ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

ΧΡΗΣΤΟΣ ΠΑΝΤΣΙΔΗΣ
Α.Μ. : Δ200306

ΑΘΗΝΑ 2006

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ....από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)..(επιβλέπων Καθηγητής)	....	....
2)...	....	....
3)...	....	....

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα εργασία είχε αφορμή την ενασχόληση μου με προβλήματα σχετικά με την κατανόηση μαθηματικών εννοιών, τα οποία παρατηρούνται στην καθημερινή διδακτική πράξη. Κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών είχα την ευκαιρία να εντοπίσω το πλαίσιο στο οποίο εντάσσονταν οι προσωπικές μου αναζητήσεις και προβληματισμοί μου, που ως ένα βαθμό προέρχονταν και από τη μέχρι τώρα διδακτική εμπειρία μου.

Η επικέντρωση του ενδιαφέροντος μου σε συγκεκριμένα ζητήματα, οφείλεται κατά κύριο λόγο στην παρακολούθηση των μαθημάτων της Καθηγήτριας κ. Στέλλας Βοσνιάδου, η οποία είχε την ευγενή καλοσύνη νε με βοηθήσει στον καθορισμό του θέματος και να παρακολουθήσει την εργασία μου σε όλα της τα στάδια, παρέχοντας χρήσιμες συμβουλές και προσφέροντας μου πολύτιμη συμπαράσταση. Για τους λόγους αυτούς της εκφράζω τις θερμές ευχαριστίες μου.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή μου, τόσο κατά τις προπτυχιακές σπουδές μου στη Θεσσαλονίκη, όσο και κατά τις μεταπτυχιακές σπουδές μου στην Αθήνα, κ. Αθανάσιο Γαγάτση για την ανεκτίμητη βοήθεια του. Οφείλω επίσης ευχαριστίες στον Επ. Καθηγητή κ. Παναγιώτη Σπύρου για τις ενδιαφέρουσες συζητήσεις μας και τις χρήσιμες συμβουλές του.

Ευχαριστίες εκφράζονται προς όλους τους καθηγητές μου σ’ αυτό το μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών, για τη συμβολή τους στην προσέγγιση των μαθηματικών από μια φιλοσοφική πλευρά.

Εξαιρετικά πολύτιμη ήταν η βοήθεια που μου δόθηκε από την οικογένεια μου και ιδιαίτερα από την αδερφή μου Εβίτα Παντσίδου, η οποία ως παιδαγωγός λειτούργησε ως δίαυλος στην επαφή μου με την Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση.

Τέλος, θα ήταν παράλειψη να μην ευχαριστήσω, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξαν τους διευθυντές και δασκάλους των σχολείων στα οποία πραγματοποίησα την εμπειρική μου έρευνα καθώς και τους μαθητές που με πλούτισαν με τις ιδέες τους.

Χρήστος Παντσίδης

Αθήνα, Ιούνιος 2006

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μέσα στο πλαίσιο της προβληματικής που έχει αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια γύρω από τους τρόπους με τους οποίους αποκτούνται και αναδιοργανώνονται οι γνώσεις σε διάφορους τομείς, σχεδιάστηκε η παρούσα εργασία η οποία επικεντρώνεται στην έννοια του κλάσματος και ειδικότερα στη διάταξη των κλασμάτων. Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα μιας εμπειρικής μελέτης που έγινε σε μαθητές 12 τμημάτων της ΣΤ΄ τάξης από 9 Δημοτικά Σχολεία. Η έρευνα διεξήχθη την περίοδο Απριλίου-Μαΐου 2005 σε διάφορες περιοχές της Ελλάδας και συμμετείχαν σ' αυτή 236 μαθητές.

Υποθέσαμε ότι οι αρχικές εννοιολογικές δομές (αρχικό επεξηγηματικό πλαίσιο) που κατασκευάζουν τα παιδιά για να ερμηνεύσουν τις μαθηματικές εκφράσεις που περιλαμβάνουν κλάσματα υιοθετούν πολλές από τις πεποιθήσεις τους για το φυσικό αριθμό. Οι πεποιθήσεις αυτές έρχονται σε αντίθεση με πολλές από τις προϋποθέσεις μιας επιστημονικής θεώρησης των κλασμάτων καθιστώντας την εννοιολογική αλλαγή της έννοιας των φυσικού αριθμού απαραίτητη για την κατανόηση των κλασμάτων (βλέπε Σταφυλίδου & Βοσνιάδου, 2005). Ενώ όμως απαιτείται, για την κατανόηση των κλασμάτων, μια αναδιοργάνωση των δομών της γνώσης τους για τους φυσικούς αριθμούς, στην πράξη βλέπουμε ότι αυτό δε γίνεται αλλά αντίθετα τα παιδιά σταδιακά αφομοιώνουν τις πληροφορίες που δέχονται μέσω της διδασκαλίας για τα κλάσματα, στην παλιά τους γνώση για τον φυσικό αριθμό, με αποτέλεσμα να κάνουν λάθη. Προηγούμενες έρευνες (Σταφυλίδου, 2001· Σταφυλίδου & Βοσνιάδου, 2005) έχουν δείξει ότι υπάρχουν ενδιάμεσα επεξηγηματικά πλαίσια που υιοθετούν τα παιδιά σε αυτήν την πορεία κατανόησης των κλασμάτων, πλαίσια τα οποία προσπαθήσαμε να διερευνήσουμε περαιτέρω στην παρούσα έρευνα. Θεωρήσαμε ότι τα ενδιάμεσα αυτά επεξηγηματικά πλαίσια μπορούν να ερμηνευτούν ως προσπάθειες των παιδιών να συμβιβάσουν τις βασικές προϋποθέσεις της θεωρίας βάσης για τους φυσικούς αριθμούς με τις νέες πληροφορίες με τις οποίες έρχονται σε επαφή μέσα από την εκπαίδευση ή τον κοινωνικό τους περίγυρο.

Με βάση προηγούμενες μελέτες (Βοσνιάδου 1994, 1999, 2000), θεωρούμε ότι πολλά από τα λάθη που κάνουν τα παιδιά κατά τη διαδικασία κατανόησης των κλασμάτων προέρχονται από το γεγονός ότι ενσωματώνουν τις νέες πληροφορίες για τα κλάσματα σε αυτά που ήδη ξέρουν για το φυσικό αριθμό.

Με βάση τα αποτελέσματα προηγούμενης έρευνας της Σταφυλίδου Σταματίας σχετικά με τα κλάσματα, όπως αυτά παρουσιάζονται στη διατριβή της με θέμα «Μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες μάθησης: Η ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος» (2001), η θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής μπορεί να φανεί χρήσιμη έτσι ώστε να προβλεφθούν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σχετικά με την έννοια του κλάσματος και ειδικότερα της διάταξης των κλασμάτων, καθώς επίσης και την αντιμετώπιση των δυσκολιών αυτών. Στηριζόμενοι στα αποτελέσματα αυτά, διακρίνουμε στις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τα κλάσματα τα εξής λάθη που όπως είπαμε προηγουμένως οφείλονται στο γεγονός ότι ενσωματώνουν τις πληροφορίες που παίρνουν από τη διδασκαλία για τα κλάσματα στις προηγούμενες γνώσεις τους για το φυσικό αριθμό:

Τα λάθη σύμφωνα με τα οποία οι μαθητές αντιλαμβάνονται ως μεγαλύτερο το κλάσμα που έχει τους μεγαλύτερους όρους που παρουσιάζονται στο μοντέλο του κλάσματος ως δύο φυσικοί αριθμοί.

Τα λάθη σύμφωνα με τα οποία μεγαλύτερο είναι το κλάσμα με τους μικρότερους όρους, που φαίνεται να προκύπτει ως μια άρνηση του προηγούμενου μοντέλου, στην οποία οδηγείται ο μαθητής όταν αντιλαμβάνεται ότι το κλάσμα είναι διαφορετικό από δύο ξεχωριστούς φυσικούς αριθμούς.

Το μοντέλο σύμφωνα με το οποίο ο μαθητής αντιλαμβάνεται κάθε κλάσμα είναι μικρότερο της μονάδας, καθώς ο μαθητής αντιλαμβάνεται το κλάσμα πάντα ως μέρος της μονάδας και άρα μικρότερο από αυτή.

Ένας στόχος της έρευνας μας είναι να εξετάσουμε αν υπάρχουν παιδιά τα οποία συστηματικά κάνουν τα παραπάνω λάθη.

Σκοπός μας είναι να εξετάσουμε αν τα λάθη αυτά, που έχει βρει η Σταφυλίδου, ισχύουν και αν κάποιες αναπαραστάσεις βοηθούν στην αντιμετώπιση αυτών των λαθών.

Έτσι θα εξετάσουμε και επίσης θα ελέγξουμε δύο διαφορετικές εξωτερικές αναπαραστάσεις (αριθμητική γραμμή και κυκλικά διαγράμματα) τις οποίες θα συγκρίνουμε μεταξύ τους (με βάση τις επιδόσεις των μαθητών στα αντίστοιχα τεστ) ως προς τις επί μέρους επιδράσεις τους στον τρόπο με τον οποίο ο μαθητής αντιλαμβάνεται και κατανοεί τις μαθηματικές έννοιες (όπως εδώ συγκεκριμένα της διάταξης των κλασμάτων). Θέλουμε επίσης να συγκρίνουμε την χρήση εξωτερικών αναπαραστάσεων (αριθμητική γραμμή και κυκλικά διαγράμματα) έναντι των αυτοεξηγήσεων (self-explanation), ως προς τις επί μέρους επιδράσεις τους στα διάφορα λάθη που αναφέραμε σχετικά με τις αντιλήψεις των μαθητών για τα κλάσματα.

Στα κεφάλαια που ακολουθούν θα δούμε:

Στο πρώτο κεφάλαιο, μέσα από μια ιστορική ανασκόπηση της πορείας της μαθηματικής έννοιας του κλάσματος, προσπαθώντας μέσα από αυτή να αντλήσουμε αν είναι δυνατό κάποιες ιδέες για τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές ακόμη και σήμερα στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος**.** Συγκεκριμένα εστιάζουμε τη διερεύνησή μας στις συγκεκριμένες εκείνες χρονικές περιόδους που υπήρξε κάποιου είδους αλλαγή στον τρόπο που αντιλαμβάνονταν οι άνθρωποι της αντίστοιχης εποχής αυτή την έννοια (δηλαδή στις ιστορικές εκείνες περιόδους που διαπιστώνονται εννοιολογικές αλλαγές).

Στο δεύτερο κεφάλαιο, επιχειρούμε μια θεωρητική προσέγγιση σχετικά με την εννοιολογική αλλαγή και την έννοια του κλάσματος, καθώς επίσης και του ρόλου των αναπαραστάσεων και των αυτο-εξηγήσεων στη μάθηση των μαθηματικών, παραθέτοντας πειραματικές έρευνες σχετικά με τις σχέσεις αναπαράστασης και μάθησης των μαθηματικών εννοιών.

Το τρίτο κεφάλαιο, περιλαμβάνει την έρευνα που πραγματοποιήθηκε, καθώς επίσης και την στατιστική ανάλυση των αποτελεσμάτων αυτής με τη βοήθεια δύο στατιστικών προγραμμάτων, του SPSS και του GRAS.

Τέλος ακολουθεί συζήτηση σχετικά με τα αποτελέσματα αυτά και αναφέρουμε τα συμπεράσματα που προέκυψαν από αυτή την έρευνα και τις επιπτώσεις τους για τη διδασκαλία των κλασμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΠΟΡΕΙΑΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ

Πριν προχωρήσουμε στην ανασκόπηση των πρόσφατων ειδικών ερευνών που έχουν ως αντικείμενο το κλάσμα, έκρινα σκόπιμο να επεκτείνω τη διερεύνηση αυτή και στην ιστορική εξέλιξη της έννοιας του κλάσματος, στην οποία σε πολλά σημεία με βοήθησε και η ιστορική ανασκόπηση που είχε κάνει η Σταφυλίδου σε ανάλογη έρευνα της. Αν και δεν θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών στα παιδιά ταυτίζεται με την εξέλιξη που είχαν ιστορικά οι έννοιες αυτές, εντούτοις τυχόν πιθανές αντιστοιχίες ανάμεσα στα μοντέλα των μαθητών για το κλάσμα (π.χ. το κλάσμα ως μέρος της μονάδας) και το πώς αντιμετωπίστηκαν παλαιότερα τα κλάσματα από αρχαίους λαούς, όπως π.χ. οι αρχαίοι Αιγύπτιοι, θα ήταν πιστεύουμε δυνατό να μας δώσει κάποιες ιδέες για τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές ακόμη και σήμερα στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος.

Ερευνητές από τη σκοπιά της διδακτικής των Μαθηματικών όπως οι Brousseau (1983), Herscovics (1989) και Artigue (1990) έχουν εκφράσει διαφορετικές απόψεις για την αντιστοιχία ανάμεσα στις γνώσεις-εμπόδια που εμφανίζουν οι σημερινοί μαθητές και σε παρόμοιες αντιλήψεις που εκφράστηκαν από τους μαθηματικούς κατά το παρελθόν. Ο Brousseau (1983) ενώ δίνει ιδιαίτερη σημασία στα επιστημολογικά εμπόδια που αποκαλύπτει η ιστορική μελέτη μιας μαθηματικής έννοιας είναι αντίθετος στην αναπαραγωγή των ιστορικών συνθηκών υπέρβασης αυτών των εμποδίων στο πλαίσιο του σχολείου. Ο Herscovics (1989) επίσης ενώ υποστηρίζει ότι πολλά από τα επιστημολογικά εμπόδια μπορούν να παραλληλιστούν με τα γνωστικά εμπόδια που αντιμετωπίζουν οι σημερινοί μαθητές, επισημαίνει ότι το σχολικό περιβάλλον μάθησης διαφέρει ουσιαστικά από εκείνο του παρελθόντος. Τέλος η Artigue (1990) υποστηρίζοντας ότι υπάρχουν κοινοί μηχανισμοί παραγωγής επιστημολογικών εμποδίων τόσο στους μαθηματικούς κατά το παρελθόν όσο και στους σημερινούς μαθητές, προωθεί την ιδέα ενός παραλληλισμού αυτών των δύο.

Από το χώρο της *Ψυχολογίας της Μαθηματικής εκπαίδευσης,* ερευνητές όπως οι Ernest (1989), Sfard (1994) και Vergnaud (1990) συμμερίζονται την άποψη ότι η γνώση της ιστορικής εξέλιξης μιας μαθηματικής έννοιας, μπορεί να συμβάλλει ουσιαστικά στην επίλυση προβλημάτων που συνδέονται με την έρευνα των διαδικασιών μάθησης αυτής της μαθηματικής έννοιας[1].

Στη δική μας έρευνα υποθέτοντας ότι στη διερεύνηση των αρχικών ιδεών των παιδιών για τα κλάσματα θα μας βοηθούσε η παράθεση των απόψεων που ίσχυαν σε διάφορες χρονικές περιόδους, προσπαθήσαμε να διερευνήσουμε την εξελικτική πορεία αυτής της μαθηματικής έννοιας μέσα από την ιστορία των Μαθηματικών. Συγκεκριμένα θα εστιάσουμε τη διερεύνησή μας στις συγκεκριμένες εκείνες χρονικές περιόδους που υπήρξε κάποιου είδους αλλαγή στον τρόπο που αντιλαμβάνονταν οι άνθρωποι της αντίστοιχης εποχής αυτή την έννοια (δηλαδή στις ιστορικές εκείνες περιόδους που διαπιστώνονται εννοιολογικές αλλαγές). Στην περίπτωση των κλασμάτων το πρόβλημα της διερεύνησης της ιστορικής εξέλιξης περνά από τη διερεύνηση των πολύπλοκων διαδρομών που χάραξε από τον 5^{o} αιώνα π. Χ. έως σήμερα. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι η παρακολούθηση αυτών των διαδρομών γίνεται δυσκολότερη εξαιτίας των διαφορετικών ερμηνειών που προσδίδουν στα αρχαία κείμενα οι ιστορικοί των Μαθηματικών. Βλέπουμε λοιπόν ότι υπάρχουν επιστήμονες που προσεγγίζουν την εννοιολογική ιδιαίτερα υπόσταση του κλάσματος στις ίδιες χρονικές περιόδους με εκ διαμέτρου αντίθετες αφετηρίες.

1.1.1 Η πορεία της εξέλιξης των κλασμάτων

Η ιστορική εξέλιξη της έννοιας του κλάσματος περιλαμβάνει πολλά στάδια που διαφοροποιούνται τόσο από το πεδίο εφαρμογών της, όσο και από την εννοιολογική υπόσταση της (θεωρητική ή επιστημολογική). Για παράδειγμα τα εναδικά κλάσματα[2] των Αρχαίων Αιγυπτίων από άλλους ιστορικούς ερμηνεύονται ως τα πρώτα κλάσματα που έχουν ευρύτατη εφαρμογή (Ritter, 1992) ενώ από άλλους ως κάποιοι αριθμοί που δεν έχουν καμιά σχέση με την έννοια του κλάσματος όπως την αντιλαμβανόμαστε σήμερα (van der Waerden, 1976, 2000).

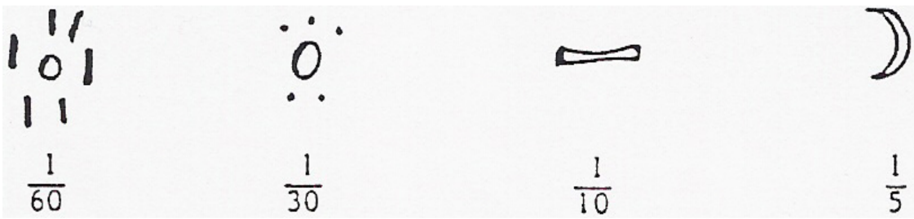
[1] Συγκεκριμένα η Sfard υποστήριξε ότι «… η ιστορική προοπτική αποδείχθηκε ανεκτίμητη πηγή για να σχηματίσω σωστές αντιλήψεις των λεπτών σημείων της διαδικασίας μάθησης και της φύσης των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές» (βλ. Sfard, 1994.σ. 131).

[2] Παρακάτω και στην παράγραφο 1.1.1.1. θα αναφερθούμε στα εναδικά κλάσματα που χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι Αιγύπτιοι και που θα μπορούσαν να αντιστοιχούν στις σύγχρονες κλασματικές μονάδες.

Με βάση λοιπόν την επιστημονική εξέλιξη τους και τη χρήση των κλασμάτων, θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε στη συνέχεια την εξέλιξη των κλασμάτων σε τέσσερις χρονικές περιόδους εκθέτοντας τις απόψεις διαφόρων ιστορικών των μαθηματικών.

1.1.1.0 Η προϊστορία των κλασμάτων

Οι προϊστορικοί λαοί είχαν ανακαλύψει την έννοια του αριθμού και τις προϋποθέσεις των υπολογισμών για την εφεύρεση συστημάτων αρίθμησης, αλλά δεν υπάρχουν στοιχεία ότι είχαν αναπτύξει την έννοια του κλασματικού αριθμού (Keller, 1918). Αρχικά σύμβολα που υποδηλώνουν πρωταρχικές χρήσεις της έννοιας του κλάσματος έχουν αποκρυπτογραφηθεί σε πλάκες, τις λεγόμενες πρωτο-ελαμιτικές (Μεσοποταμία, 3000 π.Χ. περίπου) (βλ., Σχήμα 1). Μια εξερεύνηση των πρωτο-Σουμεριακών κειμένων του Uruk (γύρω στα τέλη του μισού της τέταρτης χιλιετηρίδας με αρχή της τρίτης χιλιετηρίδας π.Χ.) είναι ως επί το πλείστον λογαριασμοί τροφίμων, υφασμάτων, αντικειμένων που παραλαμβάνονται, αποθηκεύονται ή διανέμονται (Ritter, 1992). Σε Πίνακες Συστημάτων μέτρησης εμφανίζονται υποδιαιρέσεις που θα μπορούσαμε να τα θεωρήσουμε ως κλάσματα και που σήμερα αντιστοιχούν στις κλασματικές μονάδες.



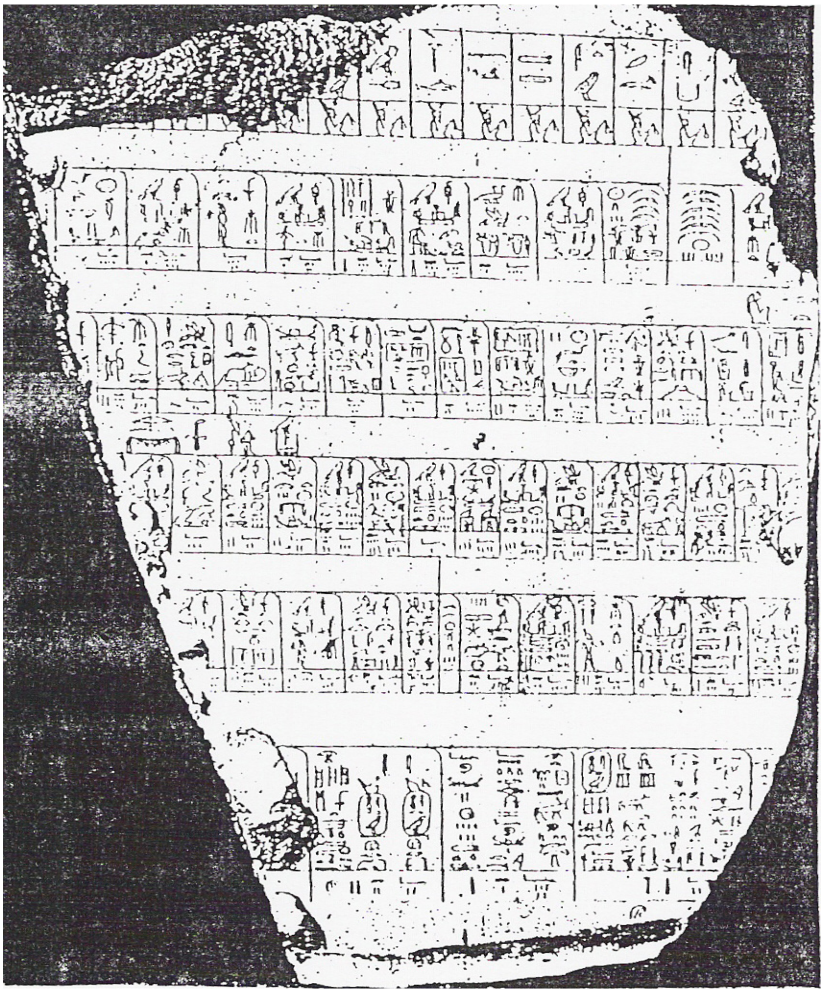
Σχήμα 1.1: Τα πρωτο-ελαμιτικά κλάσματα

1.1.1.1 Πρώτη περίοδος: Αιγύπτιοι – Βαβυλώνιοι (2000 π.Χ. – 500 π.Χ.)

i) Αιγύπτιοι

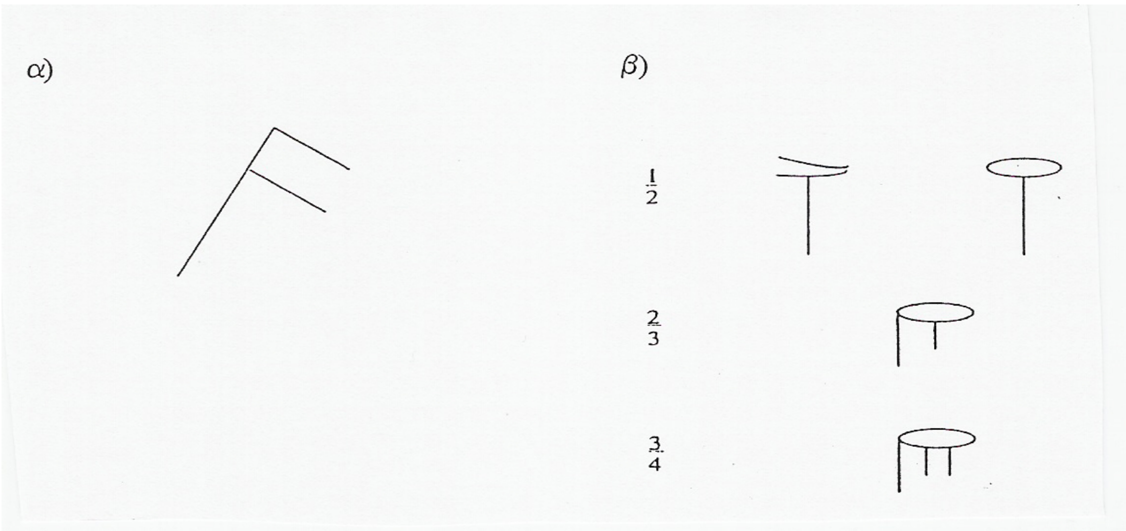
Οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι γνώριζαν την έννοια του κλάσματος (Benoit, Chemla & Ritter, 1992; Cajori, 1928; Caveing, 1992; Guillemot, 1992; Loria, 1928; Ritter, 1992).
Ιστορικά στοιχεία χρονολογούνται από το 1800-1300 π.Χ., αν και η οικοδόμηση των πυραμίδων, τον 27^{ο} αιώνα π.Χ., απαιτούσε εκτεταμένες γνώσεις των αναλογιών και συνεπώς η χρήση των κλασμάτων ήταν απαραίτητη. Πολυάριθμα όμως αρχεία εκείνης της εποχής καταστράφηκαν κατά τις εξεγέρσεις του 2200 π.Χ. περίπου.

Τεκμήρια όμως όπως κείμενα που βρέθηκαν σε πάπυρους, όστρακα, πέτρες και ξύλα είναι τεράστιας σημασίας γιατί μας δίνουν πληροφορίες που δεν μπορούμε να πάρουμε από κείμενα που έχουν μεταγραφεί από τα πρωτότυπα όπου οι αρχικοί συμβολισμοί μπορεί να έχουν τροποποιηθεί (van der Waerden, 2000). Για παράδειγμα η πέτρα του Παλέρμο[3].. Ένα παράδειγμα τεκμηρίου αποτελεί η Πέτρα του Παλέρμο (Πέμπτη Δυναστεία) (βλ. Ritter, 1992).



Σχήμα 1.2: Η Πέτρα του Παλέρμο

[3] Πρόκειται για ένα κομμάτι μαύρου βασάλτη και βρίσκεται στο μουσείο του Παλέρμο. Πάνω στην Πέτρα έχει χαραχθεί ένα αντίγραφο των πρώιμων δυναστειακών χρονικών και μπορεί κανείς να παρατηρήσει την πιο όψιμη εξέλιξη του γραμμικού μετρικού συστήματος. Η Πέτρα του Παλέρμο είναι χωρισμένη σε καταχωρήσεις εκ των οποίων η κάθε μια αποτελείται από μια σειρά κουτιών, όπου το καθένα με τη σειρά του αντιπροσωπεύει ένα χρόνο βασιλείας ενός Φαραώ και παρουσιάζει τα σημαντικότερα γεγονότα αυτού του βασιλικού έτους – ως επί το πλείστον θρησκευτικές τελετές και προσφορές ή στρατιωτικές εκστρατείες. Το ενδιαφέρον για μας είναι ότι στον πάτο του κάθε κουτιού από την βασιλεία του Φαραώ Ντερ και μετά καταγράφεται το μέγιστο ύψος του νερού του Νείλου για το συγκεκριμένο χρόνο σε κύβιτον (αρχαία μονάδα μέτρησης ύψους – 1 κύβιτον ισούται περίπου με πενήντα εκατοστά του σημερινού μέτρου). Το σύστημα που χρησιμοποιείται είναι το τυπικό για τις μετρήσεις μήκους με την προσθήκη ενός ειδικού σημαδιού για το μισό κύβιτον που χρησιμοποιούνταν στις βασιλείες των Φαραώ Ντερ και (V) (βλ. σχήμα 1.3α). Σημαντικό είναι ότι για την περίοδο της Πέμπτης Δυναστείας των Φαραώ αυτό το σημάδι εξαφανίζεται και εμφανίζονται κλάσματα γραμμένα με την κλασική τους μορφή περίπου (βλ. σχήμα 1.3β).



Σχήμα 1.3: Τύποι αρχαϊκών κλασμάτων (λεπτομέρειες από την Πέτρα του Παλέρμο).

Στις πρώτες γραφές όπως τα ιερογλυφικά και στη συνέχεια τα ιερατικά παράλληλα με τα δημώδη βλέπουμε την έννοια του αριθμού να εκφράζεται πάντα μέσα από μετρήσεις ή σε πίνακες μέτρησης. Για κάθε σύστημα μέτρησης οι αριθμοί είχαν διαφορετικά σύμβολα (μονάδες μήκους, εμβαδού, βάρους κ.α.).
Πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με τα Αιγυπτιακά εναδικά κλάσματα. Οι απόψεις διίστανται στο κατά πόσο τα κλάσματα που αναγνωρίζονται, τα ονομαζόμενα "quantiemes" (Caveing, 1992) είχαν τον ίδιο εννοιολογικό χαρακτήρα με τους αριθμούς που εμείς σήμερα ονομάζουμε κλάσματα. Τα χρησιμοποιούσαν στις καθημερινές τους συναλλαγές και ο τρόπος που τα ερμήνευαν μας θυμίζει την ερμηνεία του κλάσματος ως μέρους μιας μονάδας. Μια ερμηνεία η οποία διαδραματίζει σπουδαίο ρόλο, όπως θα δούμε παρακάτω στην έρευνα μας, στις αντιλήψεις των μαθητών γύρω από την έννοια του κλάσματος.

Συγκεκριμένα οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν τα εναδικά κλάσματα[4], τα οποία θα λέγαμε ήταν κλάσματα με αριθμητή τη μονάδα (μοναδική εξαίρεση τα κλάσματα $\frac{2}{3}$ και $\frac{3}{4}$), συγκεκριμένα ήταν σύμβολα που περιλάμβαναν το ιερογλυφικό  (όπου το παρίστανε ανοιχτό στόμα), το οποίο σήμαινε το η-μέρος, το η-μερίδιο για να συμπληρωθεί η μονάδα. Αυτός ο συμβολισμός είναι ο αντίστοιχος $\frac{1}{n}$

[4] Τα εναδικά ή αλλιώς μοναδιαία κλάσματα είναι τα επονομαζόμενα quantième (Caveing, 1992).

με τον οποίο συμβολίζονται σήμερα οι κλασματικές μονάδες, όπου το ιερογλυφικό  έχει αντικατασταθεί με την κλασματική γραμμή.

Για παράδειγμα ενώ για τους αρχαίους Αιγυπτίους το σύμβολο  σήμαινε το τέταρτο από τα τέσσερα κομμάτια που απαιτείται για να συμπληρωθεί η μονάδα, το σύγχρονο κλάσμα $\frac{1}{4}$ σημαίνει απλά το ένα από τα τέσσερα ίσα μέρη στα οποία έχουμε διαιρέσει μια μονάδα (βλ. σχήμα 1.3).

Επιπλέον, χρησιμοποιούσαν κάποια συγκεκριμένα σύμβολα για τις αντίστοιχες σύγχρονες κλασματικές μονάδες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ και για το κλάσμα $\frac{2}{3}$. Το ενδιαφέρον είναι ότι στις συναλλαγές τους χρησιμοποιούσαν όλα τα κλάσματα τα οποία όμως συμβόλιζαν ως αθροίσματα κλασματικών μονάδων και του κλάσματος $\frac{2}{3}$. Για παράδειγμα η αριθμητική αξία του σύγχρονου κλάσματος $\frac{3}{5}$ για έναν αρχαίο Αιγύπτιο ήταν το άθροισμα των κλασματικών μονάδων $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{5}$

(δηλαδή $\frac{3}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{5}$) όπως προκύπτει από αναφορές σε αρχαία κείμενα. Σ' αυτό θα μπορούσε κάποιος να πει ότι οι Αιγύπτιοι θα μπορούσαν ίσως να είχαν σκεφτεί έναν συντομότερο τρόπο να γράψουν π.χ. το $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ χρησιμοποιώντας κάτι σαν τους δικούς μας αριθμητές και παρονομαστές. Θα απαντούσαμε λέγοντας ότι πρέπει να δεχθούμε το γεγονός πως οι Αιγύπτιοι δεν ήταν σαν τους σύγχρονους μαθηματικούς, οι οποίοι εισάγουν αμέσως συντομογραφίες για κάθε έκφραση που εμφανίζεται συχνά. Ήταν άκρως συντηρητικοί, ακολουθούσαν πιστά τις αρχαίες παραδόσεις και επέμεναν στους εν χρήσει συμβολισμούς. Ένα παράδειγμα είναι το γεγονός ότι επί χιλιάδες χρόνια τα αιγυπτιακά κείμενα συνέχιζαν να μιλούν για «τα δύο βασίλεια», ενώ η Άνω και η Κάτω Αίγυπτος είχαν προ πολλού ενοποιηθεί σε μια αυτοκρατορία. Μέσα από αυτό το πρίσμα θα δούμε τη χρήση κλασμάτων, καθώς η ιστορία των μαθηματικών δεν πρέπει να διαχωρίζεται από τη γενική ιστορία του πολιτισμού. Τα μαθηματικά είναι ένα πεδίο πνευματικής δραστηριότητας που συνδέεται στενά όχι μόνο με την αστρονομία και τη μηχανική, αλλά επίσης με την αρχιτεκτονική και την τεχνολογία, τη φιλοσοφία, ακόμη δε και με τη θρησκεία (Πυθαγόρας). Οι πολιτικές και κοινωνικές συνθήκες παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην άνθηση και το χαρακτήρα της επιστήμης.

Άλλο παράδειγμα αποτελεί το μερίδιο του γραφέα σε ένα ναό που ήταν $2\frac{1}{6}\frac{1}{18}$ άρτοι και $3\frac{2}{3}\frac{1}{45}$ στάμνες μπύρα, ενώ το μερίδιο ενός εργάτη στο ναό ήταν $\frac{2}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{180}$ της στάμνας μπύρα.

Από τα παραδείγματα αυτά γίνεται φανερή η τάση των αρχαίων Αιγυπτίων να παραθέτουν εναδικά κλάσματα ώστε να μπορούν να εκφράσουν ποσότητες τις οποίες θα μπορούσαμε σήμερα να ερμηνεύσουμε ως κοινά κλάσματα. Παρατηρούμε δηλαδή ότι η παράθεση (το άθροισμα) των εναδικών κλασμάτων θα μπορούσε να είναι εννοιολογικά μια πρώτη έκφραση του κοινού κλάσματος, παρά το γεγονός ότι το ίδιο τους ήταν άγνωστο όπως αναφέρει ο Guillemot (1992, σ. 67).

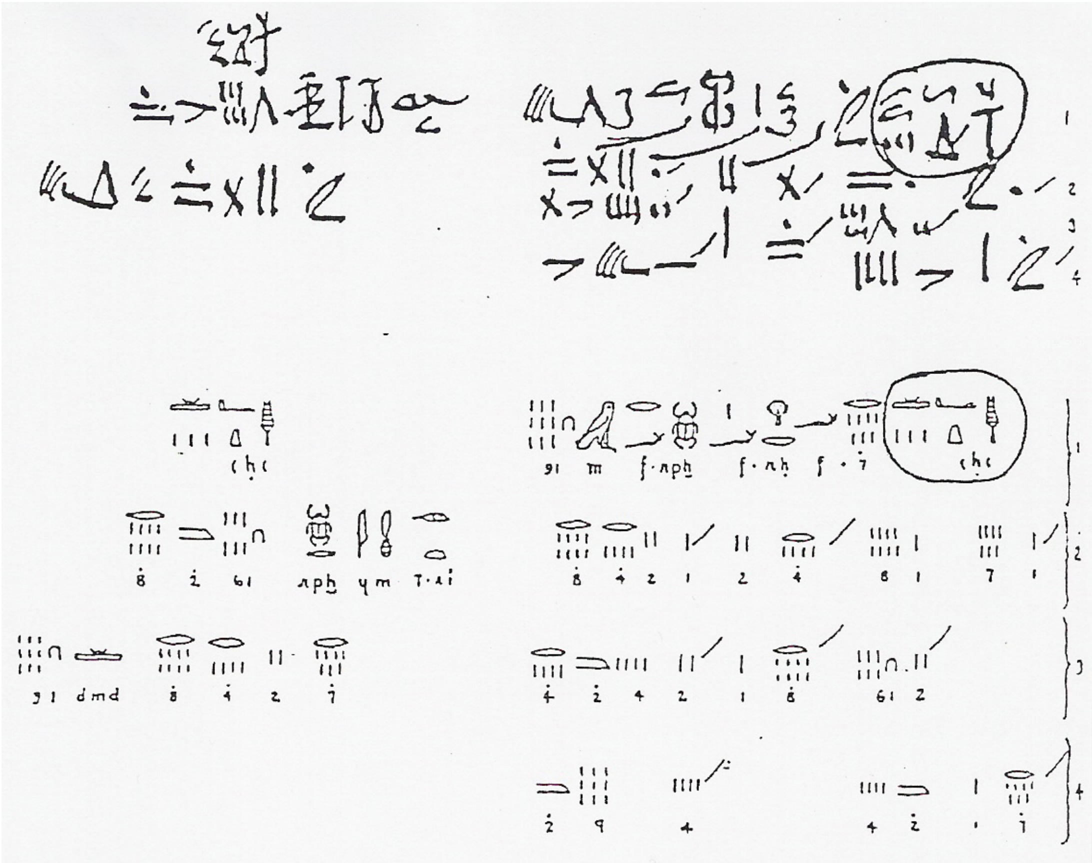
Ανάλογο παράδειγμα δυσκολίας μετάβασης από μια έννοια που έχει πρακτική εφαρμογή στην αντίστοιχη της που εκφράζεται θεωρητικά, αποτελεί η μετάβαση από την έννοια του μεικτού (που είχε ευρεία εφαρμογή) στην έννοια του καταχρηστικού κλάσματος. Στην περίπτωση αυτή θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι το αποτέλεσμα για παράδειγμα του μεικτού $1\frac{2}{5}$ κάποια χρονική περίοδο αυτονομήθηκε κι έγινε το σύγχρονο καταχρηστικό κλάσμα $\frac{7}{5}$. Είναι χαρακτηριστικό, όπως θα δούμε στην έρευνα μας παρακάτω, το λάθος των μαθητών να θεωρούν τα καταχρηστικά κλάσματα ως μικρότερα της μονάδας (θεωρώντας κάθε κλάσμα ως μέρος πάντα της μονάδας και άρα μικρότερό της), επίσης παρατηρείται διαφορετικός βαθμός δυσκολίας στον χειρισμό από τους μαθητές των μεικτών σε σχέση με τα καταχρηστικά κλάσματα (συγκεκριμένα ως προς τη διάταξη κλασμάτων που εξετάζουμε στην έρευνα μας).

Σχετικά τώρα με την ύπαρξη πράξεων ανάμεσα στα εναδικά Αιγυπτιακά κλάσματα, οι ερευνητές που προσπάθησαν να διερευνήσουν το θέμα αυτό καταφεύγουν σε λογιστικά κείμενα, σε πίνακες μέτρησης και σε πηγές όπως π. χ. ο Πάπυρος του

Rhind (βλ., Σχήμα 1.4) και ο Δερμάτινος Κύλινδρος (1600 π. Χ. – τα πρωτότυπα χρονολογούνται από το 1850 π.Χ.). Και πάλι οι απόψεις διίστανται.

Ο Πάπυρος του Rhind (πιο σπάνια αναφέρεται και ως πάπυρος του Αχμή, προς τιμή του γραφέα που τον αντέγραψε γύρω στα 1650 π.Χ.), ονομάστηκε έτσι λόγω του σκωτσέζου συλλέκτη A. H. Rhind, ο οποίος αγόρασε στα 1858 το κείμενο αυτό στο Λούξορ, μια απομακρυσμένη πόλη του Νείλου, και στην συνέχεια το κληροδότησε στο Βρετανικό Μουσείο όπου και βρίσκεται σήμερα (εκτός από ορισμένα τμήματα του που βρίσκονται στο μουσείο του Brooklyn). Ο πάπυρος αυτός, ύψους 33 εκατοστών και μήκους 6 μέτρων, γράφτηκε κατά την περίοδο της κυριαρχίας της Αιγύπτου από τους Υξώς (μετά το 1800 π.Χ.) αλλά, όπως μας διαβεβαιώνει ο συγγραφέας του, προέρχεται από ένα πρωτότυπο που χρονολογείται από το Μέσο Βασίλειο (2000-1800 π.Χ.). Μας λέει ακόμη ότι ίσως μερικές από αυτές τις γνώσεις να προέρχονται από τον Ιμχοτέπ, το σχεδόν μυθικό αρχιτέκτονα και γιατρό του Φαρώ Ζορέρ (ο Ιμχοτέπ επέβλεψε το κτίσιμο της πυραμίδας του Φαραώ πριν 5000 χρόνια). Σε κάθε περίπτωση, φαίνεται ότι τα αιγυπτιακά μαθηματικά έμειναν στάσιμα για 2000 χρόνια μετά από ένα ευοίωνο ξεκίνημα. Στο Μέσο Βασίλειο ανήκουν, επίσης όλα τα υπόλοιπα μαθηματικού περιεχομένου κείμενα που μας είναι γνωστά. Είναι επομένως λογικό να προσδοκούμε ότι διαμέσου αυτού του κειμένου θα γνωρίσουμε τις κύριες μαθηματικές γνώσεις αυτής της περιόδου.

Ο πάπυρος αρχίζει με έναν πολλά υποσχόμενο τρόπο: διατείνεται ότι θα παράσχει «πλήρη και λεπτομερή ανάλυση όλων των πραγμάτων, που ενυπάρχουν σε όλα τα όντα, γνώση όλων των μυστικών…». Γρήγορα όμως καταλαβαίνουμε ότι σκοπός του συγγραφέα δεν είναι να αποκαλύψει την πρώτη αρχή των πραγμάτων, αλλά απλώς να μυήσει τους αναγνώστες του στα μυστικά των αριθμών και στην τέχνη των υπολογισμών με κλάσματα, θέμα ιδιαίτερα χρήσιμο σε ποικίλα πρακτικά προβλήματα με τα οποία ασχολούνταν οι υπάλληλοι του μεγάλου κράτους. Τέτοια είναι το μοίρασμα των μισθών σε ένα αριθμό μεροκαματιάρηδων, ο υπολογισμός της ποσότητας των σιτηρών που χρειάζονται για την παραγωγή μιας δεδομένης ποσότητας ψωμιού ή μπίρας, ο υπολογισμός εμβαδών και όγκων, η μετατροπή διαφόρων μονάδων μέτρησης των σιτηρών. Ωστόσο, ανάμεσα σε αυτά, υπάρχουν και ορισμένα καθαρά θεωρητικά ερωτήματα, από τα οποία κατασκευάζονται ασκήσεις που εντάσσονται στη δύσκολη τέχνη του λογισμού με κλάσματα.



Σχήμα 1.4: Ένα παράδειγμα τεκμηρίου-πηγής αποτελεί ο Πάπυρος του Rhind. Σε αυτό το απόσπασμα αναγράφεται ένα πρόβλημα στο οποίο οι κύκλοι δηλώνουν ποσότητα, στα ιερατικά και στα ιερογλυφικά (βλ. Fauvel & Gray, 1987).

Σύμφωνα με τον van der Waerden γενικά τα προβλήματα των κειμένων αυτών είναι προσανατολισμένα στις εφαρμογές, κάτι που διακρίνεται και στο λογισμό με κλάσματα, που αναπτύσσεται συστηματικά στον πάπυρο του Rhind, ο οποίος εφαρμόζεται σε κείμενα οικονομικού περιεχομένου, όπως για παράδειγμα στον πάπυρο του Καχούν (βλέπε F. L. Griffith, Hieratic Papyri from Kahun and Gurob, Λονδίνο 1898, σελ. 15).

Σχετικά τώρα με τις πράξεις που χρησιμοποιούσαν οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι και συγκεκριμένα με τη διαίρεση, αυτό που έκαναν όταν αυτή δεν έφτανε «ως το τέλος» ήταν ότι ακριβώς κάνουμε κι εμείς: κατέφευγαν στα κλάσματα. Κλάσματα με αριθμητή και παρονομαστή, έτσι όπως τα ξέρουμε σήμερα, δεν υπάρχουν στα αιγυπτιακά μαθηματικά. Εκεί συναντούμε, κατά πρώτο λόγο, έναν περιορισμένο αριθμό *φυσικών κλασμάτων*, τα οποία χρησιμοποιούνταν στην καθημερινή ζωή και τα οποία δηλώνονταν με ειδικά ονόματα.

Σήμερα σπάνια χρησιμοποιούμε στην καθημερινή ζωή άλλα κλάσματα εκτός από το $\frac{1}{2}$, το $\frac{1}{4}$ και το $\frac{3}{4}$, καθώς και την έκφραση «επί τοις εκατό». Στο χρηματιστήριο χρησιμοποιείται, επίσης το ένα όγδοο ή το ένα δέκατο έκτο της εκατοστιαίας μονάδας. Στη γαλλική γλώσσα υπάρχει ακόμη ειδική λέξη για το ένα τρίτο (tiers). Στην Αρχαία Αίγυπτο είχαν ειδικές λέξεις για το $\frac{1}{2}$, το $\frac{1}{3}$, τα $\frac{2}{3}$, το $\frac{1}{4}$ και τα $\frac{3}{4}$, που αποτελούσαν τα φυσικά κλάσματα, στα οποία μπορούν ακόμη να συνυπολογισθούν το $\frac{1}{6}$ και το $\frac{1}{8}$.

Με την ανάπτυξη της τεχνικής των υπολογισμών, το σύνολο των κλασμάτων διευρύνθηκε ώστε να συμπεριλάβει και τις *κλασματικές μονάδες* (δηλαδή τα κλάσματα που έχουν ως αριθμητή τη μονάδα). Πέραν αυτών οι Αιγύπτιοι δεν ήταν σε θέση να γράφουν κανένα άλλο κλάσμα.

Αξιοσημείωτη είναι η λεκτική έκφραση για το $\frac{2}{3}$, το κυριολεκτικό νόημα της οποίας είναι «τα δύο μέρη». Το συμπλήρωμα δε που απαιτείται ώστε να παραχθεί από τα δύο μέρη ένα όλο, είναι το «τρίτο μέρος».

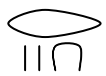
Στην ελληνική γλώσσα επίσης λέγεται

«τα δύο μέρη» $\frac{2}{3}$ - «το τρίτο μέρος» $\frac{1}{3}$

«τα τρία μέρη» $\frac{3}{4}$ - «το τέταρτο μέρος» $\frac{1}{4}$

Εντελώς φυσικά, προκύπτει μια συγκεκριμένη ερμηνεία: έχουμε τρία μέρη και εν συνεχεία, προσθέτουμε ένα τέταρτο μέρος ώστε να παραχθεί το όλο. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να εξηγήσουμε τη χρήση των λέξεων τρίτο , τέταρτο, πέμπτο, κ.λ.π. Σύμφωνα με την ερμηνεία αυτή, το πέμπτο μέρος είναι το τελευταίο μέρος που προστίθεται στα υπόλοιπα τέσσερα μέρη για να συμπληρωθεί η μονάδα. Από γλωσσολογική άποψη δεν έχει νόημα να μιλάμε για δύο πέμπτα, γιατί υπάρχει μόνο ένα πέμπτο μέρος, δηλαδή το τελευταίο.

