = (4x-y, 2x+2y) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y = 3 & \cdot 2 \\ 2x + 2y = 14 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 2y = 6 \\ 2x + 2y = 14 \quad (+) \end{cases}$

$10x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{20}{10} \Leftrightarrow x = 2$

και $2x+2y = 14 \Leftrightarrow 4+2y = 14 \Leftrightarrow 2y = 10 \Leftrightarrow y = \frac{10}{2} \Leftrightarrow y = 5$.

Επομένως $\vec{u}_1 = 2\vec{\alpha} = 2(4,2) = (8,4)$ και $\vec{u}_2 = 5\vec{\beta} = 5(-1,2) = (-5,10)$.

4.13. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ με μέτρα 2, 1 και 5 αντίστοιχα. Αν $\hat{\theta}$ είναι η γωνία των $\vec{\alpha}$, $\vec{\gamma}$ και $\hat{\varphi}$ είναι η γωνία των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με συνθ = 0,8 και συνφ = 0,6 τότε:

i) Να υπολογίσετε τα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$.

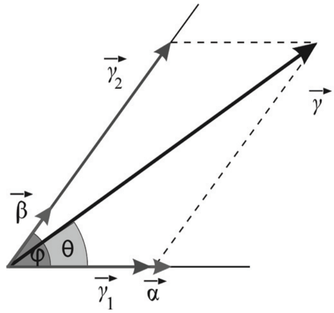
ii) Να υπολογίσετε το $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$.

iii) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις αυτές των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

Λύση:

i) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot$συν$\varphi = 2\cdot1\cdot0{,}6 = 1{,}2$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\gamma}|\cdot$συν$\theta = 2\cdot5\cdot0{,}8 = 8$.

ii) Θέτουμε $\hat{\omega} = \left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)$. Έχουμε:



ημ$^2\varphi$ = 1 – συν$^2\varphi$ = 1 – 0,6^2 = 1 – 0,36 = 0,64 άρα
ημφ = $\sqrt{0{,}64}$ = 0,8.
ημ$^2\theta$ = 1 – συν$^2\theta$ = 1 – 0,8^2 = 1 – 0,64 = 0,36 άρα
ημθ = $\sqrt{0{,}36}$ = 0,6.

συνω = συν(φ–θ) = συνφ·συνθ + ημφ·ημθ = 0,6·0,8+0,8·0,6 = 2·0,48 = 0,96.

Επομένως, $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = |\vec{\beta}|\cdot|\vec{\gamma}|\cdot$συν$\omega = 1\cdot5\cdot0{,}96 = 4{,}8$.

iii) Αν $\vec{\gamma}_1$, $\vec{\gamma}_2$ οι δύο συνιστώσες του $\vec{\gamma}$ με $\vec{\gamma}_1 /\!/ \vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}_2 /\!/ \vec{\beta}$ τότε:

$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2 \Leftrightarrow \vec{\gamma} = x\vec{\alpha} + y\vec{\beta}$ όπου $x, y\in\mathbb{R}$.

Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = \vec{\alpha}\cdot(x\vec{\alpha} + y\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = x\vec{\alpha}^2 + y(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) \Leftrightarrow 8 = x\cdot2^2 + y\cdot1{,}2 \Leftrightarrow$
$4x + 1{,}2y = 8$ **(1)**

$\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = \vec{\beta}\cdot(x\vec{\alpha} + y\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = x(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + y\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow 4{,}8 = x\cdot1{,}2 + y\cdot1^2 \Leftrightarrow$
$1{,}2x + y = 4{,}8$ **(2)**

Από **(1)** και **(2)** έχουμε

$$\begin{cases} 4x+1{,}2y=8 \\ 1{,}2x+y=4{,}8 \end{cases}\Bigg|\cdot(-1{,}2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+1{,}2y=8 \\ -1{,}44x-1{,}2y=-5{,}76 \quad (+) \end{cases}$$

$$2{,}56x = 2{,}24 \Leftrightarrow x = \frac{2{,}24}{2{,}56} \Leftrightarrow x = 0{,}875$$

και $1{,}2x + y = 4{,}8 \Leftrightarrow 1{,}2\cdot0{,}8754 + y = 4{,}8 \Leftrightarrow 1{,}05 + y = 4{,}8 \Leftrightarrow y = 4{,}8 - 1{,}05 \Leftrightarrow$
$y = 3{,}75$

Επομένως $\vec{\gamma}_1 = 0{,}875\,\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}_2 = 3{,}75\,\vec{\beta}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

4.14. Αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{3}$ και η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι 150^0, να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

[Απ. 2]

4.15. Αν $|\vec{\beta}| = 1$, η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι $\frac{\pi}{3}$ και $|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}| = \sqrt{7}$, να βρείτε το $|\vec{\alpha}|$.

[Απ. 3]

4.16. Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία διανύσματα και θ η μεταξύ τους γωνία, να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = 2\cdot\left|\text{συν}\frac{\theta}{2}\right|$.

4.17. Αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και η γωνία των διανυσμάτων $4\vec{\alpha}$ και $-2\vec{\beta}$ είναι $\frac{\pi}{4}$, να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

[Απ. -1]

4.18. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ στο οποίο είναι $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AΔ} = \vec{\alpha}-2\vec{\beta}$. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ έχουν μέτρο 1 και σχηματίζουν γωνία 60^0, να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων του $ΑΒΓΔ$.

[Απ. ΑΓ= $\sqrt{7}$, ΒΔ= $\sqrt{13}$]

4.19. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$. Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$, $\vec{v} = \vec{\alpha}-2\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

β) τα μέτρα $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

δ) το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

4.20. Δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ έχουν μέτρα 2 και 1 αντίστοιχα. Η γωνία που σχηματίζουν είναι 120^0. Αν $\vec{\gamma} = \vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = \vec{\alpha}-2\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

i) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

ii) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}$ ·

iii) Τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$.

iv) Τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$.

[Απ. iv) 60^0]

4.21. Θεωρούμε τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Αν τα διανύσματα $\vec{w} = \vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ και $\vec{u} = 5\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$ είναι κάθετα, να υπολογίσετε τη γωνία των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

[Απ. 60^0]

4.22. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι $\frac{2\pi}{3}$, να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{u} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}$.

[Απ. 60^0]

4.23. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να αποδείξετε ότι:

$$|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| \Leftrightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta}).$$

Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω σχέσης αν $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$;

4.24. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να αποδείξετε ότι:

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}.$$

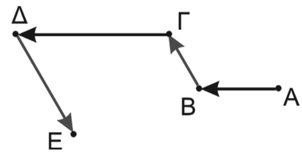
Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω σχέσης, αν τα δύο διανύσματα είναι μη μηδενικά;

4.25. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| \le |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$.

Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά την παραπάνω πρόταση, αν τα δύο διανύσματα είναι μη μηδενικά.

4.26. Για τα διανύσματα του διπλανού σχήματος ισχύουν οι σχέσεις:

$\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = 2\vec{\alpha}$, και $\overrightarrow{\Delta E} = -2\vec{\beta}$.



i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma E}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

ii) Το διάνυσμα $\overrightarrow{AE}$ είναι ίσο με:

Α. $3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ **Β.** $3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ **Γ.** $3\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ **Δ.** $\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ **Ε.** $2\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$

iii) Αν ισχύει $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$, τότε να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma E}$ είναι μεταξύ τους κάθετα.

4.27. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{\alpha}| = 3, \ |\vec{\beta}| = 2 \text{ και } (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3} \text{ και } \vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}.$$ Να βρείτε:

α) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

β) Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

γ) Αν υπάρχουν, τους θετικούς αριθμούς x, για τους οποίους ισχύει η σχέση $(\vec{\alpha} + x\vec{\beta})(2\vec{\alpha} - x\vec{\beta}) = 17$.

4.28. Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσμαται του επιπέδου με ίσα μέτρα. Αν τα διανύσματα $\vec{x} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{y} = 5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

[Απ. 60^0]

4.29. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις: $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|$. Να αποδείξετε ότι τα δύο διανύσματα είναι αντίρροπα.

4.30. Δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ με πλευρά $\alpha = 1$. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:
i) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$ **ii)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ **iii)** $\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ **iv)** $\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Delta A}$

4.31. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με πλευρά $\alpha = 2$. Αν $ΑΔ$ είναι το ύψος του τριγώνου, να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:
i) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ **ii)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$ **iii)** $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ **iv)** $\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{BA}$

4.32. Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.

4.33. i) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία A, B, Γ και Δ αληθεύει η ισότητα

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} = 0.$$

ii) Με τη βοήθεια της προηγούμενης πρότασης, να αποδείξετε ότι οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

4.34. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3\,,\,|\vec{\beta}| - 1)$ και $\vec{\beta} = (|\vec{\alpha}| - 3\,,\,1)$.

i) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

ii) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

iii) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 \geq 10$.

4.35. Να αποδείξετε ότι είναι κάθετα τα διανύσματα:

i) $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})\cdot\vec{\beta} - (\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}$ **ii)** $\vec{\beta} - \dfrac{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\alpha}}{\vec{\alpha}^2}$ και $\vec{\alpha}$.

4.36. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-3, \sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (\sqrt{3}\,,1)$. Να βρείτε:

i) Το εσωρεικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

ii) Τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

iii) Τη γωνία $\hat{\theta}$ των δύο διανυσμάτων.

[Απ.i)$-2\sqrt{3}$ ii)$2\sqrt{3}$, 2 iii)120^0]

4.37. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(-2,3)$, $B(4,1)$ και $\Gamma(2,-5)$ είναι κορυφές ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου.

4.38. Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$ και $B(4,1)$. Να βρείτε στον οριζόντιο άξονα $x'x$ σημείο M ώστε $\widehat{AMB} = 90^0$.

4.39. Δίνονται τα σημεία $A(-4,1)$ και $B(3,3)$. Να βρείτε σημείο M του άξονα $y'y$ τέτοιο ώστε $\widehat{AMB} = 90^0$.

4.40. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x, ώστε η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (x,1)$ και $\vec{\beta} = (1,1)$ να είναι ίση με $\frac{\pi}{4}$.

[Απ.x=0]

4.41. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{w} = (3\alpha\ ,\ 2-\alpha^2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, σε δύο συνιστώσες, μιας παράλληλης προς το διάνυσμα $\vec{u} = (\alpha,1)$ και μιας κάθετης προς αυτό.

4.42. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4,-2) \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7,8)$$

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = (-1,2)$ και $\vec{\beta} = (2,-2)$

β) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός κ , ώστε τα διανύσματα $\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

γ) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (3,-1)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

4.43. Θεωρούμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ για τα οποία δίνεται ότι $2|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 60^0$. Να αποδείξετε ότι: $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}(3\vec{\alpha}-\vec{\beta}) = 2\vec{\alpha}$.

4.44. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ώστε $|\vec{\alpha}| = 1$ και $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = -2\vec{\alpha}$.

i) Να υπολογίσετε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

ii) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ώστε

$$\vec{x} \,//\, (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} - \vec{x}).$$

iii) Αν $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 120^0$, να βρείτε το $|\vec{\beta}|$.

[Απ. i) -2 ii) $\vec{x} = -\frac{2}{5}\vec{\alpha} + \frac{4}{5}\vec{\beta}$ iii) 4]

4.45. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ώστε $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}| = 1$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$. Για ένα διάνυσμα $\vec{x}$ δίνεται ότι $\vec{x} \,//\, (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$ και $\vec{\alpha} \perp (\vec{x} - \vec{\beta})$.

i) Να υπολογίσετε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

ii) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

iii) Να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{x}})$.

[Απ. i) $-\frac{1}{4}$ ii) $\vec{x} = -\frac{1}{6}\vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta}$ iii) $\frac{5\pi}{6}$]

4.46. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2\sqrt{5}$, να αποδείξετε ότι:

$|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 2$.

4.47. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,6)$ και $\vec{\beta} = (-1,2)$.

i) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

ii) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u}$ αν $(\vec{u}-\vec{\alpha})//\vec{\beta}$ και $(\vec{u}+\vec{\beta})\perp\vec{\alpha}$.

[Απ. i) 45^0 ii) $\vec{u}=(7,-4)$]

4.48. Αν $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $|\vec{\gamma}|=3$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, να αποδείξετε ότι

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=-7.$$

4.49. Αν για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha}=\vec{\beta}+\vec{\gamma}$, να αποδείξετε ότι

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}-\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\frac{3}{2}.$$

4.50. Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=2$, $|\vec{\gamma}|=1$ και $\vec{\alpha}=\vec{\beta}-2\vec{\gamma}$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι: $5\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-4\,\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+3\,\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=3$.

ii) Να βρείτε τις γωνίες που σχηματίζουν ανά δύο τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$.

4.51. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι τρία διανύσματα με μέτρο 1 και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=2$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}=\vec{\beta}=\vec{\gamma}$.

4.52. Σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ με διαμέσους $ΑΔ$, $ΒΕ$ και $ΓΖ$, να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{ΑΔ}\cdot\overrightarrow{ΒΓ}+\overrightarrow{ΒΕ}\cdot\overrightarrow{ΓΑ}+\overrightarrow{ΓΖ}\cdot\overrightarrow{ΑΒ}=0.$$

4.53. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει η σχέση $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$.

Να αποδείξετε ότι: $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|\cdot\sqrt{3}$.

Ποιά είναι η γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω σχέσης, αν τα δύο διανύσματα είναι μη μηδενικά;

4.54. **i)** Χρησιμοποιώντας την ανισότητα C-S-B να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A=6x-8y$ αν $x^2+y^2=36$.

ii) Να αποδείξετε ότι: $|5\cdot ημx-12\cdot συνx|\le 13$.

4.55. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα C-S-B να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης,

$$F(x,y)=8x+9y \text{ αν δίνεται ότι } 4x^2+9y^2=36,$$

καθώς και τις τιμές των x, y για τις οποίες η συνάρτηση παίρνει την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

[Απ. $-30\le F(x,y)\le 30$, $F(\frac{12}{5},\frac{6}{5})=30$, $F(-\frac{12}{5},-\frac{6}{5})=-30$]

4.56. Οι κορυφές ενός τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι $Α(3+\sqrt{3},3+\sqrt{3})$, $Β(2,2)$ και $Γ(0,2)$. Να υπολογίσετε

i) την $\hat{Β}$ **ii)** την $\hat{Γ}$ **iii)** την $\hat{Α}$

[Απ. i) 135^0 ii) 30^0 iii) 15^0]

4.57. Τρία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ έχουν μέτρα 3 , 1 και 2 αντίστοιχα. Είναι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}) = 30^0$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}}) = 120^0$.

i) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} - 3\sqrt{3}\ \vec{\beta} + 3\vec{\gamma}$.

ii) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

4.58. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ με μέτρα 2 , 1 και $\frac{\sqrt{3}}{3}$ αντίστοιχα. Οι γωνίες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι 120^0, των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι 150^0 και των $\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}$ είναι 90^0. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{2}\cdot\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$.

4.59. Θεωρούμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}| = 2$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 120^0$.

i) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} - 2\cdot\vec{\beta} \neq \vec{0}$.

ii) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ για το οποίο ισχύει: $\vec{x}\ //\ (\vec{\alpha} - 2\cdot\vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} + \vec{x})$.

[Απ. ii) $\vec{x} = -\frac{1}{3}\vec{\alpha} + \frac{2}{3}\vec{\beta}$]

4.60. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$, $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$. Φέρνουμε τη διάμεσό του ΑΜ. Να βρείτε:

α) Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$

β) Το συν($\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{AM}$)

γ) Την $\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{AM}}\overrightarrow{A\Gamma}$

[Απ. α) $\sqrt{2}$ β) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ γ) $2\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$]

4.61. Αν $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{P\Gamma} = \vec{0}$ και $|\overrightarrow{PA}| = 6$, $|\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{P\Gamma}| = 2\sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι:

i) Τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.

ii) Το σημείο Γ είναι ανάμεσα στα σημεία A και B.

iii) $A\hat{P}B = 90^0$.

iv) Το διάνυσμα $\vec{v} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma}$ είναι κάθετο στο $\overrightarrow{A\Gamma}$.

4.62. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, το μέσο E της $\Gamma\Delta$ και το σημείο Z της $A\Gamma$ ώστε $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $\hat{A} = 120^0$, τότε:

i) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{EZ}$ σαν γραμμικό συνδιασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

ii) Να βρείτε το μέτρο του $\overrightarrow{EZ}$.

iii) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{EZ}$.

iv) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{EZ}$.

[Απ. iv) 120^0]

4.63. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, |\vec{\beta}| - 1)$ και $\vec{\beta} = (|\vec{\alpha}| - 1, 1)$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}|)$ **ii)** $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ **iii)** $|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 2$

iv) $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ **v)** $\vec{\alpha} = \vec{i}$ και $\vec{\beta} = \vec{j}$

4.64. Έστω $\vec{\alpha} = (1 - |\vec{\beta}|, 1)$ και $\vec{\beta} = (1, |\vec{\alpha}| - 1)$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|$ **ii)** $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ **iii)** $\vec{\alpha} = \vec{j}$ και $\vec{\beta} = \vec{i}$

4.65. α) Αν $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ δείξτε ότι $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2} \cdot \vec{\beta}$.

β) Θεωρούμε τα μοναδιαία και κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. Έστω $\vec{v} = 5\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. Να γράψετε την $\text{προβ}_{\vec{u}}\vec{v}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

[Απ. β) $-\frac{3}{5}\vec{\alpha} + \frac{6}{5}\vec{\beta}$]

4.66. α) Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{v}$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v} = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{v}}{|\vec{\alpha}|^2}\cdot\vec{\alpha} \quad \text{και} \quad |\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}| = \frac{|\vec{\alpha}\cdot\vec{v}|}{|\vec{\alpha}|}.$$

β) Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα, τότε:

$$|\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}| = |\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}| \iff \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \ \text{ή} \ |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|.$$

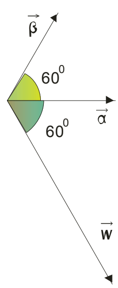
4.67. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ στο οποίο είναι $|\overrightarrow{ΑΒ}| = 4$, $|\overrightarrow{ΑΓ}| = 6$ και η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΓ}$ είναι $\frac{\pi}{3}$. Αν $Μ$ το μέσο της πλευράς $ΒΓ$, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{ΑΜ}$.

β) Να αποδείξετε ότι η προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{ΑΒ}$ πάνω στο διάνυσμα $\overrightarrow{ΑΜ}$ είναι το διάνυσμα $\frac{14}{19}\cdot\overrightarrow{ΑΜ}$.

4.68. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και $ΓΕ \perp ΑΒ$, $ΓΖ \perp ΒΔ$. Να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{ΒΔ}\cdot\overrightarrow{ΒΖ} = \overrightarrow{ΒΓ}^2 + \overrightarrow{ΒΑ}\cdot\overrightarrow{ΒΕ}.$$



4.69. Στο διπλανό σχήμα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία, ενώ το διάνυσμα $\vec{w}$ έχει μέτρο 3. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{w}$ σε δύο συνιστώσες παράλληλες των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

[Απ. $\vec{w} = 3\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$]

4.70. Δίνονται τα σημεία $Α(0,4)$, $Β(1,-1)$ και $Γ(5,3)$.

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{ΑΒ}$, $\overrightarrow{ΑΓ}$ και $\overrightarrow{ΑΔ}$, όπου $Δ$

το μέσο του τμήματος $ΒΓ$.

ii) Να βρείτε το διάνυσμα $\overrightarrow{ΑΕ}$, όπου $Ε$ είναι η προβολή του σημείου $Δ$ στην $ΑΓ$.

iii) Αν $Μ$ είναι το μέσο του τμήματος $ΔΕ$, να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{ΒΕ}$ και $\overrightarrow{ΑΜ}$.

iv) Να αποδείξετε ότι $ΑΜ \perp ΒΕ$.

4.71. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ και ένα τυχαίο σημείο $Μ$ του επιπέδου του. Να αποδείξετε ότι:

i) $\overrightarrow{ΜΑ}\cdot\overrightarrow{ΒΑ} + \overrightarrow{ΜΓ}\cdot\overrightarrow{ΔΓ} = \left|\overrightarrow{ΑΒ}\right|^2$ **ii)** $\overrightarrow{ΜΒ}\cdot\overrightarrow{ΓΒ} + \overrightarrow{ΜΔ}\cdot\overrightarrow{ΑΔ} = \left|\overrightarrow{ΒΓ}\right|^2$

iii) $\overrightarrow{ΜΑ}\cdot\overrightarrow{ΜΓ} = \overrightarrow{ΜΒ}\cdot\overrightarrow{ΜΔ}$.

* * * * *

Β΄ Ομάδα

4.72. Τα διανύσματα $\vec{α}$, $\vec{β}$, $\vec{γ}$ και $\vec{x}$ του επιπέδου ικανοποιούν τη σχέση:

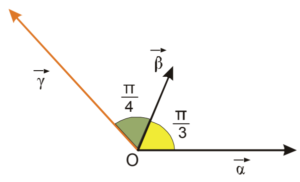
$$(\vec{α}\cdot\vec{x})\cdot\vec{β} = \vec{γ} + \vec{x}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $(\vec{β}\cdot\vec{α} - 1)(\vec{α}\cdot\vec{x}) = \vec{γ}\cdot\vec{α}$.

β) Αν $\vec{β}\cdot\vec{α} \neq 1$ να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως συνάρτηση των $\vec{α}$, $\vec{β}$, $\vec{γ}$ και $\vec{x}$.

4.73. Δίνοντα τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{α}$, $\vec{β}$. Να αποδείξετε ότι αν τα $\vec{α}$, $\vec{β}$ είναι κάθετα και ισομήκη, τότε και τα διανύσματα $2\vec{α} + 3\vec{β}$, $3\vec{α} - 2\vec{β}$ είναι κάθετα και ισομήκη. Έπειτα αποδείξτε το αντίστροφο.

4.74. Στο διπλανό σχήμα τα διανύσματα $\vec{α}$, $\vec{β}$, και $\vec{γ}$ έχουν μέτρα 2, 1 και 4 αντίστοιχα. Αν η γωνία των διανυσμάτων $\vec{α}$, $\vec{β}$ είναι $\frac{π}{3}$ και η γωνία των διανυσμάτων $\vec{β}$, $\vec{γ}$ είναι $\frac{π}{4}$, να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{γ}$ σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις αυτές των $\vec{α}$ και $\vec{β}$.



[Απ. $\vec{γ} = -\frac{2\sqrt{6}}{3}\vec{α} + \frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{3}\vec{β}$]

4.75. Ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχει $\hat{Α} = 60^0$ και το μήκος της $ΑΓ$ είναι τα 3/5 του μήκους της $ΑΒ$. Στις πλευρές $ΑΒ$ και $ΑΓ$ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία $Δ$ και $Ε$ ώστε $ΑΔ = \frac{1}{5}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{1}{3}ΑΓ$. Προεκτείνουμε την $ΒΓ$ κατά τμήμα $ΓΖ = ΒΓ$.

Να αποδείξετε ότι:

i) Τα σημεία $Δ$, $Ε$ και $Ζ$ είναι συνευθειακά.

ii) $ΒΕ \perp ΓΔ$.

iii) $\left|\overrightarrow{ΒΕ}\right| = \sqrt{3}\cdot\left|\overrightarrow{ΓΔ}\right|$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

4.76. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* ή *Λάθος* κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Ισχύει $\sqrt{\vec{\alpha}^2} = \vec{\alpha}$.

II. Αν δύο μοναδιαία διανύσματα έχουν εσωτερικό γινόμενο -1, τότε είναι αντίθετα.

III. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά τότε $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$.

IV. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2 = (\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2$.

V. Αν $\vec{v}^2 = 4\vec{u}^2$ τότε $\vec{v} = 2\vec{u}$ ή $\vec{v} = -2\vec{u}$.

VI. Το $[(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}\,]\cdot\vec{\delta}$ παριστάνει διάνυσμα.

VII. Ισχύει: $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma} = \vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})$.

4.77. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν ίσα μέτρα. Το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ γίνεται μέγιστο όταν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν κοινή αρχή και είναι πλευρές

Α. ισοπλεύρου τριγώνου **Β.** τετραγώνου **Γ.** κανονικού εξαγώνου
Δ. ορθογωνίου τριγώνου **Ε.** ισοσκελούς τριγώνου με γωνία κορυφής 54^0.

II. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, \lambda-1)$ και $\vec{\beta} = (4, \lambda)$, με $\lambda \neq 0$. Για ποια από τις παρακάτω τιμές του λ τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα;

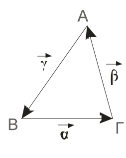
Α. $\lambda = 1$ **Β.** $\lambda = 3$ **Γ.** $\lambda = 2$ **Δ.** $\lambda = -2$ **Ε.** $\lambda = -3$

4.78. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1,-\sqrt{3})$, $\vec{v} = (2,2\sqrt{3})$ και $\vec{w} = (\sqrt{3},1)$.
Να αντιστοιχίσετε κάθε γωνία που βρίσκεται στη στήλη Α με το μέτρο της που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. γωνία των $\vec{u}$ και $\vec{v}$	**Α.** π/2
2. γωνία των $\vec{u}$ και $\vec{w}$	**Β.** π/6
3. γωνία των $\vec{v}$ και $\vec{w}$	**Γ.** π/4
	Δ. 2π/3
	Ε. 3π/4
	Ζ. π/3

4.79. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο *ΑΒΓ*. Αν είναι $|\vec{\alpha}| < |\vec{\beta}| < |\vec{\gamma}|$, να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς

$$\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{\beta}|\cdot|\vec{\gamma}|}\ ,\ \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}\ ,\ \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\gamma}|}.$$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.

Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

- Εξίσωση ευθείας
- Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας
- Εμβαδόν τριγώνου

Η παράσταση των σημείων του επιπέδου από ένα ζεύγος αριθμών – της τετμημένης και της τεταγμένης – έδωσε τη δυνατότητα να βρούμε εξισώσεις με δύο αγνώστους, οι οποίες να παριστάνουν διάφορες γραμμές στο επίπεδο. Με τις εξισώσεις γραμμών μπορούμε με καθαρά αλγεβρικές μεθόδους να μελετήσουμε τις γεωμετρικές ιδιότητες των γραμμών αυτών ή να αντιμετωπίσουμε άλλα συναφή προβλήματα. Αυτό είναι και το βασικό αντικείμενο της Αναλυτικής Γεωμετρίας, η σπουδαιότητα της οποίας οφείλεται στο γεγονός ότι μπορούμε ευκολότερα να μελετήσουμε μια εξίσωση παρά μια γραμμή γεωμετρικά, αφού πολλές μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί στην Άλγεβρα και τη Μαθηματική Ανάλυση για τη μελέτη εξισώσεων.

Η απλούστερη και πιο συχνά χρησιμοποιούμενη γραμμή είναι η ευθεία γραμμή. Στην αναζήτηση της εξίσωσης ευθείας χρειαζόμαστε τον ορισμό βασικών εννοιών που χαρακτηρίζουν την ευθεία. Η έννοια του συντελεστή διεύθυνσης ευθείας είναι αυτή που μας οδηγεί στην εύρεση της εξίσωσης ευθείας που διέρχεται από ένα σημείο.

Μετά επιδιώκουμε την εύρεση μιας γενικής μορφής εξίσωσης ευθείας, η οποία μπορεί να παριστάνει όλες τις ευθείες του επιπέδου – αυτών που ορίζεται αλλά και αυτών που δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης.

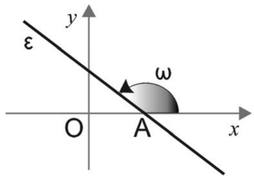
Παρουσιάζοντας, τέλος, τον τύπο που δίνει την απόσταση σημείου από ευθεία και τον τύπο που δίνει το εμβαδόν ενός τριγώνου, συμπληρώνεται το σύνολο των βασικών γνώσεων που πρέπει να αποκτήσουμε για να αντιμετωπίσουμε βασικά θέματα που αφορούν την ευθεία.

Με τις γνώσεις αυτού του κεφαλαίου μπορούμε να λύσουμε αρκετά προβλήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Έτσι μπορούμε να διακρίνουμε τη διαφορά των δύο μεθόδων. Από τη μια πλευρά της γεωμετρικής και από την άλλη της Αλγεβρικής, που τουλάχιστον εδώ, χρησιμοποιεί μεθόδους επίλυσης εξισώσεων και συστημάτων.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

Γωνία μιας ευθείας ε με τον άξονα $x'x$



Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A.

Τη γωνία $\hat{\omega}$ που διαγράφει ο άξονας $x'x$ όταν στραφεί γύρω από το σημείο A κατά τη θετική *φορά* μέχρι να συμπέσει με την ευθεία ε τη λέμε γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$

Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, τότε λέμε ότι σχηματίζει με αυτόν γωνία $\hat{\omega} = 0$.

Οι τιμές που μπορεί να πάρει η γωνία $\hat{\omega}$ είναι $0^0 \le \hat{\omega} < 180^0$ ή σε ακτίνια $0 \le \hat{\omega} < \pi$.

Συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας ε

Ως συντελεστή διεύθυνσης λ μιας ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$.

Αν η γωνία $\hat{\omega}$ της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ είναι 90^0,δηλαδή η ευθεία είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, τότε δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για την ευθεία αυτή.

Αν η γωνία $\hat{\omega}$ είναι οξεία τότε ο συντελεστής διεύθυνσης είναι θετικός, ενώ αν η γωνία $\hat{\omega}$ είναι αμβλεία τότε ο συντελεστής διεύθυνσης είναι αρνητικός. Αν η ευθεία σχηματίζει μηδενική γωνία με τον άξονα $x'x$, δηλαδή είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, ο συντελεστής διεύθυνσης είναι ίσος με μηδέν.

Δηλαδή έχουμε:

- Αν $0^o < \hat{\omega} < 90^o \Leftrightarrow$ εφ$\omega > 0 \Leftrightarrow \lambda > 0$.
- Αν $90^o < \hat{\omega} < 180^o \Leftrightarrow$ εφ$\omega < 0 \Leftrightarrow \lambda < 0$.
- Αν $\hat{\omega} = 0^o \Leftrightarrow$ εφ$\omega = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$.

Συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας που

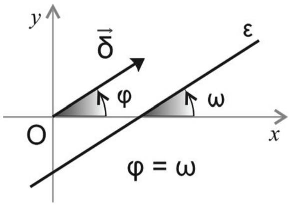
Αν μία ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με *διέρχεται από τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$, με $x_1 \neq x_2$*

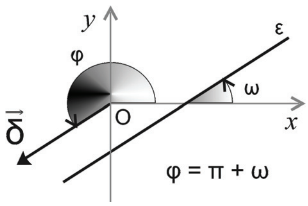
$x_1 \neq x_2$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι ίσος με το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, δηλαδή είναι $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

1.1. <u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> *Μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα, τότε έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.*

<u>Απόδειξη:</u>





Έστω ότι το διάνυσμα $\vec{\delta}$ είναι παράλληλο με μια ευθεία ε. Αν $\hat{\varphi}$ και $\hat{\omega}$ είναι οι γωνίες που σχηματίζουν το $\vec{\delta}$ και η ε με τον $x'x$ αντίστοιχα.

Τότε θα ισχύει $\hat{\varphi} = \hat{\omega}$ ή $\hat{\varphi} = \pi + \hat{\omega}$ και επομένως εφφ = εφω. Άρα $\lambda_{\vec{\delta}} = \lambda_\varepsilon$.

1.2. <u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> *Αν ε_1 και ε_2 είναι δύο ευθείες με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:*

- $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.
- $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω ε_1 και ε_2 δύο ευθείες με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\delta}_1$ και $\vec{\delta}_2$ τα οποία είναι παράλληλα προς τις ε_1 και ε_2 αντίστοιχα.

Τότε θα έχουμε:

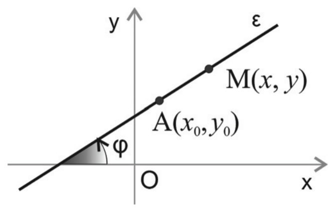
- $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 // \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.
- $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 \perp \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

1.3. <u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> *Μια ευθεία που διέρχεται από ένα σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , έχει εξίσωση:*

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0).$$

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_0,y_0)$ ένα σημείο του επιπέδου. Η ευθεία ε διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.



Ένα σημείο $M(x, y)$ διαφορετικό του $A(x_0, y_0)$ ανήκει στην ε, αν και μόνο αν το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι παράλληλο στην ε, δηλαδή αν και μόνο αν το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ και η ε έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

Επειδή $\overrightarrow{AM} = (x - x_0 , y - y_0)$, έχουμε $\lambda_{\overrightarrow{AM}} = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$.

Επομένως το σημείο $M(x, y)$ ανήκει στην ε αν και μόνο αν

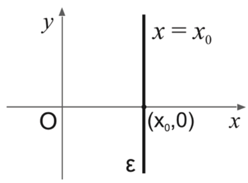
$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad y - y_0 = \lambda\cdot(x - x_0).$$

Η τελευταία εξίσωση επαληθεύεται και από το σημείο $A(x_0, y_0)$.

Άρα η εξίσωση της ευθείας ε είναι: $y - y_0 = \lambda\cdot(x - x_0)$.

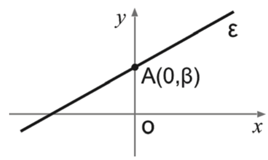
1.3.1.<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u>

- Έστω μία ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Αν $x_1 \neq x_2$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι $\lambda = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ και επομένως η εξίσωση $y - y_0 = \lambda\cdot(x - x_0)$ γίνεται $y - y_1 = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x - x_1)$.
- Η παραπάνω εξίσωση δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση που η ευθεία ε είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ (θα λέγεται κατακόρυφη ευθεία), εφ' όσον δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης.
  Η εξίσωση μιας κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ είναι $x = x_0$.

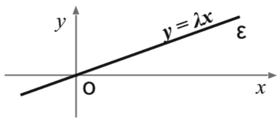


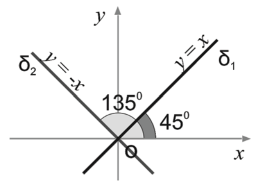
1.3.2.<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:</u>

- Η εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - \beta = \lambda\cdot(x - 0)$ $\Leftrightarrow$ $y = \lambda x + \beta$.



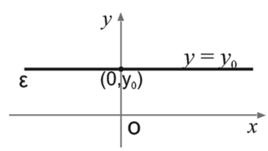
- Αν μία ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, τότε η εξίσωσή της είναι $y - 0 = \lambda\cdot(x - 0)$ $\Leftrightarrow$ $y = \lambda x$.





Για παράδειγμα οι διχοτόμοι των γωνιών $x\widehat{O}y$ και $y\widehat{O}x'$ έχουν εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$ αντίστοιχα.

- Αν μία ευθεία διέρχεται από ένα σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ (θα λέγεται οριζόντια ευθεία), τότε η εξίσωσή της είναι $y - y_0 = 0\cdot(x - x_0)$ $\Leftrightarrow$ $y = y_0$.



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

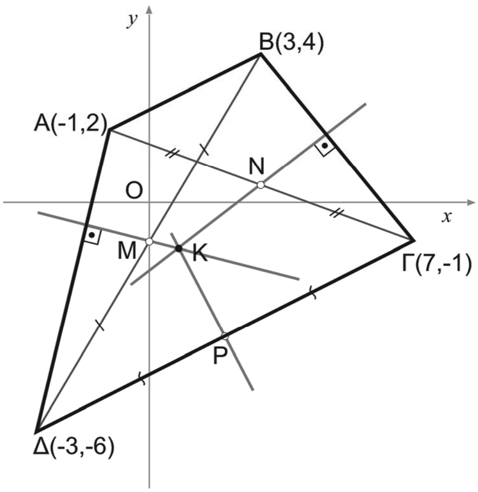
1.4. Δίνονται τα σημεία $A(-1,2)$, $B(3,4)$, $\Gamma(7,-1)$ και $\Delta(-3,-6)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που διέρχεται από το μέσο M της $B\Delta$ και είναι κάθετη στην $A\Delta$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_2 που διέρχεται από το μέσο N της $ΑΓ$ και είναι κάθετη στην $ΒΓ$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 , ε_2 και η μεσοκάθετος της $ΓΔ$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση:



α) Είναι $x_M = \dfrac{x_B + x_Δ}{2} = \dfrac{3-3}{2} = 0$,

$y_M = \dfrac{y_B + y_Δ}{2} = \dfrac{4-6}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$.

Άρα $M(0,-1)$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $ΑΔ$ είναι $\lambda_{ΑΔ} = \dfrac{y_Α - y_Δ}{x_Α - x_Δ} = \dfrac{2+6}{-1+3} = \dfrac{8}{2} = 4$.

$\varepsilon_1 \perp ΑΔ \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{ΑΔ} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} \cdot 4 = -1$

$\Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = -\dfrac{1}{4}$.

Η εξίσωση της ευθείας ε_1 είναι:

$y - y_M = \lambda_{\varepsilon_1} \cdot (x - x_M) \Leftrightarrow y + 1 = -\dfrac{1}{4}(x-0)$

$\Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{4}x - 1$.

β) Είναι $x_N = \dfrac{x_Α + x_Γ}{2} = \dfrac{-1+7}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$, $y_N = \dfrac{y_Α + y_Γ}{2} = \dfrac{2-1}{2} = \dfrac{1}{2}$. Άρα $N(3, \frac{1}{2})$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $ΒΓ$ είναι $\lambda_{ΒΓ} = \dfrac{y_Β - y_Γ}{x_Β - x_Γ} = \dfrac{4+1}{3-7} = \dfrac{5}{-4} = -\dfrac{5}{4}$.

$\varepsilon_2 \perp ΒΓ \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_2} \cdot \lambda_{ΒΓ} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_2} \cdot (-\dfrac{5}{4}) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_2} = \dfrac{4}{5}$.

Η εξίσωση της ευθείας ε_2 είναι: $y - y_N = \lambda_{\varepsilon_2} \cdot (x - x_N) \Leftrightarrow y - \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{5}(x-3) \Leftrightarrow$

$y = \dfrac{4}{5}x - \dfrac{12}{5} + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y = \dfrac{4}{5}x - \dfrac{19}{10}$.

γ) Για να βρούμε το σημείο τομής των ε_1, ε_2 θα λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x - 1 \\ y = \frac{4}{5}x - \frac{19}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{4}x - 1 \\ \frac{4}{5}x - \frac{19}{10} = -\frac{1}{4}x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{4}x - 1 \\ \frac{4}{5}x + \frac{1}{4}x = \frac{19}{10} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{4}x - 1 \\ \frac{21}{20}x = \frac{9}{10} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x - 1 \\ x = \frac{9}{10} \cdot \frac{20}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{4} \cdot \frac{6}{7} - 1 \\ x = \frac{6}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{14} - 1 \\ x = \frac{6}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{17}{14} \\ x = \frac{6}{7} \end{cases}.$$

Άρα το σημείο τομής τους είναι $K(\frac{6}{7}, -\frac{17}{14})$.

Αν P είναι το μέσο της $ΓΔ$ τότε:

$x_P = \dfrac{x_Γ + x_Δ}{2} = \dfrac{7-3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$, $y_P = \dfrac{y_Γ + y_Δ}{2} = \dfrac{-1-6}{2} = -\dfrac{7}{2}$. Άρα $P(2, -\frac{7}{2})$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $ΓΔ$ είναι $\lambda_{ΓΔ} = \dfrac{y_Γ - y_Δ}{x_Γ - x_Δ} = \dfrac{-1+6}{7+3} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$.

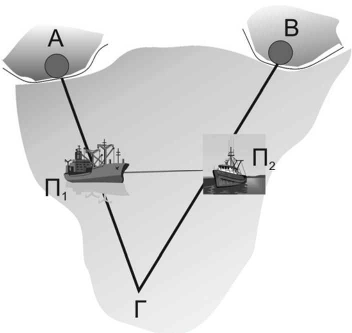
Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας KP είναι $\lambda_{KP} = \dfrac{y_K - y_P}{x_K - x_P} = \dfrac{-\frac{17}{14}+\frac{7}{2}}{\frac{6}{7}-2} = \dfrac{-\frac{17}{14}+\frac{49}{14}}{\frac{6}{7}-\frac{14}{7}}$

$= \dfrac{\frac{32}{14}}{-\frac{8}{7}} = -\dfrac{7\cdot 32}{14\cdot 8} = -\dfrac{7\cdot 32}{14\cdot 8} = -2$. Είναι $\lambda_{\Gamma\Delta}\cdot\lambda_{KP} = \frac{1}{2}\cdot(-2) = -1$ οπότε $KP \perp \Gamma\Delta$.

Επομένως η ευθεία KP είναι η μεσοκάθετος της $\Gamma\Delta$. Άρα οι ευθείες ε_1, ε_2 και η μεσοκάθετος της $\Gamma\Delta$ διέρχονται από το σημείο K.

1.5. Δύο πλοία ξεκινούν την ίδια χρονική στιγμή από τα λιμάνια A και B αντίστοιχα. Οι συντεταγμένες της θέσης τους είναι αντίστοιχα $(-2+4t, 8-9t)$ και $(3-t, 10-11t)$, όπου t ο χρόνος σε ώρες.
α) Βρείτε τις συντεταγμένες των λιμανιών A και B.
β) Ποια είναι η απόστασή τους μετά από 30 min;
γ) Ποιες είναι οι εξισώσεις της γραμμής πορείας τους;
δ) Σε ποιο σημείο θα συναντηθούν τα δύο πλοία και σε πόση ώρα;
ε) Ποιο πλοίο κινείται με μεγαλύτερη ταχύτητα;

Λύση:



α) Οι συντεταγμένες των δύο λιμανιών θα βρεθούν αν θέσουμε όπου $t = 0$.
Τότε θα είναι: $A(-2,8)$ και $B(3,10)$.

β) Αν οι θέσεις των πλοίων μετά από 30 min είναι αντίστοιχα Π_1 και Π_2, τότε οι συντεταγμένες τους θα βρεθούν αν θέσουμε $t = \frac{1}{2}$.

Τότε $\Pi_1(-2+4\cdot\frac{1}{2}, 8-9\cdot\frac{1}{2})$ ή $\Pi_1(-2+2, 8-\frac{9}{2})$ ή $\Pi_1(0, \frac{7}{2})$

και $\Pi_2(3-\frac{1}{2}, 10-11\cdot\frac{1}{2})$ ή $\Pi_2(\frac{5}{2}, 10-\frac{11}{2})$ ή $\Pi_2(\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$.

Άρα $(\Pi_1\Pi_2) = \sqrt{\left(0-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}-\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{2}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}+\frac{4}{4}} = \sqrt{\frac{29}{4}} = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

γ) Για την εξίσωση της πορείας του πρώτου πλοίου έχουμε:

$x = -2 + 4t \Leftrightarrow x + 2 = 4t \Leftrightarrow t = \dfrac{x+2}{4}$ και $y = 8-9t \Leftrightarrow 9t = 8 - y \Leftrightarrow t = \dfrac{8-y}{9}$

Άρα $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{8-y}{9} \Leftrightarrow 9x + 18 = 32 - 4y \Leftrightarrow 4y = -9x + 14 \Leftrightarrow y = \dfrac{-9x+14}{4}$

Για την εξίσωση της πορείας του δεύτερου πλοίου έχουμε:

$x = 3 - t \Leftrightarrow t = 3 - x$ και $y = 10 - 11t \Leftrightarrow 11t = 10 - y \Leftrightarrow t = \dfrac{10-y}{11}$

Άρα $3 - x = \dfrac{10-y}{11} \Leftrightarrow 33 - 11x = 10 - y \Leftrightarrow y = 11x - 23$.

δ) Για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου συνάντησης των δύο πλοίων, θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων πορείας τους.

$\dfrac{-9x+14}{4} = 11x-23 \Leftrightarrow -9x + 14 = 44x - 92 \Leftrightarrow -53x = -106 \Leftrightarrow x = \dfrac{-106}{-53} \Leftrightarrow x = 2$.

και $y = 11\cdot 2 - 23 = 22 - 23 = -1$.

Άρα τα δύο πλοία θα συναντηθούν στο σημείο $\Gamma(2,-1)$

Είναι $-2 + 4t = 2 \Leftrightarrow 4t = 4 \Leftrightarrow t = 1$.

Άρα τα δύο πλοία θα συναντηθούν 1 ώρα μετά την αναχώρησή τους.

ε) $(ΑΓ) = \sqrt{(-2-2)^2+(8+1)^2} = \sqrt{(-4)^2+9^2} = \sqrt{16+81} = \sqrt{97}$

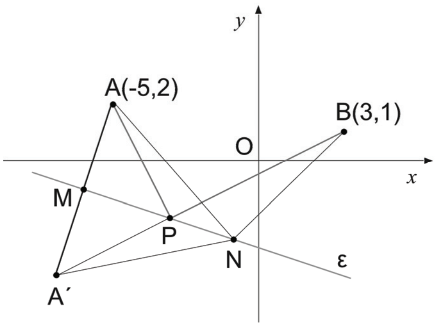
$(ΒΓ) = \sqrt{(3-2)^2+(10+1)^2} = \sqrt{1^2+11^2} = \sqrt{1+121} = \sqrt{122}$

Επειδή $(ΑΓ) < (ΒΓ)$ (τα διαστήματα που διήνυσαν σε 1 h), η ταχύτητα του δεύτερου πλοίου είναι μεγαλύτερη.

1.6. Δίνεται η ευθεία $ε$: $y = -\frac{1}{3}x - 3$ και τα σημεία $A(-5,2)$ και $B(3,1)$.

α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας $ζ$ που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην $ε$.
β) Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής M των ευθειών $ε$ και $ζ$;
γ) Βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς την ευθεία $ε$.
δ) Να βρείτε σημείο P της ευθείας $ε$ ώστε το άθροισμα $(AP) + (PB)$ να είναι το ελάχιστο δυνατό.

Λύση:



α) Επειδή $ζ \perp ε$ θα είναι $λ_ζ \cdot λ_ε = -1 \Leftrightarrow$

$λ_ζ \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow λ_ζ = 3$.

Άρα $ζ$: $y-2 = 3(x+5) \Leftrightarrow y-2 = 3x + 15$
$\Leftrightarrow y = 3x + 17$.

β) Για να βρούμε τις συντεταγμένες του M θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων των $ε$ και $ζ$.

$3x + 17 = -\frac{1}{3}x - 3 \Leftrightarrow 9x + 51 = -x-9 \Leftrightarrow$

$10x = -60 \Leftrightarrow x = -6$

και $y = 3\cdot(-6) + 17 = -18 + 17 = -1$. Άρα $M(-6,-1)$.

γ) Αν $A΄$ είναι το συμμετρικό του σημείου A ως προς την ευθεία $ε$ τότε θα έχουμε:

$\frac{x_{A΄}+x_A}{2} = x_M \Leftrightarrow \frac{x_{A΄}-5}{2} = -6 \Leftrightarrow x_{A΄} - 5 = -12 \Leftrightarrow x_{A΄} = -7$.

$\frac{y_{A΄}+y_A}{2} = y_M \Leftrightarrow \frac{y_{A΄}+2}{2} = -1 \Leftrightarrow y_{A΄} + 2 = -2 \Leftrightarrow y_{A΄} = -4$ Άρα $A΄(-7,-4)$.

δ) Θεωρούμε το σημείο τομής P του τμήματος $A΄B$ με την ευθεία $ε$. Αν N ένα άλλο σημείο της $ε$, τότε θα είναι:

$(AN) + (NB) = (A΄N) + (NB) > (A΄B) = (A΄P) + (PB) = (AP) + (PB)$.

Επομένως το ζητούμενο σημείο P είναι το σημείο τομής του τμήματος $A΄B$ με την ευθεία $ε$.

Είναι $λ_{A΄B} = \frac{1+4}{3+7} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Η εξίσωση της $A΄B$ είναι: $y-1 = \frac{1}{2}(x-3) \Leftrightarrow y-1 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Για να βρούμε τις συντεταγμένες του P θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων των $ε$ και $A΄B$.

$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}x - 3 \Leftrightarrow 3x - 3 = -2x - 18 \Leftrightarrow 5x = -15 \Leftrightarrow x = -3$.

και $y = -\frac{1}{3}\cdot(-3) - 3 = 1 - 3 = -2$. Άρα $P(-3,-2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

1.7. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας

i) η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-3,2)$ και σχηματίζει γωνία 120^{o} με τον άξονα $x'x$.

ii) η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-1,-4)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση (ε): $y=-2x+5$.

iii) η οποία διέρχεται από το σημείο $A(3,-2)$ και είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση (η): $y=\frac{1}{4}x-6$

iv) η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών με εξισώσεις (ε_1): $y=-2x+4$, (ε_2): $y=x+2$ και είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση (η): $y=\frac{3}{2}x+9$

[Απ. i) $y=-\sqrt{3}x+2-3\sqrt{3}$ ii) $y=-2x-6$ iii) $y=-4x+10$ iv) $y=-\frac{2}{3}x+\frac{28}{9}$]

1.8. i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(4,-3)$ και $B(-2,5)$.

ii) Να βρείτε το λ ($\lambda\in\mathbb{R}$) έτσι ώστε η παραπάνω ευθεία να διέρχεται από το σημείο $\Gamma(-3,2\lambda-1)$.

1.9. Δείξτε ότι τα σημεία $A(\alpha,-\beta)$, $B(\alpha+\beta,\alpha-\beta)$ και $\Gamma(\alpha+2\beta,2\alpha-\beta)$, με $\beta\neq 0$, είναι συνευθειακά. Μετά βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία βρίσκονται.

[Απ. $\alpha x-\beta y=\alpha^2+\beta^2$]

1.10. Δίνονται τα σημεία $A(-1,-3)$, $B(0,2)$, $\Gamma(8,3)$ και $\Delta(3,4)$.

i) Δείξτε ότι τα παραπάνω σημεία είναι κορυφές ισοσκελούς τραπεζίου.

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του τραπεζίου.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου του.

1.11. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του συμμετρικού P' του σημείου $P(-5,13)$ ως προς την ευθεία ε με εξίσωση $y=\frac{2}{3}x-1$

[Απ. $P'(11,-11)$]

1.12. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1,-1)$, $B(2,1)$ και $\Gamma(3,5)$. Να βρεθεί η εξίσωση της κάθετης που άγεται από την κορυφή A στην μ_β.

1.13. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-10,2)$), $B(6,4)$. Το ορθόκεντρό του είναι το $H(5,2)$. Βρείτε τις συντεταγμένες του Γ και τις εξισώσεις των πλευρών του.

[Απ. $\Gamma(6,-6)$]

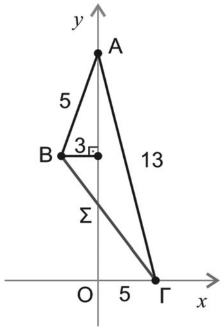
1.14. Τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει κορυφές $A(3\lambda-1,2\lambda+3)$, $B(2\lambda,-\lambda)$, $\Gamma(\lambda,4)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής στην οποία βρίσκεται η κορυφή A για τις διάφορες τιμές του λ.

ii) Για ποια τιμή του λ το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο A;

[Απ. i) $y=\frac{2}{3}x+\frac{11}{3}$ ii) $-\frac{1}{2}$]

1.15. Στο διπλανό σχεδιάγραμμα, με καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy, τα σημεία A , B και Γ παριστάνουν τις θέσεις τριών κοινοτήτων ενός δήμου. Στο ίδιο σχεδιάγραμμα ο άξονας $y'y$ παριστάνει μια εθνική οδό και τα ευθύγραμμα τμήματα AB και $A\Gamma$ δύο επαρχιακούς δρόμους που συνδέουν την κοινότητα A με τις κοινότητες B και Γ και έχουν μήκη 5Km και 13Km αντίστοιχα. Πρόκειται να κατασκευαστεί ένας επαρχιακός δρόμος $B\Gamma$ που θα συνδέει τις κοινότητες B και Γ, ο οποίος στο σχεδιάγραμμα παριστάνεται με το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$. Αν οι αποστάσεις των κοινοτήτων B και Γ από την εθνική οδό $y'y$ είναι 3Km και 5Km αντίστοιχα, να βρείτε:



α) τις συντεταγμένες των σημείων A , B και Γ,

β) το μήκος του επαρχιακού δρόμου $B\Gamma$,

γ) την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$ και στη συνέχεια τις συντεταγμένες του σημείου Σ στο οποίο ο επαρχιακός δρόμος $B\Gamma$ συναντά την εθνική οδό.

[Απ. α)Α(0,12), Β(-3,8), Γ(5,0) β)$8\sqrt{2}$ γ)y=-x+5, Σ(0,5)]

*   *   *   *   *

Β΄ Ομάδα

1.16. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(3,0)$ και τέμνει τις ευθείες (ε_1): $y = 2x–3$ και (ε_2): $y = –x–3$ στα σημεία A και B, ώστε το M να είναι μέσο του AB.

[Απ. y=5x-15]

1.17. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(3,4)$ και οι εξισώσεις δύο υψών του είναι $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ και $y = –x + 3$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών B και Γ του τριγώνου.

[Απ. Β(-1,0), Γ(5,-2)]

1.18. Να βρείτε την εξίσωση της συμμετρικής της ευθείας ε: $y = –3x + 7$ ως προς την ευθεία η: $y = x–1$

[Απ. $y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$]

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.19. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* ή *Λάθος* κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Οι ευθείες με εξισώσεις $x = –4$, $y = 5$ είναι κάθετες.

II. Η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x – 2$ έχει ένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

III. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, \beta)$ και $B(\alpha,\gamma)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης μηδέν.

IV. Η ευθεία με εξίσωση $\frac{x}{\beta} + \frac{y}{\alpha} = 1$, με $\alpha, \beta \neq 0$ τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(\alpha,0)$ και $B(0, \beta)$.

v. Όταν ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας δεν ορίζεται, τότε η εξίσωσή της είναι της μορφής $x = x_0$.

vi. Η εξίσωση $y = \lambda x$ ορίζει όλες τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

vii. Οι ευθείες με εξισώσεις $y = 3$ και $y = 3x$ είναι παράλληλες.

viii. Η συμμετρική της ευθείας (ε): $y = 2x$ ως προς τον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $y = 2x+2$

ix. Οι ευθείες με εξισώσεις $y = \frac{1}{|\lambda|}x$, $y = -\lambda x$ είναι κάθετες για κάθε $\lambda \neq 0$.

x. Η ευθεία με εξίσωση $y = -2x + 5$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία.

xi. Η ευθεία με εξίσωση $y = (2\kappa-\kappa^2-2)x + \kappa - 1$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.

xii. Υπάρχουν ευθείες ε_1 και ε_2 με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύει συγχρόνως $\lambda_1 = \lambda_2$ και $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

xiii. Τα σημεία $A(\alpha+\beta, \gamma)$, $B(\beta+\gamma, \alpha)$ και $\Gamma(\gamma+\alpha, \beta)$ είναι συνευθειακά αν τα α, β, γ είναι διαφορετικοί ανά δύο.

xiv. Η εξίσωση $x \cdot y = x$ παριστάνει μια μόνο ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου.

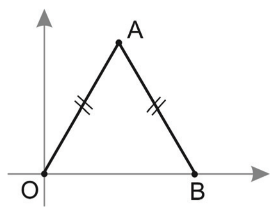
1.20. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $A(\alpha,0)$, $B(0,\beta)$ αντίστοιχα και ισχύει $\beta = -3\alpha$, $\alpha \neq 0$ τότε:

Α. Η ε σχηματίζει με τον $x'x$ οξεία γωνία.
Β. Η ε σχηματίζει με τον $x'x$ αμβλεία γωνία.
Γ. Η ε σχηματίζει με τον $x'x$ ορθή γωνία.
Δ. Η ε έχει συντελεστή διεύθυνσης -3.
Ε. Η ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{1}{3}$.

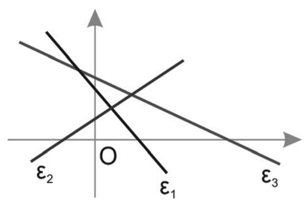
ii. Στο διπλανό σχήμα η εξίσωση της ευθείας OA είναι $y = \sqrt{3}\,x$.
Η γωνία $O\hat{A}B$ ισούται με:

Α. 30^o **Β.** 45^o **Γ.** 60^o **Δ.** 90^o **Ε.** 135^o



iii. Αν οι ευθείες του διπλανού σχήματος έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 και λ_3 αντίστοιχα, τότε ισχύει:

Α. $\lambda_1 > \lambda_3 > \lambda_2$ **Β.** $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$
Γ. $\lambda_2 > \lambda_1 > \lambda_3$ **Δ.** $\lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_1$ **Ε.** $\lambda_3 > \lambda_2 > \lambda_1$



iv. Οι ευθείες με εξισώσεις $y = 2$ και $y = \sqrt{3}\,x-1$ σχηματίζουν μεταξύ τους οξεία γωνία ίση με:

Α. 30^o **Β.** 60^o **Γ.** 45^o **Δ.** 75^o **Ε.** 15^o

v. Στο καρτεσιανό επίπεδο η εξίσωση $y^2 = x^2$ παριστάνει:

Α. μια ευθεία κάθετη στον $x'x$

Β. μόνο τη διχοτόμο της γωνίας $x\mathrm{O}y$
Γ. μόνο τη διχοτόμο της γωνίας $y\mathrm{O}x'$
Δ. τις διχοτόμους των γωνιών $x\mathrm{O}y$ και $y\mathrm{O}x'$
Ε. μια ευθεία κάθετη στον $y'y$

VI. Δίνονται τα σημεία $A(-2,3)$ και $B(4,6)$. Η κλίση της ευθείας της διαμέσου AM του τριγώνου OAB (O η αρχή των αξόνων), ισούται με:

Α. $\frac{3}{2}$ **Β.** 3 **Γ.** 1 **Δ.** 0 **Ε.** δεν ορίζεται

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.

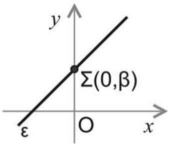
ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

2.1. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής*

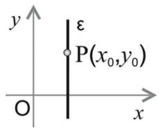
$$Ax + By + \Gamma = 0 \quad \text{με} \quad A \neq 0 \ \text{ή} \ B \neq 0 \quad \textbf{(1)}$$

και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής **(1)** *παρριστάνει ευθεία γραμμή.*

Απόδειξη:



- Έστω ε μια ευθεία στο καρτεσιανό επίπεδο.
  - Αν η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Sigma(0,\beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, τότε θα έχει εξίσωση $y = \lambda x + \beta$, η οποία γράφεται $\lambda x + (-1)y + \beta = 0$.
  - Αν η ευθεία ε είναι κατακόρυφη και διέρχεται από το σημείο $P(x_0,y_0)$, τότε θα έχει εξίσωση $x = x_0$, η οποία γράφεται ισοδύναμα
  $$x + 0 \cdot y + (-x_0) = 0.$$



  Άρα και στις δύο περιπτώσεις η εξίσωση της ευθείας ε παίρνει τη μορφή:
  $$Ax + By + \Gamma = 0 \ \text{με} \ A \neq 0 \ \text{ή} \ B \neq 0.$$

- Αντιστρόφως, έστω η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.
  - Αν $B \neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται $y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}$, που είναι εξίσωση ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B}$ και η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -\frac{\Gamma}{B})$.
  - Αν $B = 0$, τότε λόγω της υπόθεσης, είναι $A \neq 0$ και η εξίσωση γράφεται $x = -\frac{\Gamma}{A}$, που είναι εξίσωση ευθείας κάθετης στον άξονα $x'x$ στο σημείο του $P(-\frac{\Gamma}{A},0)$.

Σε όλες τις περιπτώσεις η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ παριστάνει ευθεία.

2.2. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Η ευθεία με εξίσωση* $Ax + By + \Gamma = 0$ *είναι παράλληλη στο διάνυσμα* $\vec{\delta} = (B, -A)$.

Απόδειξη:

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία του επιπέδου με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$. Τότε:

- Αν $B \neq 0$, η ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\dfrac{A}{B}$ και επομένως είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B\,, -A)$.
- Αν $B = 0$, η ε είναι παράλληλη προς τον άξονα $y'y$ και επομένως παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B\,, -A)$.

