

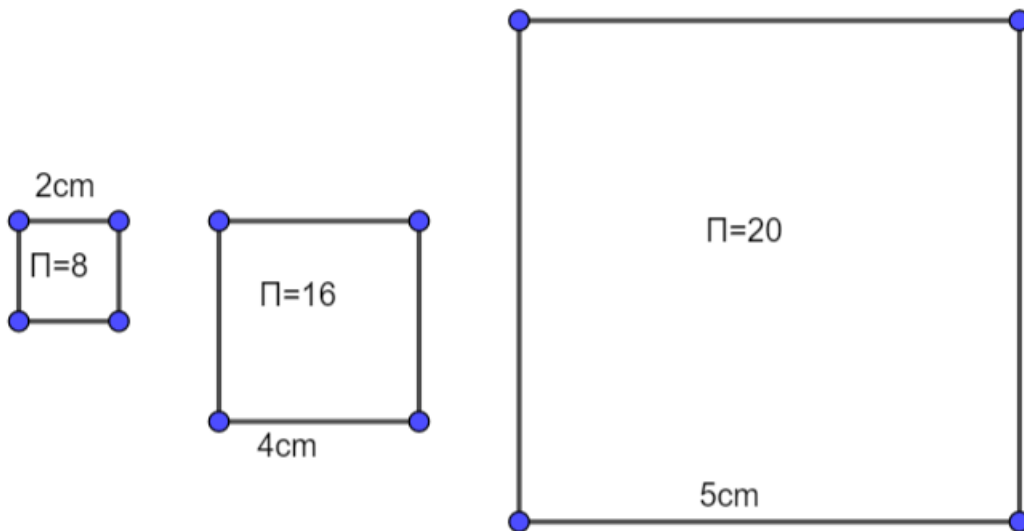
ΑΝΑΛΟΓΙΑ ----- ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ ----- ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ορισμός 1 : Ένα κλάσμα της μορφής $\frac{\alpha}{\beta}$ ονομάζεται **λόγος** των αριθμών α, β με $\beta \neq 0$

Ορισμός 2 : Η ισότητα δύο λόγων, δηλαδή η μορφή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ονομάζεται **αναλογία**.

Παράδειγμα από την Γεωμετρία.

Τα παρακάτω τετράγωνα έχουν πλευρές 2cm, 4cm, 5cm και οι περιμέτροι τους είναι αντίστοιχα ίσες με 8cm, 16cm, 20cm.



Αν γράψουμε για το κάθε τετράγωνο το λόγο της πλευράς προς την περίμετρο και απλοποιήσουμε θα διαπιστώσουμε ότι οι λόγοι είναι ίσοι.

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \quad \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Άρα προκύπτουν ίσοι λόγοι $\frac{2}{8} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ Λέμε τότε ότι :

οι πλευρές των τετραγώνων είναι ανάλογες προς τις περιμέτρους τους

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

Η πρώτη ιδιότητα είναι γνωστή από το Γυμνάσιο ως «χιαστή»

1) Αν $\beta \neq 0$ και $\delta \neq 0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$

Άσκηση 1

Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{4}{x-1} = \frac{2}{3}$

Λύση

Περιορισμός: Για να έχει νόημα το κλάσμα πρέπει να ισχύει $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Κάνοντας χιαστή έχω:

$$\frac{4}{x-1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 12 = 2(x-1) \Leftrightarrow 12 = 2x - 2 \Leftrightarrow 2x = 12 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 7 \text{ δεκτή}$$

Άσκηση 2

(παράδειγμα από τη φυσική)

Δύο σώματα κινούνται ευθύγραμμα και ομαλά και οι ταχύτητες τους είναι ίσες. Αν το ένα σώμα διανύει 20m σε χρόνο 2s και το άλλο σώμα διανύει 50m σε χρόνο t_2 , να βρείτε την τιμή του t_2 .