Οι Αιγύπτιοι δεν υπέκυψαν στον πειρασμό να άρουν αυτή τη γλωσσολογική αντίφαση. Κατά συνέπεια, δεν μπόρεσαν να δημιουργήσουν ένα βολικό συμβολισμό για τα υπόλοιπα κλάσματα πέραν των κλασματικών μονάδων. Τις κλασματικές μονάδες τις παρίσταναν γράφοντας τον παρονομαστή, με την επισύναψη του ειδικού συμβόλου που προφέρεται «ρ» και σημαίνει μέρος, όπως λ.χ.

 $= \frac{1}{12}$

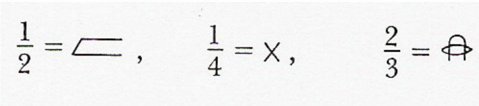
ενώ κάθε άλλο κλάσμα το ανήγαγαν σε κλασματικές μονάδες, όπως για παράδειγμα:

$3/8 = 1/4 + 1/8$

Το κλάσμα $2/3$ είναι το μόνο για το οποίο δεν χρειαζόταν αναγωγή, γιατί είχε τη δική του ονομασία, «τα δύο μέρη» και τον δικό του ιερογλυφικό χαρακτήρα .

Το αρχαίο σύμβολο για το $3/4$ που ήταν το αντικαταστάθηκε αργότερα με τη διαμέριση $= 1/2 + 1/4$.

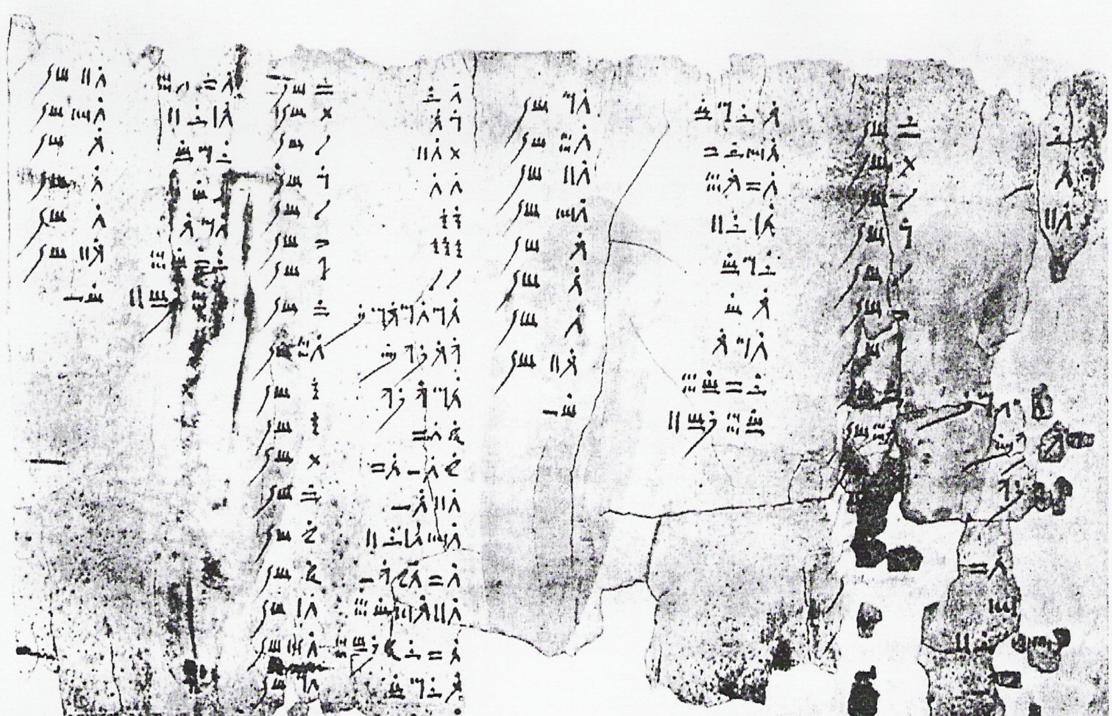
όπου:



Το ότι για μερικά κλάσματα, που χρησιμοποιούσαν συνεχώς, είχαν και ειδικά σύμβολα, μοιάζει με τη δική μας συνήθεια να λέμε πιο συχνά «μισό» παρά «ένα δεύτερο».

Ερευνητές όπως οι Jim Ritter και Michel Guillemot (1992) θεωρούν ότι ενώ υπάρχουν τεκμήρια από πολλαπλασιασμούς κλασματικών μονάδων με μονάδες άλλων συστημάτων (π.χ. ακέραιους), δεν θεωρούν ότι υπάρχουν τεκμήρια που να καταδείχνουν πράξεις ανάμεσα σ' αυτές τις κλασματικές μονάδες. Οι Guillemot (ό. π) αντίστοιχα πίστευε ότι στο μοναδικό τομέα που εκτελούσαν πράξεις οι αρχαίοι Αιγύπτιοι ήταν σε αθροίσματα των ακεραίων, των *quantiémes* και του $\frac{2}{3}$. Παρόλα αυτά από τη μελέτη αρχαίων κειμένων αναγνωρίζει κάποιους κανόνες χειρισμού των Αιγυπτιακών κλασμάτων όπως τον κανόνα των δύο τρίτων, του πολλαπλασιασμού κλασματικών μονάδων και της αντιστροφής.

Κάνοντας μια επισκόπηση θα λέγαμε ότι αρχικά οι Αιγύπτιοι, όπως και τα άλλα έθνη, διέθεταν μόνο ένα περιορισμένο αριθμό ακεραίων, που αρκούσαν για τις ανάγκες της καθημερινής ζωής και ένα περιορισμένο αριθμό «φυσικών κλασμάτων»: $1/2$, $1/3$, $2/3$, $1/4$, $3/4$, $1/6$, $1/8$. Αυτό το πρωταρχικό στάδιο, ωστόσο, ανήκει στην προϊστορία. Η ιστορία της τεχνικής των υπολογισμών αρχίζει με την επέκταση αυτού του πρωταρχικού οπλοστασίου αριθμών, όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο van der Waerden, και προς τις δύο κατευθύνσεις. Η επέκταση αυτή κατέστη αναγκαία από τη στιγμή που έπρεπε να οργανωθεί η αυτοκρατορία, να διοικηθεί ο στρατός και να συγκεντρωθούν οι φόροι. Το κυρίαρχο στοιχείο στον τρόπο του σκέπτεσθαι του αιγυπτίου υπολογιστή είναι η πρόσθεση. Τα κλάσματα τα γράφει ως αθροίσματα κλασματικών μονάδων. Ο πολλαπλασιασμός είναι γι αυτόν ένα είδος πρόσθεσης. Ο τεχνικός όρος για τον πολλαπλασιασμό είναι «πρόσθεσε, αρχίζοντας με». Από τον πολλαπλασιασμό περάσαμε φυσιολογικά στη διαίρεση που δεν είναι τίποτα άλλο παρά το αντίστροφο του πολλαπλασιασμού. Για να εκτελεσθεί όμως μια διαίρεση χρειάζονται κλάσματα και πράξεις με κλάσματα. Έτσι το πρόβλημα της διαίρεσης οδήγησε σε μια νέα ανάπτυξη, στον λογισμό με κλάσματα. Στην συνέχεια είχαμε τον εντοπισμό μερικών απλών σχέσεων μεταξύ φυσικών κλασμάτων, για παράδειγμα όπως θα γράφαμε σήμερα $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ (τα τρία αυτά απλά παραδείγματα περιέχονται στον «δερμάτινο κύλινδρο του Λονδίνου», ο οποίος περιέχει διάφορους υπολογισμούς, μερικοί από τους οποίους όπως οι παραπάνω είναι εξαιρετικά απλοί , που αποβλέπουν στη διδασκαλία της πρόσθεσης κλασμάτων),

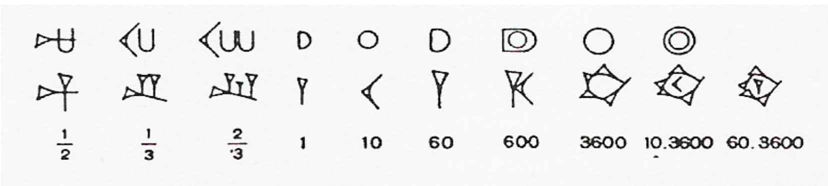


Εικ. 3. Ο δερμάτινος κύλινδρος του Βρετανικού Μουσείου (BM 10250) περιέχει απλές σχέσεις μεταξύ κλασμάτων. Λέγεται ότι ο κύλινδρος α-νακαλύφθηκε μαζί με τον πάπυρο Rhind πλησίον του Rammesseum στις Θήβες. Χρονολογείται περίπου από το 1700 π.Χ. Το ξετύλιγμα του ξηραμένου κυλίνδρου υπήρξε επίτευγμα της σύγχρονης χημείας. Αρχικώς, το περιεχόμενο φάνηκε απογοητευτικό: κάθε αράδα έδινε μια απλή σχέση μεταξύ κλασμάτων, όπως $\bar{9}+\bar{18}=\bar{6}$, $\bar{5}+\bar{20}=\bar{4}$ κ.λπ. Ωστόσο, ο δερμάτινος κύλινδρος αποδείχθηκε πολύτιμος καθόσον παρέσχε το κλειδί για την κατανόηση των αρχικών σταδίων του λογισμού με κλάσματα. Βλέπε S.R.K. Glanville, «The mathematical leather roll in the British Museum», *Journal of Egyptian Archaeology*, τόμ. 13 (1927), σελ. 232-239 και B.L. van der Waerden, «Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung», *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Abt. B: *Studien*, τόμ. 4 (1938), σελ. 359.

ή σχέσεις όπως $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ (οι οποίες χρησιμοποιούνται επανειλημμένα στον πάπυρο Rhind). Με υποδιπλασιασμό προέκυψαν επιπρόσθετοι κανόνες.

Τέλος θα πρέπει να σημειώσουμε την σχετική αναφορά του van der Waerden («η αφύπνιση της επιστήμης», σελ. 28, 2003), ότι είναι βέβαιο ότι οι Έλληνες διδάχθηκαν από τους Αιγυπτίους τον πολλαπλασιασμό τους και τον λογισμό με κλασματικές μονάδες, τα οποία στην συνέχεια ανέπτυξαν παραπέρα, όπως αποδεικνύεται από τον πάπυρο Akhmîm της ελληνιστικής περιόδου. Τα μαθηματικά όμως δεν ταυτίζονται με τους υπολογισμούς και οι περίπλοκοι υπολογισμοί με κλάσματα που χαρακτηρίζουν τα αιγυπτιακά μαθηματικά δεν μπορούν να αποτελέσουν τη βάση της ανώτερης άλγεβρας.

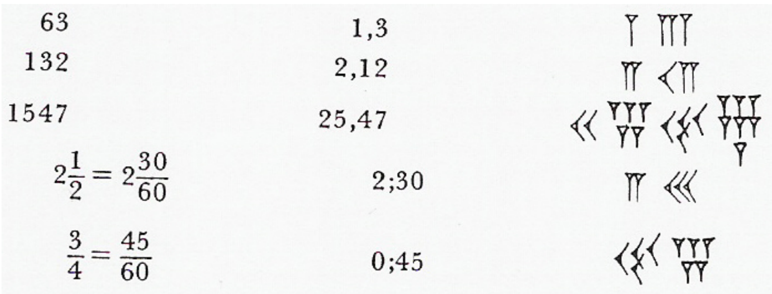
ii) Βαβυλώνιοι (2000 π.Χ. έως 500 π.Χ.)



Παράλληλα με τους αρχαίους Αιγυπτίους, οι Βαβυλώνιοι είχαν, όπως θα δούμε, ένα θαυμάσιο συμβολισμό για τους ακέραιους αριθμούς και για τα κλάσματα, ο οποίος τους επέτρεπε να λογαριάζουν με κλάσματα τόσο εύκολα όσο και με ακεραίους. Αυτό τους έδωσε τη δυνατότητα να αναπτύξουν σε υψηλό βαθμό την άλγεβρα. Γνώριζαν πώς να επιλύουν συστήματα πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων εξισώσεων με δύο ή με περισσότερους αγνώστους. Αυτό θα ήταν αδύνατο για τους Αιγυπτίους, γιατί ο περίπλοκος κλασματικός λογισμός τους καθιστούσε κάθε διαίρεση, κάθε αφαίρεση κλασμάτων, ένα δύσκολο πρόβλημα. Οι Βαβυλώνιοι ανέπτυξαν ένα σύστημα αρίθμησης με *αξία θέσης* και βάση το *εξήντα*. Οι αριθμοί γράφονταν ως αθροίσματα δυνάμεων του εξήντα. Το εξηκονταδικό σύστημα οι σημίτες Βαβυλώνιοι το παρέλαβαν από τους προγενέστερους τους Σουμέριους που κυριαρχούσαν στη νότια Μεσοποταμία κατά την τρίτη χιλιετία π.Χ. (και οι οποίοι επινόησαν επίσης την σφηνοειδή γραφή). Αυτό ανακαλύφθηκε από κάποιους πίνακες των τετράγωνων ακεραίων αριθμών (2000 π.Χ.). Τα περισσότερα αρχαία σουμεριακά κείμενα από τα οποία συνάγεται το σουμεριακό αριθμητικό σύστημα και τα οποία χρονολογούνται, όπως αναφέρει ο van der Waerden, από την εποχή του Shulgi (περί το 2000 π.Χ.), είναι πίνακες αντιστρόφων ($1/x$) και πίνακες πολλαπλασιασμού. Οι τελευταίοι αυτοί πίνακες εμφανίζονται είτε μεμονωμένα είτε σε συνδυασμό με άλλους. Κάθε επιμέρους πίνακας περιέχει τα πολλαπλάσια ενός μόνο αριθμού.

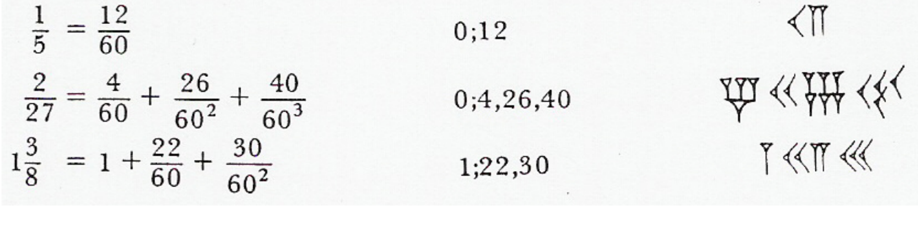
Διάφοροι τέτοιοι μικροί πίνακες, συνδυάζονταν συχνά με έναν πίνακα αντιστρόφων και έναν πίνακα τετραγώνων, για να σχηματίσουν ένα μεγάλο συνδυασμένο πίνακα. Υπάρχουν μακροσκελείς πίνακες αντιστρόφων από την εποχή των Σελευκιδών (311-1 π.Χ.), που είχαν πιθανώς συνταχθεί προκειμένου να χρησιμοποιούνται από τους αστρονόμους.

Οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν σύνθετους πίνακες για τον πολλαπλασιασμό *ακίων* αλλά και για να αναπαριστούν κοινά κλάσματα ως *εξηκονταδικά*. Για παράδειγμα το $1/2$ ισοδυναμεί με το 30, το $1/3$ με το 20, το $1/4$ με το 15 και το $1/6$ με το 10, π.χ. το 63 $1/2$ =1, 3; 30 και παρόμοια 1 $7/120$ = 1; 3, 30.



63	1,3
132	2,12
1547	25,47
$2\frac{1}{2} = 2\frac{30}{60}$	2;30
$\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$	0;45

Με τη βοήθεια των πινάκων που αναφέραμε προηγουμένως, για να γράψουμε, για παράδειγμα, το $3/8$ σε εξηκονταδική μορφή αρκεί να εντοπίσουμε καταρχήν στον πίνακα των αντιστρόφων το 1 : 8 = 0; 7, 30 (όπου το σύμβολο του ερωτηματικού ; το χρησιμοποιούμε για το ρόλο που παίζει σήμερα το δεκαδικό σημείο) και κατόπιν, στον πίνακα πολλαπλασιασμού, το γινόμενο αυτού του εξαγόμενου με το 3 που είναι 0; 22, 30.



$\frac{1}{5} = \frac{12}{60}$	0;12
$\frac{2}{27} = \frac{4}{60} + \frac{26}{60^2} + \frac{40}{60^3}$	0;4,26,40
$1\frac{3}{8} = 1 + \frac{22}{60} + \frac{30}{60^2}$	1;22,30

Η ερμηνεία αυτή επιβεβαιώνεται πλήρως από τα μαθηματικά κείμενα καθώς κάθε φορά που πρόκειται να εκτελεστεί μια διαίρεση a : b στα κείμενα αυτά, κάποιος υπαγορεύει (όχι με τη μορφή γενικού τύπου, αλλά για κατονομασμένους αριθμούς): υπολόγισε τον αντίστροφο b^{-1} και πολλαπλασίασέ τον επί a. Φαίνεται επομένως, ότι οι σουμερο-βαβυλωνιακοί υπολογιστικοί πίνακες ήταν διατεταγμένοι με χρηστικό τρόπο. Η συστηματική χρήση των πλεονεκτημάτων του θεσιακού συμβολισμού παρακάμπτει κάθε κατατριβή με κλάσματα. Οι τέσσερις πράξεις της αριθμητικής των ρητών αριθμών μπορούν να εκτελούνται γρήγορα χωρίς περαιτέρω σκέψη. Όταν η διαίρεση άφηνε υπόλοιπο, χρησιμοποιούνταν προσεγγίσεις.

Όπως είδαμε, αντίθετα με τα Αιγυπτιακά εναδικά, τα εξηκονταδικά κλάσματα είχαν μορφή ακεραίου και προέκυψαν αρκετά φυσικά καθώς υποδιαιρούσαν τον χρόνο σε 360 μέρες, την ώρα σε 60΄ και το 1΄σε 60΄΄ (Burton, 1991). Οι ακέραιες μονάδες σ' αυτό το εξηκονταδικό σύστημα δεν διαφοροποιούνται στο συμβολισμό τους από τις υποδιαιρέσεις τους.

Ένα πρόβλημα όπως για παράδειγμα αυτό του υπολογισμού της τετραγωνικής ρίζας ενός αθροίσματος κλασματικών μονάδων όπως το $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{25}$ που δεν μπορούμε να δούμε πως θα μπορούσε να λυθεί από τους Αιγυπτίους, οι Βαβυλώνιοι το έγραφαν σαν εξηκονταδικό κλάσμα:

0; 38, 24, δηλαδή $38/60 + 24/60^2$,

και αναζητούσαν την τετραγωνική ρίζα σε έναν πίνακα:

$\sqrt{0;\ 38,\ 24} = 0;\ 48.$

Αν ο αριθμός δεν ήταν τέλειο τετράγωνο, θα χρησιμοποιούσαν απλώς μια προσεγγιστική τιμή.

Γενικά η περίοδος αυτή χαρακτηρίζεται από την επέκταση των ακεραίων στα εξηκονταδικά κλάσματα που θα επιβιώσουν στην πορεία του χρόνου ιδιαίτερα στην περιοχή της αστρονομίας. Όπως αναφέρει και ο van der Waerden (2003), είναι αλήθεια ότι ο Πτολεμαίος έγραφε τους ακέραιους αριθμούς στο δεκαδικό σύστημα και μόνο τα κλάσματα στο εξηκονταδικό. Η τεράστια υπεροχή των εξηκονταδικών κλασμάτων στους υπολογισμούς είναι η αιτία για την αποδοχή τους από τους αστρονόμους. Το σύστημα μέτρησης του χρόνου στην εποχή μας είναι απομεινάρι του Βαβυλωνιακού εξηκονταδικού συστήματος.

1.1.1.2 Δεύτερη περίοδος: Αρχαίοι Έλληνες (600 π.Χ.-300 μ.Χ.)

i) Αρχαία Ελλάδα (600 π.Χ.-300 μ.Χ.)

Η πλέον αρχαία αναφορά σε κλάσματα στην Ελληνική λογοτεχνία είναι στην Ομήρου Ιλιάδα (Ραψωδία Κ, στ. 253)[5]

«Δύο μέρη της νύχτας πέρασαν. Το τρίτο μένει»

Ένα σχόλιο, μια παρασελίδια σημείωση, στον Χαρμίδη του Πλάτωνος περιγράφει τα πιο σημαντικά μέρη της αριθμητικής ή «λογιστικής» ως εξής: «Οι λεγόμενες ελληνικές και αιγυπτιακές μέθοδοι για τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις και οι συγκεφαλαιώσεις και διασπάσεις των κλασμάτων. Οι «συγκεφαλαιώσεις» αναφέρονται προφανώς στην πρόσθεση των κλασμάτων, όσο για το τι σημαίνουν οι «διαιρέσεις» των κλασμάτων μπορούμε να το μάθουμε από τον πάπυρο του Akhmîm, όπου κλάσματα m/n διασπώνται σε κλασματικές μονάδες για n = 3, 4, …, 20 και για διάφορες τιμές του m, όπως για παράδειγμα:

«Το δέκατο έβδομο μέρος του 3 είναι $1/12 + 1/17 + 1/51 + 1/68$ »

[των Γ το ιζ΄ ιβ΄ ιζ΄ να΄ ξη΄. (αναφορά van der Waerden σελ. 46 στον J. Baillet)]

Πριν από τον Αρχιμήδη, τα κλάσματα απουσίαζαν παντελώς από τα επίσημα ελληνικά μαθηματικά χωρίς ωστόσο αυτό να σημαίνει ότι ήταν άγνωστα αλλά μάλλον θα λέγαμε ότι ήθελαν να τα αγνοούν διότι σύμφωνα με τον Πλάτωνα, η μονάδα ήταν αδιαίρετη και όπως αναφέρει ο ίδιος «οι δεινοί περί αυτά» ήταν ριζικά αντίθετοι με το να την τέμνουν (Πολιτεία, 525Ε). Τα κλάσματα τα περιφρονούσαν και η χρήση τους αφηνόταν στους εμπόρους. Όπως έλεγαν, τα ορατά πράγματα είναι διαιρετά αλλά οι μαθηματικές μονάδες όχι. Αντί να εργάζονται με κλάσματα εργάζονταν με λόγους ακεραίων.

Στην Αρχαία Ελλάδα συμβόλιζαν τους αριθμούς με την ιωνική αλφάβητο έχοντας ως βάση το 10. Από τον 5^{ο} αιώνα π.Χ. με τον Πυθαγόρα και τη Σχολή που ανέπτυξε, η έννοια του αριθμού παίρνει μυστικιστική υπόσταση. «Ο αριθμός είναι η ουσία των όντων και σαν τέτοιος έχει μαγική δύναμη». Οι Πυθαγόρειοι (540-450 π.Χ.) φαίνεται να δέχονται την ύπαρξη των ακεραίων μόνο αριθμών. Η επιστημονική θεωρία καθώς και η ορολογία όμως που ανέπτυξαν – π.χ. για τα μουσικά διαστήματα (βλ.

[5] Στο στίχο αυτό παρατηρούμε ότι αναφέρονται κάποια απλά κλάσματα που είχαν άμεσες καθημερινές εφαρμογές. Συγκεκριμένα τα κλάσματα αυτά είχαν ιδιαίτερο συμβολισμό στην Αίγυπτο και σήμερα γράφονται ως $2/3$ και $1/3$. Τέτοια κλάσματα ήταν ακόμη το $1/2$ (μισό), το $1/4$ (τέταρτο) και το $3/4$.

Φιλόλαος)[6] – ώστε να αντικαταστήσουν τα μεικτά κλάσματα με λόγους, δείχνει ότι κατείχαν κάποια λανθάνουσα ίσως γνώση των κλασμάτων (Bunt, Jones & Bedient, 1981). Η ορολογία που χρησιμοποιείται στην πυθαγόρεια θεωρία της αρμονίας για τους λόγους μεταξύ αριθμών μας δίνει την εντύπωση ότι αυτοί οι λόγοι αρχικά ήταν κλάσματα. Ο λόγος 4 : 3, ο οποίος αντιστοιχεί στο μουσικό διάστημα της τετάρτης, ονομαζόταν «επίτριτος», που σημαίνει «ένα τρίτο επιπλέον» ($1\,{}^{1}\!/_{3}$), ενώ ολόκληρος ο τόνος, στον οποίο αντιστοιχεί ο λόγος 9 : 8 ονομαζόταν «επόγδοος», δηλαδή $1\,{}^{1}\!/_{8}$. Ο Φιλόλαος (450 π.Χ.) έγραφε: «Το Ένα είναι η αρχή του παντός», έδινε δε ιδιαίτερη σπουδαιότητα στον αριθμό 10. Τον 4^{ο} αιώνα π.Χ. επικρατεί η αντίληψη του Πλάτωνα[7] (388 π.Χ.) για το αδιαίρετο της μονάδας που έρχεται σε σύγκρουση με την έννοια του κλάσματος. Με τον Αριστοτέλη θεσμοθετείται η αντίληψη της έννοιας της μονάδας ως μονάδας μέτρησης (Caveing, 1992).

Σε νεώτερα μαθηματικά έργα όπως τα Στοιχεία του Ευκλείδη (300 π.Χ.), που αποτελούν την κορύφωση των καθαρών θεωρητικών μαθηματικών ως αριθμοί αναφέρονται μόνο οι ακέραιοι. Ο ορισμός του αριθμού όπως αναφέρεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη είναι:

> “Το εκ μονάδων συγκείμενον πλήθος (πλήθος αποτελούμενο από μονάδες).”
> (Ευκλείδου Στοιχεία VII, Ορισμός 2)

Στην πρακτική λογιστική το κλάσμα έχει την ίδια τυπολογία όπως τα Αιγυπτιακά κλάσματα, μόνο που εδώ τα κλάσματα ονομάζονται *μέρη* ή *μόρια*. Τα *μέρη* τα χειρίζονται ως μια επέκταση των αριθμών και η ιδέα του *λόγου* ακόμη και όταν αναφέρεται σε αυτά τα *μέρη*, δεν σχετίζεται με αριθμητική ποσότητα (Fowler, 1987, σ. 247).

---

[6] Σύμφωνα με αυτήν τη θεωρία βασικά μουσικά διαστήματα όπως ή οκτάβα, το πέμπτο και το τέταρτο αντιστοιχούν σε λόγους απλών αριθμών, π.χ. το τέταρτο αντιστοιχεί στο λόγο 4:3 που το ονομάζαν επίτριτον, παρόμοια ο λόγος 9:8 σύμφωνα με τους Πυθαγόρειους ονομαζόταν επόγδοοπου σημαίνει «πάνω σ’ αυτό ένα όγδοο» ή 1 + 1/8. Συνεπώς παρατηρούμε ότι οι Πυθαγόρειοι ξεκίνησαν από τα μικτά κλάσματα $1\frac{1}{3}$ και $1\frac{1}{8}$, γνωστά από την καθημερινή ζωή και ανέπτυξαν μια επιστημονική θεωρία όπου αυτά τα κλάσματα αντικαταστάθηκαν από τους λόγους 4:3 και 9:8.

[7] Πλάτων (427π.Χ.-347 π.Χ.).

Συγκεκριμένα οι αριθμοί στην Αρχαία Ελλάδα συμβολίζονταν με τα γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου. Έτσι η ακολουθία δύο, τρία, τέσσερα, πέντε,…, συμβολίζονταν με τα β, γ, δ, ε,…..Τα *μέρη* όπως το *δεύτερο*, το *τρίτο*, το *τέταρτο*, το *πέμπτο*, …συμβολίζονταν με τα ίδια γράμματα μόνο που είχαν ένα τόνο πάνω

από το γράμμα: βˈ,γˈ,δˈ,εˈ,…….(ο τόνος αυτός μπορούσε όπως και στα αιγυπτιακά εναδικά κλάσματα να ήταν μια παύλα ή μια τελεία. Αυτά διαβάζονταν ως *το δεύτερο*, *το τρίτο*, *το τέταρτο*,… και όχι το ένα δεύτερο ή το ένα τρίτο ή το ένα τέταρτο….Το δε σύμβολο του 2/3 το ονόμαζαν τα δύο μέρη και το συμβόλιζαν με

το γράμμα β με δύο τόνους στο πάνω μέρος του: βˈˈ (βλ. Fowler, 1987, σ. 227). Σημαντικό είναι να παραθέσουμε την άποψη του Fowler όπως ακριβώς την εκφράζει: «Στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά κείμενα, είτε τα επιστημονικά είτε τα εμπορικά ή τα παιδαγωγικά, δεν υπάρχει κανένα τεκμήριο ότι υπήρχε οποιαδήποτε έννοια του κοινού κλάσματος p/q και χειρισμού τέτοιων κλασμάτων, όπως για παράδειγμα ότι το γινόμενο p/q x r/s = pr/qs και ότι p/q + r/s = (ps +qr)/qs, πριν από την εποχή του Ήρωνα και του Διόφαντου…»
(βλ. Fowler, 1987, σ. 226)

Στη θεωρητική λογιστική οι λόγοι δεν προσθέτονται ποτέ και η σύνθεση ή ο πολλαπλασιασμός των λόγων στα Ελληνικά μαθηματικά πριν από τα έργα του Απολλώνιου δεν υφίστανται[8]. Αντίθετα η εμπορική παράδοση είναι γεμάτη από αριθμητικούς υπολογισμούς. Η πιο σημαντική αριθμητική πράξη που αναδεικνύει κλασματικές ποσότητες είναι η πράξη της διαίρεσης όπως φαίνεται από το παρακάτω παράδειγμα (βλ. Fowler, 1992, σ. 136):

των ιβ	το ίξ	/	ˈ ˈ ˈ ˈ ˈ Lίβίξλόνάχή
από τα 12	το 17^{o}	είναι	ˈ ˈ ˈ ˈ ˈ ˈ ˈ ˈ ˈ ˈ ˈ 2 1 2 1 7 3 4 5 1 6 8

γι' αυτό που θα γράφαμε σήμερα ως: $\frac{12}{17}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{17}+\frac{1}{34}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$

[8] Ο Fowler (1992) αναφέρεται ιδιαίτερα στη θεωρία της μουσικής και πιστεύει ότι οι μαθηματικοί στην Αρχαία Ελλάδα αντιμετώπιζαν πρόβλημα στην σύνθεση λόγων που σήμερα αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό κοινών κλασμάτων.

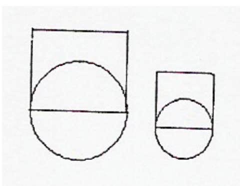
Επιπλέον ο Fowler αναφέρει ότι : «… η λανθάνουσα διαίσθηση των ελληνικών μαθηματικών δεν ήταν αριθμητικοποιημένη».

Συνεπώς οι Αρχαίοι Έλληνες αντί να αναφέρουν ότι μια ποσότητα είναι τα 2/5 μιας άλλης αναφέρουν ότι ο λόγος τους είναι 2 στα 5. Σύμφωνα με τον van der Waerden (1976) ένας βασικός λόγος που τα κλάσματα εξαιρέθηκαν από τα καθαρά μαθηματικά ήταν πιθανά η Πλατωνική φιλοσοφική αντίληψη ότι η μονάδα είναι αδιαίρετη.

Ας σταθούμε στο παράδειγμα μιας Ευκλείδειας πρότασης που σήμερα αναφέρεται ως «*ο λόγος του εμβαδού δύο κύκλων ισούται με το λόγο των τετραγώνων των ακτίνων τους*». Σύμφωνα με την πρόταση αυτή ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων, έχει ως αποτέλεσμα να ισούται με ένα αριθμητικό κλάσμα. Συγκεκριμένα, ο λόγος $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$, όπου ο λόγος $\frac{R_1^2}{R_2^2}$ αποτελεί σήμερα ένα αριθμητικό κλάσμα. Το παραπάνω θεώρημα αποτελεί την σύγχρονη, αριθμητικοποιημένη ερμηνεία της δεύτερης πρότασης του $12^{ου}$ βιβλίου από τα Στοιχεία του Ευκλείδη. Η πρόταση αυτή συγκεκριμένα αναφέρει:

« Οι κύκλοι προς αλλήλους εισίν ως προς τα των διαμέτρων τετράγωνα»

Στην παραπάνω πρόταση παρατηρούμε ότι ο Ευκλείδης ερμηνεύει το λόγο των χωρίων των δύο κύκλων ως το λόγο των χωρίων των δύο τετραγώνων. Συγκεκριμένα αποδεικνύει ότι ο λόγος των χωρίων δύο τετραγώνων. Συγκεκριμένα αποδεικνύει ότι ο λόγος των χωρίων δύο κύκλων είναι ίσος με το λόγο των χωρίων των τετραγώνων που έχουν ως πλευρά τη διάμετρο κάθε κύκλου αντίστοιχα, ο οποίος δεν αποτελεί σίγουρα έναν αριθμητικό λόγο (βλ. Σχήμα 1.4)



Επιπλέον η ύπαρξη λόγων και αναλογιών φαίνεται από τους παρακάτω ορισμούς (3, 4 και 21 του $7^{ου}$ βιβλίου από τα Στοιχεία του Ευκλείδη):

γ΄. Μέρος εστίν αριθμός αριθμού ο ελάσσων του μείζονος, όταν καταμετρή τον μείζονα.

δ΄. Μέρη δε, όταν μη καταμετρή.

κα΄. Αριθμοί ανάλογόν εισίν, όταν ο πρώτος του δευτέρου και ο τρίτος του τετάρτου ισάκις η πολλαπλάσιος η το αυτό μέρος ή τα αυτά μέρη ώσιν.

Ακολουθεί στην συνέχεια η επεξήγηση της αναγωγής των λόγων στους ελάχιστους όρους ή χρησιμοποιώντας την ορολογία των κλασμάτων, της μετατροπής των κλασμάτων σε ανάγωγα, με διαίρεση του αριθμητή και του παρονομαστή με το μέγιστο κοινό διαιρέτη τους. Επιπλέον στις προτάσεις 34-36 του ίδιου βιβλίου παρατίθενται οι ιδιότητες του ελάχιστου κοινού πολλαπλασίου έχει σημασία στην αναγωγή των κλασμάτων στον ελάχιστο κοινό παρονομαστή.

i) Ελληνιστικά Χρόνια (300 π.Χ. έως 300 μ.Χ.)

Μετά τον Ευκλείδη αναβαθμίζεται η λογιστική (αριθμητικές πράξεις και υπολογισμοί) και η αριθμητική (θεωρία αριθμών – ιδιότητες αριθμών – είδη αριθμών).

Τον συμβολισμό των κλασμάτων τον γνωρίζουμε από τα έργα μεταγενέστερων μαθηματικών (Αρχιμήδης, Ήρων, Διόφαντος). Έτσι για το $^1/_3$, η λέξη «το τρίτον» μπορούσε να γράφεται ολόκληρη ή συντετμημένη, όπως «το γ^{ον}» ή ακόμη πιο σύντομα όπως γ΄, γ΄΄, ή κάτι παρόμοιο. Κατά τον Vogel, αυτός ο συμβολισμός άρχισε να χρησιμοποιείται ήδη από την εποχή του Αρχιμήδη (3^{ος} αι. π.Χ.). Ένας πάπυρος του 1^{ου} αι. μ.Χ. περιέχει επίσης την αντεστραμμένη μορφή, τον «ινδικό συμβολισμό» $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ = $^3/_5$, από τον οποίο προέκυψε ο συμβολισμός των κλασμάτων που χρησιμοποιούμε σήμερα.

Ο Αρχιμήδης (230 π.Χ.) στο έργο του Κύκλου Μέτρησις, αποδεικνύει ότι η περίμετρος του κύκλου βρίσκεται ανάμεσα σε $3\frac{10}{71}$ και $3\frac{1}{7}$ φορές της διαμέτρου. Στο σύγγραμμα του Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου, αποδεικνύει ότι ο όγκος της σφαίρας είναι τα 2/3 του όγκου του περιγεγραμμένου στη σφαίρα κυλίνδρου. Ο σύγχρονος του Ερατοσθένης (259 π.Χ.) χρησιμοποιεί το κλάσμα $^{11}/_{83}$ στην εκτίμηση της λόξωσης της εκλειπτικής αναφέροντας ότι αυτή είναι 11 φορές του 83 των δύο ορθών γωνιών.

Από τα προηγούμενα βλέπουμε ότι οι Έλληνες δεν περιορίστηκαν, σαν τους Αιγυπτίους, στις κλασματικές μονάδες (άλλωστε αυτοί δεν ήταν δέσμιοι μιας παγιωμένης παράδοσης). Όπως αναφέρει και ο van der Waerden, οι Έλληνες συχνά εργάζονταν με ακολουθίες κλασματικών μονάδων (ειδικά σε παπύρους της ύστερης εποχής που αντανακλούν έντονες αιγυπτιακές επιδράσεις), όπως $\frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$, αλλά μπορούσαν επίσης να αντικαθιστούν το άθροισμα αυτό με το $\frac{4}{5}$.

Η επαφή βέβαια με τα μαθηματικά των Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων επηρέασε τους Έλληνες μαθηματικούς. Η επιρροή γίνεται αισθητή στο έργο του Ήρωνα (80 μ.Χ.), όπου με τις έμμεσες μετρήσεις του κορυφώνονται τα υπολογιστικά μαθηματικά και επίσης στο έργο του Πτολεμαίου (140 μ.Χ.) Μεγίστη Μαθηματική Σύνταξις (περισσότερο γνωστή με τον αραβικό τίτλο Αλμαγέστη που είναι αραβική παραφθορά του Μεγάλη σύνταξις ή Μεγίστη με το αραβικό άρθρο Al) που θεωρείται το μεγαλύτερο έργο στην αρχαία αστρονομία. Βλέπουμε την περίοδο αυτή τους Έλληνες να χρησιμοποιούν τα εξηκονταδικά κλάσματα των Βαβυλωνίων σε μετρήσεις (πρακτικά προβλήματα) και σε κείμενα αστρονομίας (Fowler, 1992· Rashed, 1994). Τα κοινά κλάσματα ήταν πάρα πολύ άβολα για τους αστρονομικούς υπολογισμούς και γι αυτό οι Έλληνες αστρονόμοι υιοθέτησαν τα βαβυλωνιακά εξηκονταδικά κλάσματα. Ο Πτολεμαίος, ο οποίος είχε μεγάλη ικανότητα στους υπολογισμούς στο εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης, κατασκεύασε ακριβέστατους πίνακες που περιέχουν τα μήκη των χορδών κυκλικών τόξων υπολογισμένων ανά μισή μοίρα. Οι πίνακες αυτοί που ισοδυναμούν με τους σημερινούς πίνακες ημιτόνων είχαν μεγάλη εφαρμογή στους αστρονομικούς υπολογισμούς – θέση των άστρων κ.λ.π. Δεν γνωρίζουμε ποιος ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τα βαβυλωνιακά εξηκονταδικά κλάσματα διότι, όπως αναφέρει και ο van der Waerden, η θαυμάσια Μεγίστη του Κλαυδίου Πτολεμαίου είχε ως επακόλουθο τα έργα των προγενεστέρων του να περιπέσουν στη λήθη. Στη Μεγίστη ο κύκλος διαιρείται κατά το βαβυλωνιακό πρότυπο σε 360 μοίρες, κάθε μοίρα σε 60 πρώτα λεπτά και κάθε πρώτο λεπτό σε 60 δεύτερα λεπτά (π.χ. για το $47^{o}42'40''$ ο Πτολεμαίος γράφει μζ μβ΄ μ΄΄).

Πολλοί Μαθηματικοί του 3^{ου} αιώνα μ.Χ. ανέπτυξαν την θεωρία των αριθμών έχοντας ως θεωρητικό υπόβαθρο τις θεωρίες των Πυθαγορείων, οι οποίοι επηρέασαν την εξέλιξη των μαθηματικών τους επόμενους αιώνες. Μαθηματικοί όπως ο Ήρων με τα *Μετρικά* του, ο Νικόμαχος (100 μ.Χ.) και ο Διόφαντος (250 μ.Χ.) με τα έργα τους διαχωρίζουν την αριθμητική από τη γεωμετρία. Ο Νικόμαχος αναφέρει αριθμητικές σχέσεις που απαιτούνται για τη μελέτη της μουσικής. Ο Διόφαντος αντίστοιχα στα *Αριθμητικά* του ενώ αποδέχεται τον ορισμό του αριθμού όπως τον έδωσε ο

Ευκλείδης, παραδέχεται έμμεσα ως λύσεις των εξισώσεων του όχι μόνο ακεραίους αριθμούς αλλά και αριθμούς που έχουν τη μορφή κλάσματος. Ακόμη σε ένα πρόβλημα αναφέρεται στη διάσπαση της μονάδας σε δύο αριθμούς των οποίων το άθροισμα ισούται με τη μονάδα. Και σε αυτό το πρόβλημα δεν είναι δυνατόν παρά οι αριθμοί που θα προκύψουν ως λύσεις να είναι μέρη (ό. π.).

Παρατηρούμε δηλαδή ότι κατά τα Αρχαία Ελληνικά χρόνια στα θεωρητικά μαθηματικά έργα υπήρχαν μόνο λόγοι – μη αριθμητικοποιημένοι – και η χρήση των κλασμάτων εμφανίζεται στην καθημερινή λογιστική με τον ίδιο τρόπο, όπως τα εναδικά Αιγυπτιακά κλάσματα. Στα Ελληνιστικά χρόνια εμφανίζονται πλέον αριθμητικοί λόγοι και σε μαθηματικά έργα, όπως αυτά που αναφέραμε προηγούμενα και υπάρχει μια πρώτη λανθάνουσα έμμεση αποδοχή ότι τα κοινά κλάσματα αποτελούν αριθμούς, αφού τα αποδέχονται ως αποτελέσματα προβλημάτων.

Με βάση λοιπόν τα παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι Έλληνες γνώριζαν τα κλάσματα ήδη από την απώτατη αρχαιότητα και ότι, τουλάχιστον στον 5^{o} π.Χ. αιώνα, γνώριζαν άριστα επίσης τις πράξεις με αυτά: τη μετατροπή των κλασμάτων σε ανάγωγα, την αναγωγή σε κοινό παρονομαστή, κ.λ.π. Γι' αυτούς επομένως, σε αντίθεση με τους Αιγυπτίους, οι δυσκολίες στο λογισμό με κλάσματα δε μπορεί να ήταν εμπόδιο στην ανάπτυξη των μαθηματικών (van der Waerden, 2003, σελ. 47).

1.1.1.3 Τρίτη Περίοδος: Άραβες – Λατίνοι (700 μ.Χ. – 1600 μ.Χ.)

i) *Άραβες (700 – 1500 μ.Χ.)*

Τον 9^{o} αιώνα μ. Χ. αρχίζουν Άραβες μαθηματικοί να μεταφράζουν κλασικά έργα Ελλήνων συγγραφέων όπως του Ευκλείδη, του Πτολεμαίου, του Απολλώνιου, του Αρχιμήδη, του Πάππου και του Διόφαντου (Rashed, 1984). Έτσι η ελληνική αριθμητική και γεωμετρία διαδίδονται ευρύτατα και με τη συμβολή των έργων των Αράβων τίθενται τα θεμέλια της Άλγεβρας (το όνομα άλγεβρα προέκυψε από τον τίτλο του έργου Hisậb al-jabr wal-muqậbala[9] του al-Hawarizmi – 820 μ.Χ.) και διαμορφώνεται μια διαφορετική σχέση ανάμεσα στην άλγεβρα και γεωμετρία που δίνει αφορμή σε τεχνικές τεράστιου δυναμικού (Rashed, 1984).

[9] Βλ. Struik, 1984, σ. 73

Συγχρόνως εισάγεται ο όρος *Αλγόριθμος* από το έργο του al-Hawarizmi (780-850 μ.Χ.) που θα αποτελέσει τη μια από τις δύο τάσεις υπολογισμού κατά τον $10^{\text{ο}}$ αιώνα. Η άλλη είναι αυτή που διαμόρφωσαν οι αβακιστές (οι πράξεις εκτελούνται μέσω του άβακα, χωρίς τη χρήση αριθμητικών ψηφίων). Τελικά επικράτησε αυτή των αλγοριστών που έχοντας το πλεονέκτημα του ελέγχου των γραπτών υπολογισμών καθιερώθηκε συγχρόνως με τη διάδοση και την ευρύτερη αποδοχή των δυτικοαραβικών ψηφίων (Bunt, 1981).

Τον $11^{\text{ο}}$ αιώνα με τη σχολή του al-Karaji έχουμε την *αριθμητικοποίηση* της Άλγεβρας (arithmetisation). Σύμφωνα με τον Rashed (1975) η *αριθμητικοποίηση* της Άλγεβρας ερμηνεύεται ως η εφαρμογή των πράξεων της στοιχειώδους αριθμητικής σε αλγεβρικές εκφράσεις.
Από τον $10^{\text{ο}}$ αιώνα (ίσως και νωρίτερα) εμφανίζονται σε έργα πολλών αράβων συγγραφέων τα δεκαδικά κλάσματα. Στο έργο του al-Samaw'al Διατριβή (1172 μ.Χ.) βλέπουμε να χρησιμοποιούνται δεκαδικά κλάσματα χωρίς να αναγνωρίζονται ως τέτοια: το μόνο που χρειάζεται κανείς είναι να θεωρεί όλες τις πράξεις με κλάσματα που ο παρονομαστής τους είναι δύναμη του δέκα (Rushed, 1984). Ο al-Samaw'al θεωρεί ότι χρειάζεται μια θεωρία των δεκαδικών κλασμάτων για την ενίσχυση της εφαρμογής ορισμένων πράξεων όπως της διαίρεσης, της εξαγωγής της ν-οστής ρίζας ενός κλάσματος, με ίδιο τρόπο όπως και στους ακέραιους, και με αυτόν τον τρόπο οι άπειρες διορθώσεις των προσεγγίσεων να γίνονται πιο ξεκάθαρες και πιο εύκολες.

Ο μεταγενέστερος al-Kashi (1436) στο έργο του *Διατριβή πάνω στην περιφέρεια του κύκλου* και ακόμη περισσότερο στο *Key to arithmetic* προσπαθεί να εισάγει ένα άλλο ευκολότερο και πλέον προσιτό σύστημα κλασμάτων, στο οποίο επιτυγχάνονται οι ίδιες πράξεις που χρησιμοποιούνται ήδη στο εξηκονταδικό σύστημα. Εστιάζεται ιδιαίτερα στον πραγματικό αριθμό π. Παρόλο που θεωρεί το δεκαδικό αριθμό σαν μια μαθηματική ανακάλυψη, δεν τον θέτει κάτω από έλεγχο μιας θεωρίας που να σταθεροποιεί τον ορισμό, τις ιδιότητες και τη επιστημολογική του θέση. Το έργο του είναι τόσο σημαντικό που ακόμη και τον $17^{\text{ο}}$ αιώνα άραβες μαθηματικοί (για παράδειγμα ο al-Yazdi) παραπέμπουν στο τελευταίο έργο του.