2.3. **__ΠΡΟΤΑΣΗ:__** *Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (A\,, B)$.*

__Απόδειξη:__

Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B\,, -A)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A\,, B)$, αφού

$$\vec{\delta}\cdot\vec{\eta} = (B\,, -A)\cdot(A\,, B) = B\cdot A + (-A)\cdot B = A\cdot B - A\cdot B = 0.$$

Όμως το $\vec{\delta}$ είναι παράλληλο στην ευθεία ε: $Ax + By + \Gamma = 0$.
Επομένως το διάνυσμα $\vec{\eta} = (A,B)$ είναι κάθετο στην ευθεία ε.

2.4. **__ΣΗΜΕΙΩΣΗ:__** Αν (ε_1): $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και (ε_2): $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ τότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2):

- Έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, αν και μόνο αν, $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$
- Είναι παράλληλες $(\varepsilon_1 // \varepsilon_2)$, αν και μόνο αν, $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$ και $\left(\begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ή } \begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0\right)$.
- Συμπίπτουν, αν και μόνο αν, $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$

Με τον περιορισμό ότι τα A_2 , B_2 , Γ_2 δεν είναι μηδέν, οι παραπάνω συνθήκες γράφονται και ως εξής:

(i) $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ **(ii)** $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$ **(iii)** $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.5. Να βρείτε και να σχεδιάσετε τις γραμμές που παριστάνουν οι επόμενες εξισώσεις.

α) $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 4xy + 4 = 0$ **β)** $|2x-3| = |1-y|$

γ) $x^2 - y^2 - 2x + 2y = 0$ **δ)** $x^2\cdot y^2 - 4x^2 - y^2 + 4 = 0$

ε) $2x^2 + 5xy - 3y^2 = 0$

__Λύση:__

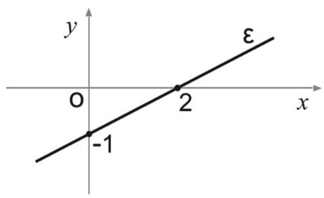
α) $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 4xy + 4 = 0 \iff$

$x^2 + 4y^2 + 2^2 - 2\cdot x\cdot 2y - 2\cdot x\cdot 2 + 2\cdot 2y\cdot 2 = 0 \iff$

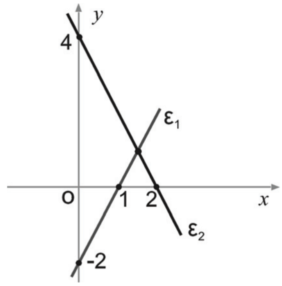
$(x-2y-2)^2 = 0 \iff x-2y-2 = 0.$

Άρα η εξίσωση παριστάνει ευθεία την ε: $x-2y-2 = 0$.

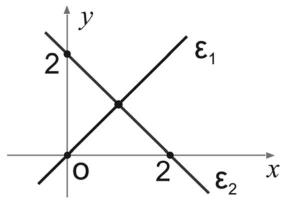
Το σχέδιο της γραμμής που παριστάνει η εξίσωση φαίνεται στο σχήμα 1.



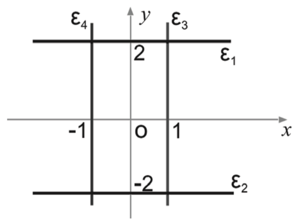
β) $|2x-3| = |1-y| \Leftrightarrow 2x-3 = 1-y$ ή $2x-3 = -1+y \Leftrightarrow$
$2x-3-1+y = 0$ ή $2x-3+1-y = 0 \Leftrightarrow 2x+y-4 = 0$ ή $2x-y-2 = 0$.
Άρα η εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες τις ε_1: $2x+y-4 = 0$ και ε_2: $2x-y-2 = 0$.
Το σχέδιο των γραμμών που παριστάνει η εξίσωση φαίνεται στο σχήμα 2.



γ) $x^2-y^2-2x+2y = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x-y)-2(x-y) = 0 \Leftrightarrow$
$(x-y)(x+y-2) = 0 \Leftrightarrow x-y = 0$ ή $x+y-2 = 0$.
Άρα η εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες τις
ε_1: $x-y = 0$ και ε_2: $x+y-2 = 0$.
Το σχέδιο των γραμμών που παριστάνει η εξίσωση φαίνεται στο σχήμα 3.

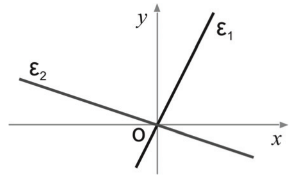


δ) $x^2 \cdot y^2 - 4x^2 - y^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (y^2-4) - (y^2-4) = 0 \Leftrightarrow$
$(y^2-4)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow y^2-4 = 0$ ή $x^2-1 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 4$ ή $x^2 = 1$
$\Leftrightarrow y = 2$ ή $y = -2$ ή $x = 1$ ή $x = -1$.
Άρα η εξίσωση παριστάνει τέσσερις ευθείες τις
ε_1: $y = 2$, ε_2: $y = -2$, ε_3: $x = 1$ και ε_4: $x = -1$.
Το σχέδιο των γραμμών που παριστάνει η εξίσωση φαίνεται στο σχήμα 4.



ε) $2x^2+5xy-3y^2 = 0$. $\Delta = (5y)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3y^2) = 25y^2 + 24y^2 = 49y^2$.

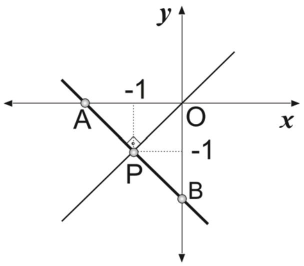
$$x = \frac{-5y \pm \sqrt{49y^2}}{2 \cdot 2} = \frac{-5y \pm 7y}{4} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{-5y+7y}{4} = \frac{2y}{4} = \frac{y}{2} \\ \frac{-5y-7y}{4} = \frac{-12y}{4} = -3y \end{array} \right. .$$



Είναι $2(x - \frac{y}{2})(x+3y) = 0 \Leftrightarrow (2x-y)(x+3y) = 0 \Leftrightarrow 2x-y = 0$ ή $x+3y = 0$.
Άρα η εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες τις ε_1: $2x-y = 0$ και ε_2: $x+3y = 0$.
Το σχέδιο των γραμμών που παριστάνει η εξίσωση φαίνεται στο σχήμα 5.

2.6. Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2(x+2y+3) + \lambda(y-x) - 2x - y - 3 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση παριστάνει ευθεία.
β) Δείξτε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση διέρχονται από το ίδιο σημείο P, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.
γ) Για ποια τιμή του λ η ευθεία που προκύπτει είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, για ποια τιμή είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και για ποια τιμή είναι η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας;
δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο P και τέμνει τους ημιάξονες Ox' και Oy' στα σημεία A και B ώστε το P να είναι το μέσο του τμήματος AB. Για ποια τιμή του λ προκύπτει η εξίσωση της προηγούμενης ευθείας;

Λύση:



α) $\lambda^2(x+2y+3) + \lambda(y-x) - 2x - y - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2 x + 2\lambda^2 y + 3\lambda^2 + \lambda y - \lambda x - 2x - y - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$(\lambda^2 - \lambda - 2)x + (2\lambda^2 + \lambda - 1)y + 3\lambda^2 - 3 = 0$ **(1)**

Η εξίσωση παριστάνει ευθεία αν και μόνο αν,

$\lambda^2 - \lambda - 2 \neq 0$ ή $2\lambda^2 + \lambda - 1 \neq 0$.

Για την εξίσωση $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ η $\Delta = (-1)^2 - 4\cdot1\cdot(-2) = 1 + 8 = 9$ και

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \lambda = \frac{4}{2} = 2 \\ \lambda = \frac{-2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

Για την εξίσωση $2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ έχουμε: $\Delta = 1^2 - 4\cdot2\cdot(-1) = 1 + 8 = 9$ και

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \left\langle \begin{array}{l} \lambda = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \lambda = \frac{-4}{4} = -1 \end{array} \right. .$$ Άρα θα πρέπει $\lambda \neq -1$.

β) Για $\lambda = 0$ έχουμε: $-2x - y - 3 = 0$

Για $\lambda = 1$ έχουμε: $x + 2y + 3 + y - x - 2x - y - 3 = 0 \Leftrightarrow -2x + 2y = 0 \Leftrightarrow -x + y = 0$.

Για να βρούμε το σημείο τομής των δύο ευθειών θα λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} -2x - y - 3 = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y = 3 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

$-3x = 3 \Leftrightarrow x = -1$.

Τότε $-x + y = 0 \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow y = -1$.

Για $x = -1$ και $y = -1$ η **(1)** γίνεται:

$(\lambda^2 - \lambda - 2)(-1) + (2\lambda^2 + \lambda - 1)(-1) + 3\lambda^2 - 3 = -\lambda^2 + \lambda + 2 - 2\lambda^2 - \lambda + 1 + 3\lambda^2 - 3 = 0$.

Άρα όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο $P(-1,-1)$.

γ) Η ευθεία που είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ προκύπτει όταν $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.

Άρα θα πρέπει $\lambda = 2$.

Η ευθεία που είναι παράλληλη προς τον άξονα $y'y$ προκύπτει όταν $2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$.

Άρα θα πρέπει $\lambda = \frac{1}{2}$.

Η διχοτόμος της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας έχει εξίσωση $y = x$. Οι τιμές του λ για τις οποίες οι ευθείες διέρχονται από την αρχή των αξόνων είναι:

$3\lambda^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3\lambda^2 = 3 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = -1$.

Θα εξετάσουμε τη τιμή $\lambda = 1$ γιατί $\lambda \neq -1$.

Όταν $\lambda = 1$ η **(1)** δίνει: $x + 2y + 3 + y - x - 2x - y - 3 = 0 \Leftrightarrow -2x + 2y = 0 \Leftrightarrow 2y = 2x \Leftrightarrow y = x$.

Άρα θα πρέπει $\lambda = 1$.

δ) Η OP θα είναι διχοτόμος και διάμεσος του τριγώνου AOB. Άρα θα είναι και ύψος του. Δηλαδή $OP \perp AB$. Επομένως $\lambda_{AB}\cdot\lambda_{OP} = -1 \Leftrightarrow 1\cdot\lambda_{OP} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{OP} = -1$.

Η εξίσωση της ευθείας AB θα είναι:

$y + 1 = -1(x + 1) \Leftrightarrow y + 1 = -x - 1 \Leftrightarrow x + y + 2 = 0$.

Για να βρούμε την τιμή του λ θα πρέπει: $\dfrac{\lambda^2-\lambda-2}{1} = \dfrac{2\lambda^2+\lambda-1}{1} = \dfrac{3\lambda^2-3}{2}$

$$\begin{cases} \lambda^2-\lambda-2=2\lambda^2+\lambda-1 \\ 2\lambda^2+\lambda-1=\dfrac{3\lambda^2-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2-\lambda-2-2\lambda^2-\lambda+1=0 \\ 4\lambda^2+2\lambda-2=3\lambda^2-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda^2-2\lambda-1=0 \\ \lambda^2+2\lambda+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$(\lambda+1)^2=0 \Leftrightarrow \lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$ απορρίπτεται γιατί το $\lambda \neq -1$.
Άρα δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία η **(1)** να δίνει την εξίσωση της ευθείας AB.

2.7. Δίνονται οι εξισώσεις $(\lambda-1)x - \lambda y + 1 - 5\mu = 0$ (1) και $(\mu^2-2\mu)x + \mu y + 3\lambda + 7 = 0$ (2) όπου λ, κ ακέραιοι. Να υπολογίσετε:
α) Τις τιμές των λ, μ ώστε οι δύο εξισώσεις να παριστάνουν ευθείες.
β) Τις τιμές των λ, μ ώστε οι δύο ευθείες να τέμνονται στο σημείο Α(−4,1)..
γ) Την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες με εξισώσεις που προκύπτουν από τις παραπάνω τιμές των λ και μ.

Λύση:

α) Είναι: $\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ και $-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0$. Οι συντελεστές των x, y της εξίσωσης **(1)** δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα, επομένως η **(1)** παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{Z}$.
Επίσης $\mu^2-2\mu=0 \Leftrightarrow \mu(\mu-2)=0 \Leftrightarrow \mu=0$ ή $\mu-2=0 \Leftrightarrow \mu=0$ ή $\mu=2$.
Οι συντελεστές των x, y της εξίσωσης **(2)** μηδενίζονται ταυτόχρονα όταν $\mu=0$, επομένως η **(2)** παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu \in \mathbb{Z}^*$.
Άρα $\lambda \in \mathbb{Z}$ και $\mu \in \mathbb{Z}^*$.

β) Το σημείο Α(–4,1) ανήκει και στις δύο ευθείες άρα:

$$\begin{cases} (\lambda-1)(-4)-\lambda\cdot 1+1-5\mu=0 \\ (\mu^2-2\mu)(-4)+\mu\cdot 1+3\lambda+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\lambda+4-\lambda+1-5\mu=0 \\ -4\mu^2+8\mu+\mu+3\lambda+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -5\lambda+5-5\mu=0 \\ -4\mu^2+9\mu+3\lambda+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-5\mu=5\lambda \\ -4\mu^2+9\mu+3\lambda+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\mu=\lambda \\ -4\mu^2+9\mu+3\lambda+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda=1-\mu \\ -4\mu^2+9\mu+3(1-\mu)+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=1-\mu \\ -4\mu^2+9\mu+3-3\mu+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=1-\mu \\ -4\mu^2+6\mu+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda=1-\mu \\ -2\mu^2+3\mu+5=0 \end{cases}. \quad \Delta = 3^2-4\cdot(-2)\cdot 5 = 9+40 = 49$$

$$\mu_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{49}}{2(-2)} = \frac{-3\pm 7}{-4}, \quad \mu_1 = \frac{-3+7}{-4} = \frac{4}{-4} = -1 \in \mathbb{Z} \text{ και } \mu_2 = \frac{-3-7}{-4} = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}.$$

Επομένως, $\mu=-1$ και $\lambda = 1-(-1) = 1+1 = 2$.

γ) Για $\mu=-1$ και $\lambda=2$ προκύπτουν οι ευθείες ε_1: $x-2y+6=0$ και ε_1: $3x-y+13=0$.
Είναι: $\vec{\delta_1}=(2,1) \,//\, \varepsilon_1$ και $\vec{\delta_2}=(1,3) \,//\, \varepsilon_2$. Τότε

$$\text{συν}\left(\widehat{\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}}\right) = \frac{\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}}{|\vec{\delta_1}|\cdot|\vec{\delta_2}|} = \frac{2\cdot 1+1\cdot 3}{\sqrt{2^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{2+3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = \frac{5}{5\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Αν $\hat{\omega}$ είναι η οξεία γωνία των ευθειών ε_1 και ε_2 θα έχουμε:

$$\text{συν}\omega = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ δηλαδή } \hat{\omega} = 45^0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

2.8. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $M(1,-1)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $5x-9y+12=0$.

2.9. Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(10,1)$, $\Gamma(8,7)$ και $\Delta(4,7)$.

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των μέσων K, Λ των τμημάτων AB, $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα.

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $A\Delta$, $B\Gamma$, $K\Lambda$.

iii) Δείξτε ότι ευθείες του προηγούμενου ερωτήματος διέρχονται απ'το ίδιο σημείο.

2.10. Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(-1,3)$ και $\Gamma(2,-4)$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας του ύψους του τριγώνου $AB\Gamma$ που διέρχεται από το σημείο A.

β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας της διαμέσου του τριγώνου $AB\Gamma$ που διέρχεται από το σημείο B.

γ) Να βρεθεί το σημείο τομής των παραπάνω ευθειών.

2.11. Δίνονται τα σημεία $A(8,0)$ και $B(0,4)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την αρχή των αξόνων O και το μέσο Δ του τμήματος AB.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Δ και είναι κάθετη στην ευθεία $O\Delta$.

γ) Έστω M τυχαίο σημείο της παραπάνω ευθείας (ε). Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=2\cdot\overrightarrow{OM}^2$$

2.12. Για ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ δίνεται το Α(–2,5) και το Β ανήκει στην ευθεία (ε): $2x-y=1$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ.

[Απ. 2x-y+4=0]

2.13. Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(-2,1)$, $\mathrm{B}(3,4)$, $\Gamma(-1,-1)$ και $\Delta(5,-3)$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $\left|\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}+\overrightarrow{\mathrm{M\Delta}}\right|$.

[Απ. 2x-6y=1]

2.14. Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda+1)x+(2\lambda-3)y+5\lambda-7=0$ με $\lambda\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) Η εξίσωση παριστάνει ευθεία, για κάθε τιμή του λ.

ii) Όλες οι ευθείες, για τις διάφορες τιμές του λ, διέρχονται απ' το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

2.15. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x\text{συν}^2\dfrac{\theta}{2}+y\text{ημ}^2\dfrac{\theta}{2}+\text{συν}\theta-1=0$ με $\theta\in[0,\pi]$, παριστάνει ευθεία η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο.

[Απ. Α(0,2)]

2.16. Θεωρούμε την εξίσωση $\lambda^2(2x-y-5)+\lambda(x-y-3)-3x+2y+8=0$.

α) Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση παριστάνει ευθεία;

β) Να εξετάσετε αν οι ευθείες, για τις διάφορες τιμές του λ, διέρχονται απ' το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

[Απ. i)λ≠1 ii)(2,-1)]

2.17. Θεωρούμε την εξίσωση $(x-2y-3)+\lambda(-2x+y+6)=0$ **(1)**.

α) Δείξτε ότι η εξίσωση **(1)** παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία με εξίσωση $x+2004y=3$ ανήκει στην οικογένεια των ευθειών που δίνεται από την **(1)**.

2.18. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ, η εξίσωση :

$$C_\lambda: (3\lambda-1)x+(2-\lambda)y-3\lambda+5=0$$

παριστάνει ευθεία που διέρχεται από σταθερό σημείο.

Μετά βρείτε την ευθεία της εξίσωσης C_λ η οποία είναι κάθετη με την ε: $2x+y+1=0$.

[Απ. $(\frac{1}{5},-\frac{12}{5})$, x-2y-5=0]

2.19. Θεωρούμε τις ευθείες ε: $\alpha x+\beta y+\gamma=0$, ε_1: $\alpha x-\beta y+\gamma=0$, ε_2: $\alpha x-\beta y-\gamma=0$, ε_3: $\alpha x+\beta y-\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η ε_1 είναι συμμετρική της ε ως προς άξονα συμμετρίας τον $x'x$.

β) Η ε_2 είναι συμμετρική της ε ως προς άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

γ) Η ε_3 είναι συμμετρική της ε ως προς κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων Ο.

2.20. Να βρείτε τις γραμμές που παριστάνουν οι εξισώσεις:

i) $|x|-|y|=0$ **ii)** $x^2+x-2=0$

iii) $2y^2+y-3=0$ **iv)** $4x^2-4xy+y^2=0$

2.21. Δίνονται τα σημεία $A(\lambda,0)$, $B(2\lambda,3\lambda)$, $\lambda\neq 0$. Αν η κάθετη στην AB στο σημείο A τέμνει την ευθεία $x=-2\lambda$ στο Γ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

2.22. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός μ, ώστε οι ευθείες (ε_1): $\mu x+(\mu-1)y-4=0$ και (ε_2): $(3\mu+1)x-2\mu y-7=0$ να είναι κάθετες.

[Απ. μ=0 ή μ=-3]

2.23. Δίνεται η εξίσωση $2x^2-7xy+3y^2=0$.

i) Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες ε_1 και ε_2 των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

ii) Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2.

[Απ. i) y=2x, x-3y=0 ii) 45°]

2.24. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2y^2-3xy-2x^2=0$ παριστάνει ζεύγος δύο ευθειών. Ποια είναι η σχετική θέση των δύο ευθειών που βρήκατε;

2.25. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2-y^2-4\lambda y-2\lambda x-3\lambda^2=0$ παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου τομής των δύο ευθειών.

2.26. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, των οποίων τα τετράγωνα των αποστάσεων από τα σημεία $A(5,2)$ και $B(-2,4)$ έχουν σταθερή διαφορά c, είναι ευθεία κάθετη στην AB.

4.1. Δίνονται οι εξισώσεις :ε_1: $(\kappa^2-2\kappa-3)x+(3\kappa-2)y+1=0$ ε_2: $(3\kappa^2-11\kappa+6)x-(\kappa^2-1)y-5=0$ με $\kappa\in\mathbb{R}$.

i) Δείξτε ότι οι παραπάνω εξισώσεις παριστάνουν ευθείες για τις διάφορες τιμές του κ.

ii) Να προσδιορίσετε τον κ, ώστε οι ευθείες να είναι κάθετες.

[Απ. ii) -1, $\frac{2}{3}$, 2, 5]

2.27. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Oxy δίνονται τα σημεία $A(4,2)$ και $B(3,-5)$. Θεωρούμε την ευθεία ε με εξίσωση $7x + y - 23 = 0$. Να βρεθεί σημείο M της ευθείας ε τέτοιο ώστε το τρίγωνο AMB να είναι ορθογώνιο στο M.

2.28. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(2, \frac{5}{3})$ και τέμνει τις ευθείες (ε): $x + 2y - 2 = 0$, (ζ): $3x - y + 7 = 0$ στα σημεία A, B ώστε $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$.

[Απ. 7x+9y=29]

2.29. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(4,0)$ και τέμνει τις ευθείες (ε_1): $2x - y = 4$ και (ε_2): $3x + y = 3$ στα σημεία A και B, ώστε το M να είναι μέσο του AB.

[Απ. 6x-y=24]

2.30. Δίνονται το σημείο $A(1,-2)$ και οι ευθείες με εξισώσεις (ε_1): $2x - 3y + 1 = 0$, (ε_2): $-x + 4y + 3 = 0$. Να βρεθεί σημείο M της ε_2, ώστε το μέσο του AM να ανήκει στην ε_1.

[Απ. M(-49/5,-16/5)]

2.31. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς xOy θεωρούμε τρίγωνο $ΑΒΓ$ με κορυφή A το σημείο $(2,1)$ και έστω ότι οι ευθείες, πάνω στις οποίες βρίσκονται δύο από τα ύψη του, έχουν εξισώσεις: $3x + y - 11 = 0$, $x - y + 3 = 0$.
Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές του τριγώνου και τις συντεταγμένες των κορυφών B και $Γ$.

2.32. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες ε_1 και ε_2.

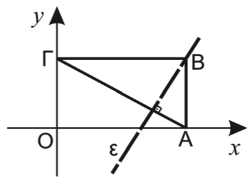
β) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες.

γ) Να βρείτε ένα σημείο $M(\kappa, \lambda)$ με $\kappa > 0$ και $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (3,\kappa)$ να είναι παράλληλο προς τη μία από τις δύο ευθείες ε_1 και ε_2 και το διάνυσμα $\vec{\beta} = (-16,4\lambda)$ να είναι παράλληλο προς την άλλη ευθεία.

2.33. Στους ημιάξονες Ox και Oy παίρνουμε τα σημεία A και B έτσι ώστε $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{2}$.
Να δείξετε ότι η ευθεία AB διέρχεται από σταθερό σημείο.

[Απ. M(2,2)]

2.34. Στους ημιάξονες Ox και Oy παίρνουμε τα σημεία Α και Γ έτσι ώστε ΟΑ + ΟΓ = 5. Αν ΟΑΒΓ είναι ορθογώνιο, να δείξετε ότι η ευθεία (ε) που φέρνουμε κάθετα από το Β προς την ΑΓ, διέρχεται από σταθερό σημείο.



* * * * *

Β΄ Ομάδα

2.35. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $A(1,2)$ και οι εξισώσεις δύο υψών του είναι $2x - 3y + 1 = 0$ και $x + y = 0$. Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες των κορυφών B και $Γ$.

ii) τις εξισώσεις των πλευρών του.

[Απ. Β(-2,-1),Γ(7,-7)]

2.36. Σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $Α(1,3)$ οι εξισώσεις δύο διαμέσων του είναι $x - 2y + 1 = 0$ και $y - 1 = 0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των άλλων δύο κορυφών του.

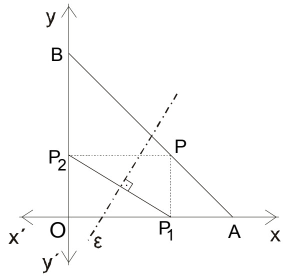
[Απ. (5,1), (-3,-1)]

2.37. Δύο πλευρές ενός παραλληλογράμμου έχουν εξισώσεις $x + 2y + 1 = 0$, $2x + y - 3 = 0$ και το κέντρο του είναι το $K(1,2)$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των άλλων πλευρών του.

[Απ. x+2y-11=0, 2x+y-5=0]

2.38. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τέμνει τις ευθείες $(ε_1)$: $x - y + 1 = 0$, $(ε_2)$: $x - y - 2 = 0$ στα σημεία $Α$ και $Β$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $(ΑΒ) = 3$.

[Απ. x=0 , y=0]



2.39. Στους ημιάξονες Ox και Oy παίρνουμε τα σημεία $Α$ και $Β$ έτσι ώστε $ΟΑ = ΟΒ = 6$. Στο τμήμα $ΑΒ$ παίρνουμε μεταβλητό σημείο $P(α, β)$. Ονομάζουμε P_1 , P_2 τις προβολές του P στις $ΟΑ$, $ΟΒ$ και $ε$ τη μεσοκάθετο του P_1P_2.

α) Να γράψετε τις συντεταγμένες των σημείων P, P_1, P_2 ως συνάρτηση του $α$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου $ε$ του τμήματος P_1P_2.

γ) Να δείξετε ότι η ευθεία $ε$ διέρχεται από σταθερό σημείο.

[Απ. α)P(α,6-α),P_1(α,0),P_2(0,6-α) β)αx+(α-6)y+18-6α=0 γ)M(3,3)]

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

2.40. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* ή *Λάθος* κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Το σημείο $Α(ημ\frac{5π}{7}, -κ)$ ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $3x + κy = 4$.

II. Όλες οι ευθείες της οικογένειας ευθειών $x + y - 2 + λ(4x + 3y - 9) = 0$ διέρχονται απ' το σημείο $(3, -1)$.

III. Η εξίσωση $(α - 1)x + (α^2 - 3α + 3)y - 5 = 0$ παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού $α$.

IV. Η εξίσωση $(α^3 + α - 10)x - (α^2 - 4)y - 1 = 0$ παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού $α$.

V. Αν $Α \neq Β$, τότε η εξίσωση $Αx + Βy + Γ = 0$ παριστάνει πάντοτε ευθεία.

VI. Η εξίσωση $3xy = 5x^2$ παριστάνει μία μόνο ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου.

2.41. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Η ευθεία $ε$: $9x + αy = 5$ είναι παράλληλη στην ευθεία $ζ$: $αx - 4y = 3$ όταν ο $α$ ισούται με:

Α. 6 **Β.** -6 **Γ.** 6 ή -6 **Δ.** 18 **Ε.** Δεν υπάρχει

2.42. Να αντιστοιχίσετε τις παρακάτω ευθείες με τα παράλληλα προς αυτές διανύσματα.

Ευθεία	Διάνυσμα
Α. $y = 0{,}5x + 4$	**1.** $\vec{\delta} = (-3{,}6)$
Β. $y = -3$	**2.** $\vec{\delta} = (0{,}8)$
Γ. $x = -3$	**3.** $\vec{\delta} = (2{,}1)$
Δ. $x - \frac{1}{2}y - 5 = 0$	**4.** $\vec{\delta} = (-4{,}2)$
Ε. $2y + x = 3$	**5.** $\vec{\delta} = (2{,}4)$
	6. $\vec{\delta} = (4{,}0)$

ΕΝΟΤΗΤΑ 3.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

3.1. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Η απόσταση του σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από την ευθεία $(ε)$: $Ax + By + Γ = 0$ δίνεται από το τύπο*

$$d(M_0, ε) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Γ|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

3.2. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ με κορυφές $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $Γ(x_3, y_3)$ δίνεται από το τύπο*

$$(ABΓ) = \frac{1}{2}\cdot\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AΓ})\right|$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.3. Δίνονται η ευθεία $ε$: $6x - 8y = 7$ και το σημείο $Α(-1,2)$. Να βρείτε:
α) Την εξίσωση της ευθείας $(ζ)$ που διέρχεται από το σημείο Α και είναι παράλληλη στην $(ε)$.
β) Την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των $(ε)$ και $(ζ)$.
γ) Την απόσταση των ευθειών $(ε)$ και $(ζ)$.

Λύση:

α) Είναι: $(ε): 6x - 8y = 7 \Leftrightarrow 6x - 7 = 8y \Leftrightarrow y = \frac{6}{8}x - \frac{7}{8} \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{8}$.

Αφού $(ε) \parallel (ζ) \Leftrightarrow λ_ε = λ_ζ = \frac{3}{4}$ και $(ζ): y - y_Α = λ_ζ(x - x_Α) \Leftrightarrow y - 2 = \frac{3}{4}(x+1) \Leftrightarrow$

$y - 2 = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4y - 8 = 3x + 3 \Leftrightarrow 3x - 4y + 11 = 0$.

β) Η μεσοπαράλληλη $(η)$ των δύο παραλλήλων ευθειών $(ε)$ και $(ζ)$ θα έχει εξίσωση: $(η)$: $3x - 4y + κ = 0$.

Το σημείο $Β(\frac{7}{6}, 0)$ ανήκει στην $(ε)$ και αν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ, θα είναι:

$$x_Μ = \frac{x_Α + x_Β}{2} = \frac{-1+\frac{7}{6}}{2} = \frac{\frac{1}{6}}{2} = \frac{1}{12} \quad \text{και} \quad y_Μ = \frac{y_Α + y_Β}{2} = \frac{2+0}{2} = \frac{2}{2} = 1, \text{ δηλαδή, } Μ(\frac{1}{12}, 1).$$

Το σημείο Μ ανήκει στην (η) άρα: $3\cdot\frac{1}{12} - 4\cdot 1 + \kappa = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} - 4 + \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = \frac{15}{4}$.

Άρα (η): $3x - 4y + \frac{15}{4} = 0 \Leftrightarrow 12x - 16y + 15 = 0$.