Λύση

Η σχέση ισότητας που συνδέει την ταχύτητα, την απόσταση που διανύεται και το χρόνο στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι: $u = \frac{s}{t}$

Άρα για το ένα σώμα θα ισχύει $u_1 = \frac{s_1}{t_1}$ και για το άλλο θα είναι $u_2 = \frac{s_2}{t_2}$

Επειδή τα σώματα κινούνται με την ίδια ταχύτητα θα προκύψει η ισότητα :

$$u_1 = u_2 \Leftrightarrow \frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2}$$

Αντικαθιστώντας τα γνωστά θα προκύψει:

$$\frac{20}{2} = \frac{50}{t_2} \Leftrightarrow 20t_2 = 100 \Leftrightarrow t_2 = \frac{100}{20} = 5$$

2) Αν $\beta\gamma\delta \neq 0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$

3) Αν $\beta\delta \neq 0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha\pm\beta}{\beta} = \frac{\gamma\pm\delta}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta\pm\alpha} = \frac{\gamma}{\delta\pm\gamma}$

Άσκηση 3

Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x-1}{x-9} = \frac{x+3}{x-4}$

Λύση

(Δεν πρέπει να ξεχνώ τους περιορισμούς)

Για να έχουν νόημα τα κλάσματα πρέπει να ισχύουν: $x-9 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 9$ και $x-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$

$$\frac{x-1}{x-9} = \frac{x+3}{x-4} \Leftrightarrow$$

(χρησιμοποιώ την ιδιότητα (3) και αφαιρώ από τους αριθμητές τους παρανομαστές)

$$\frac{x-1-x+9}{x-9} = \frac{x+3-x+4}{x-4} \Leftrightarrow \frac{8}{x-9} = \frac{7}{x-4} \Leftrightarrow 8(x-4) = 7(x-9)$$

$$\Leftrightarrow 8x - 32 = 7x - 63 \Leftrightarrow 8x - 7x = 32 - 63 \Leftrightarrow x = 31 \text{ δεκτή}$$

$$4) \quad \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3} = \dots = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots}$$

οι παρονομαστές πρέπει να είναι διάφοροι του μηδέν

Άσκηση 4

Ένας πατέρας έχει τρία παιδιά και θέλει να τους μοιράσει το ποσό 10.000 ευρώ ανάλογα με τις ηλικίες τους. Οι ηλικίες των παιδιών είναι : 5 , 7 , 13 . Πόσα χρήματα θα πάρει το κάθε παιδί;

Λύση

Έστω x, y, z τα ποσά που θα πάρει το κάθε παιδί. Αφού τα ποσά αυτά είναι ανάλογα με τις ηλικίες των παιδιών θα ισχύει η αναλογία:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{13}$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα (4) θα έχω:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{13} = \frac{x + y + z}{5 + 7 + 13} = \frac{10000}{25} = 400$$

$$\text{Άρα} \begin{cases} \frac{x}{5} = 400 \Leftrightarrow x = 5 \cdot 400 = 2000 \\ \frac{y}{7} = 400 \Leftrightarrow y = 7 \cdot 400 = 2800 \\ \frac{z}{13} = 400 \Leftrightarrow z = 13 \cdot 400 = 5200 \end{cases}$$

Ασκήσεις εξάσκησης

(Διαβάζοντας τα παραπάνω θα μπορέσετε να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις)

$$1) \quad \frac{2}{x-6} = \frac{1}{3} \quad 2) \quad \frac{4}{2x-4} = \frac{1}{x-3} \quad 3) \quad \frac{3-x}{x+2} = \frac{1-x}{x+7}$$

Για την επανάληψη μπορείτε να λύσετε την παρακάτω άσκηση:

$$\text{Δίνεται η παράσταση : } A = (x^2 + y^2 - 1)^2 - (x^2 - y^2)^2 + (x - y)^2 - 1$$

1) Να απλοποιήσετε την παράσταση A

2) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση αυτή.