Από εγχειρίδια που διδάσκονταν στη Βόρεια Αφρική κατά τον Μεσαίωνα με περιεχόμενο την Επιστήμη του Υπολογισμού όπως του al-Hassar, προκύπτει ότι ο συμβολισμός των κλασμάτων περιελάμβανε μια οριζόντια γραμμή για τα απλά και συνεχή κλάσματα, κομμένα από κάθετες γραμμές όταν επρόκειτο για ασυνεχή κλάσματα και συμπληρωμένα από συζεύξεις που εκφράζανε τις βασικές αριθμητικές πράξεις.

Συνοψίζοντας παρατηρούμε ότι οι Άραβες μαθηματικοί με την ενασχόληση τους με την άλγεβρα και την γεωμετρία αντιμετώπισαν μεγάλη δυσκολία στους αριθμητικούς τους υπολογισμούς με κοινά κλάσματα. Θα ήταν λοιπόν σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η εισαγωγή των δεκαδικών κλασμάτων προέκυψε ως μια αναγκαιότητα ώστε να μπορέσουν οι μαθηματικοί εκείνης της εποχής να ξεπεράσουν τις δυσκολίες που τους δημιουργούσαν οι υπολογισμοί με κοινά κλάσματα, τα οποία περιλάμβαναν τεράστιους αριθμούς. Έτσι οι μαθηματικοί εκείνης της εποχής επιχείρησαν να ανακαλύψουν νέους πιο εύχρηστους αλγόριθμους για την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων. Κατέστησαν έτσι δυνατή την ανάδυση των δεκαδικών ως μαθηματικό εργαλείο για την προσέγγιση όχι μόνο των μεγεθών, αλλά και των μαθηματικών οντοτήτων – των ρητών στην αρχή, των ριζικών και των άρρητων (Bunt, Jones & Bedient, 1981: Rashed, 1984).

ii) Αναγέννηση (1300 – 1600 μ.Χ.)

Η περίοδος της Αναγέννησης χαρακτηρίζεται από την παρουσία της ανθρωπιστικής παιδείας. Η ανάπτυξη της μαθηματικής παιδείας επηρεάζεται από την πνευματική αυτή κίνηση παρόλο που η επιστήμη και τα μαθηματικά είναι έξω από τον προσανατολισμό της. Σημαντική είναι η παρουσία των σχολείων των αβακιστών (abacci) που προσφέρουν επαγγελματική λαϊκή εκπαίδευση. Επίκεντρο των μαθημάτων που προσφέρουν είναι τα μαθήματα εμπορικής αριθμητικής πρακτικής γεωμετρίας. Γεγονός αποτελεί ο διαχωρισμός της θεωρίας των μαθηματικών από τις εφαρμογές της.

Τον $16^{ο}$ αιώνα θεσμοθετείται πλέον η γραφή των κλασμάτων σε δεκαδική μορφή από τον Ολλανδό μαθηματικό Simon Stevin (1548 – 1620). Είναι ο πρώτος που με το έργο του La Disme (Η Δεκάτη) παρουσιάζει πως θα μπορούσαν οι φυσικοί αριθμοί να επεκταθούν στους δεκαδικούς καθώς επίσης και τα πλεονεκτήματα των δεκαδικών αριθμών (Ritter, 1992). Η επινόηση του Stevin εξυπηρέτησε έναν πολύ πρακτικό σκοπό, την απλοποίηση δηλαδή της καθημερινής πρακτικής αριθμητικής (με

κλάσματα) αποφεύγοντας τα απλά κλάσματα με τον τρόπο που πρότεινε. Η ποικιλία των μη τυποποιημένων (όχι δεκαδικά επεξεργασμένων) συστημάτων μέτρησης είχε σαν αποτέλεσμα οι καθημερινές δραστηριότητες της αγοράς να γίνουν τρομερά πολύπλοκες, στο διεθνές επίπεδο κυρίως. Η πολύπλοκη αριθμητική των κλασμάτων δεν μπορούσε πλέον να αποφευχθεί. Ο Stevin είχε επίγνωση της προοπτικής της ανακάλυψης του. Προέβλεψε ότι η εισαγωγή των δεκαδικά επεξεργασμένων συστημάτων μέτρησης για το μήκος, το βάρος και τα χρήματα θα ήταν θέμα χρόνου. Ο ίδιος πάντως υποστήριξε με έμφαση τη μετάβαση σε τέτοια συστήματα. Παρόλα αυτά έπρεπε να περάσουν ακόμη δύο αιώνες πριν εισαχθεί η αριθμητική των δεκαδικών συστημάτων. Με τον Stevin επίσης οι δεκαδικοί αριθμοί αποκτούν την υπόσταση μαθηματικής έννοιας, αφού μέσα από τους αριθμούς αυτούς δημιουργείται μια γενική έννοια του αριθμού που εφαρμόζεται στις λύσεις των αλγεβρικών προβλημάτων της εποχής του. Σε αρκετές όμως εφαρμογές τους στην καθημερινή ζωή εμφανίζονται τα κλάσματα. Όπως συγκεκριμένα αναφέρει ο Streefland (1991), οι προθέσεις του Stevin, που βρίσκονται πίσω από τις προτάσεις του, υποστηρίζουν ακόμη μια φορά πόσο βαθιά ριζωμένη είναι η αριθμητική των κλασμάτων στις εφαρμογές της.
Από ένα Βυζαντινό έγγραφο που έφεραν στη Βενετία το 1562 αποδεικνύεται η γνώση των δεκαδικών κλασμάτων. Ο βυζαντινός συγγραφέας γράφει: Οι Τούρκοι πολλαπλασιάζουν και διαιρούν κλάσματα… “δι’ ενός λογαριασμού” (Rashed, 1984).

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι ακόμη και τον $16^{ο}$ αιώνα επιβιώνει ένα επιστημολογικό εμπόδιο που συνδέεται με την έννοια του κλάσματος, δηλαδή η γνώση ότι ο πολλαπλασιασμός δημιουργεί πάντα αύξηση.

1.1.1.4 Τέταρτη περίοδος: (1600 μ.Χ. – 1900 μ.Χ.)

i) Διαφωτισμός (από τον Newton στον Laplace)

Ο Newton χρησιμοποιεί τους δεκαδικούς αριθμούς για να εξηγήσει την προσέγγιση των συναρτήσεων και των ολοκληρωμάτων με τη βοήθεια των πολυωνυμικών συναρτήσεων.

Ο Euler (1707 – 1783) στο Elements of Algebra (1984) δίνει έναν πλήρη ορισμό του κλάσματος ως μαθηματικής αφηρημένης έννοιας καθώς επίσης και όλες τις περιπτώσεις των διαφορετικών κλασμάτων, τις ιδιότητές τους, τη σχέση τους με την ακέραια μονάδα, τον τρόπο που διατάσσονται καθώς επίσης και τις διαδικασίες των πράξεων με κλάσματα. Συγκεκριμένα αναφέρει ότι αν το πηλίκο δύο αριθμών δεν είναι ακέραιος, τότε υπάρχει ένα ιδιαίτερο είδος αριθμού που ονομάζεται κλάσμα και που δηλώνει ένα τέτοιο πηλίκο. Ορίζει δηλαδή το κλάσμα α/β, ως το πηλίκο διαίρεσης του α δια του β, τους οποίους ονομάζει αριθμητή και παρονομαστή. Επίσης ορίζει το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ως το γινόμενο του ακεραίου α επί την κλασματική μονάδα $\frac{1}{\beta}$ [10], διακρίνει δε τις περιπτώσεις των κλασμάτων όπως το κλάσμα $\frac{\alpha}{\alpha}$ (όπου ο αριθμητής είναι ίσος με τον παρονομαστή) το οποίο είναι ίσο με το 1, το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου $\alpha<\beta$ το οποίο είναι μικρότερο του 1 και το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ όπου $\alpha>\beta$ το οποίο είναι μεγαλύτερο του 1 και ονομάζεται καταχρηστικό.

Η μακρά χρονική περίοδος από την αρχαιότητα έως την ανακάλυψη του λογισμού μπορεί να εξηγηθεί με τη δυσκολία τόσο να εγκαταλειφθεί μια διακριτή εδραίωση των αριθμών όσο και της μετάβασης στην «ελεύθερη χρήση της προτεινόμενης απειροστής και πιο ευρείας εφαρμογής των αριθμητικών εννοιών», όπως το θέτει ο Boyer (1962, σ. 124).

Μια παρατήρηση που θα μπορούσαμε να κάνουμε είναι ότι από τη στιγμή που το κλάσμα εισέρχεται σε εκπαιδευτικά προγράμματα, υπάρχει μια τάση των διδασκόντων να καταφεύγουν στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέρους μιας μονάδας. Σύμφωνα με τον Caveing (1992), «Αρωγός της μέτρησης των μεγεθών η κλασσική διδασκαλία υπήρξε πάντα εξαρτημένη από τις αναφορές της στο συγκεκριμένο και ποτέ απόλυτα συνεπής στο θεωρητικό επίπεδο έως τη στιγμή που οι αναφορές εξαφανίστηκαν εξαιτίας του ορισμού των ρητών αριθμών ως ζεύγη δύο ακεραίων και ως κλάσεις ισοδυναμίας (σ. 50).

Από το $18^{ο}$ αιώνα μαθηματικοί όπως ο Laplace και ο Lagrange στα μαθήματά τους αναφέρονται στα προβλήματα της διδασκαλίας των κλασμάτων σε σχέση με τους ακέραιους αριθμούς, ενώ επικεντρώνονται ιδιαίτερα στη δυσκολία κατανόησης της

[10] Με τον ίδιο τρόπο που εισάγονται τα κλάσματα στην Τετάρτη Δημοτικού (βλ. βιβλίο οργανισμού «Τα μαθηματικά μου» της Δ΄ Δημοτικού).

διάταξης των κλασμάτων. Ένα παράδειγμα παίρνουμε από τα δέκα μαθήματα Μαθηματικών που έδωσε ο Laplace το 1975 στην École Normale στο Παρίσι (Dhombres, 1992). Στο πρώτο μάθημα έθεσε τη βάση της αριθμητικής με τους αριθμούς και τις τέσσερις βασικές πράξεις ενώ το δεύτερο μάθημα ήταν αφιερωμένο σε μαθηματικές έννοιες όπως των κλασμάτων, των ποσοστών, των ριζών, των προόδων και των λογαρίθμων. Μελετώντας αυτό το μάθημα παρατηρούμε ότι στην αρχή εισάγει το κλάσμα ως το μέρος μιας μονάδας ισομερώς διαιρημένης. Συγκεκριμένα αναφέρει (ό. π, σ. 54):

> «Προηγούμενα θεωρήσαμε τους ακέραιους αριθμούς και τους δεκαδικούς· ας εξετάσουμε τώρα τους κλασματικούς αριθμούς γενικά. Εάν θεωρήσουμε μια μονάδα διαιρημένη σε πολλά ίσα μέρη, ένας ορισμένος αριθμός από αυτά τα μέρη είναι αυτό που ονομάζουμε *κλάσμα*. Για να το εκφράσουμε, τοποθετούμε κάτω από μια οριζόντια γραμμή τον αριθμό που ορίζει σε πόσα μέρη έχουμε διαιρέσει τη μονάδα, και αυτός ο αριθμός ονομάζεται *παρονομαστής*, ενώ από πάνω τοποθετούμε τον αριθμό που δείχνει πόσα από τα μέρη αυτά παίρνουμε και ο αριθμός αυτός ονομάζεται *αριθμητής*. Ως εκ τούτου μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι ένα κλάσμα ισούται με το πηλίκο της διαίρεσης του αριθμητή δια του παρονομαστή,…»

Στην ίδια σειρά μαθημάτων ο Lagrange αναφέρεται στη δυσκολία στην κατανόηση των κλασμάτων σε σχέση με τους ακέραιους αριθμούς. Όπως αναφέρει (ό.π., σ. 200):

> «Δεν ισχύει το ίδιο (ό,τι στους ακέραιους) για τα κλάσματα· ο νους τα αντιλαμβάνεται πολύ δυσκολότερα από τους ακεραίους αριθμούς· όταν λέω ένα δεύτερο αντιλαμβάνομαι το ίδιο πράγμα μοιρασμένο σε δύο μέρη· όταν λέω ένα τρίτο, πρέπει να αντιλαμβάνομαι το ίδιο πράγμα μοιρασμένο σε τρία μέρη· όσο έχω ένα κλάσμα, είναι εντάξει· θα μάθω τι είναι ένα τρίτο σχηματίζοντας την ιδέα ενός πράγματος και χωρίζοντας το νοητά σε τρία μέρη· αλλά όταν θελήσω να τα συγκρίνω, δεν είναι εύκολο και θα δείτε ότι μεταξύ των ανθρώπων που δεν άσκησαν το πνεύμα τους σε υπολογισμούς θα είναι πολύ λίγοι αυτοί που μπορούν να σας πουν αμέσως, πόσο μεγαλύτερο είναι το μισό από το τρίτο, πόσο το τέταρτο είναι μεγαλύτερο από το πέμπτο· για παράδειγμα αν για ένα ρούχο χρειάζεται δύο και ένα

> τρίτο πήχεων ύφασμα, θα θεωρήσετε ότι ένα τρίτο είναι πολύ και θα πάρετε μόνο ένα τέταρτο χωρίς να έχετε ξεκάθαρη ιδέα πόσο μεγαλύτερο είναι το ένα τρίτο από το ένα τέταρτο.»

Στο απόσπασμα αυτό συγκεκριμένα ο Lagrange αναφέρεται στη δυσκολία που αντιμετωπίζουν όσοι προσπαθούν να μάθουν να χειρίζονται κλάσματα και ιδιαίτερα να τα συγκρίνουν σε αντιδιαστολή με τη σύγκριση φυσικών αριθμών.

Τον 18ο αιώνα αρχίζει η αξιωματοποίηση της άλγεβρας. Δημιουργούνται νέες άλγεβρες, ορίζονται νέοι αριθμοί και οι ιδιότητες τους. Πολλές λοιπόν από τις αριθμητικές έννοιες που έκαναν την εμφάνιση τους κατά την αρχαιότητα και διερευνήθηκαν από αρχαίους μαθηματικούς, διατυπώνονται αυτήν την εποχή ως μέρη ή στοιχεία μιας ολότητας ή ενός συστήματος και μελετούνται ως τμήματα μιας γενικότερης δομής.

Κατά τον 19ο αιώνα αρχίζει πραγματικά η εξερεύνηση της θεμελίωσης της ανάλυσης. Ιδιαίτερα με τον Dedekind (1831 – 1916) αποσαφηνίσθηκε η έννοια του πραγματικού αριθμού και αντιστοιχίσθηκαν οι πραγματικοί αριθμοί σε σημεία μιας ευθείας – απειροστός λογισμός (Bunt, 1981).

Μετά από διακόσια χρόνια από τις ανακαλύψεις του Newton και Leibniz οι Dedekind, Weierstrass και Cantor παρουσίασαν τύπους για μια συνεχή έννοια των αριθμών, που δεν έγιναν αποδεκτοί από όλους τους μαθηματικούς εκείνης της εποχής. Οι τυποποιήσεις αυτές δεν είναι γενικεύσεις κάποιων προηγούμενων αριθμητικών εννοιών, αλλά αφηρημένες ιδέες που βασίζονταν στον αφηρημένο φορμαλισμό της θεωρίας των συνόλων που ανέπτυξε ο Cantor (1874). Η διαμάχη της τυποποίησης της έννοιας του αριθμού οδήγησε στη διερεύνηση της θεμελίωσης των μαθηματικών. Αποτέλεσμα αυτής της διερεύνησης υπήρξαν τρεις διαφορετικές σχολές μαθηματικών: η λογική του Russel, η διαισθητικότητα του Brouwer και ο φορμαλισμός του Hilbert (Kline, 1972). Ο λογισμός φαίνεται να αποτελεί μια ιδιαίτερα χρήσιμα ανακάλυψη. Από τη γνωσιακή άποψη, φαίνεται να συγκρούεται με ορισμένες θεμελιώδεις αρχές των μαθηματικών που στηρίζονται στη λογική των ρητών αριθμών.

Συνοψίζοντας το πρώτο σύνολο αριθμών που επεξεργάστηκαν οι άνθρωποι από την αρχαιότητα είναι αυτό των φυσικών αριθμών. Αυτό όμως το σύνολο θεμελιώθηκε ως σύνολο αριθμών μέσα από το σύνολο των πραγματικών αριθμών με μια σειρά αξιωμάτων που έθεσε ο Peano (1858 – 1932) πέντε χιλιάδες χρόνια από την εποχή που κατόρθωσε ο άνθρωπος να χαράξει αυτούς τους αριθμούς. Στη θεωρία του Peano (1903) βλέπουμε να ενοποιούνται δύο τάσεις που έχουν τις ρίζες τους στην αρχαιότητα ώστε να παράγουν ένα σύστημα που εισάγει αξιωματικά τους φυσικούς αριθμούς (αντίστοιχα κάτι τέτοιο έγινε από τον Ευκλείδη το 300 π.Χ.). Η Πυθαγόρεια έννοια (οι ακέραιοι αριθμοί αποτελούν την αρχή των πάντων) και η Αριστοτελική και Ευκλείδεια ιδέα (ο βασικός ρόλος των ορισμών και των αξιωμάτων).

Η θεωρητική θεμελίωση των κλασμάτων και των ρητών αριθμών έρχεται με την αξιωματική θεμελίωση των αριθμοσυνόλων, τα στοιχεία των οποίων πρέπει να ικανοποιούν ορισμένες βασικές ιδιότητες. Στη μαθηματική επιστήμη το κλάσμα ορίζεται ως ένα στοιχείο μιας ολότητας, ως αντιπρόσωπος των κλάσεων ισοδυναμίας ενός καρτεσιανού γινομένου δύο συνόλων. Δηλαδή ορίζεται ως μια σχέση και η σημασία του δεν αποδίδεται άμεσα αλλά μέσα από τις ιδιότητες του συστήματος[11] (βλ. Λάκκη, 1980). Συνεπώς τα κλάσματα και κατ' επέκταση οι ρητοί αριθμοί είναι αποδεκτοί και θεμελιώνονται ως στοιχεία ενός καρτεσιανού γινομένου δύο συνόλων.

1.1.2.0

[11] Ορίζεται πρώτα το καρτεσιανό γινόμενο Z΄ των συνόλων Z και Z-{0}, δηλαδή το $Z' = \{(\alpha_1,\alpha_2) \in Q, \alpha_1 \in Z, \alpha_2 \in Z, \alpha_2 \neq 0\}$.
Στην συνέχεια ορίζεται στο Z΄ η κλάση ισοδυναμίας: $(\alpha_1,\alpha_2) \approx (\beta_1,\beta_2) \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \beta_2 = \alpha_2 \cdot \beta_1$, η οποία χωρίζει το Z΄ σε κλάσεις ισοδυναμίας που ονομάζονται κλάσματα και συμβολίζονται ως εξής:
$[(\alpha_1,\alpha_2)] = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$
Το σύνολο κλάσεων ισοδυναμίας, δηλαδή των κλασμάτων
$Q = \{[(\alpha_1,\alpha_2)] = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} : \alpha_1 \in Z, \alpha_2 \in Z, \alpha_2 \neq 0\}$ εφοδιάζεται με τις πράξεις
$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1}{\alpha_2\beta_2}$, δηλαδή $[(\alpha_1,\alpha_2)] + [(\beta_1,\beta_2)] = [(\alpha_1 \cdot \beta_2 + \alpha_2 \cdot \beta_1, \alpha_2 \cdot \beta_2)]$
$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_2\beta_2}$, δηλαδή $[(\alpha_1,\alpha_2)] \cdot [(\beta_1,\beta_2)] = [(\alpha_1 \cdot \beta_1, \alpha_2 \cdot \beta_2)]$
Αποδεικνύεται ότι το Q έχει τη δομή σώματος, στο οποίο μάλιστα ορίζεται μια σχέση διάταξης. Επίσης αποδεικνύεται ότι περιέχει ισόμορφα το Z, μ' αυτό τον τρόπο το σώμα των ρητών αριθμών. (Βλ. Λάκκη, Κ., 1980, σ. 93-96). Άλγεβρα, Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη.

1.1.3.0 Ανακεφαλαίωση

Συνοψίζοντας: στις σελίδες που προηγήθηκαν θελήσαμε να εντοπίσουμε τις κυριότερες εννοιολογικές αλλαγές που συνέβησαν κατά την εξελικτική πορεία της έννοιας αυτής. Η αρχική εμφάνιση των εναδικών αιγυπτιακών κλασμάτων εξυπηρετούσε όπως είδαμε, την ανάγκη καθημερινών συναλλαγών των αρχαίων Αιγυπτίων. Στο πλαίσιο αυτό τα κλάσματα εκλαμβάνονταν ως το μέρος το οποίο υπολείπεται ώστε να συμπληρωθεί η εκάστοτε ακέραια μονάδα, η οποία και αντιστοιχούσε σε φυσικά αντικείμενα. Τα εναδικά αυτά κλάσματα εξυπηρετούσαν την ανάγκη για καταμετρήσεις οι οποίες προϋπέθεταν υποδιαιρέσεις και για το λόγο αυτό μπορεί να υποστηριχθεί ότι για τους Αιγυπτίους τα κλάσματα είχαν έναν σαφώς ογικό χαρακτήρα (ως αθροίσματα κλασματικών μονάδων). Αποτελούν απλά αθροίσματα μεριδίων χωρίς να αναγνωρίζονται ως αυτόνομοι αριθμοί που έχουν τη δική τους υπόσταση.

Στην Αρχαία Ελλάδα παρατηρούμε ότι τα κλάσματα εμφανίζονται με δύο όψεις. Από τη μια πλευρά, στα θεωρητικά μαθηματικά έργα του Ευκλείδη, του Απολλώνιου και άλλων αρχαίων επιστημόνων, εμφανίζονται οι μη αριθμητικοποιημένες έννοιες του λόγου και της αναλογίας. Από την άλλη πλευρά, παρά την επικρατούσα πλατωνική αντίληψη περί του αδιαίρετου της μονάδας, τα κλάσματα χρησιμοποιούνται σε διάφορες εφαρμογές όπως οι μουσικές κλίμακες, ενώ στην πρακτική λογιστική τα μέρη ή μόρια έχουν την ίδια ερμηνεία με τα εναδικά αιγυπτιακά κλάσματα. Κι εδώ πάλι παρόλο που χρησιμοποιούνται για τη λύση προβλημάτων δεν αναγνωρίζονται ως αριθμοί.

Στα ελληνιστικά χρόνια υπάρχει μια έμμεση αποδοχή των κοινών δεκαδικών και εξηκονταδικών κλασμάτων(αριθμητικοποίηση των λόγων και των αναλογιών) ως αριθμών χωρίς όμως να αναφέρονται πουθενά και πράξεις με αυτά, όπως προκύπτει από τα έργα του Ήρωνος, του Διόφαντου, του Πτολεμαίου και άλλων αρχαίων επιστημόνων.

Στο Μεσαίωνα οι Άραβες δίνοντας μεγάλη ώθηση στις διαδικασίες των πράξεων, εισήγαγαν την έννοια και το συμβολισμό του κλάσματος με τη μορφή που συναντάμε και σήμερα· ενοποίησαν το λογισμό των φυσικών με το λογισμό των γεωμετρικών λόγων και εισήγαγαν τη χρήση της αρίθμησης με δεκαδική θέση. Επιπλέον, οι μαθηματικοί της εποχής εκείνης, προσπαθώντας να ξεπεράσουν τις δυσκολίες που τους δημιούργησαν οι υπολογισμοί με κοινά κλάσματα τα οποία περιλάμβαναν τεράστιους αριθμούς επιχείρησαν να ανακαλύψουν νέους πιο εύχρηστους αλγόριθμους για την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων. Έτσι, κατέστησαν δυνατή την ανάδυση των δεκαδικών ως μαθηματικό εργαλείο για την προσέγγιση όχι μόνο των μεγεθών αλλά και των μαθηματικών οντοτήτων – των ρητών στην αρχή, των ριζικών και των άρρητων στην συνέχεια. Όπως είδαμε οι οντότητες αυτές στην συνέχεια γίνονται αριθμοί μέτρησης και με τον Stevin αυθεντικές απεικονίσεις. Και εδώ πάλι η εισαγωγή των δεκαδικών κλασμάτων και των δεκαδικών αριθμών προέκυψε από τις πρακτικές ανάγκες της εποχής.

Μετά την Γαλλική Επανάσταση μέσα από τη διάδοση της στοιχειώδους και μέσης εκπαίδευσης καθιερώνεται ευρύτατα η χρήση των δεκαδικών αριθμών ως εύχρηστο μέσο υπολογισμών· ως αποτέλεσμα αυτού η έννοια του αριθμού και κατά συνέπεια η έννοια του κλάσματος έχασαν την οντολογική τους υπόσταση.
Επιπλέον θεωρήσαμε σημαντικό να τονίσουμε ότι ακόμη και από τον 18ο αιώνα μαθηματικοί όπως ο Laplace και ο Lagrange σε μαθήματα τους αναφέρονται στα προβλήματα της διδασκαλίας των κλασμάτων σε σχέση με τους ακεραίους αριθμούς ενώ επικεντρώνονται ιδιαίτερα στη δυσκολία κατανόησης της διάταξης των κλασμάτων.

Τελειώνοντας, θεωρώ ότι μας είναι πιο εύκολο να κατανοήσουμε τη δυσκολία των μαθητών μας σχετικά με την κατανόηση των κλασμάτων, καθώς όπως είδαμε μέχρι τη θεωρητική θεμελίωση των κλασμάτων και των ρητών αριθμών με τον τρόπο που είναι σήμερα αποδεκτός, χρειάστηκε μια μακρά πορεία δια μέσου των αιώνων έως ότου τελικά φθάσουμε στην αξιωματική θεμελίωση των αριθμοσυνόλων, τα στοιχεία των οποίων πρέπει να ικανοποιούν ορισμένες βασικές ιδιότητες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

2.1 Το περιεχόμενο της γνώσης – μερική αναδιοργάνωση

Ως γνωστό στη θεωρία του Piaget, η ανάπτυξη των γνώσεων του παιδιού ακολουθεί στάδια, η μετάβαση του από το ένα στάδιο στο άλλο προϋποθέτει την ολική αναδιοργάνωση των γνώσεων του. Ερευνητές όπως οι Carey (1985), Chi (1992) και Vosniadou (1994) αντέταξαν στη θέση αυτή την άποψη που έγινε γνωστή ως *μερική αναδιοργάνωση της γνώσης*. Συγκεκριμένα η Carey (1985) υποστήριξε ότι όπως έδειξαν οι έρευνές της, ότι η γνωστική εξέλιξη του παιδιού μπορεί να προκύπτει και ως αποτέλεσμα αναδιοργάνωσης των γνώσεων σε συγκεκριμένους τομείς ξεχωριστά (π.χ. στα Μαθηματικά, στη Φυσική, κ.λ.π.), δεδομένου ότι έχουμε να κάνουμε με εξειδικευμένη κατά τομείς γνώση.

Η άποψη της μερικής αναδιοργάνωσης προέκυψε κυρίως από τη μελέτη των διαφορών που παρατηρήθηκαν μεταξύ αρχαρίων και ειδικών σε διάφορους τομείς της ανθρώπινης γνώσης, όπως για παράδειγμα η Φυσική (Chi, Glaser και Rees, 1982), ή στις κοινωνικές επιστήμες (Voss, Greene, Post και Penner, 1983). Ερευνητές που ενστερνίζονται τις θεωρητικές θέσεις της μερικής αναδιοργάνωσης της γνώσης διερευνούν το είδος των αλλαγών που πραγματώνονται κατά τη γνωσιακή ανάπτυξη επιχειρώντας να περιγράψουν τη μορφή της αρχικής κατάστασης των γνώσεων και τη μορφή του αποτελέσματος που προέκυψε από την αλλαγή. Οι Vosniadou (1994a, 2000), Chi (1992), Chi, M.T.H., Slotta, J.D. και de Leeuw, N. (1994) and Carey και Spelke (1994) έχουν παρουσιάσει καλά επεξεργασμένες θεωρίες της εννοιολογικής αυτής αλλαγής. Οι ερευνητές αυτοί προσπαθούν να αναλύσουν την σχέση ανάμεσα στην προϋπάρχουσα και στη νέα γνώση ώστε να αποκαλύψουν τα στοιχεία της διαδικασίας με την οποία συντελείται η απόκτηση γνώσης, κάτι που θα εξηγούσε και τις δυσκολίες στην εκμάθηση κάποιων εννοιών και την τάση των παιδιών να δημιουργούν παρανοήσεις.

2.2 Ο ρόλος της προϋπάρχουσας γνώσης

Στα πλαίσια της θεωρίας για τη μερική αναδιοργάνωση της γνώσης διατυπώθηκαν διάφορες απόψεις όχι μόνο για τον τρόπο που η μερική αναδιοργάνωση πραγματώνεται αλλά και για τη φύση και το ρόλο της προϋπάρχουσας γνώσης στην απόκτηση και την αλλαγή των εννοιών. Οι απαντήσεις σ' αυτά τα ζητήματα όπως θα δούμε και παρακάτω διαφέρουν.

Οι θεωρίες για την προϋπάρχουσα γνώση, τη φύση αλλά και τον ρόλο της στην απόκτηση και την αλλαγή των εννοιών σχετίζονται άμεσα με τους προβληματισμούς για την απόκτηση των μαθηματικών εννοιών. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα εμπειρικών ερευνών (π.χ. Gelman και Greeno, 1987) φαίνεται ότι τα παιδιά προτού πάνε στο σχολείο διαθέτουν μια προϋπάρχουσα (αν και πιθανόν όχι συνειδητή) γνώση της μέτρησης των αριθμών και των συνόλων. Οι ίδιοι αποκαλούν τη γνώση αυτού του είδους σχήματα (schemata) και θεωρούν ότι τα παιδιά χρησιμοποιούν τα σχήματα αυτά προκειμένου να δημιουργούν πλάνα για την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων που τους παρουσιάζονται. Η κυριότερη ωστόσο λειτουργία που οι ερευνητές προσδίδουν στα σχήματα είναι ότι διευκολύνουν τα παιδιά να δημιουργούν αναπαραστάσεις από τις πληροφορίες που δίνονται από τα μαθηματικά αυτά προβλήματα.

Ο Greeno (1991) προκειμένου να περιγράψει την γνώση στον τομέα των αριθμών και των ποσοτήτων εισάγει τον όρο number sense. Ο όρος αυτός αναφέρεται σε δεξιότητες των παιδιών όπως οι ευέλικτοι υπολογισμοί με το μυαλό, οι αριθμητικές εκτιμήσεις και οι κρίσεις σε σχέση με μια ποσότητα, δεξιότητες τις οποίες αναπτύσσουν τα παιδιά χρησιμοποιώντας το περιβάλλον στο οποίο ζουν ως πηγή απ' όπου αντλούν γνώση την οποία μεταφέρουν στις δραστηριότητες τους.

Στα πλαίσια του προβληματισμού για τη φύση της προϋπάρχουσας γνώσης μια άλλη σειρά ερευνών επικεντρώθηκε στα λεκτικά αριθμητικά προβλήματα. Ο Greeno και οι συνεργάτες του (1984, 1998) εισήγαγαν ένα σύστημα ταξινόμησης των στοιχειωδών λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης, σύστημα το οποίο συνέχισαν να επεξεργάζονται και οι De Corte και Verschaffel (1995). Τα αποτελέσματα τους όπως και αυτά των Carpenter (1988, 1993) έδειξαν ότι τα περισσότερα παιδιά διαθέτουν με λανθάνοντα τρόπο μια αρκετά πολύπλοκη γνώση των στοιχειωδών πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Τα ευρήματα τους, που αφορούν την επίδραση της σημασιολογικής δομής των λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων στις διαδικασίες που χρησιμοποιούν τα παιδιά κατά την επίλυση των προβλημάτων αυτών, φαίνεται να επιβεβαιώνουν τα αποτελέσματα και άλλων ερευνών που υποστηρίζουν ότι η εξειδικευμένη κατά τομείς γνώση διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση προβλημάτων (Glaser, 1984· Resnick, 1983). Συγκεκριμένα οι Brown και Burton (1978), οι Carpenter, Fennema και Romberg (1993), De Corte και Verschaffel (1987, 1994,1996) και Resnick (1981, 1987, 1989, 1995) διαπίστωσαν ότι οι λανθασμένες απαντήσεις των παιδιών στα λεκτικά αριθμητικά προβλήματα δεν συνιστούν τυχαίες αποτυχίες των παιδιών, αλλά είναι αποτέλεσμα συστηματικών λανθασμένων αντιλήψεων και στρατηγικών. Οι ερευνητές αυτοί θεωρούν, ότι τα λάθη που κάνουν τα παιδιά έχουν νόημα και ότι ακολουθούν κάποιους κανόνες. Αυτό σημαίνει ότι στις περισσότερες περιπτώσεις τα λάθη των παιδιών αποτελούν συστηματικές εφαρμογές λανθασμένων διαδικασιών, κάτι ανάλογο με τους ονομαζόμενους ιούς (buggy algorithms) στην ορολογία των ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Ο γνωστικός ψυχολόγος Mayer (1983, 1985, 1995) προσεγγίζει από μια άλλη οπτική τη διαδικασία επίλυσης των λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων· σε μια σειρά ερευνών που πραγματοποίησε υιοθέτησε την υπόθεση ότι η διαδικασία επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος αρχίζει με μιαν αναπαράσταση του, δηλαδή με μια εσωτερική απεικόνιση όλων των σημαντικών πληροφοριών που το πρόβλημα περιέχει. Σύμφωνα με τον Mayer η αναπαράσταση αυτή θέτει τις βάσεις πάνω στις οποίες ο μαθητής εφαρμόζει τις αποδεκτές μαθηματικές πράξεις για να λύσει το πρόβλημα. Τα ευρήματα του έδειξαν ότι τα λάθη που κάνουν οι μαθητές είναι συχνά αποτέλεσμα μιας λάθος εσωτερικής αναπαράστασης. Οι λανθασμένες αναπαραστάσεις των παιδιών μπορεί να είναι αποτέλεσμα αποτυχίας στη γλωσσική ερμηνεία του προβλήματος ή αποτέλεσμα ενεργοποίησης λανθασμένου σχήματος για τις αριθμητικές πράξεις που απαιτούνται.

Ο Fischbein και οι συνεργάτες του (1985) προσπάθησαν να διερευνήσουν τα λάθη που κάνουν τα παιδιά κατά την επίλυση αριθμητικών λεκτικών προβλημάτων, δίνοντας όμως ιδιαίτερο βάρος στην επιλογή, εκ μέρους του παιδιού, της πράξης που απαιτείται κατά την επίλυση. Εισάγοντας την έννοια των διαισθητικών μοντέλων υποστήριξαν ότι «κάθε θεμελιώδης αριθμητική πράξη παραμένει γενικά συνδεδεμένη με ένα λανθάνον, ασυνείδητο και πρωτόγονο διαισθητικό μοντέλο. Η αναγνώριση της πράξης που χρειάζεται για να επιλυθεί ένα πρόβλημα με δύο αριθμητικά δεδομένα γίνεται όχι άμεσα, αλλά με τη μεσολάβηση ενός τέτοιου μοντέλου. Το μοντέλο επιβάλλει τους δικούς του περιορισμούς στη διαδικασία της έρευνας» (σ. 4). Σύμφωνα με τους ερευνητές αυτούς, δύο προβλήματα μπορεί να είναι λειτουργικά ή και λεκτικά πανομοιότυπα, αλλά να διαφέρουν στη δυσκολία ανάλογα με τους τύπους των αριθμών που χρησιμοποιούνται και τους ρόλους που έχουν οι αριθμοί μέσα στη δομή του προβλήματος. Για παράδειγμα το πρωτογενές μοντέλο του πολλαπλασιασμού γίνεται δυσκολότερο εάν ο πολλαπλασιαστής είναι δεκαδικός ή κλασματικός αριθμός οπότε και παραβιάζεται το μοντέλο της επαναληπτικής πρόσθεσης[12]. Για τη διαίρεση, αντίστοιχα υπάρχουν δύο πρωτόγονα μοντέλα, το επιμεριστικό και το μετρητικό[13].

2.3 ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΑΛΛΑΓΗ

Η εννοιολογική αλλαγή παρέχει ένα ισχυρό επεξηγηματικό πλαίσιο, σχετικά με τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές σε μαθηματικές έννοιες. Ο όρος «εννοιολογική αλλαγή» χρησιμοποιείται για να χαρακτηρίσει το είδος της μάθησης που απαιτείται στην περίπτωση όπου οι νέες πληροφορίες που δέχεται κάποιος έρχονται σε σύγκρουση με την προγενέστερη γνώση του, την οποία αποκτά στη βάση της καθημερινής εμπειρίας. Όπως υποστηρίζεται, σε αυτές τις περιπτώσεις, απαιτείται μια σημαντική αναδιοργάνωση της προγενέστερης γνώσης – μια εννοιολογική αλλαγή.

Η εννοιολογική αλλαγή θα μπορούσε να οριστεί ως η ουσιαστική μεταβολή ή ακόμη και η αντικατάσταση μιας υπάρχουσας έννοιας από μία νέα, έτσι ώστε να προκύψει ένα νέο εννοιολογικό πλαίσιο που οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν για να λύσουν

---

[12] Η ερμηνεία της πράξης 3×5 συνδέεται με το μοντέλο της επαναληπτικής πρόσθεσης, της επανάληψης δηλαδή του 3 πέντε φορές (3+3+3+3+3). Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι οι μαθητές βρίσκουν δύσκολο τον πολλαπλασιασμό με δεκαδικούς αριθμούς, ιδίως όταν ο δεκαδικός αριθμός βρίσκεται στη θέση του τελεστή (15.000×0,75). Αυτό συμβαίνει γιατί ο πολλαπλασιασμός αυτός είναι αντίθετος με το μοντέλο της επαναληπτικής πρόσθεσης με το οποίο γίνεται ο πολλαπλασιασμός.

[13] Στη διαίρεση ο Fischbein και οι συνεργάτες του πρότειναν δύο πρωτογενή μοντέλα: το μεριστικό (μερισμός σε ισοδύναμα υποσύνολα ή σε ίσες μικρότερες ποσότητες) και το μετρητικό (που καθορίζει τον αριθμό των υποσυνόλων ή των ίσων μικρότερων ποσοτήτων όταν δίνεται το μέγεθος του υποσυνόλου ή της μικρότερης ποσότητας).

προβλήματα, να εξηγήσουν τα φαινόμενα και τη λειτουργία του γύρω τους κόσμου (Davis, 2001).

Η εννοιολογική αλλαγή μπορεί να ποικίλλει, από την απλή πρόσληψη τμημάτων πληροφορίας και την ενσωμάτωση αυτών στην ήδη υπάρχουσα γνώση, έως την πλήρη αναδιοργάνωση μεγάλων εννοιολογικών δομών. Μία θεωρία για την εννοιολογική αλλαγή προσπαθεί να ερμηνεύσει τους τρόπους με τους οποίους οι υπάρχουσες γνωστικές δομές μετασχηματίζονται κατά τη διαδικασία απόκτησης νέων γνώσεων (Κολιάδης, 2002, σ. 352).

Οι Rumelhart & Norman διατύπωσαν την άποψη ότι τα γνωστικά σχήματα μπορούν να τροποποιηθούν μέσω της **επαύξησης**, της **εναρμόνισης** και της **αναδιοργάνωσης** (Rumelhart & Norman, 1988 στο Κολιάδης, 2001, σ. 352). Η επαύξηση είναι μία μορφή εμπλουτισμού του υπάρχοντος σχήματος με επιπλέον πληροφορίες. Ενώ η αναδιοργάνωση αναφέρεται στις δομικές αλλαγές του σχήματος ή τη δημιουργία νέων σχημάτων. Σύμφωνα με τους Vosniadou & Brewer (1998 στο Κολιάδης, 2001, σ. 352) η αναδιοργάνωση μπορεί να είναι δύο τύπων: ολική και μερική. Η μερική περιλαμβάνει την ασθενή αναδιοργάνωση, εσωτερική αναδιάρθρωση ενός ή περισσοτέρων σχημάτων, και την ριζοσπαστική αναδιοργάνωση, αντικατάσταση της παλιά θεωρίας με μία άλλη νέα θεωρία.

2.3.1 Η σημαντικότητα της Εννοιολογικής Αλλαγής

Έρευνες σχετικά με τη διαδικασία μάθησης έχουν δείξει ότι οι μαθητές δεν είναι «άγραφοι πίνακες» πριν έρθουν σε επαφή με τα διάφορα πεδία της γνώσης στο χώρο του σχολείου, αλλά αντίθετα έχουν διαμορφώσει μια δική τους αντίληψη του κόσμου που συχνά διαφέρει από την επιστημονική γνώση.

Συχνά οι πληροφορίες που προσλαμβάνουν οι μαθητές στο χώρο του σχολείου δεν είναι συμβατές με τις ήδη υπάρχουσες πεποιθήσεις τους, και σαν αποτέλεσμα πολλοί μαθητές επιμένουν να διατηρούν τις δικές τους πρώιμες εναλλακτικές αντιλήψεις επί μακρόν (Carey, 1985· Nussbaum & Novick, 1982· Sneider & Poulos, 1983·

Vosniadou & Brewer, 1992· Vosniadou, Ioannides, Dimitrakopoulou & Papademetriou, 2001).

Η γνωσιακή οργάνωση και η γνωσιακή αναδιοργάνωση του μαθητή έχει αποτελέσει αντικείμενο εκτεταμένων ερευνών. Συχνά περιγράφεται με όρους όπως σχήματα, εννοιολογικά πλαίσια και νοητικά μοντέλα, με βάση τα οποία το παιδί επιχειρεί να κατανοήσει τον κόσμο. Έρευνες τέτοιου τύπου είναι σημαντικές για το σχεδιασμό διδακτικών προγραμμάτων που βασίζονται σε αυτό που τα παιδιά ήδη ξέρουν και στοχεύουν στη «γεφύρωση» των πρώιμων γνώσεων του παιδιού και των εξηγήσεων που μας παρέχει η επιστήμη για το γύρω μας κόσμο (Κολιάδης, 2001, σ. 353).

2.3.2 Έρευνες σχετικά με την εννοιολογική αλλαγή

Η έννοια της εννοιολογικής αλλαγής απασχολεί ερευνητές διαφορετικών επιστημονικών πεδίων, όπως γνωστικούς και εκπαιδευτικούς ψυχολόγους, εδώ και 4 δεκαετίες, από την εποχή που πρωτοδημοσιεύτηκε το βιβλίο του Thomas Kuhn «Η δομή των επιστημονικών επαναστάσεων» (1962). Κατευθυντήριες που προέρχονται από αυτό το επιστημολογικό πλαίσιο προσανατολίζουν ή τουλάχιστον επηρεάζουν ακόμη και σήμερα με έμμεσο και άμεσο τρόπο την εξέλιξη της έρευνας στα πλαίσια της γνωστικής ψυχολογίας ως προς την εννοιολογική αλλαγή (Posner, Strike, Hewson, Gertzog, 1982). Ξεκάθαρος στόχος η διαμόρφωση μιας συνεκτικής θεωρίας για τη γνώση και τη μάθηση η οποία συμβάλει μεταξύ άλλων και σε διαμόρφωση-εφαρμογή αποτελεσματικότερων μεθόδων διδασκαλίας σε πεδία επιστημονικής γνώσης όπως τα μαθηματικά και η φυσική.

Ένα από τα θεωρητικά ζητήματα που προκύπτουν σε σχέση με την εννοιολογική αλλαγή, αφορά τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να συλλάβουμε, να κατανοήσουμε και στη συνέχεια να μοντελοποιήσουμε τον αναπτυσσόμενο νου (Vosniadou, 1994). Έτσι, στα πλαίσια μελέτης της εννοιολογικής αλλαγής προτείνονται από διάφορους ερευνητές συνδετιστικά αλλά και βασιζόμενα σε δυναμικά συστήματα υπολογιστικά μοντέλα για την εύρεση ενός επεξηγηματικού πλαισίου για τον μηχανισμό της εννοιολογικής αλλαγής (Vosniadou, 1999). Επιπλέον, ενδιαφέρον παρουσιάζει ένα θεωρητικό ζήτημα που αποτελεί αντικείμενο πολλών ερευνών τα τελευταία χρόνια.

Πρόκειται για τις επιστημολογικές πεποιθήσεις τόσο των μαθητών όσο και των δασκάλων τους και το πώς αυτές επηρεάζουν την διαδικασία της εννοιολογικής αλλαγής (Elder, 2002· Hofer, Pintrich, 2002). Συγκεκριμένα, πρόσφατες έρευνες καταδεικνύουν ότι μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης αρχίζουν να αναπτύσσουν επιστημολογικές πεποιθήσεις από την αρχή της σχολικής ηλικίας και ότι οι θεωρήσεις τους γίνονται σταδιακά πολυπλοκότερες με την πάροδο του χρόνου[14]. Οι προσωπικές επιστημολογικές πεποιθήσεις φαίνεται να διαμορφώνονται από την ηλικία των 10 ετών και επηρεάζουν σαφώς τις γνωστικές διεργασίες της σκέψης και της μάθησης.

Ένα ερώτημα που θέτουν μερικοί ερευνητές σχετικά με την εκμάθηση και την διδασκαλία (π.χ., Caravita & Halden, 1994), είναι το γιατί θα πρέπει να καλέσουμε αυτόν τον τύπο εκμάθησης "εννοιολογική αλλαγή" και όχι απλά "εκμάθηση". Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι, ενώ η εννοιολογική αλλαγή είναι αναντίρρητα μια μορφή μάθησης, είναι σημαντικό η εννοιολογική αλλαγή να διαφοροποιηθεί από τα άλλα είδη μάθησης, διότι απαιτεί την πραγμάτωση διαφορετικών μηχανισμών και διαφορετική εκπαιδευτική παρέμβαση. Στο μεγαλύτερο βαθμό η μάθηση είναι προσθετική και περιλαμβάνει έναν εμπλουτισμό της υπάρχουσας γνώσης. Η εννοιολογική αλλαγή δεν μπορεί, εντούτοις, να επιτευχθεί μέσω προσθετικών μηχανισμών. Στην πραγματικότητα, η χρήση προσθετικών μηχανισμών στις περιπτώσεις που απαιτούν εννοιολογική αλλαγή, είναι μια από τις σημαντικότερες αιτίες παρανοήσεων (Vosniadou & Verschaffel, 2004).