γ) (ε): $6x - 8y = 7 \Leftrightarrow 6x - 8y - 7 = 0$.

$$d(\varepsilon, \zeta) = d(\mathrm{A},\varepsilon) = \frac{|6\cdot(-1)-8\cdot 2-7|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}} = \frac{|-6-16-7|}{\sqrt{36+64}} = \frac{|-29|}{\sqrt{100}} = \frac{29}{10} = 2{,}9.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

3.4. Δίνονται οι ευθείες (ε_1): $6x + 8y + 7 = 0$ και (ε_2): $6x + 8y + 3 = 0$.

α) Δείξτε ότι οι δύο ευθείες είναι παράλληλες.

β) Βρείτε την απόσταση των δύο ευθειών.

γ) Βρείτε την εξίσωση της μεσοπαραλλήλου των.

[Απ. ii) 2/5 iii)6x+8y+5=0]

3.5. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες στην ευθεία (ε): $4x + 3y - 21 = 0$ και απέχουν απ' αυτή απόσταση 2.

[Απ. 4x+3y-11=0 , 4x+3y-31=0]

3.6. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με κορυφές $A(7,6)$, $B(-1,0)$ και $\Gamma(4\lambda-1,3\lambda+2)$ με $\lambda\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία βρίσκεται η κορυφή Γ για τις διάφορες τιμές του λ.

ii) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι σταθερό και να υπολογιστεί.

[Απ. i)3x-4y+11=0 ii)E=8]

3.7. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με κορυφές $A(4,3)$, $B(-1,0)$ και $\Gamma(5\lambda-1,3\lambda+4)$ με $\lambda\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της κορυφής Γ για τις διάφορες τιμές του λ.

ii) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι σταθερό και να υπολογιστεί.

[Απ. i)3x-5y+23=0 ii)E=10]

3.8. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 + x - y = 0$.

i) Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες ε_1 και ε_2 των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

ii) Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τις ευθείες ε_1, ε_2 και τον άξονα $x'x$.

[Απ. i) y=x , y=-x-1 ii)E=1/4]

3.9. Δίνονται τα σημεία $A(1,0)$, $B(3,0)$, $\Gamma(0,2)$ και $\Delta(0,4)$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M ώστε τα τρίγωνα MAB, $M\Gamma\Delta$ να έχουν ίσα εμβαδά.

[Απ. x-y=0 , x+y=0]

3.10. Τα σημεία $A(1,1)$, $B(2,2)$, $\Gamma(3,-1)$ είναι τρεις διαδοχικές κορυφές ενός παραλληλογράμμου. Να βρεθούν:

i) Οι συντεταγμένες του κέντρου του.

ii) Οι συντεταγμένες της τέταρτης κορυφής του Δ.

iii) Το εμβαδόν του.

[Απ. i)K(2,0) ii)Δ(2,-2) iii)E=4]

3.11. Θεωρούμε τρίγωνο $ΑΒΓ$ με κορυφές τα σημεία $Α(-1,4)$, $Β(-2,-2)$ και $Γ(3,0)$.

i) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου $ΒΜ$ του τριγώνου.

ii) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους $ΑΔ$ του τριγώνου.

iii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής $Ρ$ των $ΑΔ$ και $ΒΜ$.

iv) Να δείξετε ότι $(ΑΡΜ) = \frac{3}{23}(ΑΒΓ)$.

[Απ. i)4x-3y+2=0 ii)5x+2y-3=0 iii)$Ρ(\frac{5}{23},\frac{22}{23})$]

3.12. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ισαπέχει από τα σημεία $Α(3,0)$, $Β(0,-5)$.

[Απ. 5x+3y=0 , 5x-3y=0]

3.13. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $Ρ(-2,3)$ και από τις οποίες ισαπέχουν τα σημεία $Α(-6,1)$, $Β(2,7)$.

[Απ. x+2=0, 3x-4y+18=0]

3.14. Δίνονται τα σημεία $Α(-2,0)$ και $Β(5,-3)$. Βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το $Α$ και από τις οποίες η απόσταση του $Β$ είναι ίση με 3.

[Απ. y=0, 21/20x+y+21/10=0]

3.15. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την τομή των ευθειών $ε_1$: $x-3y+1 = 0$, $ε_2$: $2x + 5y - 9 = 0$ και η απόσταση της αρχής $Ο$ από αυτή είναι 2.

[Απ. x-2=0, 3x+4y-10=0]

3.16. Δίνονται τα σημεία $Α(2,-1)$ και $Β(-5,3)$. Να βρεθεί σημείο $Μ$ του άξονα $x΄x$ ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $ΜΑΒ$ να είναι 12 τ.μ.

[Απ. $(-\frac{23}{4},0)$, $(\frac{25}{4},0)$]

3.17. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με κορυφές $Α(3,4)$, $Β(2,2)$ και η κορυφή $Γ$ βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $3x+2y-9=0$. Αν το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι $\frac{3}{2}$ τ.μ., να βρεθούν οι συντεταγμένες του $Γ$.

[Απ. Γ(1,3) ή $Γ(\frac{19}{7},\frac{3}{7})$]

3.18. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες στην $(η)$: $2x + 3y + 6 = 0$ και ορίζουν με τους άξονες τρίγωνα με εμβαδόν 3τ.μ.

[Απ. 2x+3y+6=0 , 2x+3y-6=0]

3.19. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $Ρ(1,1)$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 2τ.μ.

[Απ. y=-x+2 , $y=(3+2\sqrt{2})x-2-2\sqrt{2}$, $y=(3-2\sqrt{2})x-2+2\sqrt{2}$]

3.20. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy , η εξίσωση ευθείας $(λ-1)x+(λ+1)y-λ-3 = 0$, όπου $λ$ πραγματικός αριθμός, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος $Φ$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου $Φ$.

β) Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία $Κ(2,2)$, $Λ(-1,5)$ και $Μ(1,3)$. Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα πλοία $Κ$, $Λ$ και $Μ$.

γ) Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία K και Λ βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο M.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο Φ και τα πλοία Λ και M.

[Απ. i)K(2,0) ii)Δ(2,-2) iii)E=4]

* * * * *

Β΄ Ομάδα

3.21. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει με τις ευθείες (ε_1): $x + y - 3 = 0$, (ε_2): $x = 0$ τρίγωνο με εμβαδόν 3 τ.μ.

[Απ. x-2y=0, 5x+2y=0]

3.22. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1,3)$, $B(2,4)$ και η κορυφή Γ βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $4x + 3y - 11 = 0$. Αν το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $\frac{3}{2}$ τ.μ., να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής Γ.

[Απ. $\Gamma(2,1)$, $\Gamma(-\frac{4}{7}, \frac{31}{7})$]

3.23. Θεωρούμε τις ευθείες που σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έχουν εξισώσεις $x+\mu y+1 = 0$ και $2\mu x + 2y + \lambda = 0$ αντίστοιχα, (όπου οι μ, λ είναι πραγματικοί αριθμοί). Να προσδιορίσετε για ποια ζεύγη τιμών των λ , μ οι δύο ευθείες είναι παράλληλες και έχουν απόσταση μεταξύ τους $2\sqrt{2}$.

3.24. Δείξτε ότι το τρίγωνο του οποίου οι πλευρές έχουν εξισώσεις $y = \alpha x - \frac{\beta\gamma}{2}$, $y = \beta x - \frac{\gamma\alpha}{2}$, $y = \gamma x - \frac{\alpha\beta}{2}$ έχει εμβαδόν $\text{E} = \frac{1}{8}\cdot\left|(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\right|$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

3.25. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* ή *Λάθος* κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Στο επίπεδο δίνονται τα σημεία K, Λ, M. Αν για την απόσταση του K από την ευθεία $K\Lambda$ ισχύει $d(M , K\Lambda) = 0$ τότε τα K, Λ, M είναι συνευθειακά.

II. Η απόσταση των παράλληλων ευθειών ε: $y = x$ και ζ: $y = x + 1$ είναι 1.

III. Η απόσταση των παράλληλων ευθειών ε_1: $y = x$ και ε_2: $y = x + \kappa$ είναι $|\kappa|$.

IV. Η απόσταση των ευθειών ε_1: $y = \lambda x + \beta_1$ και ε_2: $y = \lambda x + \beta_2$ δίνεται απ' το τύπο

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1-\beta_2|}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

V. Σε οποιοδήποτε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει:

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B\Gamma}) \quad \text{ή} \quad \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) + \det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B\Gamma}) = 0.$$

VI. Το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζει η ευθεία ε: $\alpha x + \beta y = \gamma$, $(\alpha\beta\gamma \neq 0)$ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι $\text{E} = \frac{\gamma^2}{2\cdot|\alpha\beta|}$.

3.26. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία με εξίσωση $3x - 4y + 12 = 0$, με τους άξονες, έχει εμβαδόν:

Α. 15 **Β.** –6 **Γ.** 12 **Δ.** 6

II. Αν $0 < \alpha < \beta$ και ε: $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,x + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,y = \sqrt{2}$ τότε για την απόσταση της αρχής των αξόνων από την ευθεία ε ισχύει:

Α. $d(O, \varepsilon) > 1$ **Β.** $d(O, \varepsilon) \leq 1$ **Γ.** $d(O, \varepsilon) < 1$ **Δ.** $d(O, \varepsilon) \geq 1$

III. Η απόσταση του σημείου $A(-1,1)$ από την ευθεία ε: $\alpha x+\beta y = 0$, με $\alpha > \beta$ είναι:

Α. $\dfrac{(\alpha+\beta)\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha^2+\beta^2}$ **Β.** $\dfrac{(\alpha-\beta)\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha^2+\beta^2}$ **Γ.** $-\dfrac{|\beta-\alpha|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

Δ. $\dfrac{|\alpha+\beta|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ **Ε.** $\dfrac{(\alpha-\beta)\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha+\beta}$

3.27. Να συμπληρώσετε τα κενά με τις παρακάτω ευθείες:

ε_1: $3x - 4y + 1 = 0$ ε_2: $6x + 8y + 3 = 0$ ε_3: $y = -5x$ ε_4: $5x + 12y - 4 = 0$ ε_5: $x + y = 2$

$d(O,\ldots) < d(O,\ldots) < d(O,\ldots) < d(O,\ldots) < d(O,\ldots)$

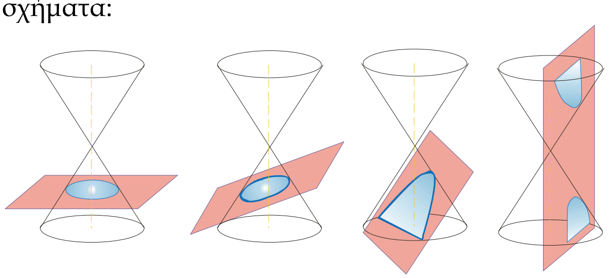
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

- Ο Κύκλος
- Η Παραβολή
- Η Έλλειψη
- Η Υπερβολή

Οι τομές μιας κωνικής επιφάνειας με επίπεδο, γνωστές από την αρχαιότητα, παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό από τη σκοπιά της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Ο κύκλος, η παραβολή, η έλλειψη και η υπερβολή λέγονται **κωνικές τομές**, γιατί μπορούν να προκύψουν από την τομή μιας ορθής κωνικής επιφάνειας με ένα επίπεδο, το οποίο δεν διέρχεται από την κορυφή της, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα:



Κύκλος **Έλλειψη** **Παραβολή** **Υπερβολή**

Η παρουσίαση κάθε κωνικής τομής ξεκινά με τον ορισμό της και τον τρόπο κατασκευής της. Ακολουθεί η εξίσωσή της για ορισμένες θέσεις που μπορεί να έχει στο σύστημα αξόνων. Από τη μελέτη της εξίσωσης της κωνικής τομής μπορούμε να βγάλουμε βασικά συμπεράσματα γι’ αυτήν. Για παράδειγμα αν έχει άξονες συμμετρίας, σημεία συμμετρίας, η θέση της στο σύστημα αξόνων κ.τ.λ. Μετά δίνεται η εξίσωση της εφαπτομένης σε κάποιο σημείο της κωνικής τομής και οι μορφές που μπορεί να έχει ανάλογα με τη θέση της κωνικής τομής στους άξονες.

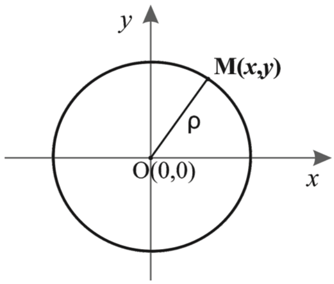
ΕΝΟΤΗΤΑ 1.

Ο ΚΥΚΛΟΣ

1.1. <u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> *Να αποδείξετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων* Ο(0,0) *και ακτίνα ρ.*

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και C ο κύκλος με κέντρο το σημείο Ο(0,0) και ακτίνα ρ. Ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο του Ο απόσταση ίση με ρ, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει:



$$(OM) = \rho \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \rho \quad \Leftrightarrow$$

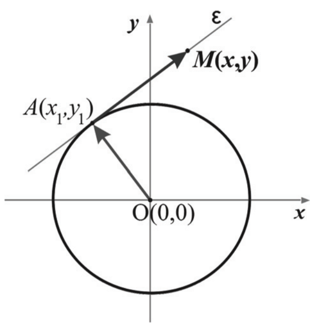
$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

Άρα οι συντεταγμένες των σημείων του κύκλου και μόνο αυτές επαληθεύουν την εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$ η οποία είναι η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα ρ.

1.2. <u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> *Να αποδείξετε την εξίσωση της εφαπτόμενης του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων* Ο(0,0) *και ακτίνα ρ, στο σημείο του* $A(x_1, y_1)$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω ε η εφαπτόμενη του κύκλου C: $x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$. Ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στην ε, αν και μόνο αν $OA \perp AM \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$. (1)



Είναι $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$ και $\overrightarrow{AM} = (x - x_1, y - y_1)$.

Έτσι η (1) $\Leftrightarrow$

$$x_1 \cdot (x - x_1) + y_1 \cdot (y - y_1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x \cdot x_1 - x_1^2 + y \cdot y_1 - y_1^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = x_1^2 + y_1^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2 \qquad \text{αφού} \quad x_1^2 + y_1^2 = \rho^2.$$

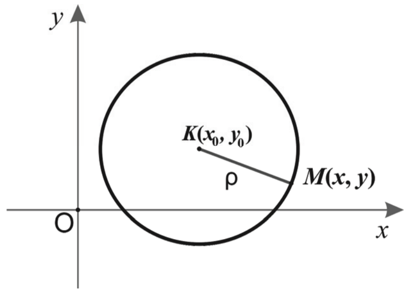
Επομένως, η εφαπτόμενη του κύκλου C: $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2 .$$

1.3. <u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> *Να αποδείξετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ.*

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και C ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ. Ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο του K απόσταση ίση με ρ, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει:



$$(KM) = \rho \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = \rho \quad \Leftrightarrow$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2$$

Άρα ο κύκλος με κέντρο το $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2 .$$

1.4. <u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> *Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής:*

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 , \quad \text{με } A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \quad \textbf{(1)}$$

και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της μορφής **(1)** *παριστάνει κύκλο.*

<u>Απόδειξη:</u>

Θεωρούμε έναν κύκλο με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ . Η εξίσωσή του είναι:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = \rho^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2x_0 \cdot x - 2y_0 \cdot y + (x_0^2 + y_0^2 - \rho^2) = 0.$$

Αν θέσουμε $A = -2x_0$, $B = -2y_0$,και $\Gamma = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$x^2 + y^2 + A\cdot x + B\cdot y + \Gamma = 0. \quad \textbf{(I)}$$

Αντιστρόφως , κάθε εξίσωση της μορφής:

$$x^2 + y^2 + A\cdot x + B\cdot y + \Gamma = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + A\cdot x) + (y^2 + B\cdot y) = -\Gamma \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2 + 2\frac{A}{2}\cdot x + \frac{A^2}{4}\right) + \left(y^2 + 2\frac{B}{2}\cdot y + \frac{B^2}{4}\right) = -\Gamma + \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2+B^2-4\Gamma}{4} \quad \Leftrightarrow$$

Επομένως:

- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$, η εξίσωση **(I)** παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$.
- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$, η εξίσωση **(I)** παριστάνει ένα μόνο σημείο, το $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$.
- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη, δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία $M(x, y)$ των οποίων οι συντεταγμένες να την επαληθεύουν.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.5. Δίνεται η εξίσωση C: $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 2\lambda y + \lambda^2 - \lambda + 2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε
α) Τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η εξίσωση παριστάνει κύκλο.
β) Το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C και την γραμμή στην οποία κινείται το κέντρο του για τις διάφορες τιμές του λ.
γ) Τις τιμές του λ, ώστε η ευθεία ε: $x - y - 2 = 0$ να εφάπτεται του κύκλου C.

Λύση:

α) Η εξίσωση παριστάνει κύκλο, αν και μόνο αν $Α^2 + Β^2 - 4Γ > 0 \Leftrightarrow$

$$(-2\lambda)^2 + (2\lambda)^2 - 4(\lambda^2-\lambda+2) > 0 \Leftrightarrow$$
$$4\lambda^2 + 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 8 > 0 \Leftrightarrow$$
$$4\lambda^2 + 4\lambda - 8 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda^2 + \lambda - 2 > 0.$$

$$\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 1+8 = 9 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm 3}{2} \left\langle \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \\ \lambda_2 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -2 \end{array} \right.$$

λ	$-\infty$ -2 1 $+\infty$
$\lambda^2+\lambda-2$	+ 0 – 0 +

Άρα η εξίσωση παριστάνει κύκλο όταν $\lambda < -2$ ή $\lambda > 1$.

β) $-\dfrac{A}{2} = -\dfrac{-2\lambda}{2} = \lambda. \qquad -\dfrac{B}{2} = -\dfrac{2\lambda}{2} = -\lambda.$

Το κέντρο του κύκλου είναι $K(\lambda, -\lambda)$ και η ακτίνα του είναι

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{4(\lambda^2+\lambda-2)}}{2} = \frac{2\sqrt{\lambda^2+\lambda-2}}{2} = \sqrt{\lambda^2+\lambda-2}\ .$$

$\begin{cases} x_K = \lambda \\ y_K = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = \lambda \\ y_K = -x_K \end{cases}$. Επειδή $\lambda < -2$ ή $\lambda > 1 \Leftrightarrow x_K < -2$ ή $x_K > 1$

Το κέντρο του κύκλου κινείται στην ημιευθεία με εξίσωση $y = -x$ με $x < -2$ ή στην ημιευθεία με εξίσωση $y = -x$ με $x > 1$.

γ) Η ευθεία ε είναι εφαπτόμενη του κύκλου C, αν και μόνο αν:

$$d(K,\varepsilon) = \rho \Leftrightarrow$$
$$\frac{|\lambda-(-\lambda)-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{\lambda^2+\lambda-2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{|\lambda+\lambda-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{\lambda^2+\lambda-2} \Leftrightarrow$$
$$2|\lambda-1| = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\lambda^2+\lambda-2} \Leftrightarrow$$
$$4(\lambda-1)^2 = 2(\lambda^2+\lambda-2) \Leftrightarrow$$
$$2(\lambda^2-2\lambda+1) = \lambda^2+\lambda-2 \Leftrightarrow$$
$$2\lambda^2-4\lambda+2 = \lambda^2+\lambda-2 \Leftrightarrow$$
$$\lambda^2-5\lambda+4 = 0$$

$\Delta = (-5)^2 - 4\cdot1\cdot4 = 25-16 = 9 \qquad \lambda_{1,2} = \dfrac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot1} = \dfrac{5\pm3}{2} \left\langle \begin{array}{l} \lambda_1 = \dfrac{5+3}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ \lambda_2 = \dfrac{5-3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{array} \right.$

Άρα $\lambda = 4$.

1.6. Θεωρούμε τις εξισώσεις C: $x^2 + y^2 + \lambda x + y - 1 = 0$ και ε: $y = \lambda x$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε

α) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση C παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων για τις διάφορες τιμές του λ.

γ) Να δείξετε ότι η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C σε δύο σημεία Α και Β.

δ) Αν (ΑΒ) = $\sqrt{6}$ να βρείτε την τιμή του λ.

Λύση:

α) Έχουμε $A^2 + B^2 - 4\Gamma = \lambda^2 + 1^2 - 4(-1) = \lambda^2 + 1 + 4 = \lambda^2 + 5 > 0$.
Επομένως η εξίσωση C παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.
Είναι: $-\dfrac{A}{2} = -\dfrac{\lambda}{2}$ και $-\dfrac{B}{2} = -\dfrac{1}{2}$. Το κέντρο του κύκλου είναι $K(-\dfrac{\lambda}{2}, -\dfrac{1}{2})$ και η ακτίνα του είναι $\rho = \dfrac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2} = \dfrac{\sqrt{\lambda^2+5}}{2}$.

β) Έχουμε $\begin{cases} x_K = -\dfrac{\lambda}{2} \\ y_K = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, άρα ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων Κ, είναι η ευθεία με εξίσωση $y = -\dfrac{1}{2}$.

γ) Τα σημεία τομής του κύκλου και της ευθείας δίνονται από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y = \lambda x \\ x^2 + y^2 + \lambda x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x \\ x^2 + (\lambda x)^2 + \lambda x + \lambda x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x \\ x^2 + \lambda^2 x^2 + 2\lambda x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} y = \lambda x \\ (1+\lambda^2)x^2 + 2\lambda x - 1 = 0 \end{cases}$. Η $2^η$ εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες αφού $\alpha = 1 + \lambda^2 > 0$ και $\gamma = -1 < 0$. Άρα το σύστημα έχει δύο λύσεις που σημαίνει ότι η ευθεία ε και ο κύκλος C τέμνονται σε δύο σημεία Α και Β για οποιαδήποτε τιμή του λ.

δ) Φέρνουμε το απόστημα ΚΜ. Το Μ είναι το μέσο της χορδής ΑΒ, άρα $AM = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
Το ΚΜ είναι η απόσταση του κέντρου Κ από την ευθεία ε: $y = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - y = 0$, οπότε

$$KM = d(K, \varepsilon) = \frac{\left|\lambda\left(-\frac{\lambda}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = \frac{\left|-\frac{\lambda^2}{2}+\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = \frac{\left|\frac{1-\lambda^2}{2}\right|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = \frac{|1-\lambda^2|}{2\sqrt{\lambda^2+1}}.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΜΑ έχουμε: $KM^2 + AM^2 = KA^2 \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{|1-\lambda^2|}{2\sqrt{\lambda^2+1}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\lambda^2+5}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{(1-\lambda^2)^2}{4(\lambda^2+1)} + \frac{6}{4} = \frac{\lambda^2+5}{4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(1-\lambda^2)^2}{\lambda^2+1}+6=\lambda^2+5 \Leftrightarrow \frac{(1-\lambda^2)^2}{\lambda^2+1}=\lambda^2-1 \Leftrightarrow (1-\lambda^2)^2=(\lambda^2-1)(\lambda^2+1) \Leftrightarrow$$
$$1-2\lambda^2+\lambda^4=\lambda^4-1 \Leftrightarrow 2\lambda^2=2 \Leftrightarrow \lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=-1 \text{ ή } \lambda=1.$$

1.6.1. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Στο ερώτημα **γ)** για την ύπαρξη ριζών της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, χρησιμοποιήσαμε την πρόταση που αναφέρει ότι:

"Στην εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$, αν $\alpha\cdot\gamma<0$ (α, γ ετερόσημοι) τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες."

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

1.7. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου (C) όταν έχει

α) κέντρο το $K(-5,2)$ και διέρχεται από το σημείο $A(-3,-1)$

β) διάμετρο το τμήμα AB με $A(-4,-1)$ και $B(2,3)$

γ) κέντρο το σημείο $K(-5,-3)$ και εφάπτεται στον άξονα $x'x$

δ) κέντρο το $K(-2,3)$ και εφάπτεται στην ευθεία (ε): $x-y=2$

1.8. Θεωρούμε τον κύκλο C: $x^2+y^2=5$.

α) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε του κύκλου στο σημείο του $A(1,2)$.

β) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 του κύκλου που είναι παράλληλη στην ε.

[Απ. α)x+2y=5 β)x+2y=-5]

1.9. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+y^2=4$.

i) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες του κύκλου που είναι παράλληλες προς την ευθεία ε: $3x+4y=1$.

ii) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες του κύκλου που είναι κάθετες προς την ευθεία ζ: $2x+y=1$.

iii) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες του κύκλου οι οποίες διέρχονται από το σημείο $M(2,3)$.

[Απ. i)3x+4y+10=0,3x+4y-10=0 ii)x-2y+2$\sqrt{5}$=0, x-2y-2$\sqrt{5}$=0 iii)x=2,5x-12y+26=0]

1.10. Θεωρούμε τον κύκλο C: $(x+3)^2+(y-1)^2=17$. Δείξτε ότι το σημείο $A(-2,5)$ ανήκει στον κύκλο και μετά βρείτε το αντιδιαμετρικό του.

[Απ. Α΄(-4,-3)]

1.11. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου C: $x^2+y^2+1=2x+6y$ και είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $2x+y+5=0$.

[Απ.x-2y+5=0]

1.12. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου ο οποίος διέρχεται από τα σημεία $A(3,1)$, $B(-1,3)$ και το κέντρο του βρίσκεται στην ευθεία (ε): $3x-y-2=0$.

[Απ.$(x-2)^2+(y-4)^2=10$]

1.13. Βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος διέρχεται από τα σημεία $A(2,2)$, $B(6,-2)$ και το κέντρο του είναι σημείο της ευθείας (ε): $2x+y=5$.

[Απ.$(x-3)^2+(y+1)^2=10$]

1.14. Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(-3,2)$, και αποκόπτει από την ευθεία (ε): $x-2y=3$ χορδή μήκους 6.

[Απ.$(x+3)^2+(y-2)^2=29$]

1.15. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στην ευθεία (ε): $4x - 3y = 4$ και είναι ομόκεντρος με τον (C): $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$.

[Απ. $(x+2)^2+(y-1)^2=9$]

1.16. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών (ε_1): $x - 3y = 8$, (ε_2): $y = 3x - 16$ και είναι ομόκεντρος με τον (C): $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 5 = 0$.

[Απ. $(x-4)^2+(y-3)^2=17$]

1.17. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(1,1)$, $B(1,-1)$ και $\Gamma(2,0)$.

[Απ. $(x-1)^2+y^2=1$]

1.18. Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1,2)$, $B(-3,-1)$ και $\Gamma(1,3)$.

[Απ. $x^2+y^2+5x-5y=0$]

1.19. Δίνεται ο κύκλος (C): $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 8$.

α) Δείξτε ότι το σημείο $M(3,1)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου.

β) Βρείτε την εξίσωση της χορδής του η οποία έχει μέσο το σημείο M.

[Απ. $x+2y=5$]

1.20. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στις ευθείες (ε_1): $x+2y = 0$, (ε_2): $x + 2y - 10 = 0$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.

[Απ. $(x-3)^2+(y-1)^2=5$, $(x+1)^2+(y-3)^2=5$]

1.21. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στην ευθεία (ε_1): $x + y + 2 = 0$ και στην ευθεία (ε_2): $x - y - 4 = 0$ στο σημείο της $A(2, -2)$.

[Απ. $(x-1)^2+(y+1)^2=2$, $(x-3)^2+(y+3)^2=2$]

1.22. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(4,0)$ και αποκόπτει από τον άξονα $y'y$ χορδή με μήκος 6.

[Απ. $(x-4)^2+(y-5)^2=25$, $(x-4)^2+(y+5)^2=25$]

1.23. Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές $A(2\lambda-1,3\lambda+2)$, $B(1,2)$, $\Gamma(2,3)$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ με $\lambda \neq -2$.

α). Να αποδείξετε ότι το A κινείται σε ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.

β) Εάν $\lambda = 1$, να βρείτε:

i) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

ii) Την εξίσωση του κύκλου, που έχει κέντρο την κορυφή $A(1,5)$ και εφάπτεται στην ευθεία $B\Gamma$.

[Απ. α) $3x-2y+7=0$ β) i) $\frac{3}{2}$ τ.μ. ii) $(x-1)^2+(y-5)^2=\frac{9}{2}$]

1.24. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες ε_1: $3x + 4y + 6 = 0$ και ε_2: $3x + 4y + 16 = 0$.

α) Να βρείτε την απόσταση των παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2.

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο τομής της ευθείας ε_1 με τον άξονα $x'x$ και αποκόπτει από την ευθεία ε_2 χορδή μήκους $d = 4\sqrt{3}$.

[Απ. α) 2 β) $(x+2)^2+y^2=16$]

1.25. Βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής των κύκλων (C_1): $x^2 + y^2 - 4x + 3y = 0$ και (C_2): $2x^2 + 2y^2 + x - 4y = 0$

[Απ. $y=\frac{9}{10}x$]

1.26. Δίνονται οι ευθείες (ε): $\lambda x - y - 1 = 0$ και (ζ): $x + \lambda y - \lambda = 0$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ οι ευθείες τέμνονται σε σημείο M, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο M βρίσκεται στον κύκλο με κέντρο το O και ακτίνα 1.

[Απ. α) $M\left(\frac{2\lambda}{\lambda^2+1}, \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}\right)$]

1.27. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy στο επίπεδο, δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 4x - 2\lambda y = 0 \quad \textbf{(1)}, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ, η γραμμή που παριστάνει η εξίσωση **(1)** διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων.

β) Να αποδείξετε ότι, για τις διάφορες τιμές του λ, η εξίσωση **(1)** παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(2, \lambda)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{\lambda^2 + 4}$.

γ) Για $\lambda = 2$, να αποδείξετε ότι ο κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση **(1)** τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ σε σημεία Α και Β αντίστοιχα, διαφορετικά από την αρχή Ο, τέτοια ώστε το τρίγωνο ΟΑΒ να είναι ισοσκελές.

δ) Για $\lambda = 2$, να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = -x$ εφάπτεται στον κύκλο, που ορίζεται από την εξίσωση **(1)**, στο σημείο $O(0,0)$.

1.28. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 1 = 0$ **(1)**.

α) Να βρείτε τους $\lambda \in \mathbb{R}$ για τους οποίους η **(1)** παριστάνει κύκλο.

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου;

γ) Ποιος από τους κύκλους της εξίσωσης **(1)** εφάπτεται στην ευθεία (ε): $x + y - \sqrt{6} = 0$;

[Απ. α) $\lambda<-1$ ή $\lambda>1$ β) $K(\lambda,0)$ $\rho=\sqrt{\lambda^2-1}$ γ) $x^2+y^2-4x+1=0$, $x^2+y^2+4x+1=0$]

1.29. Δίνεται η εξίσωση C_λ: $x^2 + y^2 + 2\lambda x - 4y + 5 = 0$

α) Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του αριθμού λ για τις οποίες η εξίσωση να παριστάνει κύκλο.

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα των κύκλων.

γ) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων.

[Απ. α) $\lambda<-1$ ή $\lambda>1$ β) $K(-\lambda,2)$ $\rho=\sqrt{\lambda^2-1}$ γ) $y=2$ και $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$]

1.30. Δίνεται η εξίσωση C_λ: $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2(\lambda+1)y + 4\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$

α) Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του αριθμού λ, ώστε η εξίσωση να παριστάνει κύκλο.

β) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων.

[Απ. α) $\frac{1}{2}<\lambda<1$ β) $y=x+1$, $\frac{1}{2}<x<1$]

1.31. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x\cdot\text{συν}\theta - 2y\cdot\text{ημ}\theta - 1 = 0$,$0 \le \theta < 2\pi$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε θ η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο $M(1,2)$.

γ) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

1.32. Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό $n = 1, 2, 3, \dots, 1999$ και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση: $(x-1)^2 + y^2 = 2n(x+y-1)$

Να αποδείξετε ότι:

α) η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του.

β) κατά την κίνηση τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο A (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου A;

γ) οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας $x + y - 1 = 0$ στο σημείο A.

1.33. α) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός κ, ώστε η εξίσωση
$\kappa(x^2 + 2y^2) + (y + x + 1)(y - x + 2) = 0$ να παριστάνει κύκλο.

β) Για τις διάφορες τιμές του κ να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.

[Απ. α)κ=-2]

1.34. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - (\mu - 1)x - \mu y - 3 = 0$ **(1)**.

α) Δείξτε ότι εξίσωση **(1)** παριστάνει κύκλο (C) για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού μ.

β) Δείξτε ότι το σημείο $P(1, -1)$ ανήκει στον κύκλο (C).

γ) Βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ αν η χορδή που ορίζει η ευθεία (ε): $x - 2y - 2 = 0$ στον κύκλο (C) φαίνεται από το σημείο P υπό ορθή γωνία.

[Απ. μ=-5]

1.35. Δίνεται η εξίσωση $(1 + \lambda)x^2 + (1 + \lambda)y^2 - 2x - 2\lambda = 0$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο.

β) Δείξτε ότι για τις διάφορες τιμές του λ , οι κύκλοι διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία να προσδιορίσετε.

[Απ. α)λ≠-1 β)(1,1) και (1,-1)]

1.36. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - \lambda x - \lambda y = 0$ **(1)** και η ευθεία ε: $y = x + 3$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η **(1)** παριστάνει κύκλο.

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ ώστε η ευθεία ε να τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η χορδή που ορίζεται από την τομή της ε και του κύκλου να φαίνεται από την αρχή των αξόνων υπό ορθή γωνία.

[Απ. α)λ≠0 β)λ<-3 ή λ>3 γ)Δεν υπάρχει]

1.37. Σε ένα καρτεσιανό επίπεδο θεωρούμε τα σημεία $A(2\lambda-3,0)$ και $B(0, \lambda+6)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση και το είδος της καμπύλης πάνω στην οποία κινούνται τα σημεία $M(x, y)$ του επιπέδου, έτσι ώστε το τμήμα AB να φαίνεται από αυτά υπό ορθή γωνία.

β) Δείξτε ότι όλες οι καμπύλες του ερωτήματος **α)** διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία να προσδιορίσετε.

[Απ. α)$x^2+y^2+(3-2\lambda)x-(\lambda+6)y=0$ β)(0,0), (-3,6)]

1.38. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2\kappa x + \kappa^2 - 2 = 0$.

α) Δείξτε ότι εξίσωση παριστάνει πάντα κύκλο. Να βρείτε την ακτίνα του και το γεωμετρικό τόπο του κέντρου του.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε: $x - y = 3$ είναι κοινή εφαπτομένη σε δύο κύκλους που προκύπτουν από την εξίσωση.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της άλλης κοινής εφαπτόμενης που διέρχεται από το σημείο στο οποίο η ε τέμνει τον άξονα $x'x$.

[Απ. α) $\rho=\sqrt{2}$, y=0 γ) x+y=3]

1.39. Θεωρούμε τις εξισώσεις C: $x^2 + y^2 + \lambda x - 1 = 0$ και ε: $y = \lambda x$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση C παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων για τις διάφορες τιμές του λ.

γ) Να δείξετε ότι η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C σε δύο σημεία Α και Β.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης που διαγράφει το μέσο της χορδής ΑΒ.

[Απ. β) y=0 δ) $x^2+(y+\frac{1}{4})^2=\frac{1}{16}$]

1.40. Δίνεται ο κύκλος C: $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 5$. Να βρείτε τα σημεία του κύκλου που απέχουν τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

[Απ. Α(-1,2), Β(-3,6)]

1.41. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου, για τα οποία ισχύει ότι το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων τους από τα σημεία $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(4,4)$ και $\Gamma(0,4)$ ισούται με 68.

[Απ. $(x-2)^2+(y-2)^2=9$]

1.42. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου, που το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων τους από τις ευθείες ε_1: $2x + y - 7 = 0$ και ε_2: $x - 2y - 1 = 0$ ισούται με 40.

[Απ. $(x-3)^2+(y-1)^2=40$]

1.43. Θεωρούμε τους κύκλους C_1: $x^2 + y^2 + 6y + 8 = 0$ και C_2: $x^2 + y^2 - 12x - 10y - 60 = 0$.

i) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο P του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής τους εφαπτομένης ε στο P.

[Απ i) $P(-\frac{3}{5},-\frac{19}{5})$ ii) ε:3x+4y+17=0]

1.44. Θεωρούμε τον κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$.

i) Ποια είναι τα σημεία τομής του κύκλου με τον άξονα $y'y$;

ii) Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου στα παραπάνω σημεία.

iii) Δείξτε ότι οι προηγούμενες εφαπτόμενες τέμνονται σε σημείο του άξονα $x'x$.

[Απ. i) Α(0,2) , Β(0,-2) ii) x+2y-4=0 , x-2y-4=0]

1.45. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0$.

α) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στον άξονα $y'y$.

β) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

[Απ. α) x=1, x=-5 β) y=2, y=8]

1.46. Δίνεται ο κύκλος C: $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 2$. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία ε: $x + y = 3$.

[Απ. x+y+2=0 , x+y+6=0]

1.47. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες του κύκλου οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία ε: $x - 2y - 6 = 0$.

[Απ. 2x+y+9=0 , 2x+y-11=0]

1.48. Δίνεται ο κύκλος C: $(x + 2)^2 + y^2 = 2$. Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου οι οποίες σχηματίζουν γωνία 45^0 με τον άξονα $x'x$.

[Απ. x-y=0 , x-y+4=0]

1.49. Δίνεται ο κύκλος $C: (x-1)^2+y^2=2$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου που άγονται από το σημείο $P(3,4)$.

[Απ. x-y+1=0 , 7x-y-17=0]

1.50. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2+y^2+8x+2y-8=0$ και το σημείο $P(-3,-8)$.

i) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων από το P στον C.

ii) Να βρεθεί η γωνία των εφαπτόμενων.

[Απ. i)4x-3y-12=0 , 3x+4y+41=0 ii)90^0]

1.51. Δίνονται οι γραμμές $C_\lambda: x^2+y^2-2\lambda x-8\lambda y+17\lambda^2-9=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, οι C_λ είναι κύκλοι και να δειχθεί ότι όλοι οι κύκλοι είναι ίσοι.

ii) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων C_λ.

iii) Να δειχθεί ότι όλοι οι κύκλοι C_λ , εφάπτονται δύο ευθειών των οποίων να βρεθούν οι εξισώσεις.

[Απ. ii)y=4x iii)y=4x+3$\sqrt{17}$, y=4x-3$\sqrt{17}$]

1.52. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+y^2+(\mu-1)x+\mu y-\dfrac{\mu}{2}-\dfrac{1}{4}=0$, με $\mu\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού μ, η εξίσωση παριστάνει κύκλο.

β) Δείξτε ότι όλοι οι κύκλοι με εξίσωση την παραπάνω διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία να προσδιορίσετε.

γ) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η κοινή χορδή των κύκλων.

[Απ. β)$(0,\frac{1}{2})$,$(1,-\frac{1}{2})$ γ)135^0]

1.53. Σε ένα καρτεσιανό επίπεδο θεωρούμε τα σημεία $A(\lambda+1,\lambda)$ και $B(2-\lambda,\lambda-4)$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση και το είδος της καμπύλης πάνω στην οποία κινούνται τα σημεία $M(x,y)$ του επιπέδου, έτσι ώστε το τμήμα AB να φαίνεται από αυτά υπό ορθή γωνία.

β) Δείξτε ότι όλες οι καμπύλες του ερωτήματος **α)** διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία να προσδιορίσετε.

[Απ. α)$x^2+y^2-3x+(4-2\lambda)y-3\lambda+2=0$ β)$(\frac{7}{2},-\frac{3}{2})$,$(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$]

1.54. Από την αρχή των αξόνων φέρνουμε τις εφαπτόμενες προς τον κύκλο $C: (x-3)^2+(y-2)^2=4$. Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζουν οι δύο εφαπτόμενες, να δείξετε ότι εφ$\theta=\dfrac{12}{5}$.

1.55. Από το σημείο $M(3,6)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες προς τον κύκλο $C: (x-1)^2+y^2=4$. Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζουν οι δύο εφαπτόμενες, να δείξετε ότι εφ$\theta=\dfrac{3}{4}$.

1.56. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_\alpha: \alpha x-y=0$ και $\zeta_\alpha: x+\alpha y=2$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, οι ευθείες ε_α διέρχονται από σταθερό σημείο A και οι ευθείες ζ_α διέρχονται από σταθερό σημείο B, τα οποία να προσδιορίσετε.

ii) Αν $M(x,y)$ είναι το σημείο τομής των ε_α και ζ_α να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ το M κινείται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε την εξίσωση.

1.57. Θεωρούμε τα σημεία $M(\mu, \lambda)$ και τις ευθείες:
ε_1: $\mu x - (\lambda + 5)y + 5\mu = 0$, ε_2: $\mu x + (5 - \lambda)y - 5\mu = 0$.
Αν οι ευθείες είναι κάθετες να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M.

[Απ. $x^2+y^2=25$ εκτός των (5,0) και (-5,0)]

1.58. Έστω ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = 25$ το σημείο $A(3,4)$.

α) Βρείτε το αντιδιαμετρικό Β του σημείου A.

β) Αν M ένα τυχαίο σημείο του C και σημείο P της ευθείας AM, να δείξετε ότι $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}$.

γ) Αν $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AP} = 16$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου P.

[Απ. γ) $3x+4y=17$]

1.59. Θεωρούμε τον κύκλο C: $x^2 + y^2 = 6$. Να βρεθεί σημείο P του C στο $1^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο, ώστε η εφαπτόμενη του κύκλου στο P να τέμνει τους ημιάξονες Ox, Oy στα σημεία A και B αντίστοιχα ώστε να ισχύει $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$.

[Απ. $A(\sqrt{2},2)$]

1.60. Στο επίπεδο θεωρούμε το ορθογώνιο σύστημα αξόνων Oxy και ένα σταθερό σημείο A αυτού με $|\overrightarrow{OA}| = 3$. Ποια γραμμή γράφουν τα σημεία $M(x, y)$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OM} - 2\cdot\overrightarrow{OA}) = 7$.

1.61. **α)** Δίνεται η εξίσωση $(x - 1)(x - 3) + (y - 3)(y - 5) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

β) Σε τοπογραφικό σχεδιάγραμμα με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy τα σημεία $A(1,3)$, $B(3,3)$, $\Gamma(3,5)$ και $\Delta(1,5)$ παριστάνουν τις θέσεις τεσσάρων δήμων.
Να αποδείξετε ότι μπορεί να χαραχθεί κυκλικός δρόμος που να διέρχεται από τους τέσσερις δήμους.

γ) Αν θεωρήσουμε ότι στο σύστημα αξόνων του ερωτήματος **(β)** οι συντεταγμένες ενός αυτοκινήτου K για κάθε χρονική στιγμή t $(t > 0)$ είναι $(t , t+2)$, να βρείτε τη γραμμή στην οποία κινείται το αυτοκίνητο K, αν συναντά τον κυκλικό δρόμο και, αν ναι, σε ποια σημεία του.

* * * * *

Β΄ Ομάδα

1.62. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = 10$ και η ευθεία ε: $y = 2x$. Θεωρούμε τυχαίο σημείο $P(x_0, y_0)$ του C.

α) Βρείτε τις συντεταγμένες των προβολών P_1, P_2 και P_3 πάνω στις ευθείες $x'x$, $y'y$ και ε αντίστοιχα.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $P_1P_2P_3$ είναι σταθερό (ανεξάρτητο της θέσης του P).

[Απ. α) $P_1(x_0,0)$, $P_2(0,y_0)$, $P_3\left(\frac{x_0+2y_0}{5}, \frac{2x_0+4y_0}{5}\right)$ β) $E=2$]

1.63. **Α.** Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+6\mu x+8\lambda y=0$, όπου μ , λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των μ , λ , η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο.

Β. Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς μ , λ ισχύει η σχέση $3\mu+2\lambda=0$.

α) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $x^2+y^2+6\mu x+8\lambda y=0$ για τις διάφορες τιμές των μ, λ , έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να βρείτε τα μ και λ , έτσι ώστε, αν A, B είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $x+y+2=0$, να ισχύει $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.

γ) Για τις τιμές των μ , λ που βρήκατε στο ερώτημα **(β)** να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου AOB.

1.64. Δίνονται οι κύκλοι C_1: $x^2+y^2=1$, C_2: $x^2+y^2-4x=0$ και η ευθεία ε: $y=\lambda x+\beta$, $\lambda, \beta\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις αποστάσεις των κέντρων των κύκλων C_1, C_2 από την ευθεία ε.

β) Για ποιες τιμές των $\lambda, \beta\in\mathbb{R}$ η ευθεία ε είναι κοινή εφαπτομένη των κύκλων C_1 και C_2 ;

γ) Να αποδείξετε ότι οι κοινές εφαπτόμενες των δύο κύκλων τέμνονται στον άξονα $x'x$ και να βρείτε την οξεία γωνία των εφαπτόμενων αυτών.

[Απ α) $d(K_1,\varepsilon)=\frac{|\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$, $d(K_2,\varepsilon)=\frac{|2\lambda+\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$ β) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ γ) 60^0]

1.65. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εφάπτεται στις ευθείες με εξισώσεις $x+2y-9=0$, $2x-y+2=0$.

[Απ. $(x-2)^2+(y-1)^2=5$, $(x-22/5)^2+(y+31/5)^2=289/5$]

1.66. Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στον (C): $x^2+y^2=24$ στο σημείο $A(3,4)$ και έχει ακτίνα 10. Να εξετάσετε ποιος εφάπτεται εξωτερικά και ποιος εσωτερικά.

[Απ. $(x-9)^2+(y-12)^2=100$ εξωτερικά , $(x+3)^2+(y+4)^2=100$ εσωτερικά]

1.67. Θεωρούμε τον κύκλο C: $x^2+y^2=10$ και το σημείο $P(-4,3)$. Από το P φέρνουμε δύο εφαπτόμενες προς τον κύκλο. Να βρείτε

α) την εξίσωση της χορδής που ορίζουν τα σημεία επαφής,

β) την απόσταση του σημείου P από τη χορδή αυτή.

[Απ. α) $-4x+3y=10$ β) 2]

1.68. Θεωρούμε τον κύκλο C: $x^2+y^2=\rho^2$ και το σημείο $P(x_0, y_0)$ του επιπέδου. Από το P φέρνουμε δύο εφαπτόμενες προς τον κύκλο. Να δείξετε ότι:

α) Η εξίσωση της χορδής που ορίζουν τα σημεία επαφής A και B είναι $x_0\cdot x+y_0\cdot y=\rho^2$.

β) Η απόσταση του σημείου P από τη χορδή AB είναι: $\dfrac{\left|x_0^2+y_0^2-\rho^2\right|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$.

1.69. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+y^2=9$ και το σημείο $P(2t\,, \frac{3}{2}t+\frac{9}{2})$, $t\in\mathbb{R}$.

α) Δείξτε ότι το σημείο P είναι εξωτερικό του κύκλου.

β) Αν από το P φέρνουμε τις εφαπτόμενες PA και PB του κύκλου C, να δείξετε ότι το σημείο $\Sigma(-\frac{3}{2},0)$ ανήκει στην ευθεία ΑΒ.

1.70. Έστω το σημείο $P(6,6)$ και P_1 , P_2 οι προβολές του P στους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα.

i) Να βρεθεί η εξίσωση του εγγεγραμμένου κύκλου C του τετραγώνου OP_1PP_2.

ii) Σε τυχαίο σημείο $M(x_0,y_0)$ του C φέρνουμε την εφαπτομένη του που τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα σημεία A_1 και A_2 αντίστοιχα.
Να βρείτε τις συντεταγμένες των A_1 , A_2 .

iii) Να υπολογιστεί το γινόμενο $\left|\overrightarrow{P_1A_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{P_2A_2}\right|$.

[Απ i)$x^2+y^2-6x-6y+9=0$ ii)$A(\frac{3x_0+3y_0-9}{x_0-3},0)$ $B(0, \frac{3x_0+3y_0-9}{y_0-3})$ iii)18]

1.71. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες του κύκλου C: $x^2 + y^2 = 25$, οι οποίες άγονται από το σημείο $M(4\sqrt{2}\ , 3\sqrt{2}\ )$ είναι κάθετες.

1.72. Στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy κινούνται τα σημεία A, B ώστε $(OA) + (OB) = \mu$ (όπου μ σταθερό). Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι με διάμετρο AB, διέρχονται από σταθερό σημείο, διαφορετικό από την αρχή των αξόνων.

[Απ. $P(\frac{\mu}{2},\frac{\mu}{2})$]

1.73. Να βρεθούν οι εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων των κύκλων C_1: $x^2 + y^2 = 1$ και C_2: $(x – 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

[Απ $y=1$, $4x+3y+5=0$]

1.74. Δίνονται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 – 8x + 2y + 12 = 0$ και και η ευθεία ε: $x – 2y + 4 = 0$.
Να βρείτε τα σημεία του κύκλου C που απέχουν την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση από την ευθεία ε.

[Απ (3,1) , (5,-3)]

1.75. Θεωρούμε τον κύκλο C: $x^2 + y^2 – 10x – 8y + 31 = 0$. Να βρεθεί σημείο του άξονα $x'x$ ώστε οι εφαπτόμενες από το P στο C να είναι κάθετες.

[Απ (3,0) , (7,0)]

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.76. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* ή *Λάθος* κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και η ευθεία $y = 2x$ εφάπτονται.

II. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda^2 = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, είναι εξίσωση κύκλου.

III. Η εξίσωση $x^2 + y^2 = \alpha^2 – 3\alpha + 4$ παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

IV. Η εξίσωση $x^2 + y^2 – \kappa x – \lambda y = 0$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει πάντα κύκλο.

V. Τα σημεία $A(–5,1)$ και $B(3,8)$ του κύκλου C: $(x + 1)^2 + (y – 3)^2 = 20$ είναι αντιδιαμετρικά.

VI. Οι κύκλοι με εξισώσεις $(x – 2)^2 + (3 + y)^2 = 4$,$(2–x)^2+(y+3)^2 = 9$ έχουν δύο κοινά σημεία.

1.77. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 + \kappa x - \kappa y - \kappa^2 + 6\kappa - 9 = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η τιμή του κ είναι:
Α. 1 **Β.** 6 **Γ.** –3 **Δ.** 2 **Ε.** 3

II. Η εξίσωση $\lambda^2x^2 + (2-\lambda)y^2 + \lambda x + 2y + 1 = 0$ παριστάνει κύκλο όταν η τιμή του λ είναι:
Α. 1 **Β.** 3 **Γ.** 1 ή –2 **Δ.** –2 **Ε.** 0

1.78. Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα:

Εξίσωση κύκλου	Κέντρο κύκλου	Ακτίνα κύκλου	Σημείο τομής κύκλου με άξονα $x'x$	Σημείο τομής κύκλου με άξονα $y'y$
$x^2 + y^2 = 12$				
$(x-2)^2 + y^2 = 25$				
$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 8 = 0$				
$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y = 0$				

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.

Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ

2.1. ΟΡΙΣΜΟΣ:

Έστω μια ευθεία δ και ένα σημείο E εκτός της δ. Ονομάζεται παραβολή με εστία το σημείο E και διευθετούσα την ευθεία δ ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από την E και τη δ.

2.2. ΠΡΟΤΑΣΗ:

Η εξίσωση της παραβολής με εστία $E(\frac{p}{2},0)$ *και διευθετούσα* δ: $x=-\frac{p}{2}$ *είναι:* $y^2=2px$.

Η εξίσωση της παραβολής με εστία $E(0,\frac{p}{2})$ *και διευθετούσα* δ: $y=-\frac{p}{2}$ είναι: $x^2=2py$.

2.3. ΠΡΟΤΑΣΗ:

Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής με άξονα συμμετρίας τον $x'x$, *στο σημείο της* $M(x_1,y_1)$ *είναι:* $yy_1=p(x+x_1)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής με άξονα συμμετρίας τον $y'y$, *στο σημείο της* $M(x_1,y_1)$ *είναι:* $xx_1=p(y+y_1)$.

Ιδιότητες Παραβολής

Έστω μια παραβολή $y^2=2px$.

- Αν $x\neq 0$ τότε $y^2>0 \Leftrightarrow 2px>0 \Leftrightarrow p$ και x ομόσημοι. Άρα η παραβολή βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει ο άξονας $y'y$ και η εστία E. Επομένως, η παραβολή βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει η διευθετούσα δ και η εστία E.

Συμμετρία της έλλειψης

- Αν το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ είναι σημείο της παραβολής, δηλαδή, αν $y_1^2=2px_1$, τότε το σημείο $M_2(x_1,-y_1)$ θα είναι σημείο της παραβολής, αφού $(-y_1)^2=2px_1$. Άρα ο άξονας $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής. Επομένως, η κάθετη από την εστία στη διευθετούσα είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής και λέγεται *άξονας* της παραβολής.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.4. α) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C_1 που διέρχεται από το σημείο $M(1,-2)$ και έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$, καθώς και την εξίσωση της παραβολής C_2 που διέρχεται από το σημείο $N(-\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$ και έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$

β) Να βρείτε τα σημεία τομής των C_1, C_2 και την εξίσωση της ευθείας ε στην οποία ανήκουν.

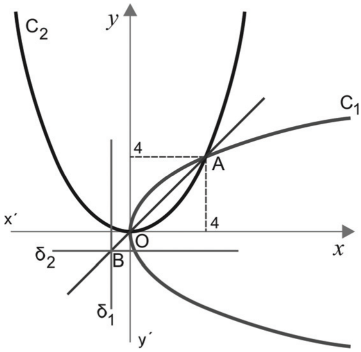
γ) Δείξτε ότι η ευθεία E_1E_2 είναι κάθετη στην ε (E_1, E_2 οι εστίες των παραβολών) και το σημείο τομής των διευθετουσών τους δ_1, δ_2 ανήκει στην ε.

Λύση:

α) Η εξίσωση της C_1 θα είναι $y^2 = 2px$.

Για $x = 1$ και $y = -2$ έχουμε: $(-2)^2 = 2p1 \Leftrightarrow 4 = 2p \Leftrightarrow p = 2$

Άρα $C_1: y^2 = 4x$.



Η εξίσωση της C_2 θα είναι $x^2 = 2py$.

Για $x = -\frac{1}{2}$ και $y = \frac{1}{16}$ έχουμε: $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 2p\cdot\frac{1}{16} \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{8}p \Leftrightarrow p = 2.$$

Άρα C_2: $x^2 = 4y$.

β) Για να βρούμε το σημείο τομής των C_1, C_2 θα λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ x^2 = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x \\ y = \frac{x^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 = 4x \\ y = \frac{x^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^4}{16} = 4x \\ y = \frac{x^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 64x \\ y = \frac{x^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 64x \\ y = \frac{x^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\cdot(x^3 - 64) = 0 \\ y = \frac{x^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \ \acute{\eta}\ x^3 = 64 \\ y = \frac{x^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & & x = \sqrt[3]{64} = 4 \\ & \acute{\eta} & \\ y = 0 & & y = \frac{4^2}{4} = 4 \end{cases}$$

Άρα οι C_1, C_2 τέμνονται στα σημεία $O(0,0)$ και $A(4,4)$.

Είναι $\lambda_\varepsilon = \frac{4-0}{4-0} = \frac{4}{4} = 1$.

Η εξίσωση της ε είναι: $y-0 = 1(x-0) \Leftrightarrow y = x$.

γ) Είναι $E_1(1,0)$ και $E_2(0,1)$. $\lambda_{E_1E_2} = \frac{1-0}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1$. Επομένως $\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{E_1E_2} = 1\cdot(-1) = -1$.

Άρα $\varepsilon \perp E_1E_2$. Είναι δ_1: $x = -1$ και δ_2: $y = -1$.

Το σημείο τομής των δ_1, δ_2 είναι το $B(-1,-1)$ το οποίο ανήκει στην ε.

2.5. Δίνεται ο κύκλος $C_1 : x^2+y^2 = 4$ και η παραβολή $C_2 : y^2 = 3x$

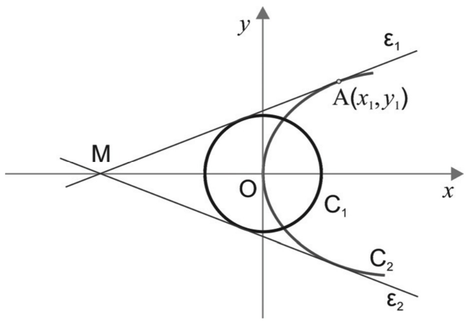
i) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες εφάπτονται συγχρόνως στον κύκλο και στην παραβολή.

ii) Να δείξετε ότι οι παραπάνω εφαπτόμενες τέμνονται σε σημείο του άξονα $x'x$.

iii) Να δείξετε ότι ο άξονας $x'x$ διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων.

Λύση:

i) Έστω $A(x_1,y_1)$ σημείο της παραβολής C_2 στο οποίο η εφαπτόμενη ε είναι και εφαπτόμενη του κύκλου.



Η εξίσωση της εφαπτόμενης είναι

ε: $yy_1 = p(x+x_1) \Leftrightarrow yy_1 = \frac{3}{2}\cdot(x+x_1) \Leftrightarrow$

$2yy_1 = 3(x+x_1) \Leftrightarrow 3x-2y_1y+3x_1 = 0.$

Επειδή η ε είναι εφαπτόμενη του κύκλου θα έχουμε:

$$d(O,\varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|3\cdot 0-2y_1\cdot 0+3x_1|}{\sqrt{3^2+(-2y_1)^2}} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{|3x_1|}{\sqrt{9+4y_1^2}} = 2 \Leftrightarrow 9x_1^2 = 4(9+4y_1^2) \Leftrightarrow 9x_1^2 = 4(9+4\cdot 3x_1) \Leftrightarrow 3x_1^2 - 16x_1 - 12 = 0.$$

$$\Delta = (-16)^2 - 4\cdot 3\cdot(-12) = 256+144 = 400 \quad x_1 = \frac{16\pm\sqrt{400}}{2\cdot 3} = \frac{16\pm 20}{6} = \begin{cases} \frac{36}{6} = 6 \\ \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Επειδή το x_1 είναι ομόσημο με το $p = \frac{3}{2}$ θα είναι $x_1 = 6$.

Τότε $y_1^2 = 3\cdot 6 \Leftrightarrow y_1^2 = 18 \Leftrightarrow y_1 = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$.

Άρα οι εξισώσεις των εφαπτόμενων είναι:

ε_1: $3x - 2\cdot 3\sqrt{2}\,y + 3\cdot 6 = 0 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{2}\,y + 6 = 0$ και

ε_2: $3x + 2\cdot 3\sqrt{2}\,y + 3\cdot 6 = 0 \Leftrightarrow x + 2\sqrt{2}\,y + 6 = 0.$

ii) Για να βρούμε το σημείο τομής των ε_1, ε_2 θα λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x-2\sqrt{2}y+6=0 \\ x+2\sqrt{2}y+6=0 \end{cases}$$

$2x \quad + 12 = 0 \Leftrightarrow 2x = -12 \Leftrightarrow x = -6$ και

$x + 2\sqrt{2}\,y + 6 = 0 \Leftrightarrow -6 + 2\sqrt{2}\,y + 6 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\,y = 0 \Leftrightarrow y = 0.$

Επομένως οι δύο εφαπτόμενες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο Μ(–6,0) του άξονα $x'x$.

iii) Είναι ε_1: $x-\sqrt{2}\,y+6 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\,y = x+6 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{6}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{3\sqrt{2}}{2}$

και ε_2: $x+\sqrt{2}\,y+6 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\,y = -x-6 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2\sqrt{2}}x - \frac{6}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Άρα $\lambda_{\varepsilon_1} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ και $\lambda_{\varepsilon_2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Επομένως ο άξονας $x'x$ διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων ε_1 και ε_2.

2.5.1. **ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Μπορούμε να αποδείξουμε το **(iii)** ερώτημα γεωμετρικά ως εξής:
Το τμήμα ΜΟ διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων που άγονται από το Μ προς τον κύκλο. Άρα ο άξονας $x'x$ διχοτομεί τη γωνία των ε_1, ε_2.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

2.6. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει:
α) $p = 4$ και άξονα συμμετρίας τον $x'x$.
β) Εστία $E(-\frac{3}{2},0)$
γ) Διευθετούσα δ: $y = 2$
δ) Άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $A(-1,3)$

2.7. Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 2px$ και μία χορδή της AB η οποία είναι παράλληλη με τον άξονα $y'y$ και περνάει από την εστία. Να αποδείξετε ότι $(AB) = 2(EK)$, όπου K το σημείο που τέμνει ο άξονας $x'x$ την διευθετούσα.