Ένας κοινός τύπος παρερμηνείας προκαλείται όταν προστίθενται νέες πληροφορίες στη βάση ασύμβατης γνώσης, παράγοντας συνθετικά μοντέλα, όπως π.χ. σχετικά με το σχήμα της γης το μοντέλο "της κοίλης σφαίρας" (Vosniadou & Brewer, 1992), ή η πεποίθηση ότι τα κλάσματα είναι πάντα μικρότερα από τη μονάδα (Stafylidou & Vosniadou, 2004). Είναι σημαντικό στη διδασκαλία να διακριθούν οι περιπτώσεις αυτές που απαιτούν εννοιολογική αλλαγή και να αφυπνίσουμε τους μαθητές σχετικά με το ότι είναι λάθος η χρήση προσθετικών μηχανισμών σε αυτές τις περιπτώσεις.

[14] Αναφερόμαστε στις προσωπικές επιστημολογικές πεποιθήσεις ή προσωπική επιστημολογία που αποτελεί ερευνητικό πεδίο στο πλαίσιο της φιλοσοφίας και ερευνά τα φαινόμενα της ανθρώπινης γνώσης και μάθησης.

Ανάμεσα στις περιπτώσεις όπου απαιτείται εννοιολογική αλλαγή, όπως έχουν αναφερθεί από διάφορους ερευνητές, είναι η έννοια του κλάσματος, δεδομένου ότι απαιτεί ριζικές αλλαγές στην προϋπάρχουσα έννοια του φυσικού αριθμού (Hartnett & Gelman, 1998· Stafylidou & Vosniadou, 2004), επίσης η απόκτηση της επιστημονικής έννοιας της δύναμης, η οποία έρχεται σε σύγκρουση με την καθημερινή έννοια της δύναμης ως ιδιότητα των φυσικών αντικειμένων (Chi, Slotta, & de Leeuw, 1994), η κατανόηση την άποψης του Κοπέρνικου για το ηλιακό σύστημα, που έρχεται σε σύγκρουση με τη γεωκεντρική άποψη (Vosniadou & Brewer, 1994), κ.α.

Η διαδικασία της μάθησης μιας επιστημονικής έννοιας είναι αργή και βαθμιαία, κατά τη διάρκεια της οποίας τα παιδιά προσθέτουν συνήθως τις νέες, επιστημονικές, πληροφορίες στα αρχικά επεξηγηματικά πλαίσια τους, καταστρέφοντας έτσι τη συνοχή τους και δημιουργώντας συνθετικά μοντέλα. Παραδείγματα τέτοιων συνθετικών μοντέλων είναι τα μοντέλα της διπλής σφαίρας, της κοίλης σφαίρας, ή της επίπεδης σφαίρας, το μοντέλο του ήλιου και του φεγγαριού που περιστρέφονται γύρω από μια σφαιρική γη σε ένα γεωκεντρικό ηλιακό σύστημα, κ.λπ. (βλ. Vosniadou & Brewer, 1992, 1994).

Σχετικά με τα παραπάνω, η Βοσνιάδου κ.α. έχουν προσπαθήσει να παρέχουν μια γνωστική αναπτυξιακή προσέγγιση στην εννοιολογική αλλαγή μέσω λεπτομερών περιγραφών της ανάπτυξης της γνώσης σε διάφορους τομείς των Φυσικών Επιστημών, όπως: Παρατηρησιακή Αστρονομία (Vosniadou, 1994, 2003· Vosniadou & Brewer, 1992, 1994), Μηχανική (Ioannides & Vosniadou, 2001 Mega1akaki, Ioannides, Vosniadou, & Tiberghien, 1997), Γεωφυσική (Ioannidou & Vosniadou, 2001), Χημεία (Kouka, Vosniadou, & Tsapar1is, 2001), και Βιολογία (Kyrkos & Vosniadou, 1997).

2.3.3 Η εννοιολογική αλλαγή και η έννοια του κλάσματος

Στην παρούσα εργασία ασχολούμαστε με την εννοιολογική αλλαγή στα μαθηματικά και συγκεκριμένα στα κλάσματα. Ειδικά στον συγκεκριμένο επιστημονικό τομέα ανακύπτουν ορισμένα θεωρητικά και μεθοδολογικά ζητήματα μερικά από τα οποία θα αναφερθούν στη συνέχεια. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι περισσότερες από τις ήδη υπάρχουσες μελέτες διαπραγματεύονται την εννοιολογική αλλαγή που εμπλέκεται στη μετάβαση από ένα αριθμητικό σύστημα σε ένα ευρύτερο π.χ. από τους φυσικούς αριθμούς στα κλάσματα ή στους αρνητικούς και τους δεκαδικούς αριθμούς (Vosniadou, 1994). Ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες είναι οι μελέτες εννοιολογικής αλλαγής όπου η διαδικασία απόκτησης γνώσης λαμβάνει χώρα σε συνθήκες που η προϋπάρχουσα γνώση είναι ασύμβατη με τη νέα – «προτεινόμενη» γνώση. Σ' αυτές περιπτώσεις η απόκτηση-ενσωμάτωση νέας πληροφορίας απαιτεί τη ριζική αναδιοργάνωση αυτού που είναι ήδη γνωστό. Η μάθηση που απαιτεί αναδιοργάνωση προηγούμενων δομών γνώσης είναι πιο δύσκολη και χρονοβόρα σε σχέση με τη γνώση που μπορεί απλά να ενσωματωθεί. Έτσι, οι μαθητές δημιουργούν συχνά εσφαλμένες αντιλήψεις και έτσι μπορούν να ερμηνευτούν τα λάθη που κάνουν λόγω παρανοήσεων και τα οποία είναι «προβλέψιμα» (Vosniadou, 1994, 1999· Vamvakoussi & Vosniadou, 2002· Stafylidou & Vosniadou, 2005). Ένα τέτοιο επεξηγηματικό πλαίσιο, που προκύπτει άμεσα από την αρχική θεωρία των φυσικών αριθμών, είναι ότι το κλάσμα αποτελείται από δύο ανεξάρτητους αριθμούς.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι πέρα από τις γνωστικές διεργασίες είναι σημαντικό να διερευνηθούν μετα-γνωστικοί παράγοντες, κοινωνικο-πολιτισμικοί παράγοντες, ο ρόλος των κινήτρων και το πώς αυτά επηρεάζουν τη διαδικασία της εννοιολογικής αλλαγής. Δεν είμαστε οι πρώτοι που υποστηρίζουμε ότι μπορούν να υπάρξουν ασυμφωνίες και συγκρούσεις μεταξύ πολλών προηγμένων μαθηματικών εννοιών και "πρωταρχικών/ αφελών μαθηματικών." Ο Fischbein (1987) ήταν ένας από τους πρώτους μαθηματικούς εκπαιδευτικούς παρατήρησε ότι οι διαισθητικές πεποιθήσεις μπορούν να είναι η αιτία των συστηματικών λαθών των μαθητών στα μαθηματικά, ένα γεγονός που σημειώνεται επίσης από τους Stavy και Tirosh *(2000)* στη θεωρία διαισθητικών κανόνων τους (βλ. επίσης Tirosh & Tsamir, σ' αυτό το θέμα), από ερευνητές όπως Greeno (1991), και Verschaffel και de Corte (1993) στην περίπτωση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, και που επισημαίνεται από πολλούς άλλους εκπαιδευτικούς των μαθηματικών όπως οι Vergnaud (1989) και Sfard (1987). Άλλοι ερευνητές έχουν υποστηρίξει ότι το ασυμβίβαστο μεταξύ της προγενέστερης γνώσης και των εισερχόμενων πληροφοριών μπορεί να είναι η πηγή των δυσκολιών των μαθητών στην κατανόηση της άλγεβρας (Kieran, 1992), τα κλάσματα (Hartnett & Gelman, το 1998), τους ρητούς αριθμούς (Merenluoto & Lehtinen, *2002),* κ.λ.π.

Η προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής έχει τη δυνατότητα να εμπλουτίσει μια κοινωνική κονστρουκτιβιστική (δομιστική) προοπτική και παρέχει το αναγκαίο πλαίσιο για να συστηματοποιήσει τα προαναφερθέντα ευρύτατα διαδεδομένα ευρήματα και να τα χρησιμοποιήσει για μια θεωρία της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών. Μία άλλη προσέγγιση στο θέμα της εννοιολογικής αλλαγής στα μαθηματικά εστιάζει στο ότι αυτή μοιάζει να πραγματοποιείται «χρησιμοποιώντας» έναν συνδυασμό νοητικών αναπαραστάσεων όπως αναλογικές αναπαραστάσεις, νοητικά μοντέλα και νοητικές εικόνες. Η προσέγγιση αυτή προτείνει ποιοτική διαφορά στην οργάνωση των γνωσιακών δομών κατά την εννοιολογική αλλαγή, σε αντίθεση με την ποσοτική προσέγγιση που περιορίζεται στον απλό εμπλουτισμό (Vosniadou, Ioannidis, Dimitrakopoulou, Papadimitriou, 2001).

Γενικότερα, είναι σημαντικό να αναπτύξουμε μαθητές που επιδιώκουν την σκόπιμη μάθηση, που έχουν αποκτήσει μεταγνωστικές δεξιότητες και οι οποίοι προσδιορίζουν σωστά τα διαφορετικά είδη εκμάθησης και εφαρμόζουν τις αποτελεσματικότερες στρατηγικές στην ασχολία τους μ’ αυτά (Vosniadou, 2003).

Τέλος, χρήσιμο είναι να επισημάνουμε μερικά από τα προφανή πλεονεκτήματα της διερεύνησης των εκπαιδευτικών εφαρμογών της προσέγγισης μας σχετικά με την εννοιολογική αλλαγή, όπως είναι τα ακόλουθα:

- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως οδηγός για να προσδιορίσει τις έννοιες στα μαθηματικά που πρόκειται να προκαλέσουν στους μαθητές μεγάλη δυσκολία,
- να προβλέψει και να εξηγήσει τα συστηματικά λάθη και τις παρερμηνείες των μαθητών,
- να παρέχει τις μαθητο-κεντρικές εξηγήσεις των αντίθετων-διαισθητικά μαθηματικών εννοιών,
- να προειδοποιήσει τους μαθητές σχετικά με το λάθος της χρήσης προσθετικών μηχανισμών σ’ αυτές τις περιπτώσεις,
- να βρει τις κατάλληλες αναλογίες σύνδεσης, κ.λπ.
- να δώσει έμφαση στη σημασία να κατευθύνουμε μαθητές που λειτουργούν διαισθητικά, να αναπτύξουν τις μεταγνωστικές δεξιότητες που απαιτούνται για να υπερνικήσουν τα εμπόδια που τους επιβάλλονται από τη προγενέστερή τους γνώση (Schoenfeld, 1987· Vosniadou, 2003).

2.4 ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

Είναι γενική η πεποίθηση ότι οι εξωτερικές αναπαραστάσεις βοηθούν τους μαθητές να συλλάβουν το νόημα των μαθηματικών εννοιών. Ωστόσο, η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, όπως έχει διαπιστωθεί από αρκετούς ερευνητές, δεν προωθείται πάντα από την απλή παρουσία αναπαραστάσεων. Σημαντικό ρόλο διαδραματίζει η προϋπάρχουσα γνώση, καθώς επίσης και η επεξήγηση και η κατάλληλη ερμηνεία των σχετικών εξωτερικών αναπαραστάσεων, το νόημα των οποίων μπορεί να διαστρεβλωθεί, ιδιαίτερα όταν αυτές έρχονται σε σύγκρουση με τις προηγούμενες πεποιθήσεις του μαθητή. Η ιδέα της αναπαράστασης αποτελεί ένα βασικό εργαλείο της σύγχρονης Διδακτικής των Μαθηματικών. Η ιδέα αυτή που κυριαρχεί σε όλη την έκταση της Θεωρίας Γνώσης και Γνωστικής Ψυχολογίας (Billman 1999· Stufflebeam 1999) εμφανίζεται μέσα σε μια πληθώρα ορισμών και εκτιμήσεων, αφού η διαπραγμάτευση της ξεπερνά κατά πολύ τα πλαίσια της διδασκαλίας και μάθησης κι ακόμη εκείνα του ανθρώπου. Χρησιμοποιείται για να περιγραφούν γενικότερα νοήμονα συστήματα, όπως είναι τα τεχνήματα της Τεχνητής Νοημοσύνης, αλλά και οι δυνατότητες άλλων βιολογικών συστημάτων εκτός του ανθρώπου.

Για αρκετά χρόνια θεωρούσαμε ότι η μάθηση προϋποθέτει μόνο μια σωστή διδασκαλία. Θέλουμε να επισημάνουμε μέσα από την εργασία αυτή την ανεπάρκεια της παραδοσιακής παιδαγωγικής άποψης, σύμφωνα με την οποία η καλή διδασκαλία είναι επαρκής για καλή μάθηση και επιπλέον να παρουσιαστεί μια πολυδιάστατη προσέγγιση στην εξέταση της μάθησης των Μαθηματικών, η οποία επικεντρώνεται στην εξέταση του ρόλου των αναπαραστάσεων στη μάθηση των μαθηματικών εννοιών.

Η εναλλακτική αυτή προσέγγιση προέρχεται από τα πεδία της Γνωσιακής επιστήμης και της Διδακτικής των Μαθηματικών. Η Διδακτική των Μαθηματικών αναμφίβολα σχετίζεται με πολλές περιοχές, όπως η Ψυχολογία, η Παιδαγωγική, η Ιστορία και η Γλωσσολογία, από τις οποίες μάλιστα δανείζεται εργαλεία και μεθόδους, όπως κλινικές μεθόδους, συνεντεύξεις ή τεστ και αναλυτικές έννοιες, όπως είναι η αντίληψη των δομών, η επεξεργασία πληροφοριών κ.τ.λ. Ταυτόχρονα, οι ιδιαιτερότητες που αφορούν τη διδασκαλία των Μαθηματικών οδήγησαν στην ανακάλυψη διάφορων μεθόδων, οι οποίες είναι ειδικές για την περιοχή αυτή. Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στη μάθηση των μαθηματικών εννοιών αποτελεί ένα σημείο αιχμής των ερευνών της Διδακτικής των Μαθηματικών και της Ψυχολογίας όπως θα δούμε στο δεύτερο μέρος της παρούσας εργασίας.

Η ανθρώπινη σκέψη όπως γνωρίζουμε χαρακτηρίζεται από τη χρήση πολλών ειδών αναπαράστασης για την ίδια έννοια, γεγονός που τη διαφοροποιεί από τη νοημοσύνη των ζώων αλλά όχι από την τεχνητή νοημοσύνη. Αυτό που διαφοροποιεί την ανθρώπινη σκέψη από τη νοημοσύνη των ζώων δεν είναι μόνο η ικανότητα χρήσης της γλώσσας ως μορφής επικοινωνίας, αλλά η προσφυγή σε πολλά συστήματα αναπαράστασης (σχέδιο, γραπτά κείμενα, προφορική έκφραση κ.τ.λ.). Η επαφή με τα σύμβολα και γενικά με τα διάφορα είδη αναπαράστασης ξεκινά από πολύ νωρίς. Όπως επισημαίνουν οι DeLoache, Uttal & Pierrutsakos (1998), η αρχική επαφή των παιδιών με τα σύμβολα ξεκινά πριν από τη γέννηση, αφού το έμβρυο έρχεται σε επαφή με την ομιλία και τη μουσική που ακούει, όταν βρίσκεται στον αμνιακό σάκο. Μετά τη γέννηση ο άνθρωπος εμπλέκεται σε ένα δίκτυο συμβόλων, το οποίο συνεχώς επεκτείνεται και γίνεται πιο πολύπλοκο. Κατά τη διάρκεια των πρώτων χρόνων ζωής η δυνατότητα για παραγωγή συμβόλων και η κατανόηση τους ενισχύεται ολοένα και περισσότερο. Ο Granger (1979) υπογραμμίζει ότι η πρόοδος των γνώσεων συνοδεύεται από τη δημιουργία και την ανάπτυξη νέων ειδικών σημειωτικών συστημάτων, που συνυπάρχουν και λειτουργούν παράλληλα με το πρώτο σύστημα, αυτό της φυσικής γλώσσας (αναφορά στο Gagatsis et al., 1999). Για τον Vigotsky εξάλλου η αφομοίωση του εξωτερικού κοινωνικού λόγου είναι προϋπόθεση του εσωτερικού εγωκεντρικού λόγου.

Η δυνατότητα προσφυγής σε πολλαπλά συστήματα αναπαράστασης αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό της ανθρώπινης σκέψης. Κατά συνέπεια, η εκπαιδευτική πράξη, η οποία είναι μια από τις εκφράσεις της ανθρώπινης σκέψης, χαρακτηρίζεται από τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων με στόχο την απόδοση ιδεών με διαφορετικούς τρόπους. Η Μαθηματική Εκπαίδευση ως αναπόσπαστο μέρος της εκπαιδευτικής πράξης, που περιλαμβάνει σύνολα ιδεών και εννοιών, αποτελεί επίσης τομέα της ανθρώπινης δραστηριότητας και σκέψης, ο οποίος χαρακτηρίζεται από τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων.

Η ανάγκη μελέτης της έννοιας της αναπαράστασης προκύπτει τόσο για πρακτικούς όσο και για θεωρητικούς λόγους (Kaput, 1985, 1987a, 1987b). Οι πρακτικοί λόγοι αφορούν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη μετάφραση από τη μια αναπαράσταση στην άλλη σε σχέση με τις μαθηματικές έννοιες, καθώς επίσης ανάμεσα στην καθημερινή εμπειρία και τα Μαθηματικά. Οι θεωρητικοί λόγοι αφορούν την ανάγκη για ύπαρξη ενός συστηματικού θεωρητικού πλαισίου σε σχέση με τα διάφορα συστήματα αναπαράστασης, ώστε να μπορούν να αντιμετωπιστούν αποτελεσματικά οι πρακτικές δυσκολίες, που προκύπτουν σε σχέση με την κατανόηση και τη χρήση των αναπαραστάσεων. «Το θεωρητικό πλαίσιο θεωρείται ότι παρέχει ένα γλωσσικό/ σημειωτικό συμπλήρωμα στην καθαρά γνωστική προσέγγιση των πιο πάνω προβλημάτων» (Kaput, 1987a, σελ. 19).

Τα παιδιά από μικρή ηλικία έρχονται καθημερινά σε επαφή με μεγάλη ποικιλία εξωτερικών αναπαραστάσεων μέσα στα πλαίσια της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Στόχος της διδασκαλίας είναι η σε βάθος κατανόηση μαθηματικών εννοιών μέσα από τη δημιουργία πλαισίων καλά οργανωμένων νοητικών αναπαραστάσεων. Η κατανόηση μιας έννοιας προϋποθέτει την ικανότητα αναγνώρισης της έννοιας, όταν αυτή παρουσιάζεται με μια ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης, την ικανότητα ευέλικτου χειρισμού της έννοιας μέσα στα συγκεκριμένα συστήματα αναπαράστασης και την ικανότητα μετάφρασης της έννοιας από το ένα σύστημα στο άλλο (Lesh, Post & Behr, 1987· Seeger, 1998). Η ικανότητα μετάφρασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης μιας έννοιας στο άλλο είναι ιδιαίτερα σημαντική για την επίλυση μαθηματικού προβλήματος και γενικότερα για τη μάθηση των μαθηματικών εννοιών (Janvier, 1987a).

Ο σημαντικός ρόλος που διαδραματίζουν τα συστήματα αναπαράστασης και η αλλαγή πεδίου αναπαράστασης στην επίλυση μαθηματικού (και όχι μόνο) προβλήματος και στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών φαίνεται από το μεγάλο αριθμό ερευνητικών εργασιών, που εξετάζουν το θέμα αυτό (Ασβεστά & Γαγάτσης, 1995· Boulton-Lewis, 1998· Cifarelli, 1998· Duval, 1987· Even, 1998· Gagatsis, 1997· Gagatsis et al., 1999· Goldin & Kaput, 1996· Greer & Harel, 1998· Hitt, 1998· Janvier, 1987a· Janvier 1987b· Janvier, 1998· Kaput, 1985· Kaput,1987a, Kaput, 1987b· Lesh, Behr &Post, 1987· Lesh, Post & Behr, 1987). Οι αναπαραστάσεις είναι «σύμφυτες» με τα Μαθηματικά (Dufour-Janvier, Bednarz & Belanger, 1987, σ. 110). Υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι αναπαραστάσεις είναι τόσο στενά συνδεδεμένες με μια έννοια, όπως για παράδειγμα οι συναρτήσεις και η γραφική παράσταση, ώστε είναι δύσκολο να γίνει κατανοητή η έννοια, χωρίς τη χρήση της συγκεκριμένης αναπαράστασης. Σύμφωνα με τους Καλδρυμίδου και Οικονόμου (1992) κάθε αναπαράσταση παρέχει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της έννοιας, χωρίς να μπορεί να την περιγράψει ολοκληρωτικά, αντίθετα οι διάφορες αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας αλληλοσυμπληρώνονται. Σύμφωνα με αποτελέσματα ερευνών η μετάβαση από τη μια αναπαράσταση στην άλλη παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες τόσο σε μαθητές γυμνασίου (Kerslake, 1986) και αποφοίτους λυκείου (Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1992) όσο και σε φοιτητές Μαθηματικών και Φυσικής (Artigue, 1992).

2.4.1 Θεωρητικά μοντέλα για τις σχέσεις αναπαράστασης και μάθησης των μαθηματικών

Η έννοια της αναπαράστασης – Ορισμοί

Η έννοια της αναπαράστασης περιλαμβάνει τις ακόλουθες πέντε ολότητες: (α) την ολότητα που αναπαρίσταται, (β) την ολότητα που αναπαριστά, (γ) τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας προς αναπαράσταση που αναπαρίστανται, (δ) τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας που αναπαριστά, οι οποίες κάνουν την αναπαράσταση και (ε) την αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο ολότητες (Kaput, 1987a, σ. 23).

Ο όρος εσωτερικές αναπαραστάσεις αναφέρεται σε νοητικές εικόνες που κατασκευάζουν τα υποκείμενα, για να αναπαραστήσουν την εξωτερική πραγματικότητα – βρισκόμαστε στο επίπεδο του σημαινόμενου (Dufour –Janvier et al., 1987, σ. 109).

Ο όρος εξωτερικές/ σημειωτικές αναπαραστάσεις αναφέρεται σε όλους τους εξωτερικούς συμβολικούς φορείς – σύμβολα, σχήματα, διαγράμματα – οι οποίοι έχουν στόχο να αναπαραστήσουν εξωτερικά μια συγκεκριμένη μαθηματική [στην δική μας περίπτωση] πραγματικότητα – βρισκόμαστε στο πεδίο του σημαίνοντος (Dufour-Janvier et al., 1987, σ. 109).

Ο όρος μετάφραση αναφέρεται στις ψυχολογικές διαδικασίες που εμπλέκονται στη μετάβαση από μια αναπαράσταση σε άλλη, για παράδειγμα, από μια εξίσωση σε μια γραφική παράσταση (Janvier, 1987a, σ. 27) και στο σημείο αυτό ο Von Glasersfeld, (1987b), είναι κατηγορηματικός: Δεν μπορεί να λεχθεί ότι, ένας οργανισμός που απλά δρα και αντιδρά, ερμηνεύει. Η ερμηνεία συνεπάγεται γνώση για την ύπαρξη περισσότερων της μιας πιθανοτήτων, σκοπιμότητα και λογικά ελεγχόμενη επιλογή. Δεν είναι αρκετό ένας μαθητής να κάνει το σωστό. Ικανός θεωρείται ο μαθητής που ξέρει τι κάνει και γιατί είναι σωστό αυτό που κάνει. Το ζήτημα της επιλογής είναι χαρακτηριστικό του ανθρώπινου εγκεφάλου κατά τον Edelman (1992) και ακριβώς αυτή η απειρία επιλογών διαφοροποιεί τα υποκείμενα ως προς τη μάθηση. Το ρεπερτόριο που διαθέτει κανείς από μόνο του δεν προκρίνει τους συνδυασμούς και τις επιλογές που θα καταλήξει. Η *αποβλεπτικότητα* (intentionality) είναι εκείνη που διαφοροποιεί τον άνθρωπο από τα άλλα νοήμονα συστήματα (Edelman 1992, Műller & al, 1998· Billman, 1999· Stufflebeam 1999). Στη μάθηση των μαθηματικών το ζήτημα εμφανίζεται περισσότερο οξυμένο. Για τον Von Glasersfeld, όσο πιο αφηρημένες είναι οι μαθηματικές έννοιες και οι λειτουργίες που θα εγκαθιδρυθούν, τόσο περισσότερο αναστοχαστική δράση απαιτείται. Ο αναστοχασμός απαιτεί προσπάθεια και προκειμένου να καταβληθεί χρειάζεται κίνητρο. Η εσωτερική ενίσχυση έχει τεράστια θετικά αποτελέσματα στους γνωστικούς αναστοχαστικούς οργανισμούς. Η εσωτερική ενίσχυση αφορά στην επιτυχημένη οργάνωση, σ' ένα βιώσιμο τρόπο χειρισμού ενός τομέα εμπειρίας και προέρχεται ολοκληρωτικά από το σύστημα του ίδιου του οργανισμού στην προσαρμογή του πάντα σε ένα φυσικό και κοινωνικό περιβάλλον με το οποίο συνδιαλέγεται.

Ο όρος intentionality, εμπεριέχει τόσο τις προθέσεις όσο και τις εννοιολογικές συγκροτήσεις του υποκειμένου ώστε να αποβλέπουν στην θεματοποίηση και οικειοποίηση μιας έννοιας και είναι αποφασιστικός στην κατανόηση της ανθρώπινης νοημοσύνης. Για τον Husserl (1985), το νοούμενο αντικείμενο είναι το αποβλεπτικό αντικείμενο που υπάρχει ανεξάρτητα των αναπαραστάσεων του και αυτό είναι το σημαντικό σημείο που ενδιαφέρει τα μαθηματικά. Η άποψη του Kaput (1987a), ότι τα Μαθηματικά αποτελούν ένα επιστημονικό οικοδόμημα που εξετάζει τη διαδικασία της αναπαράστασης από μια δομή σε άλλη υπαινίσσεται μια τέτοια θέση, όπως χαρακτηριστικά αναφέρει «μεγάλο μέρος της δουλειάς που γίνεται στα Μαθηματικά επικεντρώνεται στον εντοπισμό εκείνης της δομής που τελικά διατηρείται μετά την αναπαράσταση» (Kaput, 1987a, σ. 23).

Συνθήκες που εμπλέκουν τους συγκινησιακούς παράγοντες του υποκειμένου είναι απαραίτητο να ληφθούν υπόψη. Την ίδια άποψη εκφράζει και ο Goldin (1998), αφού εισηγείται ότι οι στόχοι που τίθενται στη μαθηματική εκπαίδευση δεν πρέπει να περιορίζονται στη μεταβίβαση ενός συγκεκριμένου μαθηματικού περιεχομένου στους μαθητές και στη διδασκαλία συγκεκριμένων στρατηγικών επίλυσης προβλήματος. Ο στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης πρέπει να εστιάζεται στην οικοδόμηση ισχυρών και διαφορετικών εσωτερικών συστημάτων αναπαράστασης στους μαθητές. Αν ο στόχος είναι η ανάπτυξη εσωτερικών συστημάτων αναπαράστασης, πρέπει να αποδίδεται η ίδια σημασία σε όλα τα είδη αναπαράστασης – εικονιστική αναπαράσταση, λεκτική αναπαράσταση, τυπική αναπαράσταση, έλεγχος, αλλά οπωσδήποτε και στον συναισθηματικό τομέα.

Η φύση της αναπαράστασης είναι ένα από τα θεμελιώδη προβλήματα όχι μόνο στο χώρο της Τεχνητής Νοημοσύνης αλλά και στον ευρύτερο χώρο των Γνωσιακών Επιστημών. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρεται από τον Τζελεπίδη (2001), επικρατούσα θεωρία είναι αυτή του Allen Newell όπως αυτή σκιαγραφείται στο βιβλίο του Ενοποιημένες Θεωρίες Νόησης. Εκεί χρησιμοποιεί το απλό πρόβλημα αναδιάταξης κύβων για να στηρίξει την άποψη του (την οποία αποκαλεί «αναπαραστασιακό νόμο») για τη φύση της αναπαράστασης. Συνοπτικά το επιχείρημα του έχει ως εξής:

Έστω ότι έχουμε τρεις κύβους σε μια ορισμένη διάταξη πάνω σε ένα τραπέζι και επιθυμούμε την αναδιάταξη τους. Ας ονομάσουμε $Δ_1$ την αρχική διάταξη, $Δ_2$ την επιδιωκόμενη αναδιάταξη και Μ τον απαιτούμενο μετασχηματισμό για την επίτευξη της $Δ_2$. Προφανώς: $Μ(Δ_1)= Δ_2$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η διάταξη $Δ_1$ κωδικοποιείται σε κάποια γλώσσα και έστω ότι η κωδικοποίηση της είναι $Κ(Δ_1)$, παρομοίως Κ(Μ) είναι η κωδικοποίηση του μετασχηματισμού Μ. Προφανώς: $Κ(Μ)[Κ(Δ_1)]=Χ$. Τέλος ας υποθέσουμε ότι το Χ αποκωδικοποιείται στην ίδια γλώσσα, συμβολικά, Α(Χ). Αν τώρα: $Α(Χ)=Δ_2$, τότε θα λέμε ότι το σύστημα κωδικοποίησης/ αποκωδικοποίησης έχει χρησιμοποιηθεί επιτυχώς σαν αναπαράσταση του προβλήματος της αναδιάταξης. Σύμφωνα με τον Newell αυτή είναι η ουσία της αναπαράστασης και την διατυπώνει γενικά σαν νόμο ως ακολούθως:

A [K(M)[K(Φ)]] = M(Φ), όπου Φ είναι ένα τυχόν εξωτερικό[15] φαινόμενο και K είναι ο απαιτούμενος εξωτερικός μετασχηματισμός.

Στην παραπάνω βάση προχωρεί και προσδιορίζει δύο τύπους αναπαραστασιακών συστημάτων της ίδιας κατηγορίας. Πρώτον, ένα αναλογικό (ή ειδικευμένο) αναπαραστασιακό σύστημα, όπως ένας χάρτης. Δεύτερον, ένα συνθέσιμο (ή γενικό) αναπαραστασιακό σύστημα, όπως η λογική ή η γλώσσα προγραμματισμού Lisp. Η κριτική της παραπάνω ανάλυσης, όπως διατυπώνεται από τον Τζελέπιδη (2001), πιστεύω ότι είναι απαραίτητη για μια βαθύτερη εξέταση της έννοιας της αναπαράστασης. Έτσι θα πρέπει να αναφέρουμε ότι, ο ονομαζόμενος αναπαραστασιακός νόμος δεν είναι άλλο από το θεμελιώδη στόχο της αναπαράστασης και άρα δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι αποτελεί την ουσία της αναπαράστασης. Επίσης το εύρος των συνθέσιμων αναπαραστασιακών συστημάτων περιορίζεται σε εκείνα τα οποία σχεδιάζονται αποκλειστικά από ανθρώπους, τέτοια συστήματα όμως κάθε άλλο παρά αναγκαίο είναι να αποτελούν τη βάση μη-ανθρώπινων νοημόνων συστημάτων. Θεωρεί ακόμη δεδομένη την ικανότητα του χρήστη αναπαραστασιακών συστημάτων ικανό να συσχετίζει καταλλήλως το αναπαριστόμενο φαινόμενο ή κατάσταση με το αναπαριστόν (ο Newell δεν σχολιάζει καν το τι υπεισέρχεται στη διαδικασία αυτής της θεμελιώδους σημαντικής ικανότητας και το οποίο κάθε άλλο παρά σαφές είναι). Τέλος, οι έννοιες κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης (τις οποίες ορίζει σαν μαθηματικές συναρτήσεις) περιορίζουν ακόμη περισσότερο το εύρος και τον πλούτο των διαδικασιών αναπαράστασης. Ένας ορισμός της αναπαράστασης ο οποίος δεν αναφέρεται σε οιοδήποτε σύστημα ή οντότητα η οποία είναι αναγκαία για την επεξεργασία των αναπαραστάσεων, είναι αυτός που αναφέρεται από τον Τζελεπίδη (2001):

Η αναπαράσταση μιας κατάστασης, έστω K_1, είναι μια άλλη κατάσταση K_2, τέτοια ώστε:

- Απλοποιεί την K_1.
- Διατηρεί τα ουσιώδη χαρακτηριστικά της K_1.
- Αποτελεί μέρος ενός φυσικού υλικού.

[15] Δηλαδή πριν τη χρήση του συστήματος κωδικοποίησης/ αποκωδικοποίησης.

Πολλοί ερευνητές έχουν διατυπώσει την άποψη ότι όρος αναπαράσταση είναι ασαφής και ως τέτοιος επιδέχεται πολλαπλές ερμηνείες (Goldin & Kaput, 1996· Kaput, 1985· Roth & McGinn, 1998· Seeger, 1998· Von Glaserfeld 1987b). Οι αναπαραστάσεις ανήκουν σε δομικά πολύπλοκα συστήματα, προσωπικά ή πολιτισμικά και συμβατικά (Goldin & Kaput, 1996· Kaput, 1998). Τα συστήματα αυτά έχουν ονομαστεί σχήματα συμβόλων (Kaput, 1987a· Kaput, 1987b) ή συστήματα αναπαράστασης (Goldin, 1987). Στο πιο πάνω γενικό πλαίσιο μπορούν να ενταχθούν δύο είδη αναπαραστάσεων: οι εσωτερικές/ νοητικές και οι εξωτερικές/ σημειωτικές αναπαραστάσεις (DeLoache et al., 1998· Goldin & Kaput, 1996· Janvier, 1987a· Roth & McGinn, 1998· Seeger, 1998). Οι Goldin και Kaput διακρίνουν τα εσωτερικά και τα εξωτερικά συστήματα αναπαράστασης υποστηρίζοντας ότι «η διάκριση αυτή είναι ουσιαστικής σημασίας για την Ψυχολογία και τη μάθηση των Μαθηματικών» (Goldin & Kaput, 1996, σ.399), παρόλο που η διχοτομία εξωτερικές/ εσωτερικές αναπαραστάσεις είναι τεχνητή (Lesh, Post & Behr, 1987), ενώ επιφυλάξεις έχει εκφράσει και ο Duval (1987).

Ο όρος εσωτερικές αναπαραστάσεις όπως είπαμε και πριν, αναφέρεται σε νοητικούς σχηματισμούς που οικοδομούν τα υποκείμενα – μαθητές ή λύτες προβλημάτων – για να αναπαραστήσουν την πραγματικότητα. Εξαιτίας της φύσης τους οι εσωτερικές αναπαραστάσεις δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμες. Η ύπαρξη τους δηλώνεται από την εξωτερική συμπεριφορά των υποκειμένων. Πολλές φορές η διδασκαλία αποσκοπεί στη δημιουργία συγκεκριμένων νοητικών αναπαραστάσεων.

Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις είναι «οι παρατηρήσιμες ενσωματώσεις των εσωτερικών εννοιολογικών δομών των μαθητών» (Lesh, Post & Behr,1987, σ. 33), δηλαδή του τρόπου με τον οποίο κατανοούν τις έννοιες εσωτερικά οι μαθητές. Υπάρχουν πέντε διαφορετικά είδη συστημάτων εξωτερικών αναπαραστάσεων σε σχέση με τη μάθηση των Μαθηματικών και την επίλυση προβλήματος (Lesh, Post & Behr, 1987):

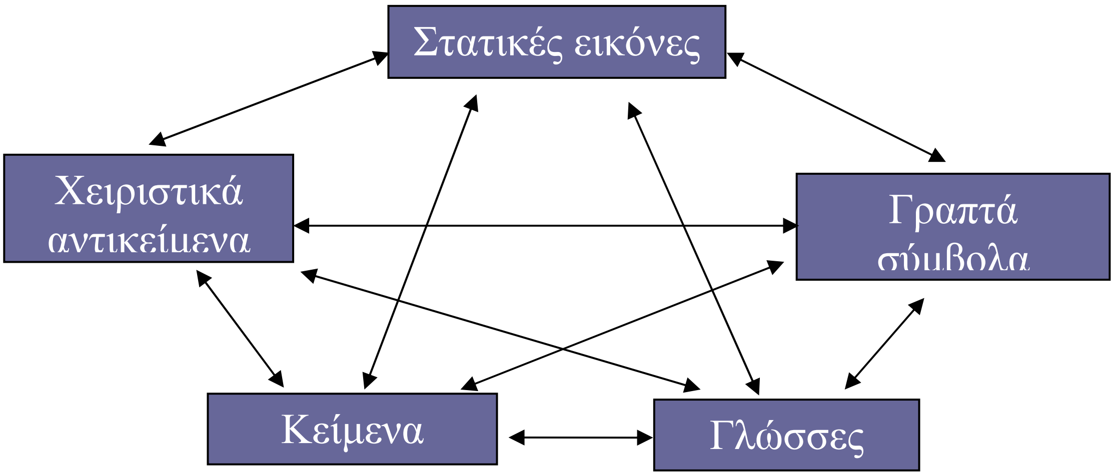
1. Κείμενα – στα οποία η γνώση είναι οργανωμένη με βάση γεγονότα της καθημερινής ζωής και τα οποία αποτελούν το πλαίσιο για την ερμηνεία και επίλυση άλλων καταστάσεων προβλήματος.
2. Χειριστικά αντικείμενα/ μοντέλα – όπως είναι οι κύβοι αριθμητικής, οι ράβδοι κλασμάτων, η αριθμητική γραμμή, οι κύβοι Dienes, όπου τα επιμέρους στοιχεία του συστήματος/ μοντέλου δεν έχουν νόημα αυτά καθ' αυτά, ωστόσο οι σχέσεις και οι

λειτουργίες που προκύπτουν από το χειρισμό και συνδυασμό των επιμέρους στοιχείων ταιριάζουν με πολλές καταστάσεις της καθημερινής ζωής.

3. Εικόνες ή διαγράμματα – στατικά εικονικά μοντέλα τα οποία, όπως και τα χειριστικά μοντέλα, είναι δυνατόν να εσωτερικευθούν ως νοητικές εικόνες.
4. Γλώσσες – συμπεριλαμβανομένων και των εξειδικευμένων γλωσσών, που σχετίζονται με τα διάφορα επιμέρους πεδία (π.χ. μαθηματική λογική).
5. Γραπτά σύμβολα – τα οποία, όπως και οι γλώσσες, είναι δυνατόν να περιλαμβάνουν εξειδικευμένες προτάσεις και φράσεις ($\chi + 3 = 8$, $A' \cup B' = (A \cap B)'$, καθώς επίσης συνηθισμένες προτάσεις και φράσεις στην ομιλούμενη γλώσσα.

Η παραπάνω καταγραφή μπορούμε να πούμε ότι θέτει ένα σημαντικό πρόβλημα: παρουσιάζει σε μια ομαδοποίηση διάφορα συστήματα εξωτερικών αναπαραστάσεων με βάση τον τρόπο παραγωγής τους και όχι με βάση τη λειτουργία τους σε ένα μαθηματικό πρόβλημα ή σε ένα μαθηματικό κείμενο γενικότερα.

Το διάγραμμα 1 παρουσιάζει τα πέντε συστήματα εξωτερικών αναπαραστάσεων.



Διάγραμμα 1. Συστήματα εξωτερικών αναπαραστάσεων. Από «Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving» των R. Lesh, T. Post & M. Behr, 1987, in C. Janvier (Ed.), <u>Problems of Represantation in the Teaching and Learning of Mathematics</u>, σ. 34.

Η διαδικασία μετάφρασης από μια εξωτερική αναπαράσταση σε άλλη στοχεύει στην ενίσχυση της σύνδεσης ανάμεσα στις εξωτερικές αναπαραστάσεις. Με τη σύνδεση των διαφορετικών εσωτερικών αναπαραστάσεων, σύμφωνα με τον Δημητρίου

(1993), δημιουργούνται νέες νοητικές μονάδες, οι οποίες περιλαμβάνουν σχέσεις ανάμεσα στις ικανότητες και στις διαδικασίες που ανήκουν σε διαφορετικά γνωστικά πεδία. Με τον τρόπο αυτό τα υποκείμενα αναπτύσσουν ικανότητες, οι οποίες σχετίζονται με την επιτυχημένη μετάβαση από τη μια αναπαράσταση μιας έννοιας σε άλλη και συμβάλλουν στην ολοκληρωμένη κατανόηση της έννοιας και στην ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλήματος.

Η ερμηνεία των εξωτερικών αναπαραστάσεων και των σχέσεων αναπαράστασης δεν είναι αντικειμενική ή απόλυτη, αλλά εξαρτάται από τις εσωτερικές αναπαραστάσεις των ατόμων που δίνουν την ερμηνεία (Goldin & Kaput, 1996). Σύμφωνα με μια από τις βασικές αρχές του οικοδομισμού (Von Glaserfeld, 1987b) μια αναπαράσταση δεν αναπαριστά από μόνη της, αλλά χρειάζεται ερμηνεία και για να ερμηνευθεί πρέπει να υπάρχει το άτομο που θα την ερμηνεύσει. Το κάθε άτομο αντιλαμβάνεται και ερμηνεύει μια εξωτερική αναπαράσταση με βάση τις νοητικές αναπαραστάσεις που έχει ήδη οικοδομήσει ως αποτέλεσμα προηγούμενων γνώσεων και εμπειριών. Η ερμηνεία μπορεί να επέλθει και με το συνδυασμό επιμέρους γνωστών στοιχείων με αποτέλεσμα να οικοδομηθεί μια νέα έννοια.
Επίσης, όπως υποστηρίζουν οι Goldin και Kaput (1996), η χρήση της έννοιας της αναπαράστασης παρέχει τη δυνατότητα για λεπτομερή δομική ανάλυση ιδιοτήτων, κάτι που θεωρείται σημαντικό στα Μαθηματικά.

Τέλος, θα ήθελα να τονίσω δύο από τις πλέον βασικές διαδικασίες για τη γνώση, την έννοια της «κατανόησης» και την έννοια της «επικοινωνίας», που είναι θεμελιώδεις κατά την προσωπική μου άποψη, και τις οποίες δεν μπορεί να αγνοήσει η Διδακτική των Μαθηματικών, αλλά και κάθε άλλη επιστήμη που επιδιώκει την μελέτη ευφυών συστημάτων γενικότερα. Σχετικά με την "επικοινωνία" υπάρχει θα λέγαμε μια γενική συμφωνία στην σχετική βιβλιογραφία, στο ότι αυτή περιλαμβάνει ένα είδος ανταλλαγής, μιας σχέσης, μιας συμβολικής απάντησης (response), μιας διανομής, (ένα σύστημα από) έννοιες, ή ακόμα και "κατανόηση". Ο ορισμός της «κατανόησης» ενός θέματος ή ενός προβλήματος που προτείνεται από τον Τζελεπίδη (2004), είναι ο εξής: «*Μια οντότητα (ένας άνθρωπος ή μια μηχανή) Χ λέγεται ότι έχει καταλάβει κάτι, έστω το S, εάν και μόνο εάν ο Χ μπορεί να περιγράψει το S από την άποψη ενός συνόλου δικών του πρωταρχικών (primitives) προτάσεων/ υποθέσεων (premises)*».

Βέβαια, η κατανόηση και η επικοινωνία, παρά τους απλούς ορισμούς τους, είναι εξαιρετικά σύνθετες διαδικασίες. Σχετικά με τις βασικές πτυχές αυτής της πολυπλοκότητας, όπως αυτές παρουσιάζονται από τον Τζελεπίδη, μπορούμε κατ' αρχάς να πούμε ότι, η κατανόηση περιλαμβάνει πρωταρχικές (primitives) έννοιες, έτσι η κατανόηση - και επομένως και η επικοινωνία - περιλαμβάνει τη σημασία (meaning). Επίσης, χωρίς να σταθούμε στις λεπτομέρειες, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η έννοια είναι κάτι που εξαρτάται από το πλαίσιό της, την οντότητα για την οποία εκείνο το κάτι είναι σημαντικό, και τον χρόνο αυτής της σύλληψης (conception). Οι πρωταρχικές (primitives) έννοιες κάποιου μπορούν να αναφέρονται σε οποιαδήποτε ιδέα, έκφραση, ή πεποίθηση που θα μπορούσε ο καθένας να χρησιμοποιήσει για να σκεφτεί. Οι πρωταρχικές (primitives) έννοιες είναι δύο ειδών: γλωσσικές και μη-γλωσσικές. Ακολουθεί ότι τέτοιες πρωταρχικές (primitives) έννοιες μπορούν να είναι είτε τυπικές είτε άτυπες. Συνήθως, είναι άτυπες. Οι πρωταρχικές (primitives) έννοιες μπορούν επίσης να αναφερθούν σιωπηρά. Είναι προφανές ότι ενώ μπορεί να υπάρχει μια πρωταρχική (primitive) έννοια για ένα άτομο μπορεί να μην υπάρχει για κάποιο άλλο. Το θέμα γίνεται ακόμη πιο πολύπλοκο αν λάβουμε υπόψη μας, ότι κάτι μπορεί να είναι πρωταρχική (primitive) έννοια για ένα άτομο αλλά μπορεί να είναι μια σύνθετη ιδέα για κάποιο άλλο. Παραδείγματος χάριν, "το νερό" που μπορεί να είναι μια πρωταρχική (primitive) έννοια για τη γιαγιά μου αλλά δεν είναι πρωταρχική (primitive) έννοια για εκείνους που ξέρουν ότι "το νερό" είναι πραγματικά H_2O. Αυτό πιστεύω είναι πολύ σημαντικό και όπως μπορώ να κρίνω μέσα από την μικρή εμπειρία μου και ως μαθητής αλλά και ως καθηγητής μαθηματικών σε δημόσια και ιδιωτικά σχολεία, φοβάμαι ότι συχνά δεν λαμβάνεται υπόψη ή άλλες φορές ίσως είναι απλά δύσκολο να επιτευχθεί, με αποτέλεσμα όπως πολύ καλύτερα αντιλαμβάνομαι τώρα, καθηγητής και μαθητές να προσπαθούν να επικοινωνήσουν χρησιμοποιώντας ουσιαστικά η κάθε πλευρά μια διαφορετική γλώσσα.

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι, αφού η κατανόησή κάποιου εξαρτάται από τις πρωταρχικές (primitives) έννοιες κάποιου, μπορεί επίσης να ποικίλει αρκετά από άτομο σε άτομο ανάλογα με το σύστημα των πρωταρχικών (primitives) εννοιών που επιτυγχάνονται από κάθε άτομο σε ένα συγκεκριμένο θέμα και σε έναν συγκεκριμένο χρόνο. Επίσης, δεδομένου ότι οι πρωταρχικές (primitives) έννοιες κάποιου μπορούν να αλλάξουν με το χρόνο, η κατανόησή κάποιου μπορεί να αλλάξει επίσης. Σαν παράδειγμα, αρκεί να συγκρίνουμε τις πρωταρχικές (primitives) έννοιες ενός μικρού παιδιού με εκείνες ενός κβαντικού φυσικού όσον αφορά την έννοια της ηλεκτρικής ενέργειας, ή (σχετικότερα με το θέμα που εξετάζουμε) ενός μαθητή και ενός καθηγητή μαθηματικών. Εν συντομία, η κατανόησή κάποιου εξαρτάται και από τον χρόνο και από τις πρωταρχικές (primitives) έννοιες κάποιου, ή ακριβέστερα, η κατανόησή κάποιου εξαρτάται από τις πρωταρχικές (primitives) έννοιες του, οι οποίες εξαρτώνται στη συνέχεια από τον χρόνο.