2.8. Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 4x$ και η ευθεία ε: $y = x-1$.
α) Να δείξετε ότι η ευθεία ε διέρχεται από την εστία της C.
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία A και B της ε και της C.

2.9. Να αποδείξετε ότι η παραβολή C: $y^2 = 2px$ και η ευθεία ε: $y = x$ έχουν δυο κοινά σημεία. Για ποια τιμή της παραμέτρου p η απόσταση των σημείων αυτών είναι ίση με $8\sqrt{2}$;
[Απ.-4 ή 4]

2.10. Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 2px$. Θέτουμε $x' = \alpha x$ και $y' = \alpha y$, $\alpha \neq 0$. Να αποδειχθεί ότι το σημείο (x', y') κινείται πάλι σε παραβολή.

2.11. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $(x, y) = (2p\kappa^2, 2p\kappa)$ με $\kappa \in \mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε μία παραβολή.
β) Αν $A(2p\kappa_1^2, 2p\kappa_1)$, $B(2p\kappa_2^2, 2p\kappa_2)$ είναι δύο σημεία της παραβολής αυτής, να αποδειχθεί ότι αν η AB διέρχεται από την εστία, είναι $4\kappa_1\kappa_2 = -1$.

2.12. Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 4px$, $p > 0$. Μία χορδή της ΑΒ είναι κάθετη στον άξονά της και έχει μήκος $8p$. Να αποδειχθεί ότι $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.

2.13. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη προς την ε: $3x - 2y + 30 = 0$ και εφάπτεται στην παραβολή C: $y^2 = 12x$.
Μετά να βρείτε την απόσταση των δύο παραλλήλων ευθειών.
[Απ. 3x-2y+4=0 , $2\sqrt{13}$]

2.14. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής C: $y^2 = 8x$ που άγονται από το σημείο $P(5, -7)$
[Απ. y=-x-2 , y=$-\frac{2}{5}$x-5]

2.15. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής $C: y^2 = -6x$ που άγονται από το σημείο $P(0,4)$

[Απ. $x=0$, $y=-\frac{3}{8}x+4$]

2.16. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$.

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της παραβολής που είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $3x + y + 3 = 0$.

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής τις οποίες φέρνουμε από το σημείο $M(-2,1)$.

2.17. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Να βρείτε:

α) την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.

β) τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 1$.

2.18. Θεωρούμε το κύκλο με κέντρο $K(-1,0)$ που διέρχεται από το σημείο $A(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

α) Να βρείτε: **i)** Την εξίσωση του κύκλου

ii) Την εφαπτομένη ε του κύκλου στο Α.

β) Αν η ε διέρχεται από την εστία της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον θετικό ημιάξονα Ox, τότε:

i) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής.

ii) Αν η διευθετούσα της παραβολής τέμνει τον κύκλο στα σημεία M, N να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου AMN.

[Απ. α)i) $(x+1)^2+y^2=1$ ii) $x-\sqrt{3}y-1=0$ β)i) $y^2=4x$ ii) $\frac{1}{2}$]

2.19. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής η οποία έχει κορυφή το O, άξονα συμμετρίας τον θετικό ημιάξονα των x και εφάπτεται στην ευθεία με εξίσωση $y = 4x + 1$.
Ποιο είναι το σημείο στο οποίο η ευθεία εφάπτεται της παραβολής.

2.20. Ισόπλευρο τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $C: y^2 = 4px$, $p > 0$ με κορυφή το O. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

2.21. Θεωρούμε την παραβολή $C: y^2 = 2px$. Το άθροισμα των τεταγμένων δύο σημείων A και B της C είναι ίσο με το άθροισμα των τεταγμένων δύο άλλων σημείων Γ και Δ της C. Να δείξετε ότι $AB // \Gamma\Delta$..

2.22. Από το σημείο $M(-9,6)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες MA, MB στην παραβολή $C: y^2 = 4x$. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν οι δύο εφαπτόμενες.

[Απ. 90^0]

2.23. Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες του κύκλου $C_1: x^2 + y^2 = 64$ και της παραβολής $C_2: y^2 = 30x$.

[Απ. $y=\frac{3}{4}x+10$, $y=-\frac{3}{4}x-10$]

2.24. Από το σημείο $\Sigma(-3,2)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες ΣA , ΣB στην παραβολή $C\colon y^2 = 8x$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας AB καθώς και η απόσταση του σημείου Σ από την ευθεία AB.

[Απ. $2x-y-6=0$, $\frac{14\sqrt{5}}{5}$]

2.25. Από το σημείο $M(2,1)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες MA, MB στην παραβολή $C\colon y^2 = -4x$. Να βρείτε:

i) Την εξίσωση της ευθείας AB.

ii) Τις συντεταγμένες των σημείων A, B.

iii) Το εμβαδόν του τριγώνου EAB, όπου E η εστία της παραβολής.

[Απ. i) $y=-2x-4$ ii) $A(-4,4)$, $B(-1,-2)$ iii) 3]

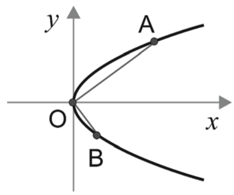
2.26. Δίνεται η παραβολή $C\colon y^2 = 2px$, $p > 0$ και οι ευθείες $\varepsilon_1\colon y = \lambda x$, $\varepsilon_2\colon y = -\lambda x$, όπου λ θετικός ακέραιος.

α) Δείξτε ότι οι ευθείες ε_1 , ε_2 τέμνουν την παραβολή σε σημεία A , B συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.

β) Να βρείτε τον λ όταν η AB διέρχεται από την εστία της C.

γ) Όταν το εμβαδόν του τριγώνου OAB γίνεται μέγιστο, όπου O η αρχή των αξόνων, δείξτε ότι οι ευθείες ε_1 , ε_2 είναι κάθετες.

[Απ. α) $\left(\frac{2p}{\lambda^2}, \frac{2p}{\lambda}\right)$, $\left(\frac{2p}{\lambda^2}, -\frac{2p}{\lambda}\right)$ β) 2]



2.27. Δίνεται η παραβολή $C\colon y^2 = 2px$, $p > 0$. Η εξίσωση της ευθείας OA είναι $y = \lambda x$, $\lambda > 0$ και η OB είναι κάθετη στην OA.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OB.

β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των A, B ως συνάρτηση του λ.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.

δ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB διέρχεται από σταθερό σημείο για τις διάφορες τιμές του λ.

[Απ. α) $y=-\frac{1}{\lambda}x$ β) $A\left(\frac{2p}{\lambda^2}, \frac{2p}{\lambda}\right)$, $B(2p\lambda^2, -2p\lambda)$ γ) $\lambda x+(\lambda^2-1)y-2\lambda p=0$ αν $\lambda \neq 1$, $x=2p$ αν $\lambda=1$ δ) $M(2p,0)$]

* * * * *

Β΄ Ομάδα

5.1. Έστω η παραβολή $C\colon y^2 = 4x$ και μια ευθεία ε που διέρχεται από την εστία E της παραβολής και την τέμνει στα σημεία A και B. Έστω επιπλέον Γ, Δ οι προβολές των A, B πάνω στη διευθετούσα της παραβολής C και M το μέσο του $\Gamma\Delta$.

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ, Δ και M ως συνάρτηση της τεταγμένης του A.

β) Να αποδείξετε ότι η αρχή των αξόνων είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.

γ) Να αποδείξετε ότι $A\hat{M}B = 90^0$ και ότι το ME είναι το ύψος του τριγώνου AMB.

δ) Να αποδείξετε ότι $\Gamma\hat{E}\Delta = 90^0$ και να υπολογίσετε το (ME) ως συνάρτηση της τεταγμένης του A.

[Απ. α) $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$, $B\left(\frac{4}{y_1^2}, -\frac{4}{y_1}\right)$, $\Gamma(-1, y_1)$, $\Delta\left(-1, -\frac{4}{y_1}\right)$, $M\left(-1, \frac{y_1^2-4}{2y_1}\right)$ δ) $(ME)=\frac{y_1^2+4}{2|y_1|}$]

2.28. Θεωρούμε την παραβολή $C: y^2 = 5x$ και το σημείο $M(2,-3)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει την παραβολή στα A, B και το M είναι το μέσο του AB.

[Απ. 5x+6y+8=0]

2.29. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν δύο διαφορετικές χορδές AB, $ΓΔ$ της παραβολής $C: y^2 = 2px$, που να έχουν το ίδιο μέσο.

2.30. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 2px$ και μία ευθεία ε που διέρχεται από την εστία E και τέμνει την παραβολή στα σημεία A και B. Να δείξετε ότι το γινόμενο των αποστάσεων των A και B από τον άξονα $x'x$ ισούται με p^2.

2.31. Θεωρούμε την παραβολή $C: y^2 = 2px$, $p > 0$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης της παραβολής από την οποία οι άξονες αποκόπτουν τμήμα με μήκος $p\sqrt{3}$.

2.32. Θεωρούμε μια χορδή AB της παραβολής $C: y^2 = 2px$ που διέρχεται από την εστία E της παραβολής. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία A και B τέμνονται σε σημείο της διευθετούσας της.

2.33. Από τυχαίο σημείο M της διευθετούσας (δ) της παραβολής $C: y^2 = 2px$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες MA, MB. Να αποδείξετε ότι η AB διέρχεται από την εστία E της παραβολής.

2.34. Θεωρούμε την παραβολή $C: y^2 = 2px$, με εστία E και ένα τυχαίο σημείο A του άξονα $y'y$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που είναι κάθετη στην AE στο σημείο A, εφάπτεται της παραβολής.

2.35. Η εφαπτόμενη (ε) σε τυχαίο σημείο M της παραβολής $C: y^2 = 2px$, τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο A. Αν E είναι η εστία της παραβολής, να δείξετε ότι $E\widehat{A}M = 90^0$.

2.36. Η χορδή AB της παραβολής $C: y^2 = 4\alpha x$, διέρχεται από το σημείο $Γ(1,0)$. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία A, B και η ευθεία με εξίσωση $x + 1 = 0$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

2.37. Από την κορυφή O της παραβολής $C: y^2 = 2px$ φέρνουμε κάθετη OA σε τυχαία εφαπτόμενη της, η οποία επανατέμνει την παραβολή στο σημείο B. Δείξτε ότι: $|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| = p^2$.

2.38. Μία μεταβλητή ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$, $\lambda \neq 0$ τέμνει την παραβολή C: $y^2 = 4x$ σε δύο σημεία A και B.

i) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του μέσου M του AB είναι $(\frac{2-\lambda\beta}{\lambda^2}, \frac{2}{\lambda})$.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία βρίσκεται το M, αν

α) $\lambda = 1$ και το β μεταβάλλεται

β) $\beta = 0$ και το λ μεταβάλλεται

[Απ. ii)α)Η ημιευθεία y=2, $x \geq 1$..ii)β)Η παραβολή $y=2x^2$ εξαιρουμένης της κορυφής της]

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

2.39. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* ή *Λάθος* κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. Η παραβολή με εστία $E(3,0)$ έχει παράμετρο $p = 6$.

ii. Η ευθεία που έχει εξίσωση $y = 3$ είναι παράλληλη στη διευθετούσα της παραβολής $y^2 = 12x$.

iii. Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων Oxy η παραβολή $y^2 = 2px$ βρίσκεται πάντα στο ημιεπίπεδο που ορίζει ο άξονας $y'y$ και η εστία E.

iv. Ο άξονας $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής $x^2 = 8y$.

v. Μια παραβολή με άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ έχει πάντα εξίσωση της μορφής $x^2 = 2py$.

vi. Μια παραβολή με κορυφή το $O(0,0)$ και διευθετούσα $y = -\frac{p}{2}$, έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$.

vii. Κάθε σημείο της παραβολής $y^2 = -12x$ ισαπέχει από την ευθεία $x = 3$ και το σημείο $(-6,0)$.

viii. Όλα τα σημεία της παραβολής $y^2 = 2px$ με $p > 0$, εκτός του $O(0,0)$ έχουν θετική τετμημένη.

ix. Η εστία της παραβολής $x^2 = y$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x$.

x. Ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2 = 1$ περνά από την εστία της παραβολής $y^2 = 4x$.

2.40. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. Η παραβολή που έχει εστία $E(0,4)$ και κορυφή το $O(0,0)$, έχει εξίσωση:

A. $y^2 = 8x$ **B.** $y^2 = -8x$ **Γ.** $y^2 = 16x$ **Δ.** $x^2 = 16y$ **E.** $x^2 = 8y$

ii. Μία παραβολή με κορυφή το $O(0,0)$ και διευθετούσα $x = \frac{3}{2}$, έχει εξίσωση:

A. $y^2 = 6x$ **B.** $y^2 = -6x$ **Γ.** $y^2 = 3x$ **Δ.** $x^2 = -6y$ **E.** $x^2 = -3y$

iii. Τα κοινά σημεία της παραβολής $y^2 = 8x$ και της ευθείας με εξίσωση $x - y = 0$ είναι:

A. $(0,0)$ και $(1,1)$ **B.** $(8,8)$ και $(2,1)$ **Γ.** $(0,0)$ και $(8,8)$

Δ. $(1,\sqrt{8})$ και $(-1,\sqrt{8})$ **E.** $(2,4)$ και $(4,2)$

iv. Το σημείο $A(\kappa,4)$ ανήκει στην παραβολή $y^2 = 8x$. Το συμμετρικό σημείο A' του A ως προς τον άξονα $x'x$ είναι:

A. $(4,4)$ **B.** $(-4,4)$ **Γ.** $(2,4)$ **Δ.** $(2,-4)$ **E.** $(2,-2)$

v. Η εξίσωση $y^2 = 4\alpha x$

A. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $\alpha > 0$.

B. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $\alpha = \frac{1}{2}p$ $(p > 0)$.

Γ. παριστάνει παραβολή για κάθε $\alpha \neq 0$.

Δ. παριστάνει παραβολή για κάθε πραγματικό αριθμό α.

E. παριστάνει παραβολή, μόνο όταν α ρητός.

vi. Οι παραβολές $y^2 = \alpha x$ και $x^2 = \alpha y$ $(\alpha \neq 0)$

A. έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

B. εφάπτονται στο $O(0,0)$.

Γ. έχουν ένα ή δύο κοινά σημεία ανάλογα με το α.
Δ. έχουν πάντα δύο κοινά σημεία.
Ε. υπάρχει τιμή του α για την οποία δεν τέμνονται.

VII. Το σημείο $A(2,4)$ της παραβολής $y^2 = 8x$ απέχει από τη διευθετούσα απόσταση

Α. 2 **Β.** 4 **Γ.** 8 **Δ.** 16 **Ε.** $\sqrt{8}$

VIII. Η εξίσωση $y^2 = 16|x|$
Α. παριστάνει μία παραβολή.
Β. παριστάνει δύο παραβολές.
Γ. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $\alpha > 0$.
Δ. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $\alpha < 0$.
Ε. παριστάνει δύο ευθείες.

2.41. Σε κάθε γραμμή στη Στήλη Α δίνεται η εξίσωση μιας παραβολής που έχει εστία E και διευθετούσα δ, που γράφονται στη Στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $y^2 = x$	**Α.** $E(-1,0)$ και δ: $x+1=0$
	Β. $E(\frac{1}{4},0)$ και δ: $x+\frac{1}{4}=0$
2. $y^2 = -4x$	**Γ.** $E(-5,1)$ και δ: $x+1=0$
3. $x^2 = 20y$	**Δ.** $E(-1,0)$ και δ: $x-1=0$
	Ε. $E(0,5)$ και δ: $y+5=0$

2.42. Να αντιστοιχίσετε κάθε παραβολή της Στήλης Α, με την εστία της στη Στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $y^2 = px$	**Α.** $(-\frac{p}{2},0)$
	Β. $(\frac{p}{8},0)$
2. $x^2 = py$	**Γ.** $(\frac{p}{4},0)$
3. $y^2 = -2px$	**Δ.** $(0,\frac{p}{2})$
4. $y^2 = \frac{p}{2}x$	**Ε.** $(0,\frac{p}{4})$
	ΣΤ. $(0,-\frac{p}{2})$

2.43. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 8x$ και τα σημεία $A(2,0)$, $B(-1,0)$, $\Gamma(0,4)$, $\Delta(-5,1)$ και $E(-2,2)$ τα οποία απέχουν από τη διευθετούσα της παραβολής αποστάσεις d_A, d_B, d_Γ, d_Δ, d_E αντιστοίχως.
Να γράψετε σε μια σειρά τις αποστάσεις d_A, d_B, d_Γ, d_Δ, d_E, έτσι ώστε καθένα να είναι μεγαλύτερη από την προηγουμένη της.

2.44. Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα:

Εξίσωση παραβολής	Συντεταγμένες εστίας	Εξίσωση διευθετούσας	Άξονας συμμετρίας
$y^2 = 6x$			
$y^2 = -6x$			
$x^2 = 1,2y$			
$x^2 = -\frac{5}{2}y$			

ΕΝΟΤΗΤΑ 3.

Η ΕΛΛΕΙΨΗ

3.1. ΟΡΙΣΜΟΣ:

Έστω E' και E δύο σημεία ενός επιπέδου. Ονομάζεται *έλλειψη* με εστίες τα σημεία E' και E ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερό και μεγαλύτερο του $E'E$.

Το σταθερό αυτό άθροισμα το συμβολίζουμε με 2α και την απόσταση των εστιών E' και E με 2γ. Η απόσταση $E'E$ ονομάζεται *εστιακή απόσταση* της έλλειψης.

3.2. ΠΡΟΤΑΣΗ:

Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$ *και* $E(\gamma,0)$ *είναι:*

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1\,,\ \text{όπου}\ \beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}\,.$$

Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(0,-\gamma)$ *και* $E(0,\gamma)$ *είναι:*

$$\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1\,,\ \text{όπου}\ \beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}\,.$$

3.3. ΠΡΟΤΑΣΗ:

Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης C: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, *στο σημείο της* $M(x_1,y_1)$ *είναι:* $\quad \frac{x\cdot x_1}{\alpha^2}+\frac{y\cdot y_1}{\beta^2}=1.$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης C: $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1$, *στο σημείο της* $M(x_1,y_1)$ *είναι:* $\quad \frac{y\cdot y_1}{\alpha^2}+\frac{x\cdot x_1}{\beta^2}=1.$

Ιδιότητες Έλλειψης

Έστω μια έλλειψη C: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

Συμμετρία της έλλειψης

- Αν $M_1(x_1, y_1)$ είναι ένα σημείο της έλλειψης C, τότε τα σημεία $M_2(x_1, -y_1)$, $M_3(-x_1, y_1)$ και $M_4(-x_1, -y_1)$ ανήκουν στην C, αφού οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της.
  Άρα οι άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι άξονες συμμετρίας της έλλειψης και η αρχή των αξόνων κέντρο συμμετρίας της.

- Τα σημεία που η *έλλειψη* τέμνει τους άξονες λέγονται *κορυφές* της έλλειψης.
  Για $y = 0$ έχουμε $\frac{x^2}{\alpha^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow x = \pm\,\alpha$, ενώ για
  $x = 0$ έχουμε $\frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \beta^2 \Leftrightarrow y = \pm\,\beta$.

Κορυφές

Επομένως οι κορυφές της έλλειψης έχουν συντεταγμένες:
$A(\alpha,0)$, $A'(-\alpha,0)$, $B(0,\beta)$ και $B'(0,-\beta)$.

Άξονες

Τα ευθύγραμμα τμήματα $A'A$ και $B'B$ που έχουν μήκη $(A'A) = 2\alpha$ και $(B'B) = 2\beta$ λέγονται και *μεγάλος άξονας* και *μικρός άξονας* αντίστοιχα.
Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο οποιαδήποτε συμμετρικά ως προς το Ο σημεία M και N της έλλειψης λέγεται *διάμετρος* της έλλειψης.

Διάμετρος

Ισχύει ότι $2\beta \leq (MN) \leq 2\alpha$, δηλαδή κάθε διάμετρος της έλλειψης είναι μεγαλύτερη ή ίση από το μικρό άξονα και μικρότερη ή ίση από το μεγάλο άξονα της έλλειψης.

- Έχουμε $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} = 1 - \frac{y^2}{\beta^2} \leq 1$
  Επομένως $\frac{x^2}{\alpha^2} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq \alpha^2 \Leftrightarrow x^2 - \alpha^2 \leq 0 \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$.
  Όμοια $-\beta \leq x \leq \beta$.
  Άρα, η έλλειψη περιέχεται στο ορθογώνιο που ορίζουν οι ευθείες
  $x = -\alpha$, $x = \alpha$ και $y = -\beta$, $y = \beta$

Εκκεντρότητα Έλλειψης

Εκκεντρότητα της έλλειψης

- Έστω μια έλλειψη C: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.
  Ονομάζουμε *εκκεντρότητα* της έλλειψης C και τη συμβολίζουμε με ε, το λόγο $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} < 1$.

- Επειδή $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, είναι $\varepsilon = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha} \Leftrightarrow \varepsilon^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow \varepsilon^2$

$$= \frac{\alpha^2}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

$$\Leftrightarrow \ \varepsilon^2 = 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 1 - \varepsilon^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,.$$

Όσο η εκκεντρότητα ε μεγαλώνει, τόσο μικραίνει ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ και κατά συνέπεια τόσο πιο επιμήκης γίνεται η έλλειψη. Όταν το ε τείνει προς το 1, η έλλειψη τείνει να εκφυλιστεί σε ευθύγραμμα τμήμα. Όταν η ε τείνει στο 0, τότε ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ τείνει στο 1 και επομένως η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος.

Όμοιες ελλείψεις

- Οι ελλείψεις που έχουν την ίδια εκκεντρότητα, άρα ίδιο λόγο $\frac{\beta}{\alpha}$, λέγονται *όμοιες*.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

3.4. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει:

α) Τις εστίες της στον άξονα $x'x$ και ημιάξονες 4 , 2.

β) Μεγάλο άξονα 5, ο οποίος βρίσκεται στον $y'y$ και μικρό άξονα 2.

γ) Τις εστίες της στον $x'x$, με εστιακή απόσταση 12 και μικρό ημιάξονα 8.

3.5. Να βρείτε τις κορυφές και τις εστίες κάθε μιας από τις παρακάτω ελλείψεις.

i) $9x^2 + 25y^2 = 225$ **ii)** $\frac{3}{4}x^2 + 4y^2 = 108$ **iii)** $\frac{2x^2}{3} + \frac{3y^2}{2} = 24$

3.6. Θεωρούμε την έλλειψη C: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta$ και μια ευθεία που διέρχεται από την εστία E' της έλλειψης και την τέμνει στα σημεία A και B. Αν E είναι η άλλη εστία, τότε δείξτε ότι η περίμετρος του τριγώνου AEB είναι σταθερή.

[Απ.4α]

3.7. Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις C_1: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και C_2: $\frac{x^2}{\alpha^2+\lambda^2} + \frac{y^2}{\beta^2+\lambda^2} = 1$, $\alpha > \beta$ έχουν ίδιες εστίες.

3.8. Θεωρούμε την έλλειψη C: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta$ με μεγάλο άξονα $A'A$. Αν M τυχαίο σημείο της έλλειψης, δείξτε ότι $\lambda_{MA}\cdot\lambda_{MA'} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}$.

3.9. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης C: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ που είναι παράλληλες προς την ευθεία ε: $4x + 3y = 1$.

[Απ. $y=-\frac{4}{3}x+2\sqrt{5}$, $y=-\frac{4}{3}x-2\sqrt{5}$]

3.10. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης C: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ που είναι κάθετες στην ευθεία ε: $x+y=5$.

[Απ. $y=x+5$, $y=x-5$]

3.11. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της έλλειψης C: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ που άγονται από το σημείο $A(3,4)$.

[Απ. $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$, $x=3$]

3.12. Θεωρούμε την έλλειψη C: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $\alpha>\beta$ και το σημείο της $M(x_1, y_1)$. Η εφαπτόμενη της έλλειψης στην κορυφή της $A(\alpha,0)$ τέμνει στο σημείο Σ την εφαπτόμενη αυτής στο M. Να αποδείξετε ότι $O\Sigma \,//\, A'M$.

3.13. Δίνονται τα σημεία Ε($\sqrt{3}$,0) και Ε΄($-\sqrt{3}$,0).

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει: (ΜΕ) + (ΜΕ΄) = 4.

β) Να δείξετε ότι το σημείο Γ$(\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$ ανήκει στην καμπύλη του προηγούμενου ερωτήματος και μετά να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης (ε) της καμπύλης στο Γ.

γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται του κύκλου με εξίσωση $x^2+y^2=3$.

[Απ. α) $\frac{x^2}{4}+y=1$ β) $\sqrt{2}x-y-3=0$]

3.14. Να βρείτε ένα σημείο M της έλλειψης C: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, τέτοιο ώστε να ισχύει $E'\widehat{M}E=90^0$.

[Απ. $M_1(\frac{5\sqrt{7}}{4}, \frac{9}{4})$, $M_2(\frac{5\sqrt{7}}{4}, -\frac{9}{4})$, $M_3(-\frac{5\sqrt{7}}{4}, \frac{9}{4})$, $M_4(-\frac{5\sqrt{7}}{4}, -\frac{9}{4})$]

3.15. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ελλείψεων C_1: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και C_2: $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1$, είναι κορυφές τετραγώνου.

3.16. **α)** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(\sqrt{3}$ συνφ, 2ημ$\varphi)$, $\varphi\in\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής της γραμμής του **α)** με την έλλειψη C: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ ανήκουν σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων.

3.17. Δίνονται δύο κωνικές τομές: η παραβολή $y^2=2px$, και η έλλειψη $4x^2+2y^2=3p^2$, $p>0$.

Α. Να αποδείξετε ότι οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E(0,\frac{\sqrt{3}\cdot p}{2})$ και $E'(0,-\frac{\sqrt{3}\cdot p}{2})$.

Β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των δύο κωνικών τομών είναι τα σημεία $K(\frac{p}{2}, p)$ και $\Lambda(\frac{p}{2}, -p)$.

Γ. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο $K(\frac{p}{2}, p)$ είναι κάθετες.

3.18. Δίνονται τα σημεία $K(-\frac{6}{\sqrt{5}}, 0)$ και $\Lambda(\frac{6}{\sqrt{5}}, 0)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία M του επιπέδου, για τα οποία ισχύει $(MK) + (M\Lambda) = 6$.

β) Να επαληθεύσετε ότι το σημείο $\Sigma(-2,1)$ ανήκει στην προηγούμενη καμπύλη και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της στο Σ.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διχοτομεί τη γωνία $K\widehat{\Sigma}\Lambda$.

[Απ. α) $x^2+5y^2=9$ β) $2x-5y+9=0$ γ) $5x+2y+8=0$]

3.19. Δίνεται η εξίσωση $\frac{x^2}{\lambda-1} + \frac{y^2}{5-\lambda} = 1$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση παριστάνει:

α) Έλλειψη

β) Έλλειψη με εστίες στον άξονα $x'x$

γ) Έλλειψη με εστίες στον άξονα $y'y$

δ) Κύκλο

[Απ. α) $\lambda\in(1,3)\cup(3,5)$ β) $\lambda\in(3,5)$ γ) $\lambda\in(1,3)$ δ) $\lambda=3$]

3.20. Θεωρούμε τους κύκλους με εξισώσεις

$C_1 : (x + 1)^2 + y^2 = 9$ και $C_2 : (x - 1)^2 + y^2 = 1$.

i) Να αποδείξετε ότι οι C_1, C_2 εφάπτονται εσωτερικά.

ii) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων οι οποίοι εφάπτονται εσωτερικά στον C_1 και εξωτερικά στον C_2.

[Απ. ii) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$]

3.21. Δίνονται οι ευθείες ε_1: $x = -2$ και ε_2: $x = 2$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου, για τα οποία ισχύει:

$d(M,\varepsilon_1)\cdot d(M,\varepsilon_2) = d^2(M,O)$, όπου O η αρχή των αξόνων.

[Απ. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$]

3.22. Από το σημείο $P(-4,5)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες PA, PB στην έλλειψη C: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB και να υπολογίσετε την απόσταση του P απ' αυτήν.

[Απ. $\frac{46}{\sqrt{61}}$]

3.23. Δίνεται η έλλειψη $C : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ και το σημείο $M(1,1)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και τέμνει την έλλειψη σε δύο σημεία Γ και Δ έτσι ώστε το M να είναι το μέσο του $\Gamma\Delta$.

[Απ. $3x+4y=7$]

*   *   *   *   *

Β΄ Ομάδα

5.2. Δίνεται η έλλειψη $C: \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta > 0$ και η ευθεία ε: $x = \dfrac{\alpha^2}{\gamma}$.

α) Δείξτε ότι η ε δεν έχει κοινά σημεία με την C.

β) Ευθεία ε_1 με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από την εστία $E(\gamma,0)$ της έλλειψης και τέμνει την ε στο σημείο M. Η $B(0,\beta)$ είναι μια κορυφή της C. Να βρείτε το λ όταν:

i) Ο κύκλος με διάμετρο το BM διέρχεται από το E.

ii) Ο κύκλος με διάμετρο το EM διέρχεται από το B.

iii) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα λ των παραπάνω **(i), (ii)** ερωτημάτων.

γ) Αν η ευθεία ε_1 του **(β)** τέμνει την ε, στην περίπτωση **(i)** στο M_1 και στην περίπτωση **(ii)** στο M_2, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου EM_1M_2.

[Απ. β)i) $\dfrac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta}$ ii) $\dfrac{(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta^3}$ iii) $\lambda_2-\lambda_1=\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}\lambda_1$ γ) $\dfrac{\alpha^2\beta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{2(\alpha^2-\beta^2)}$]

3.24. Θεωρούμε την έλλειψη C: $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta > 0$ και ένα σημείο της P, διαφορετικό των κορυφών B και B'. Οι ευθείες PB και PB' τέμνουν τον άξονα $x'x$ στα σημεία M και N αντιστοίχως. Να δείξετε ότι, όταν το P διαγράφει τη C (εκτός των κορυφών B και B'), το γινόμενο $(OM)\cdot(ON)$ είναι σταθερό.

3.25. Δίνεται η έλλειψη C: $x^2 + \dfrac{y^2}{2} = 1$ και η ευθεία ε: $y = \lambda x + 1$.

α) Δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η ε τέμνει την C σε δύο σημεία.

β) Αν K , Λ τα κοινά σημεία της ε με την C, να βρείτε την εξίσωση της ε, όταν $K\hat{O}\Lambda = 90^0$.

[Απ. β) $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+1$, $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+1$]

3.26. Δίνεται η έλλειψη C: $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta > 0$. Από την εστία E φέρνουμε κάθετη στον άξονα $x'x$ που τέμνει την έλλειψη στα σημεία M, M'. Να δείξετε ότι $(MM') = \dfrac{2\beta^2}{\alpha}$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

3.27. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* ή *Λάθος* κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ι. Δύο από τις κορυφές και οι εστίες οποιασδήποτε έλλειψης βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

ΙΙ. Η εξίσωση $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ παριστάνει έλλειψη μόνο όταν $\alpha > \beta$.

III. Η εστιακή απόσταση μιας έλλειψης είναι το μισό του μεγάλου άξονα. Η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι $\frac{1}{2}$.

IV. Η εξίσωση $\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{3}{2}$ παριστάνει έλλειψη.

V. Αν το σημείο $(\kappa, -\lambda)$ ανήκει σε μια έλλειψη, τότε θα ανήκει σ' αυτήν και το σημείο $(-\kappa, -\lambda)$.

VI. Η εξίσωση $x^2 + \kappa y^2 = 1$ παριστάνει πάντα έλλειψη.

VII. Η έλλειψη $x^2 + 2y^2 = 1$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ δεν έχουν κοινό σημείο.

VIII. Δύο ελλείψεις είναι όμοιες όταν έχουν τις ίδιες εστίες.

3.28. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Αν E' και E οι εστίες μιας έλλειψης με μεγάλο άξονα μήκους 2α και A τυχόν σημείο της έλλειψης, τότε:

A. $(AE') - (AE) = \alpha$ **B.** $(AE') + (AE) = \alpha$ **Γ.** $(AE') = (AE)$
Δ. $(AE') + (AE) = 2\alpha$ **E.** $(AE') - (AE) = 2\alpha$

II. Η απόσταση του κέντρου της έλλειψης $\frac{25x^2}{9} + 4y^2 = 1$ από τη μία εστία της είναι:

A. $\frac{7}{6}$ **B.** $\frac{\sqrt{11}}{10}$ **Γ.** $\frac{\sqrt{11}}{5}$ **Δ.** $\frac{5}{2}$ **E.** $\frac{4}{3}$

III. Έστω η έλλειψη C: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με εστιακή απόσταση 2γ και μεγάλο άξονα 2α. Τότε θα είναι πάντα

A. $\alpha > \beta > \gamma$ **B.** $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$ **Γ.** $0 < \alpha < \beta$ **Δ.** $\gamma > \alpha$ **E.** $\gamma < \alpha$

IV. Οι ελλείψεις C_1: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και C_2: $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ έχουν:

A. δύο μόνο κοινά σημεία **B.** τέσσερα κοινά σημεία
Γ. ένα μόνο κοινό σημείο **Δ.** κανένα κοινό σημείο
E. άπειρα κοινά σημεία

V. Η εξίσωση $\beta^2x^2 + \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$, $\alpha, \beta \neq 0$

A. παριστάνει πάντα μία έλλειψη **B.** παριστάνει πάντα έναν κύκλο
Γ. παριστάνει δύο τεμνόμενες ευθείες **Δ.** παριστάνει μία έλλειψη, αν $\alpha \neq \beta$
E. παριστάνει μία έλλειψη, αν $\alpha = \beta$

3.29. Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα:

Εξίσωση έλλειψης	Συντεταγμένες εστιών	Συντεταγμένες κορυφών	Εκκεντρότητα
$4x^2 + 9y^2 = 36$			
$x^2 + 4y^2 = 16$			
$2x^2 + y^2 = 1$			

ΕΝΟΤΗΤΑ 4.

Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ

4.1. ΟΡΙΣΜΟΣ:

Έστω E' και E δύο σημεία ενός επιπέδου. Ονομάζεται *υπερβολή* με εστίες τα σημεία E' και E ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερή και μικρότερη του $(E'E)$.
Την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων κάθε σημείου της υπερβολής από τις εστίες την συμβολίζουμε με 2α και την απόσταση των εστιών E' και E με 2γ. Η απόσταση $E'E$ ονομάζεται *εστιακή απόσταση* της υπερβολής.

4.2. ΠΡΟΤΑΣΗ:

Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$ και $E(\gamma,0)$ είναι:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1\ ,\ \text{όπου}\ \beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}\ .$$

Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες τα σημεία $E'(0,-\gamma)$ και $E(0,\gamma)$ είναι:

$$\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1\ ,\ \text{όπου}\ \beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}\ .$$

4.3. ΠΡΟΤΑΣΗ:

Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής C: $\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$,

στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ *είναι:* $\dfrac{x\cdot x_1}{\alpha^2}-\dfrac{y\cdot y_1}{\beta^2}=1.$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής C: $\dfrac{y^2}{\alpha^2}-\dfrac{x^2}{\beta^2}=1$,

στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ *είναι:* $\dfrac{y\cdot y_1}{\alpha^2}-\dfrac{x\cdot x_1}{\beta^2}=1.$

Ιδιότητες Υπερβολής

Έστω μια υπερβολή C: $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$.

Συμμετρία της έλλειψης

- Αν $M_1(x_1, y_1)$ είναι ένα σημείο της υπερβολής C, τότε τα σημεία $M_2(x_1, -y_1)$, $M_3(-x_1, y_1)$ και $M_4(-x_1, -y_1)$ ανήκουν στην C, αφού οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της.
  Άρα οι άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι άξονες συμμετρίας της υπερβολής και η αρχή των αξόνων κέντρο συμμετρίας της.

- Τα σημεία που η υπερβολή τέμνει τους άξονες λέγονται *κορυφές* της υπερβολής.
  Για $y = 0$ έχουμε $\dfrac{x^2}{\alpha^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow x = \pm\,\alpha$, ενώ για $x = 0$ έχουμε $-\dfrac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = -\beta^2$, η οποία είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$. Επομένως η υπερβολή δεν τέμνει τον άξονα $y'y$.

  Κορυφές

  Άρα, οι κορυφές της υπερβολής έχουν συντεταγμένες: $A(\alpha,0)$, $A'(-\alpha,0)$.

  Άξονες

  Τα ευθύγραμμα τμήματα $A'A$ και $B'B$ που έχουν μήκη $(A'A) = 2\alpha$ και $(B'B) = 2\beta$ λέγονται και *μεγάλος άξονας* και *μικρός άξονας* αντίστοιχα.

  Διάμετρος

  Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο οποιαδήποτε συμμετρικά ως προς το Ο σημεία M και N της υπερβολής λέγεται *διάμετρος* της υπερβολής.
  Ισχύει ότι $2\beta \le (MN) \le 2\alpha$, δηλαδή κάθε διάμετρος της έλλειψης είναι μεγαλύτερη ή ίση από το μικρό άξονα και μικρότερη ή ίση από το μεγάλο άξονα της έλλειψης.

- Έχουμε $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\alpha^2} = 1 + \dfrac{y^2}{\beta^2} \ge 1$.
  Επομένως $\dfrac{x^2}{\alpha^2} \ge 1 \Leftrightarrow x^2 \ge \alpha^2 \Leftrightarrow x^2 - \alpha^2 \ge 0 \Leftrightarrow$
  $x \le -\alpha$ ή $x \ge \alpha$.
  Άρα, τα σημεία της υπερβολής C βρίσκονται έξω από την ταινία που ορίζουν οι ευθείες $x = -\alpha$, $x = \alpha$, πράγμα που σημαίνει ότι η υπερβολή αποτελείται από δύο χωριστούς κλάδους.

Ασύμπτωτες Υπερβολής

Ασύμπτωτες της υπερβολής

- Έστω μια υπερβολή C: $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$.
  Οι ευθείες με εξισώσεις ε_1: $y = \dfrac{\beta}{\alpha}x$ και ε_2: $y = -\dfrac{\beta}{\alpha}x$ λέγονται *ασύμπτωτες* της υπερβολής.
  Αν η υπερβολή C, έχει εξίσωση $\dfrac{y^2}{\alpha^2} - \dfrac{x^2}{\beta^2} = 1$, τότε οι ασύμπτωτες

της είναι οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \frac{\alpha}{\beta}x$ και $\varepsilon_2: y = -\frac{\alpha}{\beta}x$

Ορθογώνιο βάσης

- Το ορθογώνιο $K\Lambda MN$ με κορυφές τα σημεία $K(\alpha,\beta)$, $\Lambda(\alpha,-\beta)$, $M(-\alpha,-\beta)$ και $N(-\alpha,\beta)$ λέγεται *ορθογώνιο βάσης* της υπερβολής. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι διαγώνιες του ορθογώνιου βάσης.

Εκκεντρότητα Υπερβολής

Εκκεντρότητα της έλλειψης

- Έστω μια υπερβολή $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.
  Ονομάζουμε *εκκεντρότητα* της υπερβολής C και τη συμβολίζουμε με ε, το λόγο $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} > 1$.

- Επειδή $\gamma = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, είναι $\varepsilon = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha} \Leftrightarrow \varepsilon^2 = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow$
  $\varepsilon^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow \varepsilon^2 = 1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \varepsilon^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.
  Επομένως η εκκεντρότητα προσδιορίζει το συντελεστή διεύθυνσης της ασυμπτώτου της, δηλαδή χαρακτηρίζει το ορθογώνιο βάσης, άρα τη μορφή της ίδιας της υπερβολής.
  Όσο η εκκεντρότητα ε μικραίνει και τείνει να γίνει ίση με 1, ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$, άρα και το β, μικραίνει και τείνει να γίνει ίσο με 0. Τότε το ορθογώνιο βάσης γίνεται πιο επίμηκες και η υπερβολή γίνεται πιο κλειστή.

Ισοσκελής υπερβολή

- Όταν η υπερβολή είναι ισοσκελής τότε $\alpha = \beta$ και
  $\gamma = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{\alpha^2+\alpha^2} = \sqrt{2\alpha^2} = \alpha\sqrt{2}$.
  Επομένως $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{\alpha} = \sqrt{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

4.4. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει:

α) Εστίες τις $E(5,0)$, $E'(-5,0)$ και άξονα μήκους 8.

β) Εστίες τις $E(0,13)$, $E'(0,-13)$ και η εκκεντρότητα ισούται με $\frac{13}{12}$.

γ) Εστίες τις $E(0,5)$, $E'(0,-5)$ και διέρχεται από το σημείο $M(3,4\sqrt{2})$.

[Απ. α) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ β) $\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1$ γ) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$]

4.5. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ η οποία:

α) Διέρχεται από τα σημεία $M(\sqrt{2}\,,1)$ και $N(-2,\sqrt{3}\,)$

β) Έχει ασύμπτωτες τις ευθείες με εξισώσεις $y = \frac{3}{2}x$, $y = -\frac{3}{2}x$ και διέρχεται από το σημείο $(2\sqrt{3}\,,3)$.

4.6. Να βρεθεί η εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής, που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $9x^2 + 25y^2 = 225$.

[Απ. $x^2-y^2=8$]

4.7. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζουν οι ασύμπτωτες της υπερβολής C: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ και η ευθεία ε: $4x + 6y - 12 = 0$.

[Απ. 4]

4.8. Δίνεται η υπερβολή C: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Να βρείτε την εκκεντρότητα της υπερβολής αν οι ασύμπτωτες της C σχηματίζουν γωνία 60^0.

4.9. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής, της οποίας η εστιακή απόσταση είναι διπλάσια της απόστασης των κορυφών και οι εστίες της συμπίπτουν με τις εστίες της έλλειψης C: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

[Απ. $3x^2-y^2=12$]

4.10. Δείξτε ότι οι τομές της έλλειψης C_1: $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ και της υπερβολής C_2: $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$ είναι κορυφές ορθογωνίου. Βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του.

4.11. Δείξτε ότι η έλλειψη C_1: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και η υπερβολή C_2: $\frac{x^2}{\alpha^2-\lambda^2} - \frac{y^2}{\lambda^2-\beta^2} = 1$ όπου $0 < \beta < \lambda < \alpha$ έχουν τις ίδιες εστίες.

4.12. Θεωρούμε την έλλειψη C_1: $x^2 + 4y^2 = 4$ και την υπερβολή C_2: $x^2 - 2y^2 = 2$.

α) Δείξτε ότι οι C_1 , C_2 έχουν τις ίδιες εστίες.

β) Βρείτε τα σημεία τομής τους.

4.13. Να αποδείξετε ότι η απόσταση κάθε εστίας της υπερβολής C: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ από τις ασύμπτωτές της είναι ίση με β.

4.14. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $9x^2 - 16y^2 = 144$, με εστίες E' και E και σημείο $A(\lambda, \mu)$ πάνω στην υπερβολή.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, που περνά από τα σημεία A και E' και της ευθείας που περνά από τα σημεία A και E.

β) Να προσδιοριστούν τα σημεία A για τα οποία οι παραπάνω ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους.

4.15. Θεωρούμε την ισοσκελή υπερβολή C: $x^2 - y^2 = \alpha^2$ και την ευθεία ε: $y = \kappa$ η οποία τέμνει την C στα σημεία B και B'. Αν A και A' είναι οι κορυφές της υπερβολής, δείξτε ότι

$$B\hat{A}B' = B\hat{A}'B' = 90^0$$

4.16. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής, C: $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{5} = 1$, που είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $4x + 3y - 7 = 0$.

[Απ. 3x-4y+10=0 , 3x-4y-10=0]

4.17. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της υπερβολής, C: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$, που φέρονται από το σημείο $M(3,4)$.

[Απ. x-3=0 , 5x-6y+9=0]

4.18. Έστω η ισοσκελής υπερβολή C: $x^2 - y^2 = \alpha^2$ και A, A' οι κορυφές της. Αν Μ είναι ένα σημείο της C και M' το συμμετρικό του ως προς τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, M' και M είναι ορθόκεντρα των τριγώνων $MA'M'$, AMA' και $AM'A'$ αντίστοιχα.

4.19. Δίνεται η έλλειψη $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής, η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την παραπάνω έλλειψη και εφάπτεται στην ευθεία με εξίσωση $x - y + 1 = 0$.

4.20. Από το $P(1, -10)$ φέρνουμε εφαπτόμενες στην υπερβολή C: $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{32} = 1$. Να βρεθεί η αξίωση της ευθείς (ε) που ορίζεται από τα σημεία επαφής και η απόσταση του P από την (ε).

[Απ. 2x+5y=16, $\frac{64}{\sqrt{29}}$]

4.21. Από το σημείο $P(-2,-6)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες PA, PB στην υπερβολή C: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$. Να βρεθούν:

i) Η εξίσωση της ευθείας AB.

ii) Η απόσταση του P από την ευθεία AB.

iii) Η γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες PA και PB.

[Απ. i)3x-4y+6=0 ii)24/5 iii)σφφ=15/8]

4.22. Δίνεται η εξίσωση $\dfrac{x^2}{25-\lambda} + \dfrac{y^2}{16-\lambda} = 1$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση αυτή παριστάνει έλλειψη αν $\lambda < 16$, υπερβολή αν $16 < \lambda < 25$ ενώ είναι αδύνατη αν $\lambda > 25$.

β) Για όλες τις τιμές του λ οι κωνικές τομές που παριστάνει η εξίσωση έχουν κοινές εστίες.

* * * * *

Β΄ Ομάδα

4.23. Τα σταθερά σημεία E', E είναι σημεία του $x'x$ συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων με $(E'E) = 2\sqrt{5}$. Θεωρούμε τα σημεία M του επιπέδου που ικανοποιούν τις σχέσεις $\sqrt{\left[(ME')-(ME)\right]^2} = 4$ και $\left|\overrightarrow{ME'}^2 - \overrightarrow{ME}^2\right| = 24$.

α) Δείξτε ότι τα σημεία M του επιπέδου ανήκουν σε δύο κωνικές τομές των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

β) Αν $M(x_0, y_0)$ δείξτε ότι $x_0^2 = 9\,y_0^2$.

[Απ. α) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$]

4.24. Ένα ευθύγραμμο τμήμα AB είναι διάμετρος μιας υπερβολής αν και μόνο αν οι εφαπτόμενες στα A, B είναι παράλληλες.

4.25. Έστω M ένα σημείο της ισοσκελούς υπερβολής C: $x^2 - y^2 = \alpha^2$ $(\alpha > 0)$. Να δείξετε ότι $(OM)^2 = (ME)\cdot(ME')$, όπου E' και E οι εστίες της C και O το κέντρο της.

4.26. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)\right)$ κινούνται σε μια υπερβολή, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

[Απ. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$]

4.27. Θεωρούμε την υπερβολή C: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και την εφαπτόμενή της ε στο σημείο της P. Αν A, B είναι τα σημεία τομής της ε με τις ασύμπτωτες της υπερβολής, τότε:

α) Το P είναι το μέσο του AB.

β) Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι σταθερό, όταν το P κινείται στη C.

4.28. Θεωρούμε την υπερβολή C: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και τα σημεία M, N τα οποία είναι συνευθειακά με την αρχή των αξόνων O. Από τα σημεία M, N φέρνουμε τις παράλληλες προς τις ασύμπτωτες της C, οι οποίες τέμνονται στο σημείο P. Δείξτε ότι το P ανήκει στην υπερβολή C': $\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1$

4.29. Δίνονται οι ευθείες ε_1: $y = \kappa x$, ε_2: $y = -\kappa x$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου των οποίων το γινόμενο των αποστάσεων από τις ε_1 , ε_2 ισούται με $\frac{\kappa^2\lambda^2}{1+\kappa^2}$, όπου κ, λ σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

[Απ. $\frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{y^2}{(\kappa\lambda)^2} = 1$, $\frac{y^2}{(\kappa\lambda)^2} - \frac{y^2}{(\kappa\lambda)^2} = 1$]

4.30. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το σημείο $A(2,0)$ και εφάπτονται εξωτερικά του κύκλου C: $x^2 + y^2 + 4x = 0$.

[Απ. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, $x \geq 1$]

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

4.31. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* ή *Λάθος* κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Η εξίσωση μιας υπερβολής είναι $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Ισχύει πάντα $\alpha > \beta$.

II. Η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα $y'y$ σε δύο σημεία.

III. Η ισοσκελής υπερβολή $x^2 - y^2 = \alpha^2$ έχει εκκεντρότητα $\sqrt{2}$.

IV. Η εξίσωση $x^2 - 9y = 0$ παριστάνει υπερβολή.

V. Το ορθογώνιο βάσης μιας υπερβολής έχει κοινά σημεία με την υπερβολή.

VI. Το σημείο $(5,4)$ ανήκει σε μία ασύμπτωτη ευθεία της υπερβολής $16x^2 - 25y^2 = 40$.

VII. Υπάρχουν υπερβολές που οι ασύμπτωτές τους είναι κάθετες μεταξύ τους.

VIII. Η υπερβολή $\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $\varepsilon_1\!: y = \frac{\alpha}{\beta}x$ και $\varepsilon_2\!: y = -\frac{\alpha}{\beta}x$

IX. Η υπερβολή $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στα σημεία $(0,2)$ και $(0, -2)$.

X. Η εξίσωση $\kappa x^2 + \lambda y^2 = 1$ παριστάνει υπερβολή για κάποια $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

XI. Η υπερβολή $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$ έχει τέσσερα κοινά σημεία με τον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$.

XII. Η διχοτόμος της $x\hat{O}y$ τέμνει την υπερβολή $x^2 - y^2 = 4$ σε δύο σημεία.

XIII. Κάθε ασύμπτωτη της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι κάθετη σε μία από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$

XIV. Υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $(\text{ημ}\theta, 1)$ να ανήκει στην υπερβολή $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$.

XV. Οι υπερβολές $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ και $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ έχουν τις ίδιες εστίες.

4.32. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Μία υπερβολή έχει εξίσωση $C\!: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Τότε

A. η C έχει τις εστίες της στον άξονα $y'y$.

B. έχει ασύμπτωτες τις $y = \pm\frac{4}{3}x$.

Γ. έχει εστίες $E'(-5,0)$, $E(5,0)$.

Δ. είναι $\alpha = 3$ και $\beta = 5$.

E. έχει κορυφές $A'(-3,0)$, $A(3,0)$.

II. Μία ασύμπτωτη της υπερβολής $16x^2 - 25y^2 = 400$ είναι

Α. $y = \frac{5}{4}x$ **Β.** $y = \frac{4}{5}x$ **Γ.** $y = \frac{16}{25}x$ **Δ.** $y = \frac{25}{16}x$

Ε. Καμία από τις προηγούμενες

III. Οι υπερβολές C_1: $\beta^2x^2 - \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$, C_2: $\alpha^2y^2 - \beta^2x^2 = \alpha^2\beta^2$ $\alpha \neq \beta$ έχουν

Α. την ίδια εκκεντρότητα

Β. τις ίδιες εστίες

Γ. την ίδια εστιακή απόσταση

Δ. διαφορετικές ασύμπτωτες

Ε. τις ίδιες κορυφές

IV. Η υπερβολή C_1: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και η έλλειψη C_2: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχουν

Α. την ίδια εστιακή απόσταση.

Β. τις ίδιες εστίες.

Γ. την ίδια εκκεντρότητα.

Δ. δύο από τις κορυφές της C_2 ταυτίζονται με τις κορυφές της C_1.

Ε. τέσσερα κοινά σημεία.

V. Η εξίσωση $\kappa x^2 + \lambda y^2 = \mu$ με $\kappa, \lambda, \mu \neq 0$ παριστάνει πάντα υπερβολή με

Α. $\mu = 1$ **Β.** $\kappa\lambda < 0$ **Γ.** $\mu < 0$ **Δ.** $\kappa \neq \lambda$ **Ε.** $\kappa = \mu$ ή $\lambda = \mu$

VI. Οι υπερβολές C_1: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και C_2: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = -1$ $(\alpha \neq \beta)$ έχουν

Α. την ίδια εκκεντρότητα.

Β. τις ίδιες ασύμπτωτες.

Γ. τις ίδιες εστίες.

Δ. τις ίδιες κορυφές.

Ε. μία μόνο κοινή εστία.

VII. Τα σημεία $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $|(AM) - (BM)| = 6$ με $A(-5,0)$ και $B(5,0)$

Α. ανήκουν στην έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Β. ανήκουν στην υπερβολή $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$.

Γ. ανήκουν στην υπερβολή $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Δ. ανήκουν στην υπερβολή $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Ε. . ανήκουν στην υπερβολή $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

4.33. Σε κάθε υπερβολή της Στήλης Α να αντιστοιχίσετε την εξίσωση μιας ασύμπτωτής της στη Στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $x^2 - y^2 = \alpha^2$ **2.** $2x^2 - y^2 = 4$	**Α.** $\sqrt{2}\,x - y = 0$ **Β.** $3x - 4y = 0$ **Γ.** $y = x$

3. $(x-2y)(x+2y)=4$ **4.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$	**Δ.** $4x-3y=0$ **Ε.** $2x-y=0$ **ΣΤ.** $x+2y=$

4.34. Κάθε κωνική της Στήλης Α έχει εξίσωση που βρίσκεται στη Στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. κύκλος **2.** παραβολή **3.** έλλειψη **4.** υπερβολή	**Α.** $x+y=1$ **Β.** $x^2+y^2=0$ **Γ.** $x^2=9-(x-1)^2$ **Δ.** $9x^2=63+7y^2$ **Ε.** $y^2-16x=0$ **ΣΤ.** $4x^2=100-25y^2$

4.35. Να γράψετε τα σημεία $A(0,3)$, $B(2,0)$, $\Gamma(2,2)$, $\Delta(0,0)$ και $E(2,-2)$ σε μία σειρά, έτσι ώστε καθένα να έχει από το προηγούμενό του μεγαλύτερη απόσταση από την ασύμπτωτη της υπερβολής $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$, που βρίσκεται στην πρώτη και τρίτη γωνία των αξόνων.

4.36. Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα:

Εξίσωση υπερβολής	Συντεταγμένες εστιών	Εξισώσεις ασυμπτώτων	Εκκεντρότητα
$x^2-9y^2=9$			
$x^2-y^2-4=0$			
$3x^2-4y^2=3$			

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.

ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

- Η Μαθηματική Επαγωγή
- Ευκλείδεια διαίρεση
- Διαιρετότητα

Η θεωρία αριθμών είναι η περιοχή των Μαθηματικών που εξετάζει προτάσεις οι οποίες αναφέρονται στο σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$, ή σε υποσύνολα αυτού όπως το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$.

Το ξεκίνημα της ενότητας αυτής είναι αφιερωμένο στην αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής. Η αρχή αυτή είναι μία ισχυρή μέθοδος απόδειξης της αλήθειας μιας πρότασης που αναφέρεται στους φυσικούς αριθμούς. Η αρχή αυτή συνίσταται σε δύο απαραίτητες προϋποθέσεις: Η πρώτη απαιτεί την αλήθεια αυτής για το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου αναφοράς της πρότασης, ενώ η δεύτερη δέχεται την ισχύ της για ένα οποιοδήποτε στοιχείο n και απαιτεί την αλήθεια για το επόμενο στοιχείο $n+1$. Η αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής χρησιμεύει όχι μόνο σαν μέθοδος απόδειξης ισχυρισμών για όλους τους φυσικούς αριθμούς αλλά και σαν μέθοδος ορισμού εννοιών για τους φυσικούς αριθμούς.

Η επόμενη ενότητα παρουσιάζει το θεώρημα της Ευκλείδειας διαίρεσης. Είναι μία πρόταση την οποία εφαρμόζουμε από τα χρόνια της στοιχειώδους εκπαίδευσης αλλά με μεγάλο βάθος και προεκτάσεις στη θεωρία αριθμών. Τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης ενός ακέραιου αριθμού με έναν μη μηδενικό φυσικό ορίζουν ένα κριτήριο “διαχωρισμού” των ακεραίων σε υποσύνολα, για κάθε ένα από τα οποία μπορούμε να εξετάσουμε την ισχύ προτάσεων και έτσι να εξασφαλίσουμε την αλήθειά τους σε όλο το σύνολο των ακεραίων.

Η διαίρεση δύο ακεραίων με υπόλοιπο 0, η τέλεια διαίρεση, έχει κάποιες αξιοσημείωτες ιδιότητες γι’ αυτό αξίζει να μελετηθεί ιδιαίτερα. Αυτές τις ιδιότητες διαπραγματεύεται η τρίτη ενότητα, στην οποία παρατίθενται και αποδεικνύονται οι ιδιότητες της διαιρετότητας.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Τα Μαθηματικά είναι η βασίλισσα των επιστημών και η θεωρία των Αριθμών η βασίλισσα των Μαθηματικών.
– FRIEDERICH GAUSS (1777 – 1855)

Αρχή τής Μαθηματικής Επαγωγής:

1.1. ΑΡΧΗ:

Έστω $P(\nu)$ ένας ισχυρισμός που αναφέρεται στους θετικούς ακεραίους. Αν
(i) ο ισχυρισμός είναι αληθής για τον ακέραιο 1, δηλαδή ο $P(1)$ είναι αληθής, και
(ii) η αλήθεια του $P(\nu)$ συνεπάγεται την αλήθεια του $P(\nu+1)$ για κάθε ν τότε ο ισχυρισμός $P(\nu)$ αληθεύει για όλους τους θετικούς ακεραίους ν.

1.1.1. **ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Η αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής εφαρμόζεται και σε περιπτώσεις στις οποίες ο ισχυρισμός $P(\nu)$ ισχύει για κάθε ν μεγαλύτερο ή ίσο από κάποιο ορισμένο φυσικό αριθμό.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.2. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει

$$1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + \ldots + \nu(\nu+2) = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+7)}{6}.$$

Λύση:

Έστω $P(\nu)$ η ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.

- Για $\nu = 1$ η ισότητα γίνεται $1\cdot(1+2) = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+7)}{6} \Leftrightarrow 3 = \frac{2\cdot 9}{6} \Leftrightarrow 3 = 3$, δηλαδή η $P(1)$ είναι αληθής.
- Θα αποδείξουμε ότι αν $P(\nu)$ αληθής, τότε και $P(\nu+1)$ αληθής, δηλαδή ότι:
  αν $1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + \ldots + \nu(\nu + 2) = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+7)}{6}$ τότε

$$1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + \ldots + \nu(\nu+2) + (\nu+1)(\nu+3) = \frac{(\nu+1)(\nu+2)(2\nu+9)}{6}$$

Έχουμε: $1{\cdot}3 + 2{\cdot}4 + 3{\cdot}5 + \ldots + \nu(\nu+2) + (\nu+1)(\nu+3) = \dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+7)}{6} + (\nu+1)(\nu+3)$

$$= \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+7)+6(\nu+1)(2\nu+3)}{6} = \frac{(\nu+1)[\nu(2\nu+7)+6(2\nu+3)]}{6}$$

$$= \frac{(\nu+1)(2\nu^2+7\nu+12\nu+18)}{6} = \frac{(\nu+1)(\nu+2)(2\nu+9)}{6}.$$

Άρα, η ισότητα αληθεύει για όλους τους θετικούς ακεραίους ν

1.3. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $\nu \geq 2$ ισχύει $3^\nu > 3\nu+2$.

Λύση:

Έστω $P(\nu)$ η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.

- Για $\nu = 2$ η ανισότητα γίνεται $3^2 > 3{\cdot}2 + 2 \Leftrightarrow 9 > 8$, δηλαδή η $P(2)$ είναι αληθής.
- Θα αποδείξουμε ότι αν $P(\nu)$ αληθής, τότε και $P(\nu + 1)$ αληθής, δηλαδή ότι:
  αν $3^\nu > 3\nu + 2$ τότε $3^{\nu+1} > 3(\nu + 1) + 2$.