Το πλαίσιο είναι επίσης εξαιρετικά σημαντικό και ποικίλο. Έχουμε, παραδείγματος χάριν, το συναισθηματικό, κοινωνικό, μη λεκτικό, και κοινό πλαίσιο γνώσης. Τα πλαίσια όχι μόνο έχουν επιπτώσεις στην ερμηνεία μιας γλωσσικής ή μη-γλωσσικής κατάστασης παρέχουν επίσης τις πρωταρχικές (primitives) έννοιες της. Παραδείγματος χάριν, μη λεκτικές πρωταρχικές (primitives) έννοιες συνδέονται με τις στάσεις, τις χειρονομίες, και τις εκφράσεις του προσώπου. Σχετικά με την επίδραση του πλαισίου μπορούμε να αναφέρουμε σαν παράδειγμα τη σχέση οικοδεσπότη-φιλοξενουμένου, έτσι όταν προσκαλεί ένας πιθανός οικοδεσπότης έναν πιθανό φιλοξενούμενο με μια έκφραση όπως "έλα όποτε θέλεις", στην Ινδία και στην Ελλάδα αναμένει μια τέτοια πρόσκληση να ληφθεί κυριολεκτικά. Κατά ένα ενδιαφέροντα τρόπο, εάν ο παραλήπτης είναι ξένος από, για παράδειγμα, τον αγγλοσαξονικό πολιτισμό μια τέτοια πρόσκληση σίγουρα δεν θα ληφθεί κυριολεκτικά αλλά απλά θα ερμηνευτεί ως ένα είδος φιλικής πρόσκλησης.

2.4.2 Γενικά σχόλια

Εστιάζοντας στο θέμα της μάθησης μαθηματικών εννοιών, θα έλεγα ότι συμφωνώ με τη διαπίστωση του Duval (2001) ότι η μάθηση και η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας είναι δυνατό να επιτευχθεί μόνο όταν υπάρχει ταυτόχρονη εμπλοκή, συνδυασμός ή συνύπαρξη (coordination) δύο τουλάχιστον πεδίων αναπαράστασης μιας έννοιας από τους μαθητές. Με άλλα λόγια, όταν οι μαθητές είναι ικανοί να επιτύχουν σε ένα έργο, που αφορά για παράδειγμα την συνάρτηση, σε ένα πεδίο αναπαράστασης και δεν είναι σε θέση να το επιτύχουν σε ένα άλλο, τότε αυτό αποτελεί ένδειξη της ταύτισης της μαθηματικής έννοιας με τη συγκεκριμένη αναπαράσταση την οποία χειρίζονται, και κατά συνέπεια δεν οδηγούνται στα επιθυμητά μαθησιακά αποτελέσματα. Αναγκαία προϋπόθεση για την επίτευξη πραγματικής και πλήρους κατανόησης και μάθησης μιας μαθηματικής έννοιας είναι η εξάλειψη ή η εκμηδένιση οποιασδήποτε μορφής στεγανοποίησης και η ενίσχυση της σπονδυλοποίησης (δηλαδή της καλής άρθρωσης) ανάμεσα στα διάφορα πεδία αναπαράστασης της έννοιας.

Όπως αναφέρεται από τους Γαγάτση και Σπύρου (2000), αν θέλουμε να διαμορφώσουμε μια χρήσιμη θεωρία αναπαραστάσεων θα πρέπει να επικεντρωθούμε σε μερικά κρίσιμα ζητήματα όπως:

- Αυτό τη διάκρισης μεταξύ των διαφόρων εξωτερικών συστημάτων αναπαράστασης, ως προς τον αυτόνομο ή βοηθητικό χαρακτήρα τους στην έκφραση ενός μαθηματικού αντικειμένου.
- Αυτό της σύνδεσης μιας οποιασδήποτε ταξινόμησης εξωτερικών αναπαραστάσεων με μια αντίστοιχη εσωτερικών αναπαραστάσεων.
- Αυτό της μετάφρασης στο πεδίο των εξωτερικών όσο και σε μια ισομορφική λειτουργία μέσα στο πεδίο των εσωτερικών αναπαραστάσεων. Επίσης, ο όρος αυτός πρέπει να διευκρινιστεί με περισσότερη ακρίβεια σε σχέση με το νόημα που του αποδίδεται στις διάφορες έρευνες. Ιδιαίτερα πρέπει να γίνει διάκριση ανάμεσα σε δύο διαφορετικού τύπου νοητικά ενεργήματα σε μια μαθηματική δραστηριότητα: στην επεξεργασία και στην μετάφραση. Είναι φανερό ότι στις διάφορες έρευνες όταν γίνεται λόγος για μετάφραση ουσιαστικά εννοείται μετάφραση με επεξεργασίες.

Πιστεύω ότι για τη σωστή και αποτελεσματική αξιοποίηση των αναπαραστάσεων από τους μαθητές στη μαθησιακή διαδικασία, απαραίτητες προϋποθέσεις αποτελούν η σε βάθος κατανόηση της φύσης, των χαρακτηριστικών, των δυνατοτήτων και των περιορισμών των συγκεκριμένων αναπαραστάσεων, η αναγνώριση των σχέσεων δομής ανάμεσα στις διάφορες αναπαραστάσεις και η κατανόηση της αναλογίας που υπάρχει ανάμεσα στις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται και στην έννοια προς μάθηση. Το ζητούμενο της μαθηματικής παιδείας είναι θα λέγαμε αυτή ακριβώς η ευελιξία που αποκτά ο μαθητής διακρίνοντας το μαθηματικό αντικείμενο πίσω από τις αναπαραστάσεις του, τις οποίες μπορεί να συνδυάζει και να εναλλάσσει αναλόγως με το πρόβλημα που έχει να λύσει. Μια συζήτηση για μερικά από τα παραπάνω ή άλλα παρόμοια ζητήματα είναι πιθανό να μπορούσε να δώσει ώθηση, στη διασάφηση της σχέσης μεταξύ θεωριών αναπαραστάσεων και μάθησης των μαθηματικών και να συμβάλλει σε μια πλουσιότερη γνωστική ανάπτυξη της επιστημονικής γνώσης, αποφεύγοντας έτσι τον σκόπελο που επισημαίνεται από τον Αϊνστάιν:

"Ο περιορισμός του σώματος της γνώσης σε μια μικρή ομάδα νεκρώνει το φιλοσοφικό πνεύμα και οδηγεί στην πνευματική ένδεια."

*(*Albert Einstein*)*

2.5 Πειραματικές έρευνες για τις σχέσεις αναπαράστασης και μάθησης των μαθηματικών

Πριν προχωρήσουμε στην περιγραφή της έρευνας μας, κρίνεται σκόπιμο να γίνει μια σύντομη αναφορά σε διάφορες πειραματικές έρευνες για τις σχέσεις αναπαράστασης και μάθησης των μαθηματικών.

Μια τέτοια έρευνα, σχετικά με το ρόλο της εικόνας στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος, είναι αυτή της Ριάνας Θεοδούλου και του Αθανάσιου Γαγάτση (Πανεπιστήμιο Κύπρου, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής), με θέμα: «Μια εικόνα χίλιες λέξεις… Ποιο είδος εικόνας βοηθά στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος;»

Στην έρευνα αυτή μπορούμε να διακρίνουμε, με βάση τη λειτουργία τους στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος, τέσσερα είδη εικόνας: διακοσμητική, βοηθητική-αναπαραστατική, βοηθητική-οργανωτική, πληροφοριακή. Οι διακοσμητικές εικόνες δεν παρέχουν πληροφορίες στους μαθητές για τη λύση του προβλήματος, αλλά πρόκειται για καθαρά διακοσμητικά στοιχεία, οι βοηθητικές-αναπαραστατικές εικόνες αναπαριστούν ολόκληρο ή μέρος του περιεχομένου του προβλήματος, αλλά δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν για να λυθεί το πρόβλημα, οι οργανωτικές βοηθούν τους μαθητές να λύσουν το πρόβλημα καθοδηγώντας τους να σχεδιάσουν κάτι, χωρίς να είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν στη λύση του προβλήματος και οι πληροφοριακές δίνουν πληροφορίες που είναι απαραίτητες για τη λύση του προβλήματος. Τις κατηγορίες αυτές θα τις δούμε στην συνέχεια πιο αναλυτικά.

Τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής έδειξαν ότι η παρουσία της διακοσμητικής και της πληροφοριακής εικόνας δεν επηρεάζει σημαντικά την επίδοση των μαθητών, σε αντίθεση με τις βοηθητικές-οργανωτικές εικόνες οι οποίες εμφανίζονται να έχουν στατιστικά σημαντική επίδραση. Οι βοηθητικές-αναπαραστατικές εικόνες άλλοτε εμφανίζουν επίδραση και άλλοτε όχι, ανάλογα με το είδος της πράξης που περιλαμβανόταν στο πρόβλημα Από τα αποτελέσματα φάνηκε ότι ο χαρακτήρας του μετασχηματισμού, δηλαδή το είδος πράξης (π.χ. πρόσθεση, αφαίρεση), υπερισχύει του είδους της εικόνας. Επίσης όπως φάνηκε από τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής, η χρήση της εικόνας από τα παιδιά γινόταν ασυνείδητα, καθώς πολλά από αυτά ενώ χρησιμοποιούσαν την εικόνα για να λύσουν τα προβλήματα, αμφισβητούσαν τη χρησιμότητα της εικόνας δηλώνοντας ότι δεν τους βοήθησε στη λύση του προβλήματος.

Γενικά βλέπουμε ότι οι εικόνες, και γενικότερα οι αναπαραστάσεις, διαδραματίζουν ένα σημαντικό ρόλο στον τομέα της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών, καθώς τα σύγχρονα και διδακτικά υλικά περιλαμβάνουν περισσότερες εικόνες, διαγράμματα και γραφικές παραστάσεις όσο ποτέ προηγουμένως (Schnotz, 2002· Carney & Levin, 2002). Η ιδέα της χρήσης εικονικών αναπαραστάσεων στην πρακτική των μαθηματικών δεν είναι βέβαια καινούρια, καθώς οι οπτικές αναπαραστάσεις, όπως τα διαγράμματα, οι γραφικές παραστάσεις και τα σχέδια θεωρούνταν ανέκαθεν απαραίτητα εργαλεία στο έργο των μαθηματικών (Rival, 1987). Μεγάλοι μαθηματικοί παιδαγωγοί, όπως οι Hadamard (1945) Poincare (1963), εισηγήθηκαν ότι η χρήση εικονικών αναπαραστάσεων αποτελεί απαραίτητο στοιχείο στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος και υποστήριξαν τη χρήση οπτικών αναπαραστάσεων από τους μαθητές στην επίλυση δικών τους προβλημάτων. Επιπρόσθετα, ο Polya (1945) εισηγήθηκε την στρατηγική «κάνε ένα σχέδιο» στο πλαίσιο των ευρηματικών στρατηγικών που πρότεινε για την επίλυση μαθηματικού προβλήματος.

Η χρήση των εικονικών αναπαραστάσεων στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος υποστηρίζεται τα τελευταία χρόνια και από τη μαθηματική εκπαιδευτική κοινότητα. Το NCTM (2000) στα Principles and Evaluation Standards for School Mathematics ενθαρρύνει τη χρήση τέτοιων αναπαραστάσεων στην επίλυση προβλήματος στο δημοτικό και στο γυμνάσιο. Επιχειρήματα για τη χρήση των εικόνων προβάλλονται και από γνωστικούς ψυχολόγους (π.χ. Larkin & Simon, 1987), οι οποίοι υποστήριξαν ότι η χρήση εικονικών αναπαραστάσεων μπορεί να διευκολύνει την επίλυση μαθηματικού προβλήματος σε όλες τις φάσεις της συγκεκριμένης διαδικασίας.

Σχετικά με το ερώτημα που οφείλεται η τόσο έντονη παρουσία αυτών των εικονικών αναπαραστάσεων, μπορούν να γίνουν δύο υποθέσεις. *Η πρώτη* έχει να κάνει με θεωρίες μάθησης οι οποίες εμπλέκουν την έννοια των νοερών αναπαραστάσεων (Gagatsis et al., 1999· Gagatsis & Michaelidou, 2002). Σύμφωνα με τις αυτές, άτομα που διακρίνονται για την ποικιλία και τον πλούτο των νοερών τους αναπαραστάσεων έχουν αυξημένη ικανότητα κατανόησης και μάθησης των μαθηματικών και επομένως της επίλυσης μαθηματικού προβλήματος. *Η δεύτερη,* την οποία ερμηνεύουμε ως μια πρόχειρη ερμηνεία της προηγούμενης, δηλαδή των θεωριών μάθησης, είναι ότι κάθε εικόνα ή αναπαράσταση βοηθάει την κατανόηση. Επομένως, χρησιμοποιούμε συνεχώς εικόνες στα βιβλία των μαθηματικών γιατί σίγουρα αυξάνουν την «αναγνωσιμότητα» των μαθηματικών κειμένων, δηλαδή την ικανότητα άντλησης πληροφοριών από ένα μαθηματικό κείμενο ενός αναγνώστη.

Σχετικά με τη δεύτερη πιθανή υπόθεση θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η ανεξέλεγκτη χρήση των εικόνων στα βιβλία των μαθηματικών, είναι πιθανόν μια εικόνα μερικές φορές να επιβαρύνει τη διαδικασία επεξεργασίας πληροφοριών σ' ένα νεαρό αναγνώστη και άρα να δημιουργήσει εμπόδια στην κατανόηση και μάθηση των μαθηματικών.

Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος είναι ένα από τα πιο σημαντικά θέματα έρευνας στη μαθηματική παιδεία. Παρά το γεγονός ότι στο ρόλο των αναπαραστάσεων γενικώς στη μάθηση έχουν γίνει πάρα πολλές έρευνες (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983· Confrey & Smith, 1991· Gagatsis & Christou, 2002· Dienes, 1964· Janvier, 1987· Lesh, Post, & Behr, 1987· Even, 1998), ειδικά για το ρόλο της εικόνας στη μάθηση των μαθηματικών δεν έχουν βρεθεί σημαντικά αποτελέσματα. Προηγούμενες έρευνες στην κατανόηση κειμένων και εικόνων επικεντρώθηκαν κυρίως στη μνημονική λειτουργία των εικόνων στα κείμενα (Schnotz, 2002). Το κύριο εύρημα αυτών των ερευνών είναι ότι ένας αναγνώστης θυμάται τις πληροφορίες ενός κειμένου καλύτερα όταν αυτό συνοδεύεται από εικόνες, παρά όταν δεν υπάρχουν καθόλου εικόνες (Carney & Levin, 2002). Ωστόσο, οι έρευνες αυτές επικεντρώθηκαν στα λογοτεχνικά κείμενα και δεν επεκτάθηκαν στα μαθηματικά κείμενα. Έτσι, παραμένει ακόμα ασαφές πώς οι εικονικές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται στην επίλυση προβλήματος (Eisenberg & Dreyfus, 1991).

Εδώ να παρατηρήσουμε ότι θα ήταν χρήσιμο να εξετάσει κανείς το αν οι μαθητές (π.χ. δημοτικού σχολείου) χρησιμοποιούν συνειδητά ή ασυνείδητα την εικόνα στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος και με ποιους τρόπους.

Η λειτουργία της εικόνας στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών

Οι εικόνες, όπως και τα μαθηματικά κείμενα, είναι από τα πιο συνηθισμένα είδη εξωτερικών αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Η χρήση ποικίλων εξωτερικών αναπαραστάσεων, όπως οι εικόνες σε συνδυασμό με τα κείμενα, χρησιμοποιείται στη διδασκαλία των μαθηματικών για την προώθηση της κατανόησης και της μάθησης μαθηματικών ιδεών. Σύμφωνα με τον Janvier (1987), τα περισσότερα σχολικά βιβλία σήμερα περιλαμβάνουν μια ποικιλία αναπαραστάσεων με σκοπό να προωθήσουν την κατανόηση.

Η κατανόηση από λεκτικές και εικονικές πληροφορίες έχει θεωρηθεί ως πιθανώς ευεργετική για τη μάθηση (Scnotz, 2002· Carney & Levin, 2002). Για παράδειγμα, οι Ainsworth, Wood & Bibby (1997) εισηγούνται ότι η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν διαφορετικές ιδέες και διαδικασίες και να προάγουν βαθύτερη κατανόηση. Επιπλέον, μια δεύτερη αναπαράσταση μπορεί να ενισχύσει τη μετάφραση μιας πιο πολύπλοκης ή λιγότερο γνώριμης αναπαράστασης (Gagatsis & Michaelidou, 2002). Σύμφωνα με τους Ainsworth et al. (1997), συνδυάζοντας τις διάφορες αναπαραστάσεις οι μαθητές δεν περιορίζονται από τις αδυναμίες μιας συγκεκριμένης αναπαράστασης.

Η λειτουργία της εικόνας στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, παρόλο που η χρήση της εικόνας στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών θεωρείται σημαντική, δεν έχει παρατηρηθεί μέχρι σήμερα σημαντική ενασχόληση των ερευνητών με τη λειτουργία της εικόνας στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Μια προσπάθεια για μελέτη του ρόλου της εικόνας στην επεξεργασία των κειμένων γενικότερα έγινε από τους Carney και Levin (2002), οι οποίοι πρότειναν πέντε λειτουργίες της εικόνας στην επεξεργασία ενός κειμένου - διακοσμητική, αναπαραστατική, οργανωτική, μεταφραστική και μετασχηματιστική. Οι διακοσμητικές εικόνες απλά διακοσμούν τη σελίδα, έχοντας μικρή ή καθόλου σχέση με το περιεχόμενο του κειμένου. Οι αναπαραστατικές εικόνες αναπαριστούν μέρος ή ολόκληρο το περιεχόμενο του κειμένου και αποτελούν το πιο συνηθισμένο είδος εικονογράφησης ενώ οι οργανωτικές εικόνες παρέχουν ένα χρήσιμο δομικό πλαίσιο για την ανάκληση του περιεχομένου του κειμένου. Οι μεταφραστικές εικόνες βοηθούν τους αναγνώστες να ξεδιαλύνουν το νόημα σε δύσκολα κείμενα και, τέλος, οι μετασχηματιστικές εικόνες περιλαμβάνουν «μνημονικά συστατικά» τα οποία είναι σχεδιασμένα για να ενισχύουν την απομνημόνευση των πληροφοριών του κειμένου.

Με βάση την ταξινόμηση των Carney και Levin (2002) για τη λειτουργία των εικόνων στα λογοτεχνικά κείμενα, στην εργασία του Αθανασίου Γαγάτση και της Ριάνας Θεοδούλου προτείνεται μια αντίστοιχη ταξινόμηση για τη λειτουργία των εικόνων στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Συγκεκριμένα, στην εργασία αυτή γίνεται η εισήγηση ότι οι εικόνες έχουν τις εξής τέσσερις λειτουργίες στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος: *(α) διακοσμητικές, (β) βοηθητικές-αναπαραστατικές, (γ) βοηθητικές-οργανωτικές και (δ) πληροφοριακές.*

Οι *διακοσμητικές* εικόνες δεν παρέχουν οποιεσδήποτε πληροφορίες στους μαθητές για τη λύση του προβλήματος, αλλά αποτελούν καθαρά διακοσμητικό στοιχείο. Για παράδειγμα, μια εικόνα ενός λεωφορείου σε ένα πρόβλημα που αφορά στον αριθμό των επιβατών που ανέβηκαν ή κατέβηκαν από το λεωφορείο σε διάφορες στάσεις έχει διακοσμητική λειτουργία, καθώς δε σχετίζεται με την επίλυση του προβλήματος. Οι *βοηθητικές-αναπαραστατικές* εικόνες αναπαριστούν ολόκληρο ή μέρος του περιεχομένου του προβλήματος, αλλά δεν είναι απαραίτητες για την επίλυση του. Οι μαθητές μπορούν να βοηθηθούν από την εικόνα για να αντιληφθούν τη δομή του προβλήματος, αλλά μπορούν και να την αγνοήσουν και να λύσουν το πρόβλημα με δική τους στρατηγική. Οι *βοηθητικές-οργανωτικές* εικόνες βοηθούν τους μαθητές να λύσουν το πρόβλημα καθοδηγώντας τους να σχεδιάσουν ή να γράψουν κάτι. Όπως και στην περίπτωση των βοηθητικών-αναπαραστατικών εικόνων, έτσι και οι βοηθητικές-οργανωτικές εικόνες δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν για να λυθεί το πρόβλημα. Ένα παράδειγμα βοηθητικής-οργανωτικής εικόνας που συνοδεύει το πρόβλημα «Έχω 12 μήλα και θέλω να τα μοιράσω εξίσου σε 4 πιάτα. Πόσα μήλα θα βάλω σε κάθε πιάτο;» είναι μια εικόνα με πιάτα που καθοδηγεί τους μαθητές να σχεδιάσουν τα μήλα στα πιάτα αυτά. Οι *πληροφοριακές* εικόνες δίνουν πληροφορίες που είναι απαραίτητες για να λυθεί ένα πρόβλημα. Το πρόβλημα δηλαδή στηρίζεται στην εικόνα η οποία είναι αναγκαίο στοιχείο για την επίλυση του. Για παράδειγμα, η εικόνα της βιτρίνας ενός καταστήματος που παρουσιάζει τις τιμές των προϊόντων είναι απαραίτητη για να λυθεί ένα πρόβλημα σχετικά με την αγορά προϊόντων από το συγκεκριμένο κατάστημα.

Πρόσφατες έρευνες προσπάθησαν να εξετάσουν το ρόλο συγκεκριμένων ειδών εικόνων στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Μια πρώτη έρευνα από τους Γαγάτση και Μάρκου (2002), προσπάθησε να εξετάσει κατά πόσο η ενσωμάτωση διακοσμητικών εικονικών αναπαραστάσεων σε ασυνήθιστα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα θα μπορούσε να οδηγήσει στην αλλαγή της συμπεριφοράς των μαθητών απέναντι στα προβλήματα αυτά. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η χρήση των διακοσμητικών εικονικών αναπαραστάσεων δεν έδειξε οποιαδήποτε αλλαγή στη συμπεριφορά των μαθητών απέναντι στα ασυνήθιστα λεκτικά προβλήματα, γεγονός που δείχνει ότι οι διακοσμητικές εικόνες δεν συμβάλλουν στη ρήξη των όρων του διδακτικού συμβολαίου. Οι μαθητές αγνόησαν ουσιαστικά την ύπαρξη εικόνων, ενώ την προσοχή τους προσέλκυσαν τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος.

Μια δεύτερη έρευνα από τους Gagatsis et al. (1999), μελέτησε την επίδραση της χρήσης διαφόρων μορφών αναπαράστασης (συμβολική-αριθμητική, λεκτική, εικονική) στην επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης από παιδιά δημοτικού σχολείου. Οι εικονικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιήθηκαν στη συγκεκριμένη έρευνα ήταν πληροφοριακές. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες η μετάφραση από τον ένα κώδικα αναπαράστασης στον άλλο είναι σχεδόν αυτόματη, ενώ υπάρχουν περιπτώσεις που η μετάφραση αυτή δημιουργεί δυσκολίες. Σύμφωνα με τους ερευνητές, το συμπέρασμα αυτό εισηγείται ότι τα διάφορα είδη αναπαραστάσεων, όπως οι εικόνες, που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία των μαθηματικών, δεν εγγυώνται πάντα την επιτυχή υπερπήδηση γνωστικών εμποδίων που μπορεί να έχουν αρκετοί μαθητές. Γι' αυτό, οι Gagatsis et al. (1999) πρότειναν ως θέμα για έρευνα την ταξινόμηση των διαφόρων ειδών αναπαραστάσεων ανάλογα με το βαθμό δυσκολίας που απαιτεί η μετάφραση τους σε άλλο κώδικα.

Η έρευνα αυτή που είδαμε, προσπάθησε να εξετάσει το ρόλο κάθε ενός από τα τέσσερα είδη εικόνας, όπως αυτά προτείνονται πιο πάνω, στην επίλυση συνηθισμένων λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων από μαθητές Β' δημοτικού. Συνοψίζοντας θα λέγαμε ότι βασικός στόχος ήταν να διερευνηθεί ο ρόλος της εικόνας στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος και ειδικότερα, κατά πόσο τα διάφορα είδη εικόνας (διακοσμητικές, βοηθητικές-αναπαραστατικές, βοηθητικές-οργανωτικές, πληροφοριακές) βοηθούν στην επίλυση συνηθισμένων λεκτικών προβλημάτων και ποια είναι η σχέση ανάμεσα στα διάφορα είδη εικόνας.

Με βάση τα αποτελέσματα, φαίνεται να επαληθεύεται ότι οι διακοσμητικές εικόνες δεν επηρεάζουν τη συμπεριφορά των μαθητών στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Το γεγονός ότι δεν παρατηρήθηκε στατιστικά σημαντική διαφορά στην επίδοση των μαθητών στη λύση προβλημάτων όταν σε αυτά προστέθηκε διακοσμητική εικόνα, συμφωνεί με τα ευρήματα των Γαγάτση και Μάρκου (2002) οι οποίοι σε ερευνά τους με ασυνήθιστα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα βρήκαν ότι η παρουσία εικονικών αναπαραστάσεων δεν επηρέασε τη συμπεριφορά των μαθητών στην επίλυση των προβλημάτων αυτών. Το εύρημα αυτό θα μπορούσε να ερμηνευθεί με βάση των άποψη των Carney και Levin (2002) ότι οι διακοσμητικές εικόνες, παρά το γεγονός ότι προσδίδουν ένα ελκυστικό χαρακτήρα στο κείμενο, δεν ενισχύουν την κατανόηση ή την ανάκληση πληροφοριών από το κείμενο.

Όσον αφορά στην περίπτωση των βοηθητικών-αναπαραστατικών εικόνων, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η επίδραση τους ήταν άλλοτε στατιστικά σημαντική και άλλοτε όχι. Συγκεκριμένα, στο ένα από τα δύο προβλήματα, που ήταν πρόβλημα διαίρεσης, οι περισσότεροι μαθητές χρησιμοποίησαν την εικόνα και είχαν καλύτερη επίδοση όταν το πρόβλημα συνοδευόταν από αυτή την εικόνα, ενώ στο άλλο πρόβλημα, που ήταν πρόβλημα πρόσθεσης, οι περισσότεροι μαθητές αγνόησαν την εικόνα και δεν έδειξαν αλλαγή στη συμπεριφορά τους. Μια πιθανή ερμηνεία για το εύρημα αυτό είναι ότι οι βοηθητικές-αναπαραστατικές εικόνες δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές για την επίλυση ενός προβλήματος, με αποτέλεσμα άλλοτε να αγνοούνται από αυτούς και άλλοτε να χρησιμοποιούνται για την επίλυση των προβλημάτων. Επιπρόσθετα, καθώς το πρόβλημα διαίρεσης ήταν δυσκολότερο από το πρόβλημα αφαίρεσης, είναι πιθανό οι μαθητές να στηρίχθηκαν περισσότερο στην εικόνα για να λύσουν το συγκεκριμένο πρόβλημα με αποτέλεσμα να έχουν μεγαλύτερη επιτυχία σε αυτό. Όπως άλλωστε αναφέρουν οι Carney και Levin (2002), όσο πιο δύσκολο είναι το κείμενο, τόσο πιο βοηθητικές είναι πιθανό να είναι οι εικόνες. Από την άλλη, οι βοηθητικές-οργανωτικές εικόνες φάνηκε να έχουν μια ξεκάθαρα θετική επίδραση στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος από τους μαθητές. Το εύρημα αυτό, δείχνει ότι οι εικόνες αυτού του είδους βοήθησαν τους μαθητές να αντιληφθούν τη δομή του προβλήματος και να οργανώσουν τα δεδομένα με τρόπο ώστε να καταλήξουν στην ορθή λύση του προβλήματος.

Οι πληροφοριακές εικόνες, αν και από τη φύση τους είναι απαραίτητες για την επίλυση προβλήματος, δεν επηρέασαν θετικά τη συμπεριφορά των μαθητών σε σχέση με την επίδοση τους όταν οι πληροφορίες της εικόνας περιλαμβάνονταν στο πρόβλημα. Στο ένα από τα δύο προβλήματα με πληροφοριακή εικόνα, οι μαθητές είχαν χαμηλότερη επίδοση παρά όταν οι πληροφορίες της εικόνας περιλαμβάνονταν στο πρόβλημα, χωρίς την παρουσία εικόνας. Το εύρημα αυτό επιβεβαιώνει την άποψη ότι η παρουσία των εικόνων, και των αναπαραστάσεων γενικότερα, δεν είναι πάντοτε βοηθητική για τα παιδιά καθώς σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να απαιτεί πρόσθετο φόρτο νοητικής επεξεργασίας Carney & Levin, 2002). Η χρήση των εικόνων, επομένως, θα πρέπει να γίνεται με μεγάλη προσοχή. Όπως άλλωστε υποστηρίζει ο Seeger (1998) πρέπει να εγκαταλειφθεί η αντίληψη με βάση την οποία η κατανόηση στα μαθηματικά θεμελιώνεται σε κάποια αντιληπτική εικόνα της οποίας το νόημα θεωρείται αυτονόητο. Επιπρόσθετα, θα πρέπει να σημειωθεί ότι παρόλο που όλοι οι μαθητές στηρίχθηκαν στις πληροφοριακές εικόνες για να λύσουν τα προβλήματα, αρκετοί μαθητές αμφισβήτησαν τη χρησιμότητα των εικόνων αυτών, δηλώνοντας ότι δεν τους βοήθησαν αρκετά στη λύση των προβλημάτων.

Με βάση τα αποτελέσματα, φαίνεται να υπάρχει σχέση ανάμεσα στα έργα με βοηθητικές-αναπαραστατικές εικόνες και στα έργα με βοηθητικές-οργανωτικές εικόνες. Μια πιθανή ερμηνεία για το εύρημα αυτό είναι ότι και τα δύο αυτά είδη εικόνας βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν τη δομή του προβλήματος και να αναπαραστήσουν τα δεδομένα με τρόπο ώστε να οδηγηθούν στην ορθή επίλυση του. Παρόμοια σχέση φαίνεται να υπάρχει ανάμεσα στις διακοσμητικές και τις πληροφοριακές εικόνες. Ωστόσο, η ομαδοποίηση των διαφορετικών αυτών ειδών εικόνας οφείλεται περισσότερο στη μαθηματική τους δομή, καθώς στις ομαδοποιήσεις ο χαρακτήρας του μετασχηματισμού (π.χ. πρόσθεση, αφαίρεση) φάνηκε να υπερισχύει του είδους της εικόνας. Με άλλα λόγια, τα προβλήματα ομαδοποιήθηκαν περισσότερο με βάση το χαρακτήρα της πράξης, παρά με βάση το είδος της εικόνας που χρησιμοποιήθηκε. Το εύρημα ότι η μαθηματική δομή επηρεάζει περισσότερο από το είδος της εικόνας, θα μπορούσε να αποτελέσει βάση για περαιτέρω έρευνα η οποία να μελετήσει σε αντιπαράθεση το ρόλο της εικόνας και της μαθηματικής δομής στην επίλυση προβλήματος.

Τα αποτελέσματα της έρευνας που αναφέραμε έδειξαν επίσης ότι πολλά παιδιά, ενώ χρησιμοποιούσαν την εικόνα για να λύσουν τα προβλήματα, αμφισβητούσαν τη χρησιμότητα της εικόνας δηλώνοντας ότι δεν τους βοήθησε στην επίλυση προβλήματος. Το εύρημα αυτό, που πιθανόν να οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές ήταν μικρής ηλικίας, δείχνει ότι οι μαθητές του δημοτικού σχολείου δεν χρησιμοποιούν την εικόνα ενσυνείδητα, αλλά ασυνείδητα.

Η έρευνα αυτή, εγείρει ορισμένα ερωτήματα σε σχέση με το ρόλο των αναπαραστάσεων στην διδασκαλία των μαθηματικών στο γυμνάσιο, (α) ο ρόλος των εικόνων για τους μαθητές γυμνασίου θα διέπεται από τα ίδια συμπεράσματα ή θα διαφοροποιείται εφόσον μάλιστα η χρήση εικόνων στα μαθηματικά του γυμνασίου δεν είναι τόσο έντονη όσο στα εγχειρίδια μαθηματικών του δημοτικού σχολείου;
(β) μπορεί να εξεταστεί μια παρόμοια ταξινόμηση, όχι εικόνων αυτή τη φορά, αλλά γραφικών παραστάσεων σε σχέση με την επίλυση μαθηματικού προβλήματος στο γυμνάσιο; Μια πιθανή ταξινόμηση θα μπορούσε να ήταν η παρακάτω: *διακοσμητική* γραφική παράσταση (π.χ. το σχέδιο της διαδρομής ενός αμαξιού όπου εμπλέκονται ταχύτητες, αποστάσεις, χρόνοι, κ,τ.λ.), *βοηθητική-αναπαραστατική* (π.χ. δίνεται το σχέδιο ενός δοχείου που υποδεικνύει τη σχέση ή μη αναλογίας δεδομένων που παρουσιάζονται επίσης και με μορφή πίνακα και επομένως δεν είναι αναγκαία η χρησιμοποίηση της από τους μαθητές), *πληροφοριακή - αναπαραστατική* (π.χ. δίνεται η γραφική παράσταση ψ=αχ+β που συνδέει την τιμή μιας μονάδας με το συνολικό κόστος ενός προϊόντος ή το χρόνο με την ταχύτητα ενός κινητού, κ.τ.λ.).
Εδώ να προσθέσουμε ότι, όπως προκύπτει από την έρευνα αυτή, θα ήταν χρήσιμο να διερευνηθεί (σε μαθητές γυμνασίου) το αν εναλλάσσοντας τα διάφορα είδη εικονικών (γραφικών) αναπαραστάσεων είναι δυνατό να πετύχουμε βελτίωση της επίδοσης στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος.

Σχετικά με το αν οι αναπαραστάσεις βοηθούν πάντα στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, μπορούμε να δούμε μια άλλη έρευνα του Αθανάσιου Γαγάτση και της Ελένη Α. Σιαμαρή, (Πανεπιστήμιο Κύπρου) με θέμα : «Αναπαραστάσεις και επίλυση προβλημάτων αναλογίας από μαθητές Γυμνασίων Ελλάδας και Κύπρου», όπου

μελετώνται οι στρατηγικές επίλυσης δύο προβλημάτων αναλογιών από τους μαθητές Γυμνασίου καθώς, επίσης, και οι αντιδράσεις τους στις αναπαραστάσεις που τους δόθηκαν σ' αυτά. Όπως φαίνεται με βάση την έρευνα αυτή, οι αναπαραστάσεις δεν βοηθούν τους μαθητές κατά την επίλυση των δύο αυτών προβλημάτων και κυρίως στο να απαντήσουν σωστά στα ερωτήματα που δεν έχουν να κάνουν με ανάλογα ποσά.
Επίσης φαίνεται πως όταν προηγηθεί συζήτηση από τον καθηγητή για το τι παριστάνει η κάθε αναπαράσταση, τότε αυτό μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές στην ορθή αντιμετώπιση του προβλήματος.

Πιο αναλυτικά, η έρευνα αυτή αφορούσε την επίλυση προβλημάτων αναλογίας, που παρουσιάζονται σε διάφορες μορφές αναπαράστασης, από μαθητές Γυμνασίων Ελλάδας και Κύπρου και με βάση τα αποτελέσματα της προκύπτει μια μεγαλύτερη αποτυχία των μαθητών στις μη αναλογικές καταστάσεις. Η αποτυχία αυτή υποδεικνύει ότι δεν είναι εύκολη η χρήση αναπαραστάσεων για την επίλυση των προβλημάτων. Από την άλλη πλευρά, όπως προκύπτει από ατομική εξέταση των καλών μαθητών στην έρευνα αυτή, όταν προηγηθεί συζήτηση από τον καθηγητή για το τι παριστάνει η κάθε αναπαράσταση τότε αυτό μπορεί να οδηγήσει στην ορθή αντιμετώπιση του προβλήματος. Η τελευταία παρατήρηση υποδεικνύει την αναγκαιότητα ομαδικής συζήτησης στην τάξη των αναπαραστάσεων, τη σκοπιμότητα και την αναγκαιότητα τους κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.
Πιστεύουμε ότι μια διδακτική παρέμβαση στη χρήση, μελέτη και ερμηνεία αναπαραστάσεων που συνδέονται με λεκτικά προβλήματα θα μπορούσε να βοηθήσει τους μαθητές Γυμνασίου στην επίλυση προβλήματος (είναι χαρακτηριστικό ότι η άποψη αυτή, όπως θα δούμε στην συνέχεια, φαίνεται να επιβεβαιώνεται και από τα αποτελέσματα της δικής μου έρευνας).

Οι αναπαραστάσεις είναι ένας τομέας πολυδιάστατα μελετημένος: είτε ως προς τον ορισμό (Palmer, 1977· Kaput, 1987 & Goldin, 1987), είτε ως προς τη διάκριση εσωτερικών - εξωτερικών αναπαραστάσεων (Lesh, Post & Behr, 1987), είτε ως προς μια θεωρία που να συνδέεται με τη δημιουργία τους (Von Glaserfeld, 1987· Christou et al., 2002· Gagatsis et al., 2002· Gagatsis & Christou,2002).
Όπως ήδη έχουμε αναφέρει με το όρο "μετάφραση αναπαραστάσεων" εννοούμε τη ψυχολογική διαδικασία που λαμβάνει χώρα όταν μεταφερόμαστε από ένα σύστημα

αναπαράστασης σε άλλο, (π.χ. από μια αλγεβρική εξίσωση σε γραφική παράσταση). Ιδιαίτερα ο Lesh (1979), τονίζει το ρόλο των μεταφράσεων στη λύση προβλήματος. Για να γίνει η μετάφραση χρειάζονται δύο τουλάχιστον μορφές αναπαράστασης. Η πηγή, δηλαδή, η αρχική αναπαράσταση πρέπει να ειδωθεί από την οπτική γωνία της δεύτερης αναπαράστασης. Το με ποιο τρόπο και υπό ποια οπτική γωνία ο μαθητής "βλέπει" την αναπαράσταση είναι αποτέλεσμα διδασκαλίας, η έμφαση της οποίας δεν είναι στην αντιγραφή από το μαθητή του τι κάνει ο δάσκαλος του, αλλά στην επιτυχή οργάνωση της δικής του εμπειρίας (von Glaserfeld, 1987).

Ο αριθμός των ερευνών γύρω από το θέμα των αναπαραστάσεων και το ρόλο τους στη μάθηση των μαθηματικών, είναι μεγάλος. Οι έρευνες αυτές μπορούν να ταξινομηθούν σε τέσσερις τομείς ανάλογα με το θέμα στο οποίο εξειδικεύονται (Πίνακας 1).

Πίνακας 1

	Θεωρία των αναπαραστάσεων ή αναπαραστάσεις και θεωρία μάθησης
	Αναπαραστάσεις και επίλυση προβλήματος
	Αναπαραστάσεις και ειδικές μαθηματικές έννοιες
	Αναπαραστάσεις και μεταφρασιμότητα μεταξύ τους

Στον πρώτο τομέα περιλαμβάνονται οι εργασίες που προτείνουν μια θεωρία αναπαράστασης (von Glaserfeld, 1987· Kaput, 1987· Roth & McGinn, 1998). Στο δεύτερο τομέα περιλαμβάνονται οι εργασίες που σχετίζουν τις εξωτερικές ή σημειωτικές αναπαραστάσεις με την επίλυση προβλήματος (Seeger, 1998· Lesh, Behr & Post, 1987). Στον τρίτο τομέα κατατάσσονται οι εργασίες που επικεντρώνουν τη μελέτη των αναπαραστάσεων σε μια συγκεκριμένη μαθηματική έννοια. (Markou & Gagatsis,2002, 2003· Ioannou & Gagatsis, 2003). Τέλος, στον τέταρτο τομέα κατατάσσονται οι εργασίες που εξετάζουν τη μετάφραση από ένα πεδίο έκφρασης σε ένα άλλο. Αυτό το πέρασμα από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο, δεν είναι πάντα φυσικό, αλλά αποτελεί μια από τις σημαντικότερες δυσκολίες επίλυσης μαθηματικού προβλήματος (Ασβεστά, Γαγάτσης, 1995· Gagatsis, 1997· Duval, 1987· Janvier, 1987· Gagatsis & Michaelidou, 2002· Gagatsis,2000).

Σε μια πρόσφατη ερευνητική εργασία του Αθανάσιου Γαγάτση και της Ιλιάδα Ηλία (Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου), με θέμα: «Στεγανοποίηση ή σπονδυλοποίηση σημειωτικών αναπαραστάσεων σε σχέση με την έννοια της συνάρτησης», επιδιώκεται να επεξηγηθούν και να αναλυθούν συμπεριφορές των μαθητών κατά τη μετάβαση από ένα πεδίο αναπαράστασης διαφόρων συναρτήσεων σε άλλο (π.χ. μεταφορά συναρτήσεων από τη μορφή γραφικής παράστασης σε λεκτική και αλγεβρική μορφή και μετάφραση συναρτήσεων από τις λεκτικές ερμηνείες τους σε γραφικές παραστάσεις και αλγεβρικές εκφράσεις), με βάση δύο άξονες: τη στεγανοποίηση, που αφορά την αδυναμία χειρισμού περισσότερων από μια σημειωτικών αναπαραστάσεων και τη σπονδυλοποίηση που ορίζεται ως η διαδικασία κατά την οποία οι σπόνδυλοι - που στην προκειμένη περίπτωση αντιστοιχούν με μικροπεδία αναπαράστασης - μπορούν να συσχετιστούν με άλλους σπονδύλους.

Η σημασία των αναπαραστάσεων στα μαθηματικά

Για τη σωστή και αποτελεσματική αξιοποίηση των αναπαραστάσεων από τους μαθητές, απαραίτητες προϋποθέσεις αποτελούν η σε βάθος κατανόηση της φύσης, των χαρακτηριστικών, των δυνατοτήτων και των περιορισμών τους, η αναγνώριση των σχέσεων δομής ανάμεσα στις διάφορες αναπαραστάσεις και της αναλογίας ανάμεσα στις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται και στην έννοια προς μάθηση.
Πέρα από τις εξωτερικές-σημειωτικές αναπαραστάσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω και οι οποίες αφορούν όλους τους εξωτερικούς, συμβολικούς φορείς - σύμβολα, σχήματα, διαγράμματα - οι οποίοι αποσκοπούν στην εξωτερική αναπαράσταση μιας συγκεκριμένης πραγματικότητας στα μαθηματικά, στη θεωρία και στην έρευνα, θα πρέπει να γίνεται αναφορά και στον όρο των εσωτερικών αναπαραστάσεων που αφορά τα νοητικά μοντέλα ή τις εικόνες που δημιουργούν τα υποκείμενα για να αναπαραστήσουν την εξωτερική πραγματικότητα.

Σπονδυλοποίηση και στεγανοποίηση

Για την κατανόηση και τη μάθηση μιας μαθηματικής έννοιας αυτό που έχει σημασία είναι η αναγκαιότητα ταυτόχρονης συνύπαρξης τουλάχιστον δύο πεδίων αναπαράστασης (ή δύο σημειωτικών σχημάτων αναπαράστασης - register) (Duval, 2001). Ο όρος «register» έχει πιο στενή σημασία από τον όρο «πεδίο» αναπαραστάσεων. Για παράδειγμα διάφορες καταγραφές είναι δυνατό να περιλαμβάνονται σε ένα συμβολικό σύστημα αναπαράστασης π.χ. καταγραφή των δεκαδικών ή καταγραφή των κλασματικών αριθμών. Σ' αυτή την περίπτωση ο όρος μετάφραση αναφέρεται στη μετατροπή από μια καταγραφή σε μια άλλη, για παράδειγμα μπορεί να γίνει αναφορά σε μετάφραση από κλασματική σε δεκαδική γραφή. Ο όρος «σπονδυλοποίηση» προέρχεται από θεωρίες ψυχολογίας και πιο συγκεκριμένα του Fodor και της Karmiloff-Smith. Σύμφωνα με τη θεωρία του Fodor (1983) «The modularity of mind" (στη Karmiloff-Smith, 1998), η διάνοια αποτελείται από «σπόνδυλους» (μονάδες επεξεργασίας πληροφοριών). Ένας σπόνδυλος αντιστοιχεί σε ένα μικροπεδίο (π.χ. συμβολικό σύστημα αναπαράστασης). Οι σπόνδυλοι είναι πληροφοριακά στεγανοί, «ενθυλακωμένοι» ή γνωστικά αδιαπέραστοι. Σύμφωνα με τη θεωρία της Karmiloff-Smith (1998), οι σπόνδυλοι παύουν να είναι ενθυλακωμένοι και γνωσιακά αδιαπέραστοι, μπορούν να συσχετιστούν δηλαδή με άλλους σπονδύλους αν οι αναπαραστάσεις υποστούν «Αναπαραστατική Αναπεριγραφή». «Αναπαραστατική Αναπεριγραφή» είναι η διεργασία όπου οι άδηλες πληροφορίες γίνονται έκδηλη γνώση για τη διάνοια. Χρησιμοποιώντας τον όρο «σπονδυλοποίηση» δεν έχουμε πρόθεση να υποδείξουμε ότι τα πεδία αναπαράστασης συμπεριφέρονται σαν σπόνδυλοι αδιαπέραστοι μεταξύ τους, ιδιαίτερα για μαθητές μικρής ηλικίας όπως αυτούς που εξετάστηκαν στην έρευνα που προανέφερα. Ωστόσο, η εργασία αυτή του Αθανάσιου Γαγάτση και της Ιλιάδα Ηλία, επιχειρεί να δείξει ότι υπό ορισμένες συνθήκες συντελείται μια σπονδυλοποίηση ή μια «στεγανοποίηση» σε σχέση με την έννοια της συνάρτησης. Ερευνητές (ανάμεσα στους οποίους και ο Duval) ισχυρίζονται ότι παρατηρείται μια στεγανοποίηση των διαφορετικών σημειωτικών συστημάτων αναπαράστασης σε διάφορες μαθηματικές έννοιες. Με τον όρο "στεγανοποίηση" εννοούμε ότι ο μαθητής εργάζεται στο ένα πεδίο αναπαράστασης χωρίς να είναι σε θέση να επικοινωνεί τις ιδέες του με επιτυχία σε ένα άλλο πεδίο αναπαράστασης.