Έχουμε: $3^{\nu+1} = 3{\cdot}3^\nu > 3(3\nu + 2) = 9\nu + 6 = 3(\nu + 1) + 2 + (6\nu + 1) > 3(\nu + 1) + 2$, αφού $6\nu + 1 > 0$.

Άρα, η ανισότητα αληθεύει για όλους τους θετικούς ακεραίους ν με $\nu \geq 2$.

1.4. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $\nu>3$ ισχύει $2^\nu \geq \nu^2$.

Λύση:

Έστω $P(\nu)$ η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.

- Για $\nu = 4$ η ανισότητα γίνεται $2^4 \geq 4^2 \Leftrightarrow 16 \geq 16$, δηλαδή η $P(4)$ είναι αληθής.
- Θα αποδείξουμε ότι αν $P(\nu)$ αληθής, τότε και $P(\nu+1)$ αληθής, δηλαδή ότι:
  αν $2^\nu \geq \nu^2$ τότε $2^{\nu+1} \geq (\nu + 1)^2$.

Έχουμε: $2^\nu \geq \nu^2 \Leftrightarrow$

$2{\cdot}2^\nu \geq 2\nu^2 \Leftrightarrow$

$2^{\nu+1} \geq 2\nu^2$

Αρκεί να δείξουμε ότι $2\nu^2 \geq (\nu + 1)^2 \Leftrightarrow 2\nu^2 \geq \nu^2 + 2\nu + 1 \Leftrightarrow \nu^2 - 2\nu - 1 \geq 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}(-1) = 4 + 4 = 8$

$$\nu_{1,2} = \frac{-(-2)\pm\sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4}\sqrt{2}}{2} = \frac{2\pm2\sqrt{2}}{2} = \frac{2\cdot(1\pm\sqrt{2})}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

ν	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	0	$1+\sqrt{2}$	4	$+\infty$
$\nu^2-2\nu-1$	+	0	–	0	+	

Επομένως $\nu^2 - 2\nu - 1 \geq 0$ για κάθε ακέραιο $\nu \geq 4$.

Άρα, η ανισότητα αληθεύει για όλους τους θετικούς ακεραίους ν με $\nu > 3$.

Η τελευταία ανισότητα μπορεί να αποδειχθεί και όπως παρακάτω

$\nu^2 - 2\nu - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \nu^2 - 2\nu + 1 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (\nu - 1)^2 \geq 2$ που ισχύει για κάθε ακέραιο $\nu > 3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

1.5. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο v ισχύει:

i) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2v - 1) = v^2$ **ii)** $2 + 4 + 6 + \ldots + 2v = v(v + 1)$

1.6. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο v ισχύει:

i) $3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^v = \dfrac{3\cdot(3^v - 1)}{2}$

1.7. Δείξτε ότι για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$ ισχύει:

α) $2\cdot2^0 + 3\cdot2^1 + 4\cdot2^2 + \ldots + (v + 1)\cdot2^{v-1} = v \cdot 2^v$.

β) $2^2 + 4^2 + 8^2 + \ldots + (2v)^2 = \dfrac{2v(v+1)(2v+1)}{3}$

γ) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2v-1)^2 = \dfrac{v(2v-1)(2v+1)}{3}$

1.8. Δείξτε ότι για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$ ισχύει:

α) $1\cdot2^2 + 2\cdot3^2 + 3\cdot4^2 + \ldots + (v - 1)\cdot v^2 = \dfrac{v(v^2-1)(3v+2)}{12}$

1.9. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο v ισχύει:

i) $1\cdot2\cdot3 + 3\cdot4\cdot5 + \ldots + (2v - 1)\cdot2v\cdot(2v + 1) = v(v+1)(2v^2+2v-1)$

ii) $1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + \ldots + v\,(v + 1)(v + 2) = \dfrac{v(v+1)(v+2)(v+3)}{4}$

1.10. Δείξτε ότι για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$ ισχύει:

α) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \ldots + \dfrac{v}{2^v} = 2 - \dfrac{v+2}{2^v}$

β) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \ldots + \dfrac{2v-1}{2^v} = 3 - \dfrac{2v+3}{2^v}$

γ) $\dfrac{1}{2\cdot3} + \dfrac{1}{3\cdot4} + \dfrac{1}{4\cdot5} + \ldots + \dfrac{1}{(v+1)(v+2)} = \dfrac{v}{2(v+2)}$

δ) $\dfrac{1}{1\cdot4} + \dfrac{1}{4\cdot7} + \dfrac{1}{7\cdot10} + \ldots + \dfrac{1}{(3v-2)(3v+1)} = \dfrac{v}{3v+1}$

ε) $\dfrac{1}{1\cdot10} + \dfrac{1}{10\cdot19} + \dfrac{1}{19\cdot28} + \ldots + \dfrac{1}{(9v-8)(9v+1)} = \dfrac{v}{9v+1}$

στ) $\dfrac{1}{5\cdot11} + \dfrac{1}{11\cdot17} + \dfrac{1}{17\cdot23} + \ldots + \dfrac{1}{(6v-1)(6v+5)} = \dfrac{v}{5(6v+5)}$

ζ) $\dfrac{1}{1\cdot3} + \dfrac{1}{3\cdot5} + \dfrac{1}{5\cdot7} + \ldots + \dfrac{1}{(2v-1)(2v+1)} = \dfrac{v}{2v+1}$

η) $\dfrac{1}{1\cdot3} + \dfrac{2^2}{3\cdot5} + \dfrac{3^2}{5\cdot7} + \ldots + \dfrac{v^2}{(2v-1)(2v+1)} = \dfrac{v(v+1)}{2(2v+1)}$

1.11. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $v \geq 2$ ισχύει $5^v > 5v + 14$.

1.12. Να δείξτε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει:

$$\sqrt{\nu+1} \le \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{\nu+1}} \le 2\sqrt{\nu+1}$$

* * * * *

Α΄ Ομάδα

1.13. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathrm{N}^*$ ισχύει $\dfrac{(\nu+1)(\nu+2)\ \ldots\ (2\nu)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2\nu-1)} = 2^{\nu}$.

1.14. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathrm{N}^*$ ισχύει $\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ \ldots\ +\sqrt{\nu}}{\nu} > \dfrac{2}{3}\cdot\sqrt{\nu}$.

1.15. Δίνεται η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{2+\alpha_\nu}$ με $\nu \in \mathbb{N}^*$. Να δείξετε ότι:

i) $\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu$ **ii)** $\alpha_\nu < 2$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

1.16. Σε μία δεξίωση είναι καλεσμένοι ν άτομα. Αν τσουγκρίσουν ανά δύο τα ποτήρια τους τότε να αποδείξετε ότι θα ακουστούν $\dfrac{\nu(\nu-1)}{2}$ τσουγκρίσματα.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Τα ερωτήματα στη Θεωρία Αριθμών κατανοούνται και από ηλιθίους, απαντώνται, όμως, μόνο από ιδιοφυείς.
– PAUL ERDOS

Το θεώρημα της Ευκλείδειας διαίρεσης

2.1. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Αν α και β είναι φυσικοί αριθμοί με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί κ και υ, τέτοιοι, ώστε*

$$\alpha = \kappa \cdot \beta + \upsilon \ , \quad 0 \le \upsilon < \beta.$$

2.1.1. ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν οι α και β είναι ακέραιοι τότε $0 \le \upsilon < |\beta|$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.2. Να αποδείξετε ότι:
i) Το άθροισμα δύο άρτιων ακεραίων είναι άρτιος.
ii) Το άθροισμα δύο περιττών ακεραίων είναι άρτιος.
iii) Το άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού ακέραιου είναι περιττός.
iv) Το γινόμενο δύο άρτιων ακεραίων είναι άρτιος.
v) Το γινόμενο δύο περιττών ακεραίων είναι περιττός.
vi) Το γινόμενο ενός άρτιου και ενός περιττού ακέραιου είναι άρτιος.
vii) Αν ο ακέραιος α είναι άρτιος τότε ο α^2 είναι άρτιος.
viii) Αν ο ακέραιος α είναι περιττός τότε ο α^2 είναι περιττός.
ix) Αν ο ακέραιος α^2 είναι άρτιος τότε ο α είναι άρτιος.
x) Αν ο ακέραιος α^2 είναι περιττός τότε ο α είναι περιττός.

Λύση:

i) Έστω $\alpha = 2\kappa$ και $\beta = 2\lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ τότε
$\alpha + \beta = 2\kappa + 2\lambda = 2(\kappa + \lambda) = 2\rho$ άρτιος (όπου $\rho = \kappa + \lambda$).

ii) Έστω $\alpha = 2\kappa + 1$ και $\beta = 2\lambda + 1$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ τότε
$\alpha + \beta = 2\kappa + 1 + 2\lambda + 1 = 2\kappa + 2\lambda + 2 = 2(\kappa + \lambda + 1) = 2\rho$ άρτιος (όπου $\rho = \kappa + \lambda + 1$).

iii) Έστω $\alpha = 2\kappa$ και $\beta = 2\lambda + 1$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ τότε
$\alpha + \beta = 2\kappa + 2\lambda + 1 = 2(\kappa + \lambda) + 1 = 2\rho + 1$ περιττός (όπου $\rho = \kappa + \lambda$).

iv) Έστω $\alpha = 2\kappa$ και $\beta = 2\lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ τότε
$\alpha \cdot \beta = 2\kappa \cdot 2\lambda = 2(2\kappa\lambda) = 2\rho$ άρτιος (όπου $\rho = 2\kappa\lambda$).

v) Έστω $\alpha = 2\kappa + 1$ και $\beta = 2\lambda + 1$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ τότε

$\alpha \cdot \beta = (2\kappa + 1)\cdot(2\lambda + 1) = 4\kappa\lambda + 2\kappa + 2\lambda + 1 = 2(2\kappa\lambda + \kappa + \lambda) + 1 = 2\rho + 1$ περιττός (όπου $\rho = 2\kappa\lambda + \kappa + \lambda$).

vi) Έστω $\alpha = 2\kappa$ και $\beta = 2\lambda+1$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ τότε

$\alpha \cdot \beta = 2\kappa\cdot(2\lambda+1) = 2\rho$ άρτιος (όπου $\rho = \kappa\cdot(2\lambda+1)$).

vii) Έστω $\alpha = 2\kappa$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$ τότε

$\alpha^2 = (2\kappa)^2 = 4\kappa^2 = 2\cdot 2\kappa^2 = 2\rho$ άρτιος (όπου $\rho = 2\kappa^2$).

viii) Έστω $\alpha = 2\kappa + 1$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$ τότε

$\alpha^2 = (2\kappa + 1)^2 = 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 = 2\cdot 2\kappa(\kappa+1) + 1 = 2\rho + 1$ περιττός (όπου $\rho = 2\kappa(\kappa + 1)$).

ix) Αν ο α ήταν περιττός, τότε από το **(viii)** ο α^2 θα ήταν περιττός, άτοπο. Επομένως ο α είναι άρτιος.

x) Αν ο α ήταν άρτιος, τότε από το **(vii)** ο α^2 θα ήταν άρτιος, άτοπο. Επομένως ο α είναι περιττός.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

2.3. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω ισότητες έχουν προκύψει από ευκλείδεια διαίρεση. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο σε κάθε περίπτωση.

α) $217 = 12\cdot 17 + 13$ **β)** $-174 = 18\cdot(-10) + 6$ **γ)** $639 = (-29)\cdot(-21) + 30$

2.4. Η διαίρεση ενός ακέραιου με το 29 δίνει πηλίκο κ και υπόλοιπο $\upsilon = \kappa^3$. Να βρεθεί ο α.
[Απ. 0 , 30 , 66 , 114]

2.5. Να δείξετε ότι το τετράγωνο κάθε ακέραιου α μπορεί να πάρει τη μορφή:

$\alpha^2 = 4\kappa$ ή $\alpha^2 = 8\kappa + 1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

2.6. Αν ο α είναι άρτιος, να αποδείξετε ότι:

α) $(\alpha + 1)^2 - 1 =$ πολ.4 **β)** $\dfrac{\alpha^2 + (\alpha+1)^2 + (\alpha+3)^2 - 2\alpha + 2}{4} =$ πολ.3.

2.7. Να δείξετε ότι το τετράγωνο κάθε ακέραιου α μπορεί να πάρει τη μορφή:

$\alpha^2 = 5\kappa$ ή $\alpha^2 = 5\kappa \pm 1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

2.8. **α)** Αν ο ακέραιος λ δεν διαιρείται από το 3, να αποδείξετε ότι $\lambda^2 + 5 =$ πολ.3.
β) Να αποδείξετε ότι $\kappa(\kappa^2 + 5) =$ πολ3 , $\kappa \in \mathbb{Z}$.

2.9. Δίνονται οι ακέραιοι $\alpha = \kappa - 1$ και $\beta = 5\kappa + 6$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι:
α) Αν ο α είναι άρτιος τότε ο β είναι περιττός.
β) $3\beta - 4\alpha =$ πολ.11

2.10. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = 2\kappa + 2$ και $\beta = 6\kappa + 7$, όπου κ ακέραιος αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

α) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $(2\beta - \alpha)$ με το 10 είναι 2.
β) Αν ο αριθμός κ είναι πολλαπλάσιο του 7, τότε και ο αριθμός $(\alpha + \beta - 2)$ είναι πολλαπλάσιο του 7.

2.11. Θεωρούμε τους ακέραιους αριθμούς α, β, κ με $\alpha = 2\kappa - 3$ και $\alpha - \beta = \kappa - 5$.
α) Να υπολογίσετε τον β ως συνάρτηση του κ.
β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $5\alpha - 3\beta$ με τον 7.
γ) Να δείξετε ότι $\alpha^2 = \text{πολ}8 + 1$.

2.12. Δίνεται ο ακέραιος αριθμός $\alpha = 12\kappa - 5$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$.
Α. Να αποδείξετε ότι ο α είναι περιττός αριθμός.
Β. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του α δια του 4.
Γ. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = (\alpha^2 + 15)(\alpha^2 - 1)$ είναι πολλαπλάσιο του 64.

2.13. Αν ο ν είναι ένας θετικός ακέραιος, να αποδείξετε ότι:
α) $3^{3\nu} - 1 = \text{πολ}.26$ **β)** $3^{3\nu} + 51 = \text{πολ}.26$

2.14. Α. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο περιττών ακεραίων αριθμών είναι περιττός ακέραιος αριθμός.
Β. Να αποδείξετε ότι αν ο α είναι ακέραιος, τότε και ο $\dfrac{\alpha\cdot(\alpha^2+1)}{2}$ είναι ακέραιος.
Γ. Αν ο α είναι περιττός ακέραιος, να αποδείξετε ότι ο $\dfrac{\alpha\cdot(\alpha^2+1)}{2}$ είναι επίσης περιττός ακέραιος.

2.15. Θεωρούμε τους ακεραίους της μορφής $\alpha = 6\kappa + \upsilon$ με $0 \leq \upsilon < 6$ και κ ακέραιος.
Να δείξετε ότι:
α) οι παραπάνω ακέραιοι α που δεν είναι πολλαπλάσια του 2 ή του 3 παίρνουν τη μορφή $\alpha = 6\kappa + 1$ ή τη μορφή $\alpha = 6\kappa + 5$, όπου κ ακέραιος.
β) το τετράγωνο κάθε ακεραίου αριθμού της μορφής του ερωτήματος **(α)** μπορεί να πάρει τη μορφή $\alpha^2 = 3\mu + 1$, όπου μ ακέραιος.
γ) η διαφορά των τετραγώνων δύο ακεραίων του ερωτήματος **(α)** είναι πολλαπλάσιο του 3.

2.16. Έστω $\alpha \in \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι:
Α. Ο αριθμός α^3 παίρνει τη μορφή $\alpha^3 = 8\kappa$ όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$ ή $\alpha^3 = 2\kappa + 1$ όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$.
Β. Ο αριθμός $\alpha\cdot(\alpha^2+1)$ είναι άρτιος.

* * * * *

Β΄ Ομάδα

2.17. Να δείξετε ότι η διαφορά κύβων δύο διαδοχικών αρτίων είναι της μορφής $6\lambda + 2$, $\lambda \in \mathbb{Z}$.

2.18. Να δείξετε ότι το άθροισμα των κύβων δύο διαδοχικών αρτίων είναι της μορφής $8(2\kappa + 1)(2\mu + 1)$, $\kappa, \mu \in \mathbb{Z}$.

2.19. Για τους ακέραιους α, β ισχύει η σχέση $7\alpha + 2 = 3\beta$. Να βρείτε τις μορφές των α και β.

[Απ. α=7κ+4 , β=3κ+2]

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ

3.1. ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω α, β δύο ακέραιοι με $\beta \neq 0$. Θα λέμε ότι ο β *διαιρεί τον* α και θα γράφουμε β/α, όταν η διαίρεση του α με τον β είναι τέλεια, δηλαδή όταν υπάρχει ακέραιος κ, τέτοιος, ώστε $\alpha = \kappa\cdot\beta$.

3.1.1. ΣΗΜΕΙΩΣΗ: **(1)** Όταν β/α λέμε ότι ο β είναι *διαιρέτης* ή *παράγοντας* του α ή ότι ο α *διαιρείται με τον* β ή ακόμα ότι ο α *είναι πολλαπλάσιο του* β, και γράφουμε $\alpha = \text{πολ}\beta$.

(2) Για να δηλώσουμε ότι ο ακέραιος β δε διαιρεί τον ακέραιο α, γράφουμε $\beta \nmid \alpha$.

3.1.2. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

- Αν β/α, τότε $\alpha = \kappa\beta$ ή ισοδύναμα $\alpha = (-\kappa)(-\beta)$, που σημαίνει ότι αν ο β είναι διαιρέτης του α, τότε και ο $-\beta$ είναι διαιρέτης του α. Επομένως οι διαιρέτες ενός ακέραιου εμφανίζονται κατά ζεύγη αντίθετων ακεραίων.
- Ως άμεσες συνέπειες του παραπάνω ορισμού έχουμε τις εξής:
  - $\pm 1/\alpha$ και $\pm\alpha/\alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{Z}^*$.
  - $\beta/0$, για κάθε $\beta \in \mathbb{Z}^*$.
  - Αν β/α, τότε $\kappa\cdot\beta/\kappa\cdot\alpha$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z}^*$.

3.2. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Έστω α, β, γ ακέραιοι. Να αποδείξετε ότι:*

(i) *Αν α/β και β/α, τότε $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$.*

(ii) *Αν α/β και β/γ, τότε α/γ.*

(iii) *Αν α/β, τότε $\alpha/\lambda\beta$, για κάθε ακέραιο λ.*

(iv) *Αν α/β και α/γ, τότε $\alpha/(\beta+\gamma)$.*

(v) *Αν α/β και $\beta \neq 0$, τότε $|\alpha| \leq |\beta|$.*

Απόδειξη:

(i) Επειδή α/β και β/α, υπάρχουν ακέραιοι κ, λ, τέτοιοι ώστε $\beta = \kappa\alpha$ και $\alpha = \lambda\beta$, οπότε $\alpha = \kappa\lambda\alpha$ και επομένως, $\kappa\lambda = 1$, που σημαίνει ότι $\kappa = \lambda = 1$ ή $\kappa = \lambda = -1$, δηλαδή ότι $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$.

(ii) Επειδή α/β και β/γ, υπάρχουν ακέραιοι κ, λ, τέτοιοι ώστε $\beta = \kappa\alpha$ και $\gamma = \lambda\beta$, οπότε $\gamma = \lambda\kappa\alpha$ και άρα α/γ.

(iii) Επειδή α/β υπάρχει ακέραιος κ, τέτοιος ώστε $\beta = \kappa\alpha$, οπότε $\lambda\beta = \lambda\kappa\alpha$ και άρα $\alpha/\lambda\cdot\beta$.

(iv) Επειδή α / β και α / γ, υπάρχουν ακέραιοι κ, λ, τέτοιοι ώστε $\beta = \kappa\alpha$ και $\gamma = \lambda\alpha$, οπότε $\beta + \gamma = \kappa\alpha + \lambda\alpha = (\kappa + \lambda)\alpha$ και άρα $\alpha / (\beta + \gamma)$.

(v) Επειδή α / β και $\beta \neq 0$, υπάρχει ακέραιος $\kappa \neq 0$ με $\beta = \kappa\alpha$. Επομένως,

$$|\beta| = |\kappa\alpha| = |\kappa| \cdot |\alpha| \geq |\alpha|, \text{ αφού } |\kappa| \geq 1.$$

3.2.1. <u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u> Από τις παραπάνω ιδιότητες (iii) και (iv) προκύπτει ότι:
Αν α / β και α / γ, τότε $\alpha / (\kappa\beta + \lambda\gamma)$ για όλους τους ακεραίους κ και λ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ Ομάδα</u>

3.3. Να δείξετε ότι $3 / (4^{2002} - 1)$.

3.4. Να βρείτε τον θετικό ακέραιο β, αν $\beta / (2\alpha+3)$ και $\beta / (3\alpha+4)$ όπου α ακέραιος.

3.5. Να βρείτε τις πιθανές τιμές του θετικού ακέραιου δ αν $\delta / (6\alpha - 3)$ και $\delta / (8\alpha - 3)$, $\alpha \in \mathbb{Z}$.

3.6. Να βρείτε τις πιθανές τιμές του ακέραιου β αν $\beta / (2\alpha + 5)$ και $\beta / (3\alpha - 1)$, $\alpha \in \mathbb{Z}$.

3.7. Αν α, β ακέραιοι, $6 / (\alpha + 5)$ και $6 / (17 - \beta)$, να αποδείξετε ότι $6 / (\alpha + \beta)$.

3.8. Αν α, β ακέραιοι, $5 / (\alpha + 18)$ και $5 / (3 - \beta)$, να αποδείξετε ότι $5 / (\alpha + \beta)$.

3.9. Αν α, β ακέραιοι, $3 / (\alpha - 8)$ και $3 / (2 - \beta)$, να αποδείξετε ότι $3 / (\alpha + 2\beta)$.

3.10. Αν n / α και $n > 2$, να αποδείξετε ότι $n \not/ (\alpha + 2)$.

3.11. Αν α θετικός ακέραιος και $3 / \alpha$, να αποδείξετε ότι $7 / (2^{\alpha} - 1)$.

3.12. Αν m θετικός ακέραιος και $3 / m$, να αποδείξετε ότι $26 / (3^m - 1)$.

* * * * *

<u>Β΄ Ομάδα</u>

3.13. Να αποδείξετε ότι:

i) $5 / 3^{3\nu+2} + 2^{\nu+4}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ **ii)** $6 / (\nu^3 + 3\nu^2 + 2\nu)$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

3.14. Έστω $\alpha, \beta \in Z$. Να αποδείξετε ότι:

i) αν $5 / (2\alpha + 3\beta)$, τότε $5 / (3\alpha + 2\beta)$ **ii)** αν $7 / (3\alpha + 4\beta)$, τότε $7 / (4\alpha + 3\beta)$

iii) αν $8 / (5\alpha + 9\beta)$, τότε $8 / (3\alpha - \beta)$

3.15. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι:

i) αν $7 / (2\alpha + 3\beta)$, τότε $7 / (\alpha - 2\beta)$ **ii)** αν $9 / (\beta - 3\alpha)$, τότε $9 / (3\alpha + 11\beta)$

iii) αν $11 / (2\alpha + \beta)$, τότε $11 / (\alpha + 6\beta)$ **iv)** αν $9 / (5\alpha - 7\beta)$, τότε $9 / (5\beta - \alpha)$

v) αν $5 / (3\alpha - \beta + 1)$, τότε $5 / (3\alpha + 19\beta + 11)$

3.16. Έστω $\alpha, \beta, \kappa, \lambda \in Z$ με $\kappa \neq -\lambda$. Να αποδείξετε ότι:

i) αν $(\kappa + \lambda) \,/\, (\kappa\alpha + \lambda\beta)$, τότε $(\kappa + \lambda) \,/\, (\lambda\alpha + \kappa\beta)$

ii) αν $(\kappa + \lambda) \,/\, (\kappa\alpha - \lambda\beta)$, τότε $(\kappa + \lambda) \,/\, (\lambda\alpha - \kappa\beta)$

3.17. Να αποδείξετε ότι:

i) $6 \,/\, \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 5)$ **ii)** $6 \,/\, \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 8)$

3.18. Να βρείτε το θετικό ακέραιο α αν $(\alpha - 2) \,/\, (\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1)$

3.19. Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς ν, ώστε $(\nu + 1) \,/\, (\nu^2 + 1)$.

3.20. Να βρείτε τους ακεραίους α για τους οποίους το κλάσμα $\frac{2\alpha+3}{\alpha+1}$ είναι ακέραιος.

3.21. Να βρείτε τους ακεραίους κ για τους οποίους το κλάσμα $\frac{7\kappa+1}{5} \in \mathbb{Z}$.

3.22. Να βρείτε τους ακεραίους που όταν διαιρεθούν με τον 7 δίνουν υπόλοιπο 3, ενώ όταν διαιρεθούν με τον 5 δίνουν υπόλοιπο 2.

3.23. Να βρείτε τους θετικούς ακέραιους x, y αν δίνεται ότι $x^2 - y^2 = 31$.

3.24. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ και $2 \,/\, (\alpha + \beta)$ ή $2/\alpha - \beta$ τότε $4 \,/\, (\alpha^2 - \beta^2)$.

3.25. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ και $2 \not| \,\alpha{\cdot}\beta$, δείξτε ότι $2 \,/\, (\alpha^2 + \beta^2)$ και $4 \not| \,(\alpha^2 + \beta^2)$.

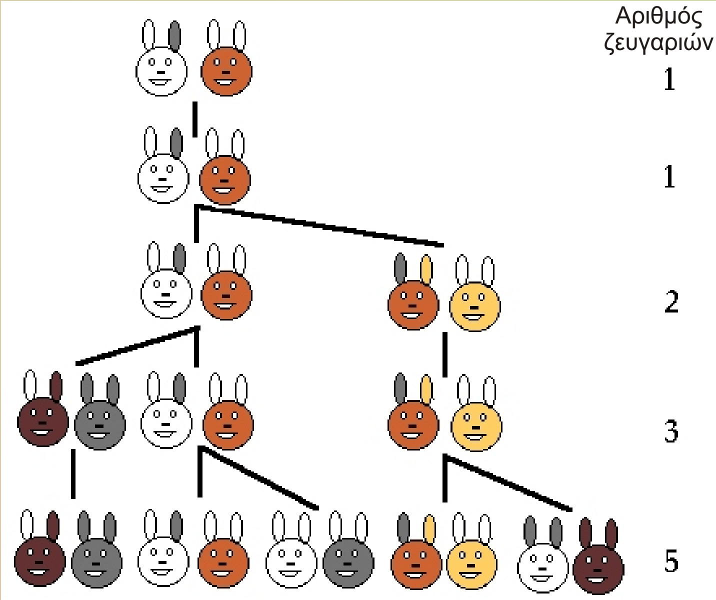
3.26. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ και $2 \,/\, (\alpha^2 - \beta^2)$ να δείξετε ότι $4 \,/\, (\alpha^2 - \beta^2)$.

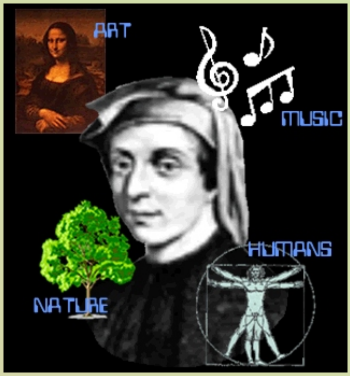
3.27. Για τους θετικούς ακέραιους x, y ισχύει η σχέση $x(x - y) = 3y - 2$. Τότε

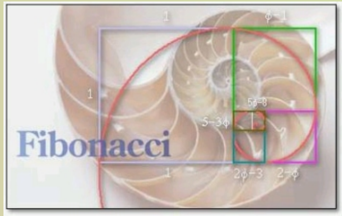
i) $(x + 3) \,/\, (x^2 + 2)$

ii) $(x + 3) \,/\, (3x - 2)$

iii) να βρείτε τους x, y.







Πόσα ζευγάρια κουνελιών θα έχουμε στο τέλος του χρόνου, αν ξεκινήσουμε από ένα ζευγάρι και αν όλα τα ζευγάρια γεννούν κάθε μήνα ένα καινούργιο το οποίο φθάνει σε ηλικία αναπαραγωγής μέσα σε δύο μήνες;

Είναι το διάσημο πρόβλημα, γνωστό ως "*Πρόβλημα των κουνελιών*" που είχε θέσει ο Leonardo της Πίζα - γνωστότερος ως Fibonacci (1170 - 1250) - στις αρχές του 13ου αιώνα.

Η απάντηση είναι 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , 89 , 144 , 233 , …

Το πλήθος των ζευγαριών κάθε μήνα αντιστοιχεί στους όρους της ακολουθίας Fibonacci. Ο συναρτησιακός συμβολισμός για την ακολουθία δόθηκε για πρώτη φορά από τον Kepler (1571-1630) το 1611, την οποία περιέγραψε ως $f_n + f_{n+1} = f_{n+2}$, όπου f_n είναι ο n-οστός όρος της ακολουθίας, $f_0 = 0$ και $f_1 = 1$.

Η ακολουθία Fibonacci εμφανίζεται σε πλήθος μαθηματικών κλάδων και συνδέεται με μία μεγάλη ποικιλία εφαρμογών.

Το πηλίκο των διαδοχικών όρων της ακολουθίας

$$\frac{13}{8} = 1{,}625 \quad , \quad \frac{21}{13} = 1{,}61538 \quad , \quad \frac{34}{21} = 1{,}6190476 \quad , \quad \frac{55}{34} = 1{,}617647 \quad , \quad \ldots$$

τείνει προς τον αριθμό $\varphi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}61803398\ldots$

Ο αριθμός $\varphi = \dfrac{a}{x}$ **, από το όνομα του γλύπτη της κλασικής αρχαιότητας Φειδία,**

όπου x είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2 + ax - a^2 = 0$ που προκύπτει από το πρόβλημα της διαίρεσης ενός ευθύγραμμου τμήματος μήκους a σε μέσο και άκρο λόγο, που είναι γνωστό ως πρόβλημα της *Χρυσής Τομής*.