Συνάρτηση και αναπαραστάσεις στη μάθηση των μαθηματικών

Η συνάρτηση είναι μια από τις πιο σημαντικές έννοιες με τις οποίες έρχονται σε επαφή οι μαθητές κατά τη διάρκεια της δευτεροβάθμιας και τριτοβάθμιας εκπαίδευσης τους

(Eisenberg, 1992· Kalchman & Case, 1998). Η σπουδαιότητα της στη διδασκαλία και στη μάθηση των μαθηματικών μπορεί να διαπιστωθεί και από τις πολυάριθμες ερευνητικές εργασίες που εξετάζουν τη συγκεκριμένη έννοια μέσα από ποικίλες διαστάσεις και προοπτικές. Οι εργασίες αυτές μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο τομείς ανάλογα με το ειδικότερο θέμα με το οποίο καταπιάνονται σε σχέση με τη συνάρτηση.
Στον πρώτο τομέα εντάσσονται οι εργασίες που επικεντρώνονται στον ορισμό της συνάρτησης και στη διδακτική προσέγγιση της έννοιας κυρίως μέσα από τις αντιλήψεις των μαθητών, όπως αυτές διαμορφώνονται στα πλαίσια της μαθηματικής τους εκπαίδευσης (Dubinsky & Harel, 1992; Sierpinska, 1992; Vinner & Dreyfoys, 1989). Ο δεύτερος τομέας περιλαμβάνει εργασίες που διερευνούν τη συνάρτηση σε σχέση με τους διάφορους τρόπους αναπαράστασης της και τη μετάβαση από το ένα πεδίο αναπαράστασης στο άλλο (Gagatsis, 1997; Hitt, 1998; Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1992). Μια συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί με γραφική παράσταση, με πίνακα τιμών, με αλγεβρική (συμβολική) και λεκτική έκφραση. Όπως έχει προαναφερθεί, κάθε είδος αναπαράστασης παρέχει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της έννοιας χωρίς να την περιγράφει ολοκληρωτικά. Αυτό ισχύει και στην περίπτωση της συνάρτησης. Έτσι η μετάβαση από μια έκφραση σε άλλη δεν θεωρείται απλή μετατροπή των πληροφοριών από ένα σύστημα σε άλλο, αλλά μεταφορά. Με άλλα λόγια, όπως ισχυρίζεται ο Janvier (1987), οι πληροφορίες που παρέχει ένα σύστημα αναπαράστασης αναλύονται, με αποτέλεσμα να προκύπτει μια νέα πληροφορία, η οποία με τη σειρά της εκφράζεται σε άλλο σύστημα αναπαράστασης. Για παράδειγμα, σύμφωνα με τις Καλδρυμίδου & Οικονόμου (1992), μια αλγεβρική έκφραση συνάρτησης είναι αναλογική μια και μεταφέρει πληροφορίες γραμμικά μέσω μιας ακολουθίας συμβόλων ενώ αντίθετα η γραφική παράσταση είναι ολιστική αφού οι σχέσεις μεταξύ των στοιχείων της δίνονται ταυτόχρονα και με παράλληλο τρόπο, και η επεξεργασία τους προϋποθέτει την ανάλυση του όλου και τη σύνθεση των μερών της.
Έρευνες που έγιναν τα τελευταία χρόνια σχετικά με την έννοια της συνάρτησης έχουν καταλήξει στην ιεράρχηση διαφορετικών επιπέδων αντίληψης της συγκεκριμένης έννοιας. Τα συγκεκριμένα επίπεδα παρατίθενται πιο κάτω:

1ο επίπεδο: Ανακριβείς ιδέες που αφορούν ένα θέμα (ανάμειξη διαφορετικών αναπαραστάσεων για το ίδιο θέμα)
2ο επίπεδο: Αναγνώριση διαφορετικών αναπαραστάσεων ή συστημάτων αναπαράστασης ενός θέματος

3ο επίπεδο: Μετάφραση, διατηρώντας το νόημα, από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο

4ο επίπεδο: Συναφής άρθρωση μεταξύ δύο συστημάτων αναπαράστασης

5ο επίπεδο: Συναφής άρθρωση διαφορετικών συστημάτων αναπαραστάσεων στην επίλυση ενός προβλήματος (Hitt, 1998).

Ευρήματα ερευνών καταδεικνύουν την συχνή ύπαρξη δυσκολιών από τους μαθητές όσον αφορά τα τρία τελευταία επίπεδα, δηλαδή, τη μετάφραση από το ένα πεδίο αναπαράστασης της συνάρτησης στο άλλο και τη μεταξύ τους σύνδεση (Gagatsis, 1997· Hitt, 1998), που εν μέρει οφείλονται στον τρόπο διδασκαλίας της έννοιας στη μέση εκπαίδευση, ο οποίος συνήθως προάγει ένα συγκεκριμένο είδος μετάφρασης συναρτήσεων (από αλγεβρική έκφραση σε γραφική παράσταση). Επιπλέον, μια άλλη σχετική δυσκολία που επισημαίνεται από την Καλδρυμίδου, αφορά την αρνητική τάση των μαθητών, των φοιτητών αλλά και των εκπαιδευτικών, προς τις εικονικές αναπαραστάσεις και την προτίμηση τους σε προσεγγίσεις αλγεβρικού τύπου. Οι λόγοι που σύμφωνα με την ίδια οδηγούν στη δημιουργία αυτής της δυσκολίας είναι:

• Γνωστικής φύσης, που αφορούν τη δυσκολία της ολιστικής και επιλεκτικής φύσης της εικόνας ως τρόπου παράστασης πληροφοριών

• Επιστημολογικής φύσης που αναφέρονται στην επιστημολογία της μαθηματικής κοινότητας και της διδακτικής των σχολικών μαθηματικών

• Συναισθηματικής φύσης, που σχετίζονται με την αβεβαιότητα και το άγχος που αισθάνονται τα υποκείμενα όταν έρχονται αντιμέτωποι με εικονικές ή γραφικές παραστάσεις (στο Γαγάτσης, 1995).

Το συμπέρασμα με βάση την παραπάνω έρευνα είναι ότι, η κλασική επεξεργασία για παράδειγμα των συναρτήσεων στις οποίες αναφερθήκαμε, στα σχολικά μαθηματικά δεν αρκεί ώστε να υπερπηδηθούν οι παραπάνω δυσκολίες. Η αφομοίωση της έννοιας της συνάρτησης απαιτεί πρόοδο με συνέχεια και συνέπεια από το ένα επίπεδο αντίληψης της συνάρτησης στο άλλο. Επιπλέον, προϋποθέτει την εξασφάλιση μιας καλής άρθρωσης (σπονδυλοποίηση) ή ευέλικτης ικανότητας μετάβασης ανάμεσα στα διάφορα πεδία αναπαράστασης της και άρα τον εμπλουτισμό των σχολικών βιβλίων και των διδακτικών προσεγγίσεων στα πλαίσια της μελέτης των συναρτήσεων, με μαθηματικές δραστηριότητες σε διάφορα πεδία αναπαράστασης.

Γενικά σχόλια

Υπάρχει μια γενικά αποδεκτή ιδέα η οποία μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: *αν η καταγραφή αναπαράστασης επιλεχθεί καλά, οι αναπαραστάσεις αυτής της καταγραφής είναι ικανές για να επιτρέψουν την κατανόηση του εννοιολογικού περιεχομένου που αναπαρίσταται.*

Αυτή η υπόθεση φαίνεται ικανή αν αναφέρεται σε υποκείμενα που έχουν μια καλή ευχέρεια (ευελιξία) σε μαθηματικές δραστηριότητες (ερευνητές των μαθηματικών ή διδάσκοντες). Δεν είναι ικανή όταν αναφέρεται σε άτομα που βρίσκονται σε κατάσταση μάθησης (μαθητές γυμνασίου ή λυκείου). Δεν επιτρέπει να θεωρήσουμε ότι η μετατροπή των αναπαραστάσεων από μια καταγραφή σε άλλη μπορεί να είναι μια σημαντική πηγή δυσκολιών ή αποτυχιών.
Επιπλέον, με βάση τα ευρήματα των ερευνών που αναφέραμε, συνίσταται μια πρώτη δικαιολόγηση της υπόθεσης ότι η κατανόηση ενός εννοιολογικού περιεχομένου βασίζεται στο συντονισμό τουλάχιστο δύο καταγραφών αναπαράστασης. Το εύρημα αυτό συμφωνεί με τη διαπίστωση του Duval (2001) ότι η μάθηση και η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας είναι δυνατό να επιτευχθεί μόνο όταν υπάρχει ταυτόχρονη εμπλοκή, συνδυασμός ή συνύπαρξη (coordination) δύο τουλάχιστον πεδίων αναπαράστασης της έννοιας από τους μαθητές. Με άλλα λόγια, όταν οι μαθητές είναι ικανοί να επιτύχουν σε ένα έργο που αφορά για παράδειγμα την συνάρτηση σε ένα πεδίο αναπαράστασης και δεν είναι σε θέση να το επιτύχουν σε ένα άλλο, τότε αυτό αποτελεί ένδειξη της ταύτισης της μαθηματικής έννοιας με τη συγκεκριμένη αναπαράσταση την οποία χειρίζονται, και κατά συνέπεια δεν οδηγούνται στα επιθυμητά μαθησιακά αποτελέσματα. Αναγκαία προϋπόθεση για την επίτευξη πραγματικής και πλήρους κατανόησης και μάθησης μιας μαθηματικής έννοιας είναι η εξάλειψη ή η εκμηδένιση οποιασδήποτε μορφής στεγανοποίησης και η ενίσχυση της σπονδυλοποίησης ανάμεσα στα διάφορα πεδία αναπαράστασης της έννοιας.

Συνοψίζοντας, διαπιστώνουμε ότι για τη σωστή και αποτελεσματική αξιοποίηση των αναπαραστάσεων από τους μαθητές στη μαθησιακή διαδικασία, απαραίτητες προϋποθέσεις αποτελούν η σε βάθος κατανόηση της φύσης, των χαρακτηριστικών, των δυνατοτήτων και των περιορισμών των συγκεκριμένων αναπαραστάσεων, η αναγνώριση των σχέσεων δομής ανάμεσα στις διάφορες αναπαραστάσεις και η κατανόηση της αναλογίας που υπάρχει ανάμεσα στις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται και στην έννοια προς μάθηση. Το ζητούμενο της μαθηματικής παιδείας είναι θα λέγαμε αυτή ακριβώς η ευελιξία που αποκτά ο μαθητής διακρίνοντας το μαθηματικό αντικείμενο πίσω από τις αναπαραστάσεις του, τις οποίες μπορεί να συνδυάζει και να εναλλάσσει αναλόγως με το πρόβλημα που έχει να λύσει. Μια συζήτηση για μερικά από τα παραπάνω ή άλλα παρόμοια ζητήματα είναι πιθανό να μπορούσε να δώσει ώθηση, στη διασάφηση της σχέσης μεταξύ θεωριών αναπαραστάσεων και μάθησης των μαθηματικών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

3.1 Η ΕΡΕΥΝΑ

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ (Experiment design)

ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

- Γνωρίζουμε ότι η προϋπάρχουσα γνώση για τους φυσικούς αριθμούς, όπως έχει παρατηρηθεί, επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο ο μαθητής αντιλαμβάνεται τα κλάσματα. Η γνώση αυτή δεν βοηθά αλλά αντίθετα στέκεται ως εμπόδιο στους μαθητές κατά την εκμάθηση των κλασμάτων. Ειδικότερα, η θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής και τα ευρήματα από τις προηγούμενες μελέτες, μας οδηγούν σε πολύ συγκεκριμένες προβλέψεις σχετικά με τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές. Υιοθετώντας το θεωρητικό πλαίσιο που θεωρεί ότι η προϋπάρχουσα γνώση έχει ιδιαίτερη σημασία κατά την πρόσληψη νέων πληροφοριών, υποθέσαμε ότι η απόκτηση της έννοιας του κλάσματος από τους μαθητές απαιτεί αναδιοργάνωση της γνώσης τους για τους φυσικούς αριθμούς· απαιτεί δηλαδή εννοιολογική αλλαγή. Βασική υπόθεση της έρευνας μας είναι ότι στην πορεία απόκτησης της έννοιας του κλάσματος απαιτείται από τα παιδιά αναδιοργάνωση της θεωρίας που έχουν αναπτύξει για την έννοια του αριθμού και όχι απλώς εμπλουτισμός της προϋπάρχουσας γνώσης τους για τους φυσικούς αριθμούς με νέες πληροφορίες. Η αναδιοργάνωση αυτή όμως δεν γίνεται από τα παιδιά, δεν το καταλαβαίνουν, αλλά βασίζονται στις προηγούμενες γνώσεις τους και κάνουν λάθη, όπως έχει διαπιστωθεί από έρευνα της Βοσνιάδου Στέλλας και της Σταφυλίδου Σταματίας, τα λάθη αυτά παρουσιάζονται στη σχετική διατριβή τους με θέμα «Μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες μάθησης: Η ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος» (2001), περιγράφουμε στην συνέχεια. Σημαντικό επίσης σημείο της διερεύνησης της εννοιολογικής αλλαγής αποτελεί ο καθορισμός και η ανάλυση αυτής της προϋπάρχουσας σχετικής κάθε φορά γνώσης.

Οι παραπάνω προβλέψεις έχουν οδηγήσει στην κατασκευή του τεστ Α (που δόθηκε στην πρώτη φάση του πειράματος) που περιγράφουμε αναλυτικά παρακάτω στην έρευνα μας.

- Με βάση τα αποτελέσματα των ερευνών των Σταφυλίδου και Βοσνιάδου (Σταφυλίδου, 2001· Σταφυλίδου & Βοσνιάδου, 2005) σχετικά με τα κλάσματα, η θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής μπορεί να προβλέψει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σχετικά με την έννοια του κλάσματος και ειδικότερα της διάταξης των κλασμάτων, καθώς επίσης και την αντιμετώπιση των δυσκολιών αυτών. Στηριζόμενοι στα αποτελέσματα αυτά, διακρίνουμε στις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τα κλάσματα τα εξής λάθη:

  Το λάθος σύμφωνα με το οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται ως μεγαλύτερο το κλάσμα που έχει τους μεγαλύτερους όρους (**τύπος 4**, σύμφωνα με την κωδικοποίηση που κάναμε για τις ανάγκες της στατιστικής ανάλυσης).

  Το λάθος σύμφωνα με το οποίο μεγαλύτερο είναι το κλάσμα με τους μικρότερους όρους (**τύπος 3**, σύμφωνα με την κωδικοποίηση που κάναμε για τις ανάγκες της στατιστικής ανάλυσης), που προκύπτει ως μια άρνηση του προηγούμενου μοντέλου, στην οποία οδηγείται ο μαθητής όταν αντιλαμβάνεται ότι το κλάσμα είναι διαφορετικό από δύο ξεχωριστούς φυσικούς αριθμούς.

  Το λάθος σύμφωνα με το οποίο όλα τα κλάσματα είναι μικρότερα της μονάδας (**τύπος 2**), καθώς ο μαθητής αντιλαμβάνεται το κλάσμα πάντα ως μέρος της μονάδας και άρα μικρότερο από αυτή. Ο πρώτος στόχος της έρευνας μας είναι να εξετάσουμε αν πράγματι ισχύουν τα λάθη αυτά.

- Με βάση το σκεπτικό αυτό, θελήσαμε να ελέγξουμε με το τεστ Α (ένα τεστ σύγκρισης κλασμάτων το οποίο υπάρχει στο Παράρτημα και περιγράφεται αναλυτικά στην συνέχεια), αν πράγματι τα παιδιά κάνουν τα λάθη που περιμένουμε στις αντίστοιχες συγκρίσεις του ερωτηματολογίου.

Υποθέσαμε ότι οι αρχικές εννοιολογικές δομές (αρχικό επεξηγηματικό πλαίσιο) που κατασκευάζουν τα παιδιά για να ερμηνεύσουν τις μαθηματικές εκφράσεις που περιλαμβάνουν κλάσματα υιοθετούν πολλές από τις πεποιθήσεις τους για το φυσικό αριθμό. Οι πεποιθήσεις αυτές στην πορεία που τα παιδιά διανύουν για να προσεγγίσουν την επιστημονική θεώρηση του κλάσματος σταδιακά αντικαθίστανται· δηλαδή υπάρχουν ενδιάμεσα επεξηγηματικά πλαίσια που υιοθετούν τα παιδιά σε αυτήν την πορεία, πλαίσια τα οποία και προσπαθήσαμε να διερευνήσουμε. Θεωρήσαμε ότι τα ενδιάμεσα αυτά επεξηγηματικά πλαίσια μπορούν να ερμηνευτούν ως προσπάθειες των παιδιών να συμβιβάσουν τις βασικές προϋποθέσεις της θεωρίας βάσης για τους φυσικούς αριθμούς με τις νέες πληροφορίες με τις οποίες έρχονται σε επαφή μέσα από την εκπαίδευση ή τον κοινωνικό τους περίγυρο. Σύμφωνα με την υπόθεση μας, επομένως τα παιδιά είναι σε θέση να υιοθετήσουν το επιστημονικό επεξηγηματικό πλαίσιο όταν μπορέσουν να εγκαταλείψουν αυτές τις προϋποθέσεις που δρουν περιοριστικά στην αποδοχή της επιστημονικής άποψης (Vosniadou, 1994a).

Την σημασία της διδασκαλίας στο σχολείο στην κατάκτηση της επιστημονικής γνώσης θελήσαμε να εξετάσουμε με τη διδακτική παρέμβαση που κάναμε μέσω διδασκαλίας, κατά την τρίτη φάση του πειράματος που περιγράφουμε αναλυτικά παρακάτω στην έρευνα μας.

- Στόχος της έρευνας μας είναι να ελέγξουμε, αν οι εξωτερικές αναπαραστάσεις και η αυτοεξήγηση βοηθά στην αντιμετώπιση αυτών των λαθών. Με βάση αυτό το σκεπτικό, στη δεύτερη φάση του πειράματος δόθηκαν στους ίδιους μαθητές οδηγίες για το πώς να χρησιμοποιήσουν μία από τις δύο εξωτερικές αναπαραστάσεις (αριθμητική γραμμή και κυκλικά διαγράμματα) ή λεκτικές εξηγήσεις, για να τους βοηθήσουν να κατανοήσουν καλύτερα τα λάθη τους στην σύγκριση κλασμάτων. Πιο αναλυτικά, είχαμε τρεις πειραματικές ομάδες: (1) η πρώτη ομάδα (ομάδα Α) έπρεπε στο τεστ Β, αφού πρώτα παραστήσει (σχεδιάσει) το κάθε κλάσμα σε μια αριθμητική γραμμή να προχωρήσει στην σύγκριση των κλασμάτων, (2) η δεύτερη ομάδα (ομάδα Β) έπρεπε αφού πρώτα παραστήσει (σχεδιάσει) το κάθε κλάσμα με τη βοήθεια κυκλικών διαγραμμάτων (pies) να προχωρήσει στην σύγκριση των κλασμάτων, και τέλος (3) η τρίτη ομάδα (ομάδα Γ) έπρεπε αφού πρώτα εξηγήσει λεκτικά και δικαιολογήσει επαρκώς το σκεπτικό της να προχωρήσει στην σύγκριση των κλασμάτων. Θα πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι τα θέματα με τις συγκρίσεις κλασμάτων, σ' αυτό το τεστ Β με τις αναπαραστάσεις και τις λεκτικές εξηγήσεις, ήταν ακριβώς τα ίδια μ' αυτά που δόθηκαν στον προέλεγχο έτσι ώστε να διαπιστώσουμε αν υπήρξε ή όχι κάποια διαφοροποίηση και επιπλέον αν αυτή η διαφοροποίηση συμφωνεί με τα αναμενόμενα, βάση της θεωρίας μας, αποτελέσματα. Εξετάζουμε γενικά αν πράγματι ο μαθητής περνώντας από το τεστ Α, στις αναπαραστάσεις (αριθμητική γραμμή και κυκλικά διαγράμματα) και στις λεκτικές εξηγήσεις που έχουμε στο τεστ Β, αντιλαμβάνεται τα λάθη του και επιτυγχάνεται έτσι μια καλύτερη κατανόηση της έννοιας των κλασμάτων ή αν ενδεχομένως η τακτική μας αυτή έχει δεν έχει τα αναμενόμενα αποτελέσματα.

Σχετικά τώρα με αυτές τις τρεις πειραματικές ομάδες θα πρέπει εδώ να εξηγήσουμε για ποιους λόγους τις επιλέξαμε, ποιους στόχους εξυπηρετεί η χρήση των συγκεκριμένων αναπαραστάσεων καθώς επίσης και σε ποια σημεία αυτές διαφέρουν μεταξύ τους. Πέρα από τη θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής, υπάρχει ένα ολόκληρο σκεπτικό για το οποίο χρησιμοποιούμε π.χ. την αριθμητική γραμμή έναντι των κυκλικών διαγραμμάτων και των αναπαραστάσεων έναντι των λεκτικών εξηγήσεων. Οι υποθέσεις για κάθε μία από τις πειραματικές ομάδες διαφέρουν, έτσι ξεκινώντας από τα κυκλικά διαγράμματα, που είναι από τις πιο συνηθισμένες αναπαραστάσεις στη διδασκαλία των κλασμάτων, μπορούμε να πούμε ότι τα παιδιά είναι σχετικά εξοικειωμένα με τη χρήση τους αλλά υπάρχει ο κίνδυνος, όπως έχει διαπιστωθεί και από προηγούμενες έρευνες στα κλάσματα, οι μαθητές να θεωρήσουν ότι κάθε κλάσμα (ως μέρος πάντα της μονάδας) είναι μικρότερο από τη μονάδα. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, πολλοί ερευνητές έχουν επισημάνει ότι η μονάδα είναι ένα πολύ σημαντικό εμπόδιο για τους μαθητές σχετικά με την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος, γεγονός που μπορεί να επιδράσει αρνητικά και περαιτέρω σε οποιαδήποτε άλλη προώθηση της κατανόησης της διάταξης των κλασμάτων.

Η αριθμητική γραμμή, σε σχέση με το προηγούμενο πρόβλημα, φαίνεται να είναι μια καλύτερη εξωτερική αναπαράσταση καθώς είναι πιο εύκολο για τους μαθητές κατά την αναπαράσταση ενός κλάσματος να προχωρήσουν και πέρα από την μονάδα, ξεπερνώντας έτσι αυτό το εμπόδιο, όπως προκύπτει από τα ευρήματα προηγούμενων ερευνών και το οποίο σχετίζεται με τα κυκλικά διαγράμματα. Από την άλλη μεριά η αριθμητική γραμμή είναι πιο ανοίκεια και πιο αφηρημένη, γεγονός που μπορεί να δημιουργήσει πολλά προβλήματα, ιδιαίτερα στους μαθητές Δημοτικού. Βλέπουμε λοιπόν πως η χρήση της συγκεκριμένης κάθε φορά εξωτερικής αναπαράστασης συνεπάγεται αντίστοιχα κάποια πλεονεκτήματα αλλά και κάποια μειονεκτήματα. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μη γνωρίζουμε ποιο θα είναι το αποτέλεσμα από μια ενδεχόμενη εφαρμογή των αναπαραστάσεων αυτών σε θέματα διάταξης κλασμάτων και σ' αυτό συνίσταται και το ενδιαφέρον μιας ανάλογης έρευνας.

Τέλος με τις λεκτικές εξηγήσεις εξετάζουμε τη θεωρία σχετικά με την αυτό-εξήγηση (self explanation), δηλαδή ελέγχουμε αν δια μέσου της διαδικασίας κατά την οποία ο μαθητής καλείται να εξηγήσει λεκτικά τον τρόπο σκέψης που τον οδήγησε στην κρίση του σχετικά με τις συγκρίσεις των κλασμάτων, ξεπερνά τυχόν δυσκολίες του και οδηγείται σε μια αυτοδιόρθωση (self-correction) καθώς αντιλαμβάνεται τα λάθη του, προχωρώντας έτσι σε μια καλύτερη κατανόηση της διάταξης.

Γενικά υποθέτουμε τη συμβολή του self-reflection (αυτο-αναστοχασμού), δηλαδή ότι ο μαθητής δια μέσου της διαδικασίας κατά την οποία καλείται να συγκρίνει τα κλάσματα, είτε με βάση την εικόνα που έχει από τις αντίστοιχες εξωτερικές αναπαραστάσεις τους (αριθμητική γραμμή, κυκλικά διαγράμματα) είτε αφού προηγουμένως έχει προσπαθήσει να τεκμηριώσει λεκτικά με βάση για παράδειγμα κάποιους αλγοριθμικούς κανόνες που ενδεχομένως έχει μάθει ή με άλλα επιχειρήματα που ο ίδιος θεωρεί λογικά και επαρκή, αντιλαμβάνεται τα λάθη του, προωθούνται οι μεταγνωστικές διεργασίες στην σκέψη του μαθητή, με αποτέλεσμα, όπως προκύπτει από διάφορες έρευνες (Chi, 1994), την καλύτερη κατανόηση της διάταξης των κλασμάτων.

Θα αναφερθούμε τώρα κάπως αναλυτικότερα σχετικά με τον στόχο μας, να ελέγξουμε τα μοντέλα με τις εξωτερικές αναπαραστάσεις (αριθμητική γραμμή και κυκλικά διαγράμματα). Θέλουμε να συγκρίνουμε τις δύο εξωτερικές αναπαραστάσεις (αριθμητική γραμμή και κυκλικά διαγράμματα) μεταξύ τους (με βάση τις επιδόσεις των μαθητών στα αντίστοιχα τεστ) ως προς τις επί μέρους επιδράσεις τους στον τρόπο με τον οποίο ο μαθητής αντιλαμβάνεται και κατανοεί τις μαθηματικές έννοιες (όπως εδώ συγκεκριμένα της διάταξης των κλασμάτων). Θέλουμε επίσης να συγκρίνουμε την χρήση γραφικών αναπαραστάσεων (αριθμητική γραμμή και κυκλικά διαγράμματα) έναντι των λεκτικών εξηγήσεων. Απώτερος στόχος της έρευνας αυτής ήταν να διερευνήσουμε τους μηχανισμούς με τους οποίους πραγματώνονται οι αλλαγές των σχετικών πεποιθήσεων των παιδιών και την αναγνώριση των διαδικασιών με τις οποίες διευκολύνεται η αλλαγή αυτή. Θέλουμε να επίσης να ελέγξουμε τη θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής και στην συνέχεια κατά τη διδακτική μας παρέμβαση μέσω της διδασκαλίας (η οποία ήταν ειδικά προσαρμοσμένη για κάθε πειραματική ομάδα, π.χ. για την ομάδα της αριθμητικής γραμμής και η διδασκαλία που ακολούθησε ήταν με χρήση της αριθμητικής γραμμής κ.ο.κ.) και επεξήγησης των διαφόρων περιπτώσεων που αντιμετωπίζουμε στα θέματα των τεστ.

Μέσα από όλο αυτό το σκεπτικό που αναφέραμε, χωρίς να ξέρουμε με βεβαιότητα που οδηγεί (άλλωστε εκεί έγκειται και το ενδιαφέρον μας να το δοκιμάσουμε πειραματικά), αν δηλαδή όλα αυτά συμβάλλουν σε μια καλύτερη κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και της διάταξης των κλασμάτων ή μήπως υπάρχουν και περιπτώσεις όπου δεν έχουμε θετικά αποτελέσματα, διαμορφώθηκε ο πειραματικός σχεδιασμός που περιγράφεται αναλυτικά στην συνέχεια.

Τα αποτελέσματα τόσο της μη διδακτικής παρέμβασης μας μέσω των τεστ με αναπαραστάσεις (αριθμητική γραμμή και κυκλικά διαγράμματα) και λεκτικές εξηγήσεις, όσο και της διδακτικής μας παρέμβασης με τη διδασκαλία, κρίναμε σκόπιμο να ελεγχθούν μέσω της σύγκρισης με τα αποτελέσματα μιας ομάδας ελέγχου (ομάδα Δ) στην οποία δεν έγινε καμία παρέμβαση.

Τέλος στην τέταρτη φάση με το post-test (τεστ C) που δόθηκε στους μαθητές 2 εβδομάδες μετά το τεστ B, ελέγχουμε αν αυτή η επίδραση είναι κάπως μόνιμη.

<u>Ερωτήσεις</u>

Τα τεστ A, B και C που προαναφέραμε και τα οποία παραθέτουμε στο Παράρτημα που υπάρχει στο τέλος αυτής της εργασίας, περιείχαν θέματα διάταξης κλασμάτων τα οποία επιλέχθηκαν έτσι ώστε σε κάποια από αυτά η σωστή απάντηση να έρχεται σε συμφωνία με τη θεωρία μας, δηλαδή να συμφωνεί με κάποιο από τα λάθη των μαθητών που έχουμε προαναφέρει, ενώ σε κάποια άλλα να έρχεται σε αντίθεση με τα λάθη αυτά, ώστε να μπορούμε να εξετάσουμε στην συνέχεια την κατανομή των μοντέλων όχι μόνο στις λανθασμένες αλλά και στις σωστές απαντήσεις. Τα θέματα αναλυτικά έχουν ως εξής:

- 1η ερώτηση (διάταξη των κλασμάτων $\frac{2}{4}$ και $\frac{3}{4}$), πρόκειται για σύγκριση ομώνυμων κλασμάτων. Η ερώτηση αυτή θεωρούμε ότι είναι εύκολη και θα την απαντήσουν όλοι οι μαθητές (ακόμη και αυτοί που δεν ξέρουν καλά τα κλάσματα). Η επιλογή της έγινε έτσι ώστε η σωστή απάντηση να έρχεται σε συμφωνία με το μοντέλο των μαθητών, σύμφωνα με το οποίο μεγαλύτερο είναι το κλάσμα που έχει τους μεγαλύτερους όρους (τύπος 4, σύμφωνα με την κωδικοποίηση που κάναμε για τις ανάγκες της στατιστικής ανάλυσης). Η λάθος απάντηση του ίδιου θέματος μας δίνει επίσης πληροφόρηση σχετικά με τις αντιλήψεις του μαθητή, καθώς μια απάντηση π.χ. ότι $\frac{2}{4} > \frac{3}{4}$ (μοντέλο τύπου 3, σύμφωνα με την κωδικοποίηση που κάναμε για τις ανάγκες της στατιστικής ανάλυσης), θα σήμαινε μια άρνηση του προηγούμενου μοντέλου. Το λάθος αυτό όπως διαπιστώνουμε και στην έρευνα μας δεν είναι τυχαίο καθώς όπως διαπιστώνεται έχει μια συστηματικότητα κάτι που ίσως να αποτελεί και την εξήγηση της παρερμηνείας ενός κανόνα. Τέλος, η άλλη λάθος απάντηση που μπορεί να δοθεί στο συγκεκριμένο θέμα, δηλαδή ότι $\frac{2}{4} = \frac{3}{4}$ καθώς δεν ακολουθεί κάποιο από τα μοντέλα που διατυπώσαμε σχετικά με τις αντιλήψεις των μαθητών με βάση τη θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής, κρίνεται ως άσχετο λάθος (τα άσχετα λάθη σύμφωνα με την κωδικοποίηση που κάναμε για τις ανάγκες της στατιστικής ανάλυσης, τα κατατάσσουμε στον τύπο 1), το οποίο πέρα από το ενδεχόμενο μιας τυχαίας επιλογής, δείχνει και την αδυναμία του μαθητή σχετικά με την αντίληψη της έννοιας του κλάσματος.

- 2η ερώτηση ($\frac{1}{8}$ και $\frac{1}{3}$), σύγκριση κλασματικών μονάδων. Η ερώτηση αυτή θεωρούμε ότι είναι πιο δύσκολη από την προηγούμενη, καθώς ο μαθητής χρειάζεται μια κάπως πιο σύνθετη θεωρία για να καταλήξει στην σωστή απάντηση. Η επιλογή της έγινε έτσι ώστε η σωστή απάντηση να έρχεται σε αντίθεση τώρα με το μοντέλο των μαθητών, σύμφωνα με το οποίο μεγαλύτερο είναι το κλάσμα που έχει τους μεγαλύτερους όρους (τύπος 4). Ελέγχουμε έτσι αν πράγματι η προϋπάρχουσα γνώση για τους φυσικούς αριθμούς, όπως αναφέραμε και προηγουμένως σύμφωνα με τη θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής, δεν τους βοηθά αλλά αντίθετα στέκεται εμπόδιο κατά την εκμάθηση των κλασμάτων. Το εμπόδιο αυτό, το οποίο δημιουργείται στο μαθητή από την προϋπάρχουσα γνώση για τους φυσικούς αριθμούς, ανιχνεύεται μέσα από μια ενδεχόμενη λάθος απάντηση θέματος αυτού ότι $\frac{1}{8} > \frac{1}{3}$ (μοντέλο τύπου 4), λάθος το οποίο είναι χαρακτηριστικό για τις αντιλήψεις του μαθητή, καθώς έρχεται να επιβεβαιώσει ότι ο μαθητής δεν αντιλαμβάνεται ότι το κλάσμα είναι διαφορετικό από δύο ξεχωριστούς φυσικούς αριθμούς. Τέλος, η άλλη λάθος απάντηση που μπορεί να δοθεί στο συγκεκριμένο θέμα, δηλαδή ότι $\frac{1}{8} = \frac{1}{3}$ καθώς δεν ακολουθεί κάποιο από τα μοντέλα που διατυπώσαμε σχετικά με τις αντιλήψεις των μαθητών με βάση τη θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής, κρίνεται ως άσχετο λάθος (τύπος 1).

- 3η ερώτηση ($\frac{4}{5}$ και $\frac{8}{10}$), ισοδυναμία κλασμάτων. Η ερώτηση αυτή θεωρούμε ότι είναι ακόμη πιο δύσκολη (σε σχέση με τις προηγούμενες) καθώς ο μαθητής χρειάζεται να ξέρει κάποιες διαδικασίες (να μετατρέπει τα κλάσματα σε ομώνυμα), ώστε να απαντήσει σωστά. Η επιλογή της έγινε έτσι ώστε η σωστή απάντηση να έρχεται σε αντίθεση τόσο με το μοντέλο των μαθητών, σύμφωνα με το οποίο μεγαλύτερο είναι το κλάσμα που έχει τους μεγαλύτερους όρους (τύπος 4), όσο και με την άρνηση του μοντέλου αυτού (τύπος 3) ότι δηλαδή μεγαλύτερο είναι το κλάσμα με τους μικρότερους όρους. Η λάθος απάντηση $\frac{4}{5} < \frac{8}{10}$ έρχεται σε συμφωνία με το μοντέλο όπου ο μαθητής θεωρεί ότι μεγαλύτερο είναι το κλάσμα που έχει τους μεγαλύτερους όρους (τύπος 4). Ενώ, η άλλη λάθος απάντηση που μπορεί να δοθεί, ότι $\frac{4}{5} > \frac{8}{10}$ (μοντέλο τύπου 3), σημαίνει μια άρνηση του προηγούμενου μοντέλου.

- 4η ερώτηση ($\frac{2}{3}$ και $\frac{7}{9}$), σύγκριση ετερώνυμων κλασμάτων. Η σωστή απάντηση έρχεται σε συμφωνία με το μοντέλο των μαθητών, σύμφωνα με το οποίο μεγαλύτερο είναι το κλάσμα που έχει τους μεγαλύτερους όρους (τύπος 4) και με βάση αυτή τη θεωρία είναι εύκολο να απαντηθεί από έναν μαθητή, διαφορετικά θα πρέπει να ξέρει κάποιες διαδικασίες (να μετατρέπει τα κλάσματα σε ομώνυμα), ώστε να απάντήσει σωστά. Η λάθος απάντηση του ίδιου θέματος μας δίνει επίσης πληροφόρηση σχετικά με τις αντιλήψεις του μαθητή, καθώς μια απάντηση π.χ. ότι $\frac{2}{3} > \frac{7}{9}$ (μοντέλο τύπου 3), σημαίνει άρνηση του προηγούμενου μοντέλου και μια διαφοροποίηση στις αντιλήψεις του μαθητή. Τέλος, η άλλη λάθος απάντηση που μπορεί να δοθεί στο συγκεκριμένο θέμα, δηλαδή ότι $\frac{2}{3} = \frac{7}{9}$, κρίνεται ως άσχετο λάθος (τύπος 1).

- 5η ερώτηση ($\frac{4}{7}$ και $\frac{2}{5}$), σύγκριση ετερώνυμων κλασμάτων. Όπως και στην προηγούμενη ερώτηση, η επιλογή της έγινε έτσι ώστε η σωστή απάντηση να έρχεται σε συμφωνία με το μοντέλο των μαθητών, σύμφωνα με το οποίο μεγαλύτερο είναι το κλάσμα που έχει τους μεγαλύτερους όρους (τύπος 4). Η λάθος απάντηση του ίδιου θέματος ότι $\frac{4}{7} < \frac{2}{5}$ (μοντέλο τύπου 3), σημαίνει όπως είπαμε άρνηση του προηγούμενου μοντέλου και μια διαφοροποίηση στις αντιλήψεις του μαθητή. Τέλος, η άλλη λάθος απάντηση ότι $\frac{4}{7}=\frac{2}{5}$, κρίνεται ως άσχετο λάθος (τύπος 1).

- 6η ερώτηση ($\frac{3}{2}$ και $\frac{8}{10}$), σύγκριση καταχρηστικού και μη κλάσματος. Αν οι μαθητές έχουν κατανοήσει την σχέση των καταχρηστικών και μη καταχρηστικών κλασμάτων με τη μονάδα πιστεύουμε ότι θα είναι εύκολο να απαντήσουν σωστά σ' αυτήν την ερώτηση. Θέλουμε με αυτή την ερώτηση αφ' ενός να εξετάσουμε τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τα καταχρηστικά κλάσματα και τις πιθανές δυσκολίες τους, όπως γνωρίζουμε και ιστορικά η εμφάνιση μη καταχρηστικών κλασμάτων έγινε αργότερα απ' ότι π.χ. των κλασματικών μονάδων (πρβλ. εναδικά Αιγυπτιακά κλάσματα) και αφ' ετέρου να ελέγξουμε αν επαληθεύονται οι προβλέψεις της θεωρίας της εννοιολογικής αλλαγής σχετικά με τις αντιλήψεις των μαθητών για τα κλάσματα. Η επιλογή της έγινε ώστε η σωστή απάντηση να έρχεται σε αντίθεση με το μοντέλο των μαθητών, σύμφωνα με το οποίο μεγαλύτερο είναι το κλάσμα που έχει τους μεγαλύτερους όρους (τύπος 4), έτσι μια σωστή απάντηση από το μαθητή προϋποθέτει άρνηση του μοντέλου αυτού. Μια λάθος λοιπόν απάντηση του ίδιου θέματος ότι $\frac{3}{2} < \frac{8}{10}$ (μοντέλο τύπου 4) επιβεβαιώνει και πάλι ότι η προϋπάρχουσα αυτή γνώση για τους φυσικούς αριθμούς δεν βοηθά τους μαθητές αλλά αντίθετα στέκεται εμπόδιο κατά την εκμάθηση των κλασμάτων. Τέλος, η άλλη λάθος απάντηση που μπορεί να δοθεί στο θέμα αυτό ότι $\frac{3}{2} = \frac{8}{10}$ κρίνεται ως άσχετο λάθος.

- 7η ερώτηση ($\frac{6}{7}$ και 1), σύγκριση κλάσματος με τη μονάδα. Με την ερώτηση αυτή θέλουμε αφ' ενός να εξετάσουμε πως βλέπουν οι μαθητές το κλάσμα σε σχέση με τη μονάδα και αν επιβεβαιώνονται οι προβλέψεις της θεωρίας της εννοιολογικής αλλαγής σχετικά με τις αντιλήψεις των μαθητών για τα κλάσματα. Έτσι η επιλογή της έγινε ώστε η σωστή απάντηση να έρχεται σε συμφωνία με το άλλο μοντέλο των μαθητών, σύμφωνα με το οποίο κάθε κλάσμα είναι μικρότερο της μονάδας (τύπος 2, σύμφωνα με την κωδικοποίηση που κάναμε για τις ανάγκες της στατιστικής ανάλυσης). Υποθέτουμε δηλαδή ότι ο μαθητής αντιλαμβάνεται (ίσως και λόγω της διδασκαλίας, όπως για παράδειγμα με τη χρήση κυκλικών διαγραμμάτων για την παράσταση των κλασμάτων) το κλάσμα πάντα ως μέρος της μονάδας και κατά συνέπεια θεωρεί κάθε κλάσμα ως μικρότερο της μονάδας. Η λάθος απάντηση του ίδιου θέματος ότι $\frac{6}{7} > 1$ θα σήμαινε μια άρνηση του προηγούμενου μοντέλου, και διάψευση της αντίστοιχης υπόθεσης της θεωρίας μας και καθώς δεν σχετίζεται με αυτή κρίνεται ως άσχετο λάθος (τύπος 1). Τέλος, η άλλη λάθος απάντηση ότι $\frac{6}{7} = 1$ επίσης δεν ακολουθεί το μοντέλο που διατυπώσαμε σχετικά με τις αντιλήψεις των μαθητών έτσι και αυτή κρίνεται ως άσχετο λάθος (τύπος 1).

- 8η ερώτηση ($\frac{5}{4}$ και 1), σύγκριση καταχρηστικού κλάσματος με τη μονάδα. Με την ερώτηση αυτή θέλουμε αφ' ενός να εξετάσουμε και πάλι τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τα καταχρηστικά κλάσματα και τις ενδεχόμενες δυσκολίες που συναντούν στην κατανόηση τους, το πως βλέπουν το καταχρηστικό κλάσμα σε σχέση με τη μονάδα και αν επιβεβαιώνονται οι προβλέψεις της θεωρίας της εννοιολογικής αλλαγής σχετικά με τις αντιλήψεις των μαθητών για τα κλάσματα. Έτσι η επιλογή της έγινε ώστε η σωστή απάντηση να έρχεται σε αντίθεση τώρα με το μοντέλο των μαθητών, σύμφωνα με το οποίο κάθε κλάσμα είναι μικρότερο της μονάδας (τύπος 2). Η λάθος απάντηση του ίδιου θέματος ότι $\frac{5}{4} < 1$ θα σήμαινε επιβεβαίωση του προηγούμενου μοντέλου και επαλήθευση γενικότερα της αντίστοιχης υπόθεσης της θεωρίας μας. Τέλος, η άλλη λάθος απάντηση ότι $\frac{5}{4} = 1$ καθώς δεν ακολουθεί το μοντέλο που διατυπώσαμε σχετικά με τις αντιλήψεις των μαθητών, κρίνεται ως άσχετο λάθος (τύπος 1).

- 9η ερώτηση ($\frac{7}{4}$ και $1\frac{3}{4}$), σύγκριση καταχρηστικού κλάσματος με μεικτό.

  Με την ερώτηση αυτή θέλουμε αφ' ενός να εξετάσουμε και πάλι τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τα καταχρηστικά κλάσματα καθώς επίσης και τις αντιλήψεις τους για τους μεικτούς, η έννοια του μεικτού υποθέτουμε δημιουργεί κάποιες δυσκολίες στους μαθητές σχετικά με την κατανόηση της. Η επιλογή της έγινε ώστε η σωστή απάντηση να έρχεται σε αντίθεση με το μοντέλο των μαθητών, σύμφωνα με το οποίο κάθε κλάσμα είναι μικρότερο της μονάδας και κατ' επέκταση και κάθε μεικτού (τύπος 2). Η λάθος απάντηση του ίδιου θέματος ότι $\frac{7}{4} < 1\frac{3}{4}$ θα σήμαινε επιβεβαίωση του προηγούμενου μοντέλου και επαλήθευση γενικότερα της αντίστοιχης υπόθεσης της θεωρίας που διατυπώσαμε. Τέλος, η άλλη λάθος απάντηση ότι $\frac{7}{4} > 1\frac{3}{4}$ καθώς θα σήμαινε μια άρνηση του προηγούμενου μοντέλου, και διάψευση της αντίστοιχης υπόθεσης της θεωρίας μας, κρίνεται ως άσχετο λάθος (τύπος 1).

Οι ερωτήσεις αυτές αναφέρονταν σε έννοιες που όπως είπαμε πριν θα έπρεπε να ήταν γνωστές στους μαθητές.

Ο παρακάτω πίνακας δίνει την κατανομή των δυνατών απαντήσεων στα θέματα διάταξης με βάση τα λάθη που περιγράψαμε προηγουμένως:

ΘΕΜΑΤΑ	**Λάθη ΤΥΠΟΥ 1** (άσχετα με τα μοντέλα)	**Λάθη ΤΥΠΟΥ 2** (Όλα τα κλάσματα μικρότερα της μονάδας)	**Λάθη ΤΥΠΟΥ 3** (μεγαλύτερο είναι το κλάσμα με τους μικρότερους όρους)	**Λάθη ΤΥΠΟΥ 4** (μεγαλύτερο είναι το κλάσμα που έχει τους μεγαλύτερους όρους)	**ΤΥΠΟΣ 5** Σωστή απάντηση
1ο) $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$	=		>		<
2ο) $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{3}$	=			>	<
3ο) $\frac{4}{5}$ $\frac{8}{10}$			>	<	=
4ο) $\frac{2}{3}$ $\frac{7}{9}$	=		>		<
5ο) $\frac{4}{7}$ $\frac{2}{5}$	=		<		>
6ο) $\frac{3}{2}$ $\frac{8}{10}$	=			<	>
7ο) $\frac{6}{7}$ 1	= **&** >				<
8ο) $\frac{5}{4}$ 1	=	<			>
9ο) $\frac{7}{4}$ $1\frac{3}{4}$	>	<			=

Όπως βλέπουμε στον παραπάνω πίνακα, τα θέματα επιλέχτηκαν έτσι ώστε σε κάποια από αυτά η σωστή απάντηση να έρχεται σε συμφωνία με τα μοντέλα που περιγράψαμε (π.χ. $\frac{2}{4} < \frac{3}{4}$ σωστή απάντηση σύμφωνα με το μοντέλο ότι μεγαλύτερο είναι το κλάσμα που έχει τους μεγαλύτερους όρους) και σε κάποια άλλα να έρχεται σε αντίθεση (π.χ. $\frac{5}{4} > 1$ σωστή απάντηση σε αντίθεση με το μοντέλο ότι όλα τα κλάσματα μικρότερα της μονάδας).

Χρήσιμος είναι και ο παρακάτω πίνακας, όπου δίνουμε τις απαντήσεις που θα έδινε κάποιος μαθητής, ακολουθώντας κάποιο από τα παραπάνω μοντέλα.

Έτσι ονομάζουμε **προφίλ 1**, αυτό του μαθητή που απαντά με βάση το μοντέλο ότι μεγαλύτερο είναι το κλάσμα που έχει τους μεγαλύτερους όρους,

προφίλ 2, αυτό του μαθητή που απαντά με βάση το μοντέλο ότι μεγαλύτερο είναι το κλάσμα με τους μικρότερους όρους,

προφίλ 3, αυτό του μαθητή που απαντά με βάση το μοντέλο ότι όλα τα κλάσματα μικρότερα της μονάδας.

ΘΕΜΑΤΑ	**ΠΡΟΦΙΛ 1**	**ΠΡΟΦΙΛ 2**	**ΠΡΟΦΙΛ 3**	**ΣΩΣΤΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**
1ο) $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$	$<$	$>$		$<$
2ο) $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{3}$	$>$	$<$		$<$
3ο) $\frac{4}{5}$ $\frac{8}{10}$	$<$	$>$		$=$
4ο) $\frac{2}{3}$ $\frac{7}{9}$	$<$	$>$		$<$
5ο) $\frac{4}{7}$ $\frac{2}{5}$	$>$	$<$		$>$
6ο) $\frac{3}{2}$ $\frac{8}{10}$	$<$	$>$		$>$
7ο) $\frac{6}{7}$ 1			$<$	$<$
8ο) $\frac{5}{4}$ 1			$<$	$>$
9ο) $\frac{7}{4}$ $1\frac{3}{4}$			$<$	$=$

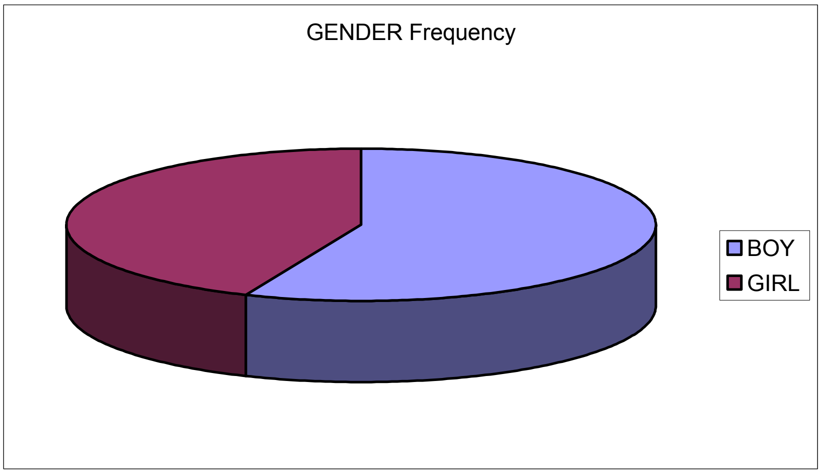
Όπως φαίνεται και από τον παραπάνω πίνακα θέσαμε τις πρώτες 6 ερωτήσεις με σκοπό τον έλεγχο των **προφίλ 1** και **2** που αναφέραμε πριν**,** ενώ τις 3 τελευταίες ερωτήσεις για τον έλεγχο του **προφίλ 3,** του μαθητή δηλαδή που απαντά με βάση το μοντέλο ότι όλα τα κλάσματα μικρότερα της μονάδας.

Μέθοδος της έρευνας

Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν 236 μαθητές της ΣΤ΄ τάξης Δημοτικού

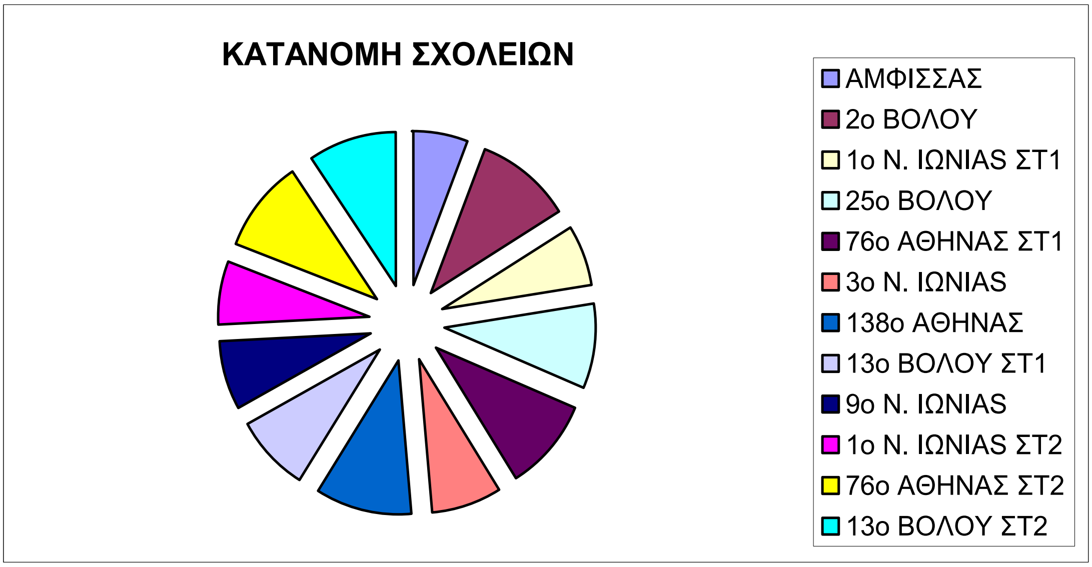
GENDER		
	Frequency	Percent
ΑΓΟΡΙ	133	56,36
ΚΟΡΙΤΣΙ	103	43,64



Η έρευνα διεξήχθη την περίοδο Απριλίου-Μαΐου 2005 σε 12 τμήματα 9 Δημοτικών Σχολείων των εξής περιοχών:

Ιτέας, Άμφισσας, Ν. Ιωνίας, Βόλου και Αθήνας.

ΣΧΟΛΕΙΟ		
	Frequency	Percent
ΑΜΦΙΣΣΑΣ	14	5,93
2^{O} ΒΟΛΟΥ	24	10,16
1^{O} Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	15	6,35
25^{O} ΒΟΛΟΥ	21	8,89
76^{O} ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	23	9,74
3^{O} Ν. ΙΩΝΙΑΣ	18	7,62
138^{O} ΑΘΗΝΑΣ	24	10,16
13^{O} ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	19	8,05
9^{O} Ν. ΙΩΝΙΑΣ	17	7,20
1^{O} Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	16	6,77
76^{O} ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	23	9,74
13^{O} ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	22	9,32



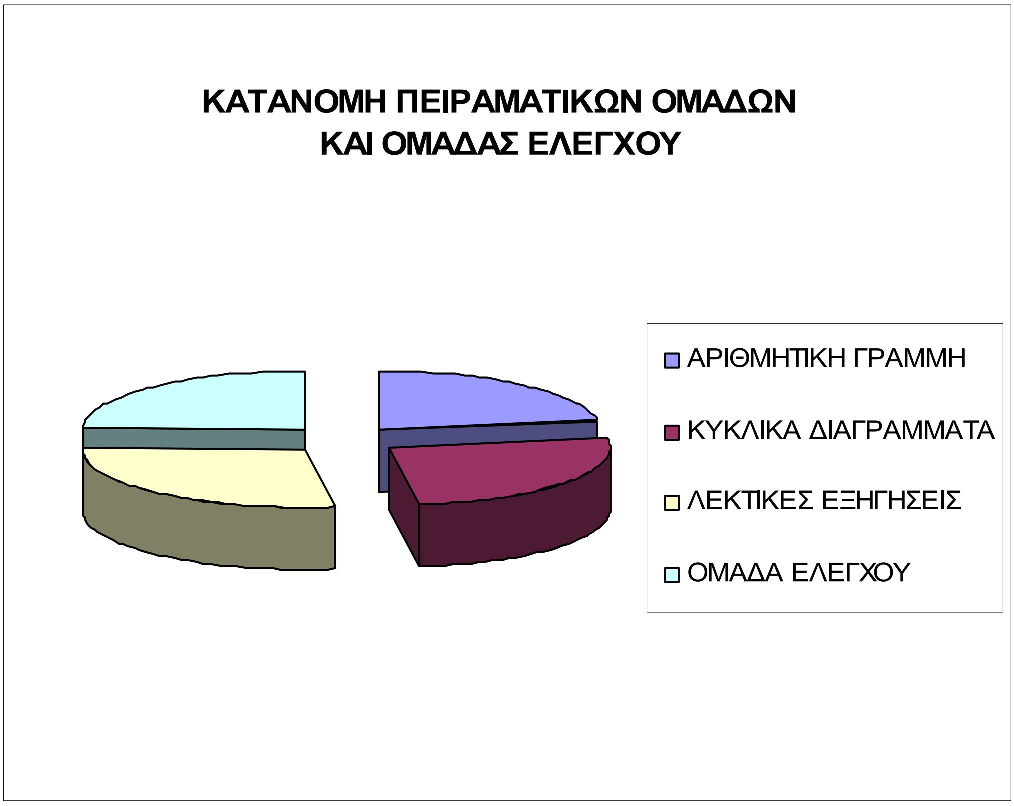
Επιλέχθηκε η έκτη τάξη Δημοτικού καθώς στο αναλυτικό πρόγραμμα το οποίο ακολούθησαν οι μαθητές αυτοί, η διάταξη των κλασμάτων είχε διδαχτεί στην προηγούμενη (Ε΄) τάξη και θεωρείται γνωστή (αργότερα θα την συναντήσουν και στο Γυμνάσιο και κάπως πιο εκτεταμένα στην Α΄ Λυκείου στο πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου της Άλγεβρας). Ο άξονας των πραγματικών αριθμών είναι άγνωστος στους μαθητές Δημοτικού, καθώς εισάγεται σύμφωνα με τον αναλυτικό πρόγραμμα στην Β΄ Γυμνασίου (στην Α΄ Γυμνασίου απλώς αναφέρεται η παράσταση των ρητών με σημεία μιας ευθείας), στη Γ΄ τάξη του Γυμνασίου χρησιμοποιείται και πάλι ο άξονας των πραγματικών αριθμών καθώς και η έννοια της διάταξης, για το λόγο αυτό δόθηκαν (όπως θα δούμε στην περιγραφή της διαδικασίας παρακάτω) αναλυτικές οδηγίες στους μαθητές που συμπλήρωσαν το ερωτηματολόγιο με την αριθμητική γραμμή σχετικά με τη χρήση της.

Σχεδιασμός έρευνας

Η ερευνητική μελέτη περιελάμβανε τρεις (3) πειραματικές ομάδες (experimental groups) μαθητών, οι οποίες διέφεραν ως προς το είδος της μη διδακτικής παρέμβασης η οποία έγινε μέσω παροχής εξηγηματικών γραφικών αναπαραστάσεων (όπως στην ομάδα Α της αριθμητικής γραμμής και στην ομάδα Β με τα κυκλικά διαγράμματα, όπου οι μαθητές απλά έκαναν το αντίστοιχο σχήμα που αναπαριστούσε το κάθε κλάσμα και στην συνέχεια προχωρούσαν στις συγκρίσεις) ή χρήσης λεκτικών εξηγήσεων (όπως στην ομάδα Γ), όπου οι μαθητές έπρεπε πριν προχωρήσουν στις συγκρίσεις, να δώσουν εξηγήσουν τους λόγους για τους οποίους κατέληξαν στο αντίστοιχο συμπέρασμα). Περιελάμβανε επίσης και μια (1) ομάδα ελέγχου (control group), που είχε τα ίδια χαρακτηριστικά με τις τρεις πειραματικές ομάδες που αναφέραμε, την οποία ονομάζουμε ομάδα Δ.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ	Frequency	Percent
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ (ομάδα Α)	53	22,45
ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ (ομάδα Β)	60	25,42
ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ (ομάδα Γ)	65	27,54

ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	Frequency	Percent
(ομάδα Δ)	58	24,57



<u>Διαδικασία</u>

Το πείραμα διακρίνεται σε τέσσερις (4) φάσεις:

1^{η} Φάση: Διαμορφώθηκε ένα τεστ Α (τα τεστ υπάρχουν στο Παράρτημα), των 9 ερωτήσεων (τις οποίες ήδη έχουμε αναφέρει), κοινό για τις τρεις πειραματικές ομάδες και την ομάδα ελέγχου, έτσι ώστε να διαπιστώσουμε αρχικά το επίπεδο των προηγούμενων γνώσεων των μαθητών και να ελέγξουμε τις υποθέσεις μας σχετικά με τα λάθη.

2η Φάση: Διαμορφώθηκαν τρία διαφορετικά τεστ (τεστ Β), που είχαν τις ίδιες ερωτήσεις με το τεστ Α, προσαρμοσμένο όμως τώρα το καθένα για κάθε μια από τις 3 αντίστοιχες πειραματικές ομάδες μαθητών (αριθμητική γραμμή, κυκλικά διαγράμματα και λεκτικές εξηγήσεις). Ζητήθηκε από τους μαθητές πριν απαντήσουν, αυτοί που ανήκαν στην πειραματική ομάδα της αριθμητικής γραμμής να παραστήσουν πρώτα τα αντίστοιχα κλάσματα με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής, οι μαθητές της ομάδας των κυκλικών διαγραμμάτων παρόμοια να παραστήσουν τα αντίστοιχα κλάσματα με τη βοήθεια κυκλικών διαγραμμάτων και αυτοί της ομάδας των λεκτικών εξηγήσεων να εξηγήσουν λεκτικά με τη χρήση κάποιου κανόνα ή άλλου δικού τους λογικού επιχειρήματος το ποιο κλάσμα θεωρούν μεγαλύτερο και γιατί, και έπειτα (χρησιμοποιώντας αυτά) να προχωρήσουν στις συγκρίσεις. Θα πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι η ομάδα ελέγχου δεν συμμετείχε ούτε κατά τη δεύτερη ούτε κατά την τρίτη φάση.

Σχετικά με τη μη διδακτική παρέμβαση στη δεύτερη φάση του πειράματος με το τεστ Β, όπου είχαμε:

α) χρήση εξωτερικών αναπαραστάσεων οι οποίες βασίζονται σε αναπαραστάσεις γραφικές (αριθμητική γραμμή και κυκλικά διαγράμματα) και

β) χρήση λεκτικών εξηγήσεων, θέλουμε να συγκρίνουμε μεταξύ τους τις γραφικές αναπαραστάσεις με τις λεκτικές εξηγήσεις (αναλύοντας τα αντίστοιχα για κάθε μια από αυτές τις πειραματικές ομάδες αποτελέσματα στο τεστ Β). Επίσης σχετικά με τις αναπαραστάσεις θέλουμε να συγκρίνουμε τις διαφορές μεταξύ των δυο συγκεκριμένων γραφικών αναπαραστάσεων (αριθμητική γραμμή έναντι κυκλικών διαγραμμάτων), ενώ με την χρήση λεκτικών εξηγήσεων από τους μαθητές, θέλουμε να εξετάσουμε την θεωρία της Michelene Chi σχετικά με την αυτοεξήγηση (self explanation), αν δηλαδή οι μαθητές μέσα από αυτή τη διαδικασία μπορούν να καταλάβουν κάποια λάθη που είχαν κάνει πιθανώς χωρίς να σκεφτούν στο τεστ Α με αποτέλεσμα να προωθείται έτσι μια καλύτερη κατανόηση σχετικά με την έννοια του κλάσματος και τη διάταξη των κλασμάτων.

3η Φάση: Ακολούθησε διδασκαλία στους μαθητές των τριών πειραματικών ομάδων προσαρμοσμένη ειδικά για κάθε πειραματική ομάδα (η ομάδα ελέγχου όπως είπαμε δεν συμμετείχε ούτε σ’ αυτή τη φάση). Συγκεκριμένα, στην πειραματική ομάδα της αριθμητικής γραμμής διδάχθηκαν και επιλύθηκαν ανάλογες συγκρίσεις κλασμάτων με τη βοήθεια αριθμητικής γραμμής, στην ομάδα των κυκλικών διαγραμμάτων παρόμοια η διδασκαλία έγινε με χρήση κυκλικών διαγραμμάτων για την παράσταση των κλασμάτων, ενώ στην ομάδα των λεκτικών εξηγήσεων συζητήθηκαν οι αντίστοιχοι κανόνες της διάταξης κλασμάτων και δόθηκαν και εναλλακτικοί αλγοριθμικοί τρόποι (π.χ. κάνουμε τη διαίρεση) με τους οποίους μπορούμε να συγκρίνουμε δύο κλάσματα. Ιδιαίτερη σημασία δόθηκε για την διόρθωση χαρακτηριστικών σφαλμάτων που παρατηρήθηκαν στα δύο τεστ που προηγήθηκαν και τα οποία έχουμε επισημάνει και κατά την αναφορά που κάναμε προηγουμένως σχετικά με τους διάφορους τύπους λαθών όσον αφορά τη διάταξη των κλασμάτων.

4η Φάση: Ακολούθησε μετά από δύο εβδομάδες, ένα τεστ C (Post-Test) των 9 ερωτήσεων (παρόμοιων μ’ αυτών που είχαμε και στα προηγούμενα τεστ αλλά με διαφορετικούς αριθμούς), κοινό για τις τρεις πειραματικές ομάδες και την ομάδα ελέγχου. Στόχος μας είναι να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της μη διδακτικής παρέμβασης που κάναμε στη φάση 2 του πειράματος, σε σχέση με τα αποτελέσματα που είχαμε όταν προσθέσαμε στην συνέχεια (φάση 3) τη διδακτική παρέμβαση που κάναμε με τη διδασκαλία (ανάλυση και σύγκριση των αποτελεσμάτων του τεστ B με τα αντίστοιχα του τεστ C μετά τη διδασκαλία).
Τα τεστ A, B και C περιέχονται στο Παράρτημα που δίνεται στο τέλος.

Τα έντυπα μοιράστηκαν στα παιδιά κάθε τμήματος, στο περιβάλλον της τάξης του σχολείου τους και η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του κανονικού σχολικού τους (ωρολογίου) προγράμματος, κάθε μαθητής απάντησε μόνο σ’ ένα έντυπο.
Δόθηκαν σχετικές εξηγήσεις, με κάποια παραδείγματα συγκρίσεων, ιδιαίτερα κατά το τεστ Β όπου αναλύθηκε στους μαθητές της κάθε πειραματικής ομάδας ακριβώς το τι έπρεπε να κάνουν. Συγκεκριμένα στην ομάδα της αριθμητικής γραμμής παρουσιάστηκε στους μαθητές πως παριστάνουμε αριθμούς πάνω στην αριθμητική γραμμή, πως ορίζουμε ένα κλάσμα ως μέρος της μονάδας αλλά επίσης και η περίπτωση κατά την οποία ένα κλάσμα μπορεί να είναι μεγαλύτερο της μονάδας, παρόμοια και στην ομάδα των κυκλικών διαγραμμάτων όπου τους εξηγήθηκε ότι μπορούν να χρησιμοποιήσουν και δεύτερο κύκλο σε περίπτωση που ένα κλάσμα είναι μεγαλύτερο της μονάδας, αντίστοιχα στην ομάδα των λεκτικών εξηγήσεων τονίσαμε στους μαθητές ότι ακόμη και αν δεν θυμούνται ακριβώς κάποιον κανόνα θα θέλαμε να διατυπώσουν γραπτώς το σκεπτικό με το οποίο έκριναν ότι ένα κλάσμα είναι

μεγαλύτερο από ένα άλλο ή αν είναι ίσα να μας δικαιολογήσουν το γιατί. Τέλος τους επισημάνθηκε να διαβάσουν με προσοχή τα ερωτήματα και μετά να απαντήσουν.

Ο χρόνος που διατέθηκε για την απάντηση κάθε τεστ (A, B, C), αλλά και για τη διδασκαλία αντίστοιχα σε κάθε πειραματική ομάδα ήταν μια διδακτική ώρα (45 λεπτά).

<table>
<tr><th colspan="6">Πειραματικός σχεδιασμός (Experimental design)</th></tr>
<tr><th colspan="2"></th><th>Φάση 1

ΤΕΣΤ Α</th><th>Φάση 2

ΤΕΣΤ Β
(με εξ. αναπαραστάσεις
&
Λεκτικές Εξηγήσεις)</th><th>Φάση 3

(Διδασκαλία)</th><th>Φάση 4

ΤΕΣΤ C
(Post-Test)</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Πειρα-ματικές Ομάδες</td><td>Α: Αριθμητική Γραμμή</td><td>Α</td><td>Α</td><td>Α</td><td>Α</td></tr>
<tr><td>Β: Κυκλικά Διαγράμματα</td><td>Β</td><td>Β</td><td>Β</td><td>Β</td></tr>
<tr><td>Γ: Λεκτικές Εξηγήσεις</td><td>Γ</td><td>Γ</td><td>Γ</td><td>Γ</td></tr>
<tr><td colspan="2">Δ: Ομάδα Ελέγχου</td><td>Δ</td><td>——</td><td>——</td><td>Δ</td></tr>
</table>

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας περιλαμβάνει, έλεγχο της μέσης επίδοσης των διαφόρων πειραματικών ομάδων στα διάφορα τεστ με ανάλυση διασποράς (ANOVA), παρουσίαση συχνοτήτων και σχετικών συνοτήτων των διαφόρων λαθών και των σωστών απαντήσεων, καθώς επίσης και έλεγχος με το στατιστικό t-test για να διαπιστωθεί αν υπάρχει (σημαντική στατιστικά) σχέση μεταξύ των τύπων των απαντήσεων που δίνει ένας μαθητής σε κάθε τεστ και της αντίστοιχης πειραματικής ομάδας στην οποία ανήκει. Επίσης γίνεται έλεγχος σχετικά με την κατανομή των μαθητών στα διάφορα προφίλ που έχουμε αναφέρει, καθώς επίσης διαγράμματα ομοιότητας, συνεπαγωγικά διαγράμματα και ιεραρχικά διαγράμματα κατά την στατιστική ανάλυση με την συνεπαγωγική μέθοδο του Gras. Η ανάλυση μέσω της συνεπαγωγικής μεθόδου του Gras, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι μας δίνει έναν επιπλέον (ανεξάρτητο) τρόπο για τη διερεύνηση σχετικά με το βαθμό δυσκολίας των διαφόρων θεμάτων και το αν οι σχετικές υποθέσεις μας επαληθεύονται ή όχι.

Για την ανάλυση των δεδομένων, οι συμμετέχοντες της έρευνας μας κωδικοποιήθηκαν ανάλογα με το φύλο, το σχολείο και την πειραματική ομάδα ή την ομάδα ελέγχου στην οποία ανήκαν, τέλος για την κωδικοποίηση των θεμάτων σχετικά με τη διάταξη των κλασμάτων οι μεταβλητές που χρησιμοποιήθηκαν είναι:

- AV1, AV2, …, AV9: για τα θέματα διάταξης κλασμάτων στο τεστ A (θέματα 1~9).
- BV1, BV2, …, BV9: αντίστοιχα για τα θέματα στο τεστ B.
- CV1, CV2, …, CV9: για το τεστ C.

Κριτήρια βαθμολόγησης

Για τη διόρθωση των ερωτηματολογίων και την ανάλυση των δεδομένων προτάθηκε η κατηγοριοποίηση των απαντήσεων όπως φαίνεται παρακάτω:

0 → Λάθος απάντηση ή άρνηση-απουσία απάντησης

1 → Σωστή απάντηση

Σχετικά με την επιμέρους ανάλυση των απαντήσεων σε κάθε τεστ προτάθηκε η κατηγοριοποίηση των απαντήσεων όπως φαίνεται παρακάτω:

- **0** → Άρνηση-απουσία απάντησης
- **1** → Λάθος άσχετο με τη θεωρία μας
- **2** → Λάθος σε συμφωνία με τη θεωρία (όλα τα κλάσματα είναι μικρότερα της μονάδας)
- **3** → Λάθος σε συμφωνία με τη θεωρία (μεγαλύτερο είναι το κλάσμα με τους μικρότερους όρους)
- **4** → Λάθος σε συμφωνία με τη θεωρία (μεγαλύτερο είναι το κλάσμα με τους μεγαλύτερους όρους)
- **5** → Σωστή απάντηση

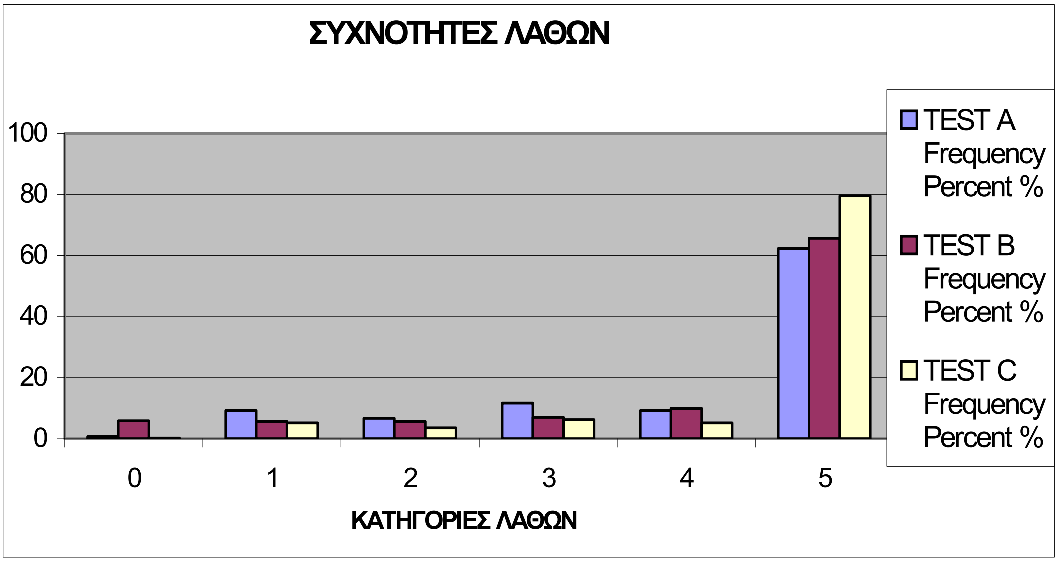
3.2 ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ ΤΟ SPSS

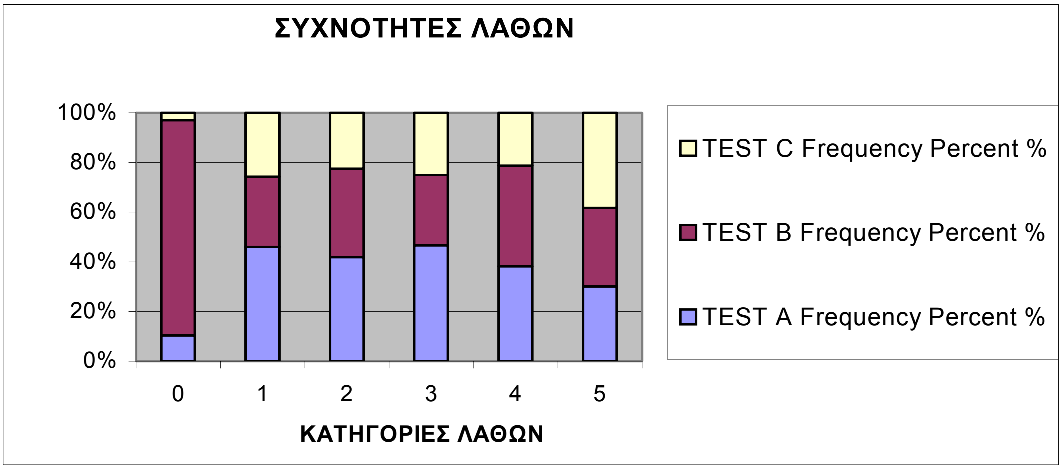
Αποτελέσματα σχετικά με τους τύπους λαθών σε κάθε τεστ

Το ποσοστό των απαντήσεων σε κάθε τεστ παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα (αναφερόμενοι γενικά στο σύνολο των μαθητών της έρευνας μας, χωρίς διάκριση ανά πειραματική ομάδα και ομάδα ελέγχου):

ΣΥΝΟΛΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

	ΤΕΣΤ A	**ΤΕΣΤ B**	**ΤΕΣΤ C**
Τύπος απάντησης	Ποσοστό	Ποσοστό	Ποσοστό
0	0,7 %	5,9 %	0,2 %
1	9,3 %	5,7 %	5,2 %
2	6,7 %	5,7 %	3,6 %
3	11,7 %	7,1 %	6,3 %
4	9,3 %	9,9 %	5,2 %
5	62,3 %	65,7 %	79,5 %
Σύνολο	100 %	100 %	100 %





- Σχολιάζοντας μπορούμε να πούμε σχετικά με την παρέμβαση μέσω της χρήσης εξωτερικών αναπαραστάσεων και λεκτικών εξηγήσεων στο τεστ B, γενικά για το σύνολο και των τριών πειραματικών ομάδων ότι, δημιούργησε κάποια σύγχυση στους μαθητές καθώς οδήγησε σε μια αύξηση του ποσοστού των θεμάτων στα οποία δεν δόθηκε καμιά απάντηση από 0,7% στο τεστ A σε 5,9% στο τεστ B το ποσοστό αυτό μειώθηκε και πάλι μετά τη παρέμβαση με τη διδασκαλία στο τεστ C σε 0,2%.

- Παρατηρήθηκε μείωση των άσχετων προς τη θεωρία μας λαθών από 9,3% στο τεστ A σε 5,7% στο τεστ B ενώ με τη παρέμβαση με τη διδασκαλία στο τεστ C δεν παρατηρήθηκε ουσιαστική διαφοροποίηση καθώς αυτό διαμορφώθηκε σε 5,2%.

- Μικρή ήταν η μείωση του ποσοστού των λαθών τύπου 2 από 6,7% στο τεστ A σε 5,7% στο τεστ B ενώ κάπως μεγαλύτερη μείωση είχαμε μετά διδασκαλία στο τεστ C καθώς αυτό διαμορφώθηκε σε 3,6%.

- Αξιοσημείωτη μείωση είχαμε στο ποσοστό των λαθών τύπου 3 από 11,7% στο τεστ A σε 7,1% στο τεστ B ενώ κάπως μικρότερη μείωση είχαμε μετά διδασκαλία στο τεστ C καθώς αυτό διαμορφώθηκε σε 6,3%.

- Αντίθετα μικρή άνοδος παρατηρήθηκε στο ποσοστό των λαθών τύπου 4 από 9,3% στο τεστ A σε 9,9% στο τεστ B ενώ ουσιαστική μείωση είχαμε μετά διδασκαλία στο τεστ C καθώς αυτό διαμορφώθηκε σε 5,2%.

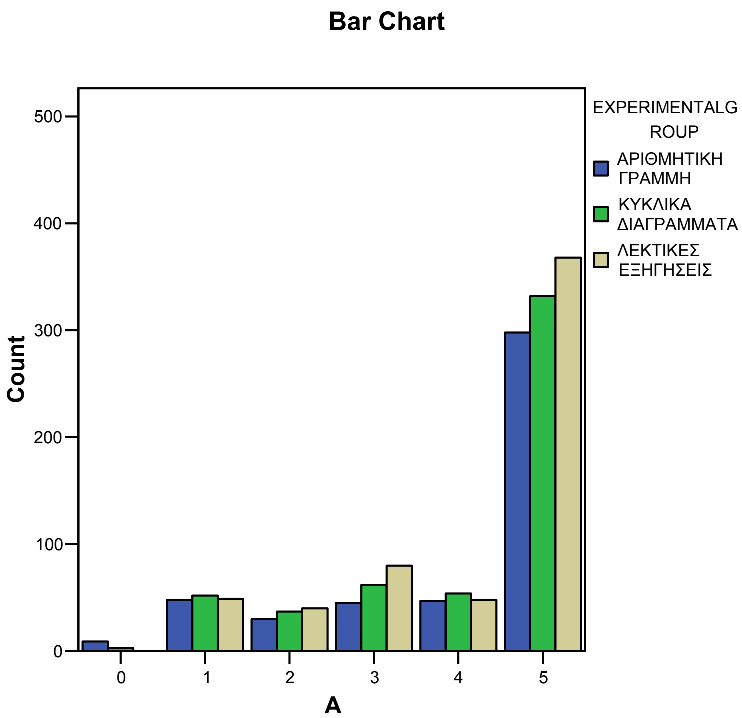
- Τέλος σχετικά με τις σωστές απαντήσεις (τύπος 5), μια μικρή αύξηση είχαμε στο τεστ B (από 62,3% στο τεστ A σε 65,7% στο τεστ B) και μεγαλύτερη άνοδο του ποσοστού είχαμε μετά διδασκαλία στο τεστ C καθώς αυτό διαμορφώθηκε σε 79,5%.

Αποτελέσματα σχετικά με τους τύπους λαθών, ανά τεστ, για κάθε πειραματική ομάδα και την ομάδα ελέγχου

Εξετάζοντας αρχικά, στο τεστ A, τους τύπους λαθών, με βάση την κατηγοριοποίηση των απαντήσεων (0, 1, 2, 3, 4, 5), που αναφέραμε πριν, έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

ΤΕΣΤ Α

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ						
ΤΕΣΤ	Τύπος απάντησης	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ			Σύνολο
		ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	
Α	0	9	3	0	12
	1	48	52	49	149
	2	30	37	40	107
	3	45	62	80	187
	4	47	54	48	149
	5	298	332	368	998
Σύνολο		477	540	585	1602



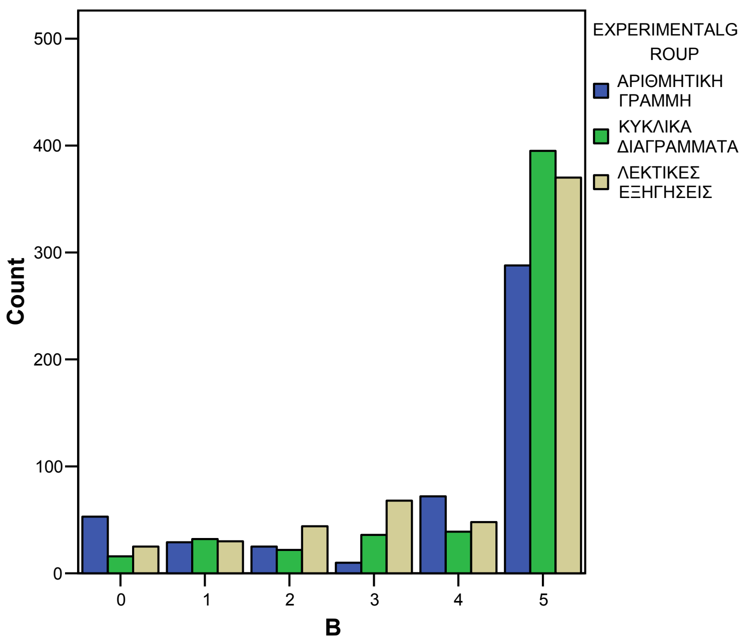
Το αντίστοιχο στατιστικό κριτήριο του τεστ χ^2 (βλέπε αναλυτικό πίνακα 3.1β στο Παράρτημα), μας δείχνει ότι η υπάρχει σχέση μεταξύ των τύπων των απαντήσεων που δίνει ένας μαθητής στο τεστ Α και της πειραματικής ομάδας στην οποία ανήκει, πράγματι έχουμε:

$\chi^2(10) = 19{,}313$, $p= 0{,}036$ η σχέση αυτή θα λέγαμε ότι είναι οριακά σημαντική, αντίθετα όπως θα δούμε στα τεστ Β και C, η σχέση αυτή εμφανίζεται πολύ πιο σημαντική.

Ομοίως για το τεστ Β με τις εξωτερικές αναπαραστάσεις και τις λεκτικές εξηγήσεις, έχουμε:

ΤΕΣΤ Β ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ					
ΤΕΣΤ	Τύπος απάντησης	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ			Σύνολο
		ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	
Β	0	53	16	25	94
	1	29	32	30	91
	2	25	22	44	91
	3	10	36	68	114
	4	72	39	48	159
	5	288	395	370	1053
Σύνολο		477	540	585	1602

Bar Chart

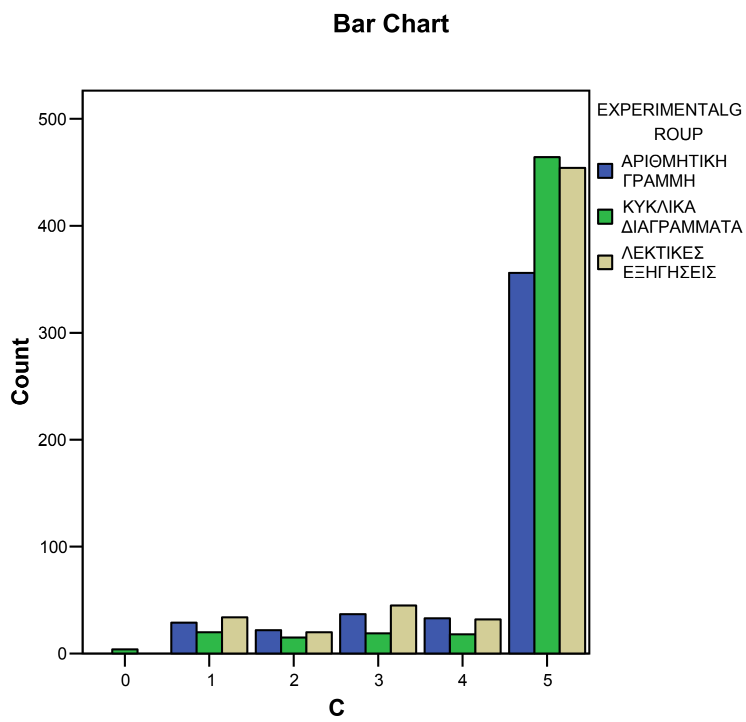


Το αντίστοιχο στατιστικό κριτήριο του τεστ χ^2 (βλέπε αναλυτικό πίνακα 3.2β στο Παράρτημα), μας δείχνει ότι η υπάρχει σημαντική σχέση μεταξύ των τύπων των απαντήσεων που δίνει ένας μαθητής στο τεστ Β και της πειραματικής ομάδας στην οποία ανήκει, πράγματι έχουμε:

$\chi^2\,(10) = 98{,}717$, p= 0,000

και τέλος για το τεστ C μετά την παρέμβαση μας (εξωτερικές αναπαραστάσεις, λεκτικές εξηγήσεις – διδασκαλία), έχουμε:

ΤΕΣΤ C ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ					
ΤΕΣΤ	Τύπος απάντησης	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ			Σύνολο
		ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	
C	**0**	0	4	0	4
	1	29	20	34	83
	2	22	15	20	57
	3	37	19	45	101
	4	33	18	32	83
	5	356	464	454	1274
Σύνολο		477	540	585	1602



Το αντίστοιχο στατιστικό κριτήριο του τεστ χ^2 (βλέπε αναλυτικό πίνακα 3.3β στο Παράρτημα), μας δείχνει ότι η υπάρχει σημαντική σχέση μεταξύ των τύπων των απαντήσεων που δίνει ένας μαθητής στο τεστ C και της πειραματικής ομάδας στην οποία ανήκει, πράγματι έχουμε:

$\chi^2\,(10) = 34{,}730$, p= 0,000

Όπως βλέπουμε, σχετικά με την ομάδα της αριθμητικής γραμμής έχουμε αύξηση των θεμάτων που δεν απαντήθηκαν (τύπος 1) στο Β τεστ. Γενικά μπορούμε να πούμε ότι τα άσχετα προς τη θεωρία μας λάθη (τύπος 2) μειώνονται με τη χρήση της αριθμογραμμής στο τεστ Β ενώ δεν υπάρχει κάποια περαιτέρω μεταβολή μετά τη διδασκαλία στο τεστ C. Τα λάθη τύπου 2 εμφανίζουν μικρή μείωση τόσο κατά το τεστ Β όσο και στο τεστ C. Στα λάθη τύπου 3 παρατηρείται εμφανή μείωση στο τεστ Β ενώ επανέρχονται σε λίγο χαμηλότερα επίπεδα (σε σχέση με το αρχικό τεστ Α) καθώς αυξάνονται στο τεστ C. Τα λάθη τύπου 4 αντίστροφα αυξάνονται στο τεστ Β με τη χρήση της αριθμογραμμής ενώ μειώνονται χαρακτηριστικά μετά τη διδασκαλία στο τεστ C. Τέλος οι σωστές απαντήσεις (τύπος 5) μετά τη μικρή μείωση στο τεστ Β (ενδεικτική της δυσκολίας από πλευράς μαθητών όσον αφορά τη χρήση της αριθμογραμμής) τελικά αυξάνονται μετά τη διδασκαλία στο τεστ C.

Στην ομάδα των κυκλικών διαγραμμάτων η εικόνα ήταν πιο ομοιόμορφη. Υπήρξε κι εδώ μια αύξηση των θεμάτων που δεν απαντήθηκαν (τύπος 1) στο Β τεστ αλλά σε πολύ μικρότερο βαθμό σε σχέση με την ομάδα της αριθμητικής γραμμής. Σχετικά με τα λάθη τύπου 2, 3, 4 υπήρξε ανάλογη μείωση τόσο κατά το τεστ Β με τη χρήση των κυκλικών διαγραμμάτων όσο και μετά τη διδασκαλία στο τεστ C. Οι σωστές απαντήσεις από την άλλη πλευρά ακολούθησαν αντίστοιχη αύξηση και στα δύο τελευταία τεστ.

Στην ομάδα των λεκτικών εξηγήσεων υπήρξε κι εδώ μια μικρή αύξηση των θεμάτων που δεν απαντήθηκαν (τύπος 1) στο τεστ Β (όπου ζητήθηκε από τους μαθητές να δικαιολογήσουν πρώτα τις συγκρίσεις τους και μετά να απαντήσουν), επίσης θα πρέπει να επισημάνουμε μια μικρή μείωση στο τεστ Β των άσχετων προς τη θεωρία μας λαθών (τύπος 1) τα οποία δεν εμφανίζουν κάποια περαιτέρω μεταβολή μετά τη διδασκαλία στο τεστ C. Σχετικά με τα λάθη τύπου 2, 3, και 4 μπορούμε να πούμε ότι γενικά δεν μεταβάλλονται κατά το τεστ Β με εξαίρεση μια μικρή μείωση των λαθών τύπου 3 ενώ μείωση εμφανίζουν μόνο μετά τη διδασκαλία στο τεστ C. Αντίστοιχα δεν μεταβάλλονται ούτε οι σωστές απαντήσεις κατά το τεστ Β, οι οποίες αυξάνονται μόνο μετά τη διδασκαλία στο τεστ C. Τέλος η συμπεριφορά της ομάδας ελέγχου ήταν η αναμενόμενη καθώς δεν υπήρχε καμιά μεταβολή μεταξύ των τεστ Α και C καθώς όπως αναφέραμε δεν υπήρξε κάποια ενδιάμεσα διδακτική παρέμβαση.

Εστιάζοντας στην κάθε ομάδα ξεχωριστά

Από την επιμέρους ανάλυση των αποτελεσμάτων σε κάθε τεστ με βάση την κατηγοριοποίηση των απαντήσεων (0, 1, 2, 3, 4, 5) για κάθε πειραματική ομάδα, μια πρώτη εικόνα που έχουμε με τη βοήθεια των αντίστοιχων ραβδογραμμάτων συχνοτήτων είναι ότι:

Η χρήση αναπαραστάσεων και λεκτικών εξηγήσεων προκάλεσε σύγχυση στους μαθητές και των τριών πειραματικών ομάδων όπως φαίνεται από την αύξηση του ποσοστού των θεμάτων στα οποία δεν δόθηκε καμιά απάντηση και ιδιαίτερα στην ομάδα των μαθητών με την αριθμητική γραμμή όπου το πρόβλημα ήταν ακόμη μεγαλύτερο (συχνότητα 1,9% στο τεστ Α και 11,1% στο τεστ Β με την αριθμογραμμή).

Τα λάθη τύπου 1 (άσχετα προς τη θεωρία μας) αρχικά στο τεστ Α δεν διαφοροποιούνται μεταξύ των τριών πειραματικών ομάδων, στην συνέχεια στο τεστ Β (χρήση αναπαραστάσεων και λεκτικών εξηγήσεων) υπήρξε συνολικά μείωση των άσχετων λαθών χωρίς αυτά και πάλι να διαφοροποιούνται μεταξύ των τριών πειραματικών ομάδων, ενώ στο τεστ C δεν παρατηρείται κάποια αλλαγή παρά μόνο μια μικρή μείωση στην ομάδα των κυκλικών διαγραμμάτων.

Σχετικά με τα λάθη τύπου 2 στο τεστ Β, έχουμε μικρή μείωση στην ομάδα της αριθμητικής γραμμής (ποσοστό μεταβολής 16,6%), μεγαλύτερη μείωση έχουμε στην ομάδα των κυκλικών διαγραμμάτων (40,5%) ενώ μικρή αύξηση έχουμε στην ομάδα των λεκτικών εξηγήσεων (10%), στην συνέχεια μετά τη διδασκαλία στο τεστ C μεγαλύτερη μείωση (αντίθετα με το τεστ Β) έχουμε στην ομάδα των λεκτικών εξηγήσεων (54,5%), μείωση έχουμε και στην ομάδα των κυκλικών διαγραμμάτων (31,8%) και ακόμη μικρότερη μείωση στην ομάδα της αριθμητικής γραμμής (12%) .

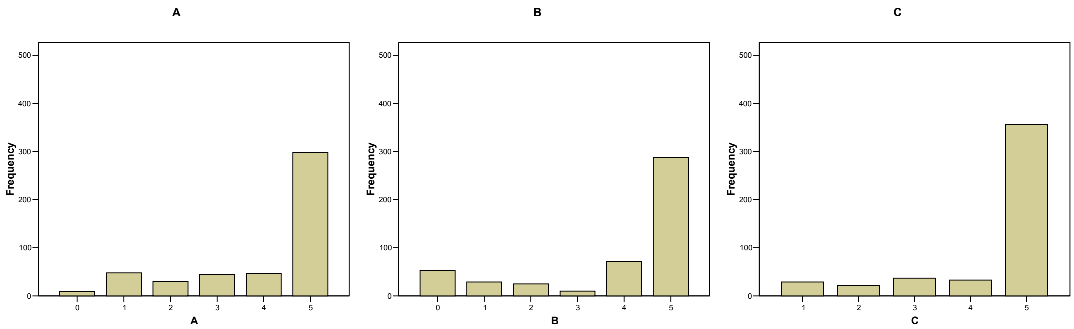
Στα λάθη τύπου 3, χαρακτηριστική είναι η μείωση στην ομάδα της αριθμητικής γραμμής (μεταβολή 77,7%, διαφορά ποσοστού 7,3%), μείωση έχουμε επίσης και στην ομάδα των κυκλικών διαγραμμάτων (41,9%) και μικρότερη μείωση (15%) έχουμε στην ομάδα των λεκτικών εξηγήσεων, στην συνέχεια μετά τη διδασκαλία στο τεστ C έχουμε θεαματική άνοδο των λαθών τύπου 3 στην ομάδα της αριθμητικής γραμμής (σχεδόν τετραπλασιάζονται), ενώ στις άλλες δυο πειραματικές ομάδες έχουμε μείωση (47,2% στην ομάδα των κυκλικών διαγραμμάτων και 33,8% στην ομάδα των λεκτικών εξηγήσεων).

Στα λάθη τύπου 4, χαρακτηριστική είναι η αντίστοιχη αύξηση στην ομάδα της αριθμητικής γραμμής (μεταβολή 53,2%, διαφορά ποσοστού 5,2%), μείωση έχουμε και εδώ από την ομάδα των κυκλικών διαγραμμάτων (27,7%) ενώ καμιά αλλαγή δεν παρατηρείται στην ομάδα των λεκτικών εξηγήσεων, στην συνέχεια μετά τη διδασκαλία στο τεστ C έχουμε μείωση των λαθών σχεδόν στο μισό για τις δυο πρώτες πειραματικές ομάδες (μεταβολή 54,1%, διαφορά ποσοστού 8,2% στην ομάδα της αριθμητικής γραμμής και 53,8% στην ομάδα των κυκλικών διαγραμμάτων) και κάπως μικρότερη μείωση (33,3%) στην ομάδα των λεκτικών εξηγήσεων.
Θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ σχετικά με την πειραματική ομάδα της αριθμητικής γραμμής ότι η ισορροπία μεταξύ του αριθμού των λαθών τύπου 3 και 4 (45 λάθη τύπου 3 και 47 λάθη τύπου 4) στο τεστ A, επανέρχεται (μετά την έντονη διακύμανση στο τεστ B που επισημάναμε προηγουμένως όπου είχαμε 10 λάθη τύπου 3 και 72 λάθη τύπου 4) στο τεστ C σε χαμηλότερα επίπεδα καθώς γενικά έχουμε μείωση του συνόλου των λαθών και των δυο τύπων (37 λάθη τύπου 3 και 33 λάθη τύπου 4).

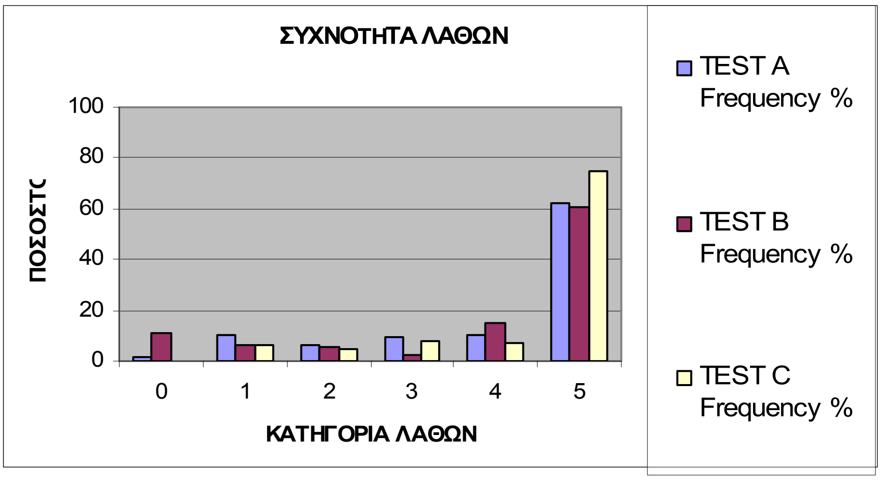
Σχετικά με τις σωστές απαντήσεις (τύπος 5) έχουμε να παρατηρήσουμε στο τεστ B, μικρή μείωση (3,3%) στην ομάδα της αριθμητικής γραμμής, ενώ αύξηση (18,9%) έχουμε στην ομάδα των κυκλικών διαγραμμάτων ενώ καμιά αλλαγή πάλι δεν παρατηρείται στην ομάδα των λεκτικών εξηγήσεων στην συνέχεια μετά τη διδασκαλία παρατηρούμε βελτίωση (περίπου στον ίδιο βαθμό) και για τις τρεις πειραματικές ομάδες, έτσι στο τεστ C έχουμε τελικά αύξηση του αριθμού των σωστών απαντήσεων στην ομάδα της αριθμητικής γραμμής (23,6%) όπως και στην ομάδα των λεκτικών εξηγήσεων (22,7%) και επιπλέον αύξηση (17,4%) στην ομάδα των κυκλικών διαγραμμάτων.

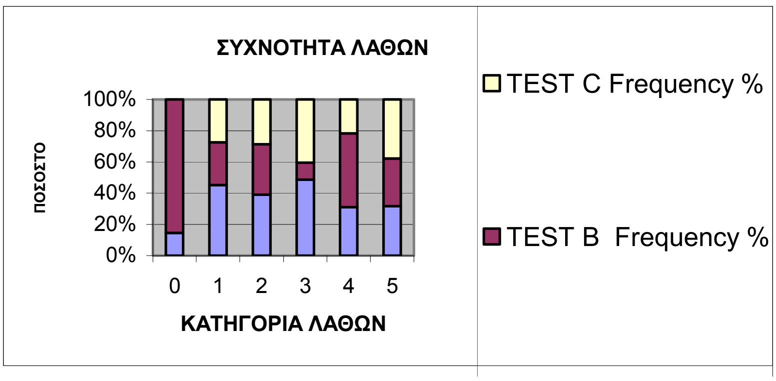
Στην συνέχεια παραθέτουμε για κάθε πειραματική ομάδα ξεχωριστά τα αντίστοιχα ραβδογράμματα όπου φαίνονται οι παραπάνω διακυμάνσεις

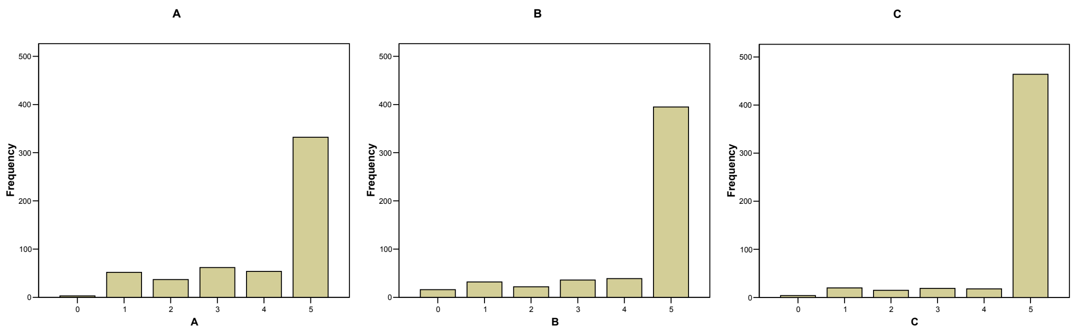
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ



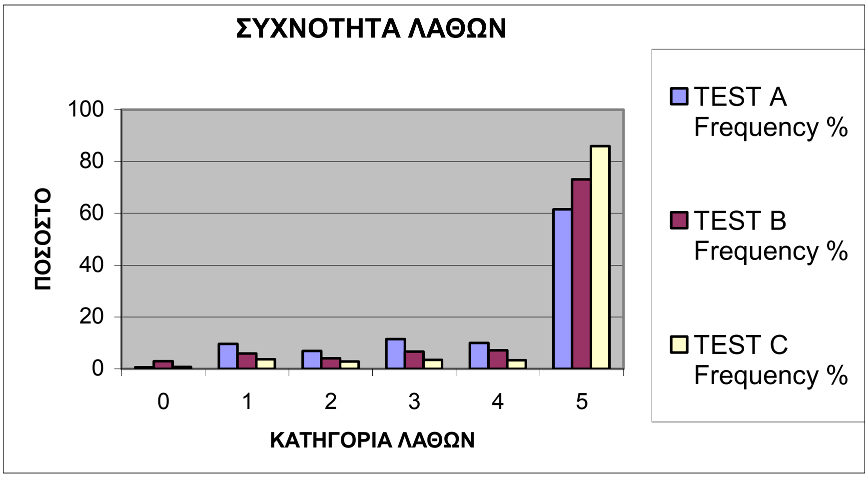
	ΤΕΣΤ A	ΤΕΣΤ B	ΤΕΣΤ C
ΤΥΠΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ	Ποσοστό %	Ποσοστό %	Ποσοστό %
0	1,9	11,1	0
1	10,1	6,1	6,1
2	6,3	5,2	4,6
3	9,4	2,1	7,8
4	9,9	15,1	6,9
5	62,5	60,4	74,6

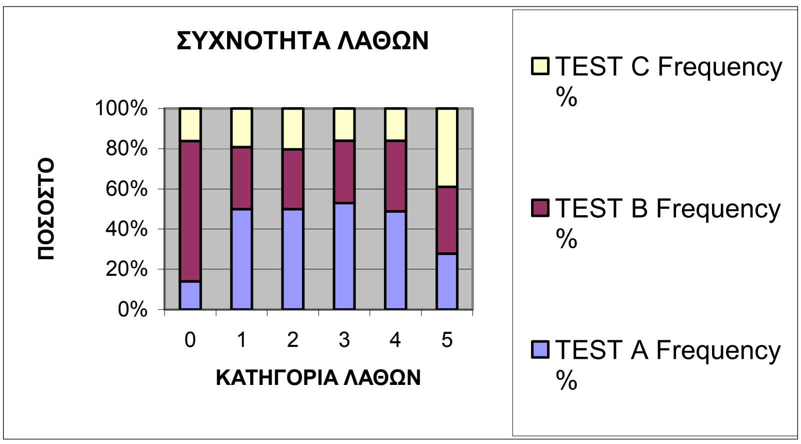


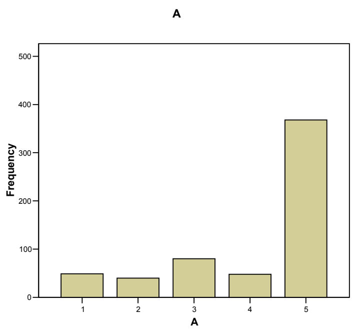


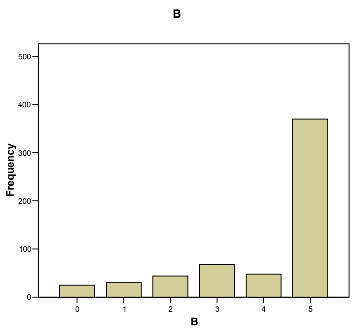


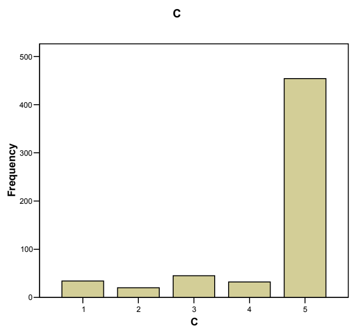
	ΤΕΣΤ A	ΤΕΣΤ B	ΤΕΣΤ C
ΤΥΠΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ	Ποσοστό %	Ποσοστό %	Ποσοστό %
0	0,6	3	0,7
1	9,6	5,9	3,7
2	6,9	4,1	2,8
3	11,5	6,7	3,5
4	10	7,2	3,3
5	61,5	73,1	85,9



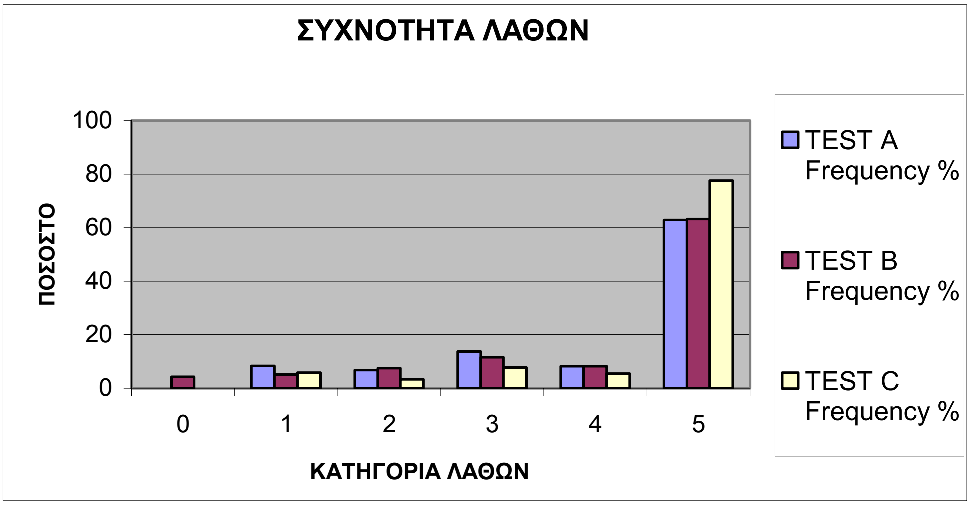


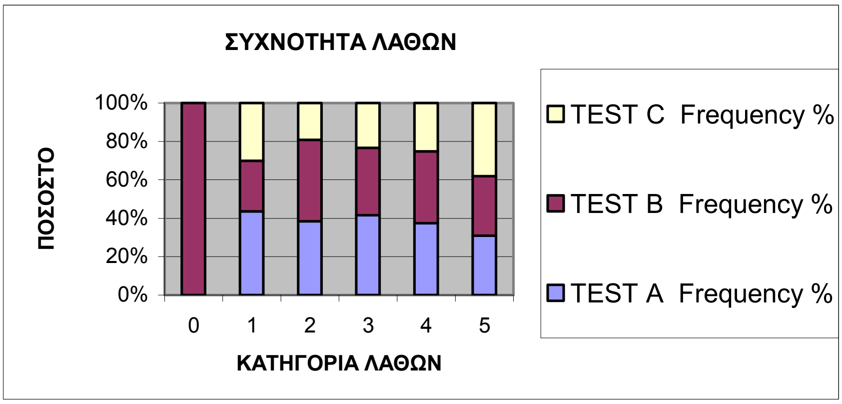


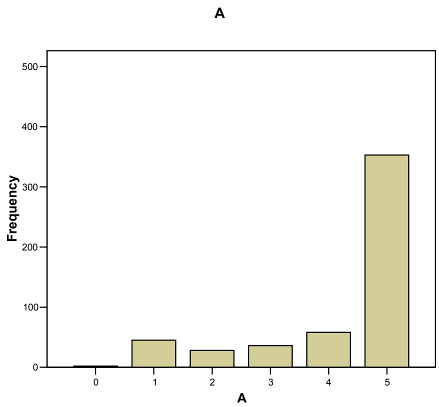


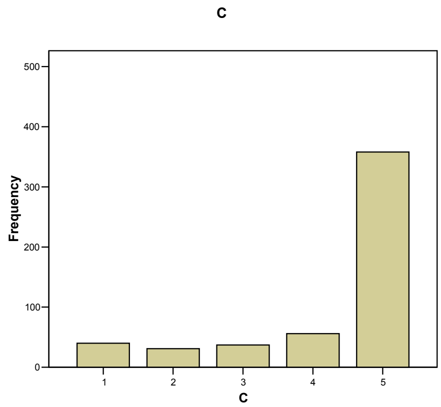


	ΤΕΣΤ A	ΤΕΣΤ B	ΤΕΣΤ C
ΤΥΠΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ	Ποσοστό %	Ποσοστό %	Ποσοστό %
0	0	4,3	0
1	8,4	5,1	5,8
2	6,8	7,5	3,4
3	13,7	11,6	7,7
4	8,2	8,2	5,5
5	62,9	63,2	77,6

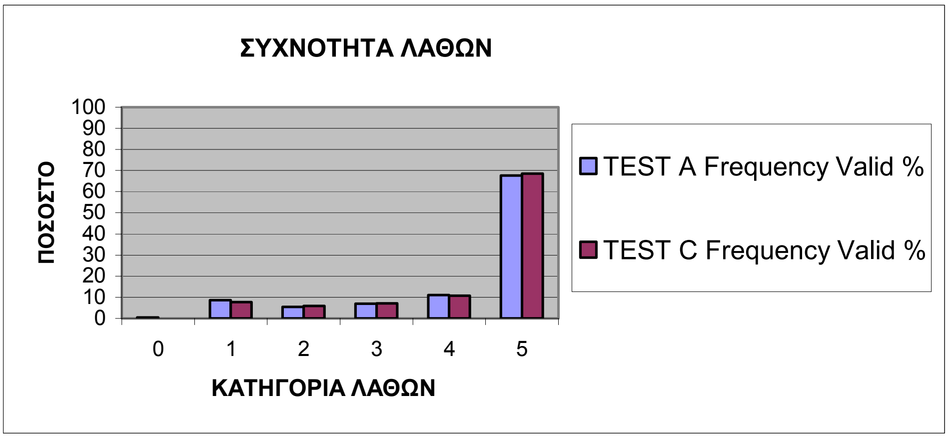


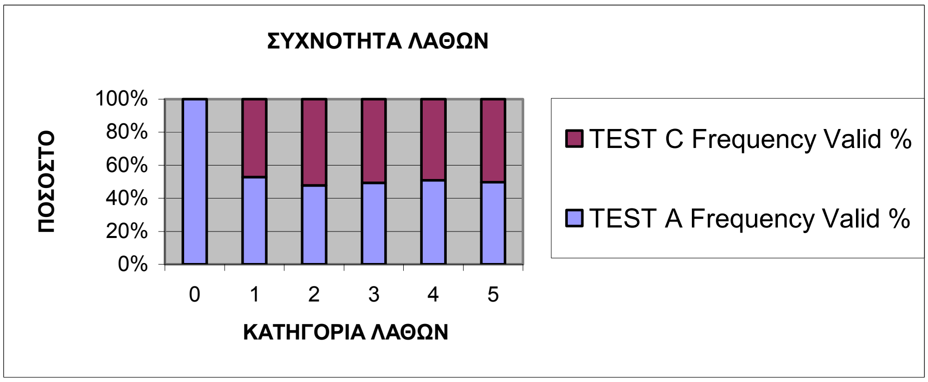






	ΤΕΣΤ A	ΤΕΣΤ C
ΤΥΠΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ	Ποσοστό %	Ποσοστό %
0	0,4	0
1	8,6	7,7
2	5,4	5,9
3	6,9	7,1
4	11,1	10,7
5	67,6	68,6





Αποτελέσματα σχετικά με τις πειραματικές ομάδες και την ομάδα ελέγχου

Εξετάζοντας λοιπόν, την επίδραση των εξωτερικών αναπαραστάσεων (αριθμ. γραμμή και κυκλ. διαγράμματα) και της αυτοεξήγησης (μέσω των λεκτικών εξηγήσεων), μια πρώτη εικόνα σχετικά με το ποσοστό των σωστών απαντήσεων των θεμάτων από τους μαθητές, που έχουμε απλά και με χρήση των στατιστικών του Excel (η οποία όπως θα δούμε αμέσως μετά επιβεβαιώνεται στην συνέχεια κατά την στατιστική επεξεργασία των δεδομένων με το SPSS και το Gras) είναι η εξής:

Σχετικά με τις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών μπορούμε να πούμε ότι, αρχικά οι επιδόσεις τους στο τεστ Α (προέλεγχος) φανερώνουν ότι η έννοια του κλάσματος και η διάταξη των κλασμάτων (που θα ’πρεπε να είναι γνωστές στην ΣΤ΄ τάξη του Δημοτικού), εξακολουθούν να δημιουργούν προβλήματα (συνολικό ποσοστό επιτυχίας στο τεστ Α από τις τρεις πειραματικές ομάδες 62% και 68% από τη μονάδα ελέγχου).

Ειδικότερα σχετικά με τη χρήση αναπαραστάσεων και λεκτικών εξηγήσεων, στο τεστ Β παρατηρούμε ότι:

- Η χρήση της αριθμητικής γραμμής όχι μόνο δεν βοήθησε τους μαθητές αλλά μάλλον επιδείνωσε το πρόβλημα καθώς συνολικά οδήγησε και σε μια μικρή πτώση του ποσοστού επιτυχίας κατά 2%.

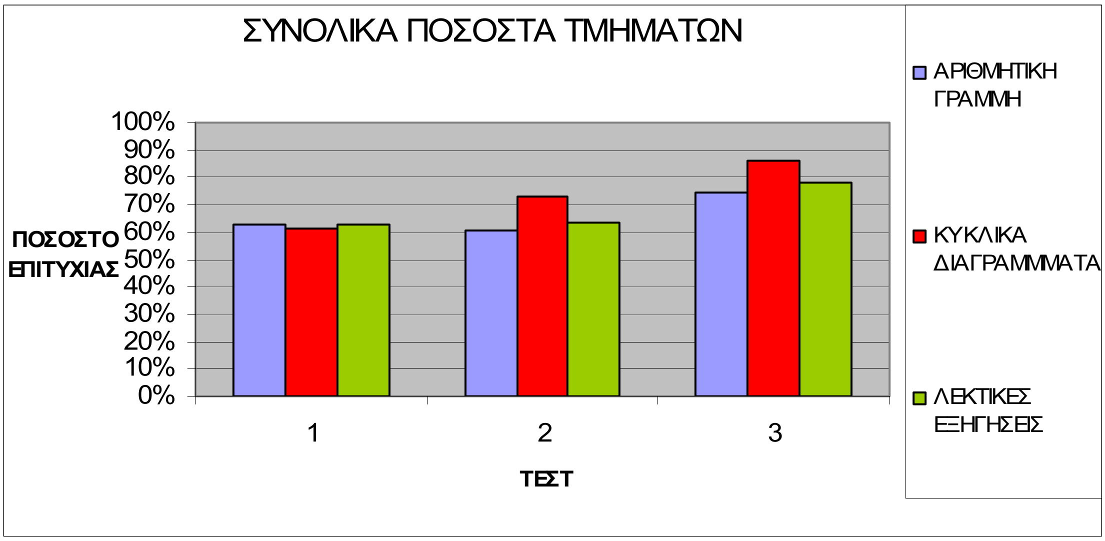
- Αντίθετα η χρήση κυκλικών διαγραμμάτων οδήγησε σε διόρθωση κάποιων λαθών στις προηγούμενες αντιλήψεις των μαθητών, με αποτέλεσμα στις απαντήσεις των αντίστοιχων θεμάτων στο τεστ Β να έχουμε μια βελτίωση του ποσοστού επιτυχίας κατά 12%.

- Η χρήση λεκτικών εξηγήσεων πάλι δεν φάνηκε να έχει κάποια ουσιαστική επίδραση σχετικά με τις προϋπάρχουσες αντιλήψεις των μαθητών καθώς δεν υπήρξε καμιά μεταβολή (0%) στο ποσοστό των επιτυχών απαντήσεων τους.

- Σχετικά με τη διδακτική παρέμβαση που κάναμε μέσω της διδασκαλίας πριν από το τεστ C μπορούμε να πούμε ότι η επίδραση της ήταν θετική και για τις τρεις πειραματικές ομάδες και μάλιστα στον ίδιο βαθμό:

Παρατηρήθηκε βελτίωση του ποσοστού επιτυχίας κατά 14% στην πειραματική ομάδα της αριθμητικής γραμμής, κατά 13% για την αντίστοιχη ομάδα των κυκλικών διαγραμμάτων και κατά 14% για την ομάδα των λεκτικών εξηγήσεων. Τέλος θα πρέπει να σημειωθεί ότι η συμπεριφορά της ομάδας ελέγχου ήταν η αναμενόμενη καθώς δεν παρατηρήθηκε αξιοσημείωτη διαφορά (1%) μεταξύ των επιδόσεων στο τεστ A (pre-test) και του τεστ C (post-test). Παρακάτω δίνουμε τον σχετικό πίνακα που παρουσιάζει συνοπτικά το ποσοστό των σωστών απαντήσεων των θεμάτων από τους μαθητές σε κάθε πειραματική ομάδα για κάθε ένα από τα 3 τεστ (τεστ A, τεστ B, τεστ C):

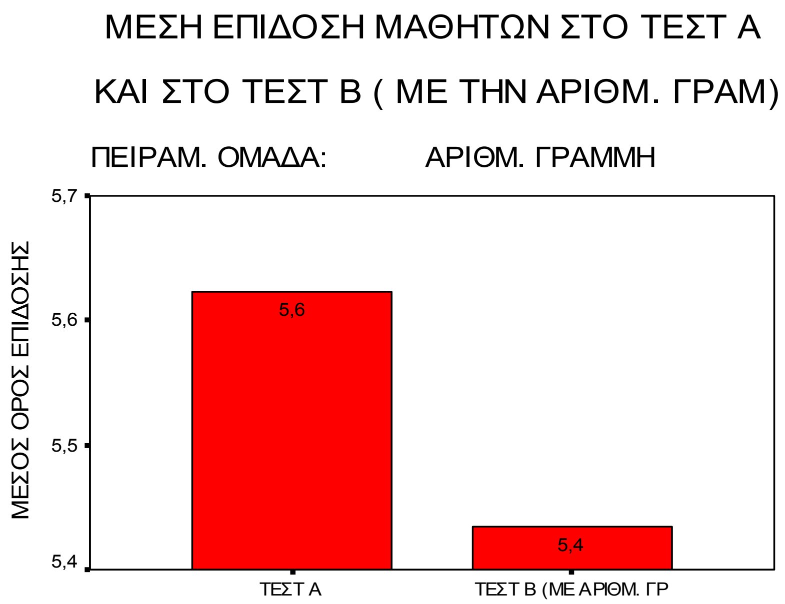
ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΣΕ ΚΑΘΕ ΤΕΣΤ ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ



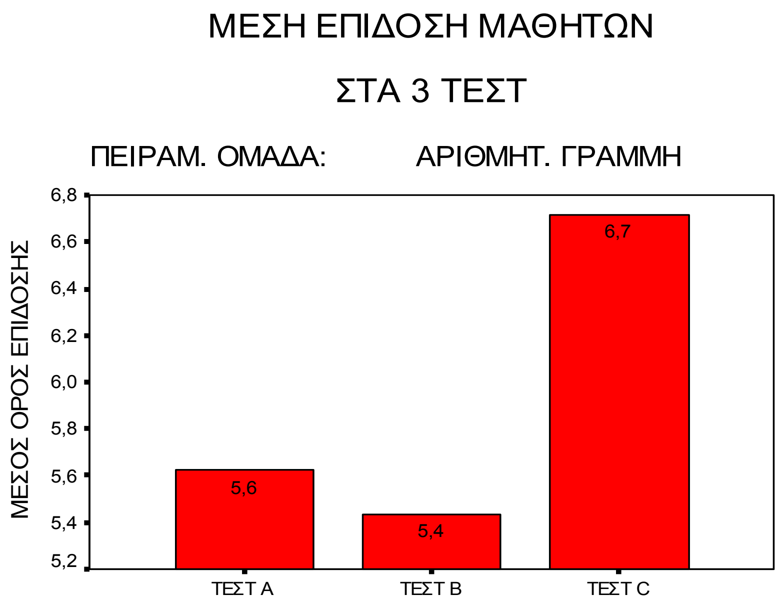
Προχωρώντας τώρα σε ανάλυση διακύμανσης (επαναληπτικών μετρήσεων) μέσω του SPSS, η εικόνα της συμπεριφοράς των διαφόρων πειραματικών ομάδων είναι σαφής αλλά επίσης και πειστική από πλευράς στατιστικής σημαντικότητας, των όσων παρατηρήσαμε μέχρι τώρα. Πράγματι, συγκρίνοντας τη συνολική επίδοση του κάθε μαθητή σε κάθε ένα από τα τρία τεστ εστιάζοντας στη μέση επίδοση (9 θέματα-διακύμανση επίδοσης 1~9) των 2 πειραματικών ομάδων με τις εξωτερικές αναπαραστάσεις (αριθμ. γραμμή και κυκλ. διαγράμματα), έχουμε:

Για την αριθμητική γραμμή:

Πραγματοποιήθηκε ανάλυση διακύμανσης (βλέπε πλήρη πίνακα 3.4β της στατιστικής ανάλυσης στο Παράρτημα), σύμφωνα με την οποία έχουμε:



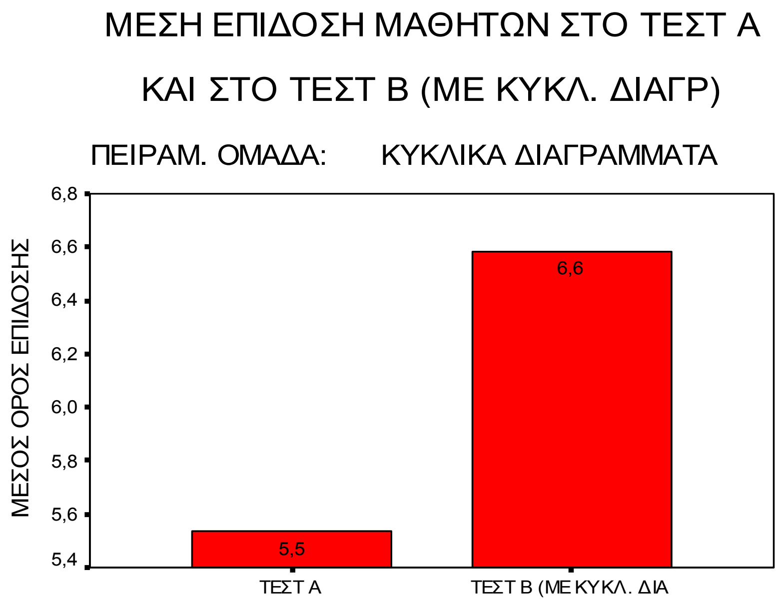
F (1,52) = 486,291 $p<0{,}001$ αυτό σημαίνει ότι πράγματι η διαφορά των μέσων όρων επίδοσης στα δύο τεστ είναι στατιστικά σημαντική. Ομοίως εξετάζοντας τη μέση επίδοση στα τρία τεστ, για την πειραματική ομάδα της αριθμητικής γραμμής (βλ. πίνακα 3.5β στο Παράρτημα), έχουμε:



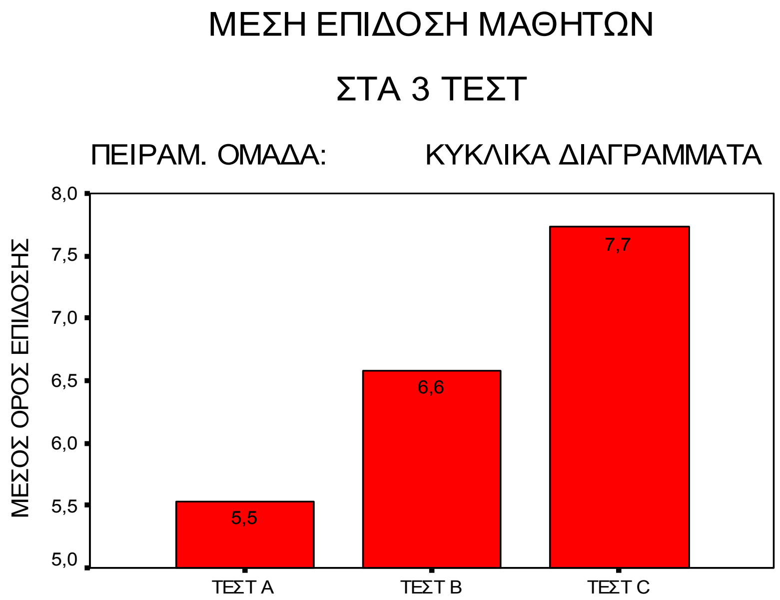
F (2,52) = 9,387 $p<0{,}001$, επίσης σημαντική.

Για τα κυκλικά διαγράμματα:

Ομοίως, η ανάλυση διακύμανσης έδωσε τα εξής αποτελέσματα (βλ. πίνακα 3.6β στο Παράρτημα):



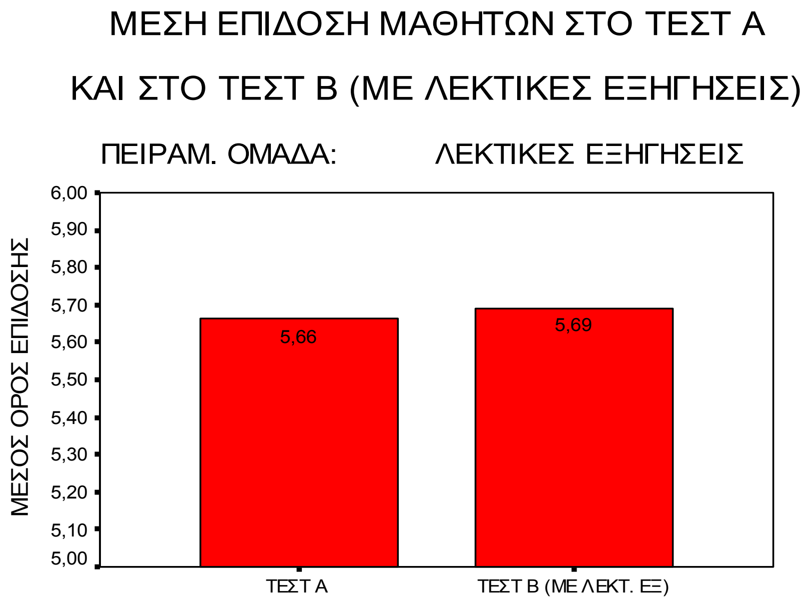
F (1,59) = 22,844 p<0,001, και άρα η διαφορά των μέσων όρων επίδοσης στα δύο τεστ είναι στατιστικά σημαντική. Ομοίως εξετάζοντας τη μέση επίδοση στα τρία τεστ, για την πειραματική ομάδα των κυκλικών διαγραμμάτων (βλ. πίνακα 3.7β στο Παράρτημα), έχουμε:



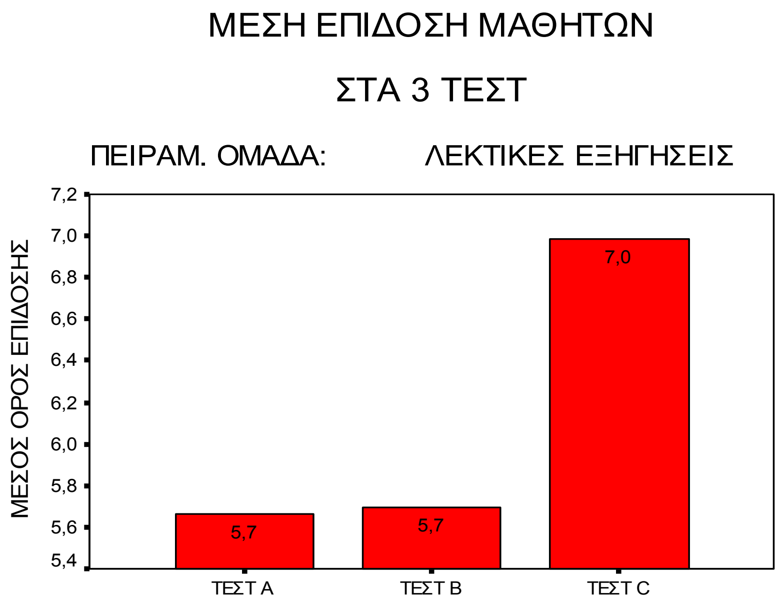
F (2,59) = 38,265 p<0,001, επίσης σημαντική.

Για τις λεκτικές εξηγήσεις:

Ομοίως, η ανάλυση διακύμανσης έδωσε τα εξής αποτελέσματα (βλ. πίνακα 3.8β στο Παράρτημα):



F (1,64) = 0,021   p=0,887, άρα μη σημαντική η διαφορά των μέσων όρων επίδοσης στα δύο τεστ. Ομοίως εξετάζοντας τη μέση επίδοση στα τρία τεστ, για την πειραματική ομάδα των λεκτικών εξηγήσεων(βλ. πίνακα 3.9β στο Παράρτημα), έχουμε:

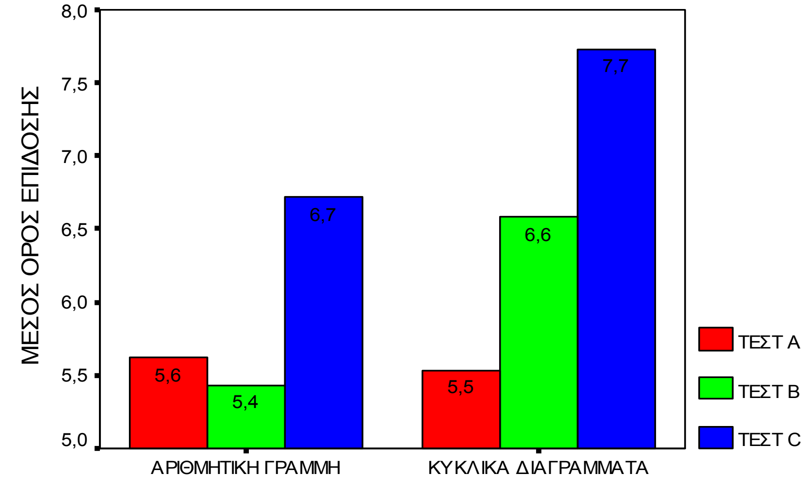


F (2,64) = 21,514   p<0,001, στατιστικά σημαντική (βλέπουμε ότι η διδασκαλία είναι αυτή που οδηγεί σε σημαντική διαφορά των μέσων όρων επίδοσης.

Ομοίως η ανάλυση διακύμανσης, για τα τρία τεστ, εστιάζοντας στις δύο πειραματικές ομάδες των εξωτερικών αναπαραστάσεων (αριθμ. γραμμή και κυκλ. διαγράμματα), δίνει τα εξής αποτελέσματα (βλ. πίνακα 3.10β στο Παράρτημα):

ΜΕΣΗ ΕΠΙΔΟΣΗ ΜΑΘΗΤΩΝ

ΣΤΑ 3 ΤΕΣΤ

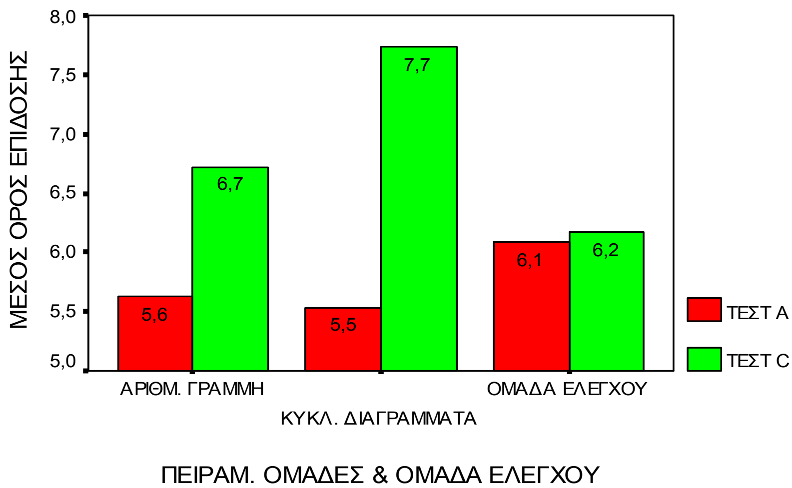


F (1,111) = 57,642   p<0,001, στατιστικά σημαντική.

Σχετικά με τις επιδόσεις στο τεστ A αρχικά και στο τεστ C στο τέλος της όλης παρέμβασης μας (εξωτερικές αναπαραστάσεις και αντίστοιχη διδασκαλία) , εστιάζοντας στις 2 πειραματικές ομάδες με τις εξωτερικές αναπαραστάσεις καθώς επίσης και της ομάδας ελέγχου, (βλέπε πλήρη πίνακα 3.11β στο Παράρτημα), έχουμε:

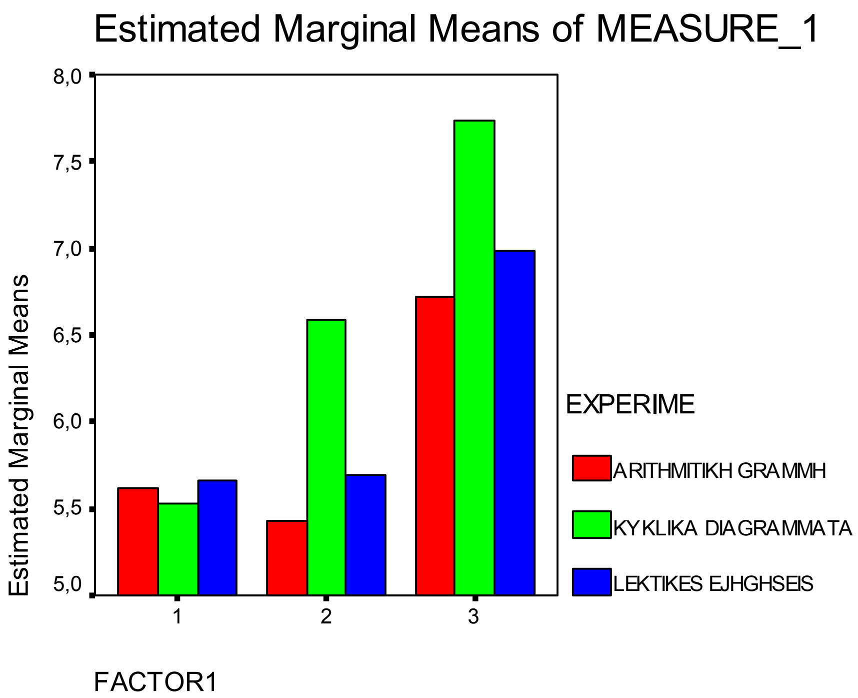
ΜΕΣΗ ΕΠΙΔΟΣΗ ΜΑΘΗΤΩΝ

ΣΤΟ ΤΕΣΤ A ΚΑΙ ΣΤΟ ΤΕΣΤ C



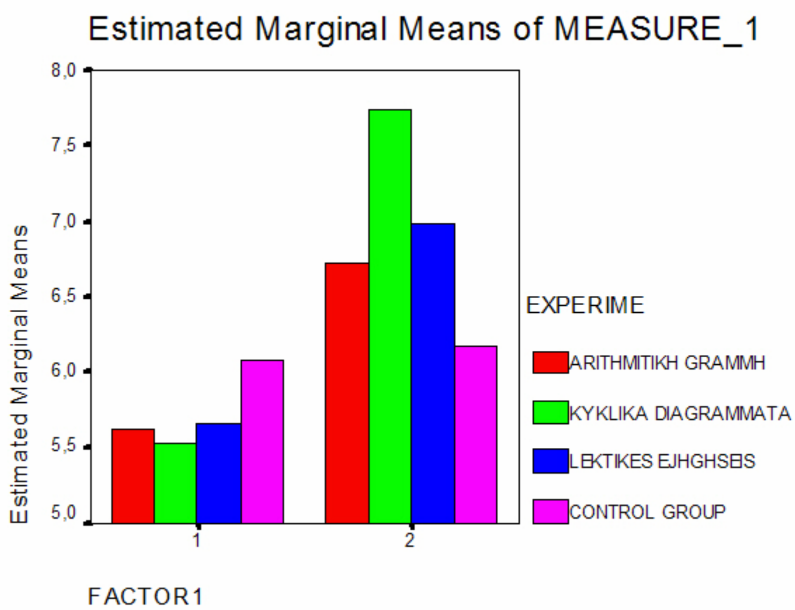
F (1,168) = 53,919   p<0,001, στατιστικά σημαντική

Συμπεριλαμβάνοντας και την πειραματική ομάδα των λεκτικών εξηγήσεων στην ανάλυση διακύμανσης(βλέπε πίνακα 3.12β στο Παράρτημα), έχουμε:



F (1,175) = 85,567   p<0,001, στατιστικά σημαντική.

Ομοίως, συγκρίνοντας τώρα την συνολική επίδοση του κάθε μαθητή για κάθε πειραματική ομάδα και την ομάδα ελέγχου, και εστιάζοντας στην αρχική επίδοση στο τεστ Α και στην τελική επίδοση στο τεστ C (βλέπε πίνακα 3.13β στο Παράρτημα), πράγματι έχουμε:



F (1,232) = 79,863   p<0,001, στατιστικά σημαντική.

Στατιστική ανάλυση (t-test) της μέσης επίδοσης σε κάθε τεστ για κάθε πειραματική ομάδα

Συγκρίνοντας με τη βοήθεια του στατιστικού κριτηρίου t-test, σχετικά με την επιτυχία σε κάθε τεστ (στο σύνολο των ερωτήσεων) για κάθε πειραματική ομάδα χωριστά καθώς επίσης και για την ομάδα ελέγχου, διαπιστώνουμε με τη βοήθεια των αντίστοιχων πινάκων (πίνακες 3.14β και 3.15β στο Παράρτημα), ότι σχετικά με την μέση επίδοση σε κάθε τεστ, τα αποτελέσματα έχουν ως εξής:

Για την πειραματική ομάδα της αριθμητικής γραμμής έχουμε αρχικά μία επιδείνωση (αν και όχι τόσο σημαντική από πλευράς στατιστικής βεβαιότητας) ως προς τα αποτελέσματα καθώς πάμε από το τεστ A στο τεστ B (η χρήση της αριθμητικής γραμμής μάλλον δυσκολεύει τους μαθητές), ενώ μετά τη διδασκαλία όπως βλέπουμε κατά τη μετάβαση από το τεστ B στο τεστ C έχουμε σημαντική (στατιστικά) βελτίωση κάτι που οδηγεί και σε μια θετική εικόνα συγκρίνοντας τα αποτελεσματα στο τεστ A με τα αντίστοιχα στο τεστ C, όπου έχουμε επίσης σημαντική βελτίωση.

Για τις άλλες δύο πειραματικές ομάδες, των κυκλικών διαγραμμάτων και των λεκτικών εξηγήσεων η εικόνα είναι πιο καλή καθώς η βελτίωση είναι φανερή (και στατιστικά σημαντική, με εξαίρεση τη βελτίωση στην ομάδα των λεκτικών εξηγήσεων κατά τη μετάβαση από το τεστ A στο τεστ B η οποία δεν είναι και τόσο σημαντική) τόσο κατά τη μετάβαση από το τεστ A στο τεστ C, όσο και συγκριτικά μεταξύ του τεστ A και του τεστ C.

Τέλος για την ομάδα ελέγχου έχουμε κάποια βελτίωση μεταξύ των τεστ A και C, ωστόσο βλέπουμε ότι αυτή δεν είναι στατιστικά σημαντική.

Στην συνέχεια εξετάζουμε την μεταβολή του ποσοστού επιτυχίας, για κάθε ερώτηση χωριστά κατά τη μετάβαση από το ένα τεστ στο άλλο, στο σύνολο των μαθητών (χωρίς διάκριση ανά πειραματική ομάδα), ώστε να σχηματίσουμε μια πρώτη γενική εικόνα, βλέπουμε τα εξής:

Η εικόνα σχετικά με τα αποτελέσματα των μαθητών κατά τη μετάβαση από το τεστ A στο τεστ B είναι μικτή καθώς στις ερωτήσεις V1, V3, V4, V5, V7 και V9 φαίνεται να

έχουμε βελτίωση του ποσοστού των μαθητών που απαντούν σωστά, ενώ στις ερωτήσεις V2, V6 και V8 έχουμε επιδείνωση των αποτελεσμάτων.
Η εικόνα αυτή καθιστά αναγκαία μια πιο αναλυτική διερεύνηση της μεταβολής του ποσοστού επιτυχίας για κάθε ερώτηση χωριστά κατά τη μετάβαση από το ένα τεστ στο άλλο από τους μαθητές της κάθε πειραματικής ομάδας χωριστά. Από την άλλη βλέπουμε ότι η διδασκαλία είχε εμφανώς θετικά απότελέσματα καθώς κατά τη μετάβαση από το τεστ B στο τεστ C (κάτι που αντανακλάται και στην σύγκριση των τεστ A και C) έχουμε βελτίωση του ποσοστού επιτυχίας για κάθε ερώτηση, με μόνη εξαίρεση την ερώτηση V1 όπου είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι έχουμε επιδείνωση μετά τη διδασκαλία.

Εξετάζοντας λοιπόν την απόδοση των μαθητών για κάθε πειραματική ομάδα και για την ομάδα ελέγχου σε κάθε ερώτηση χωριστά, μπορούμε να δούμε συνοπτικά τα αποτελέσματα για τα τρία τεστ χρησιμοποιώντας τους παρακάτω πίνακες. Στους πίνακες αυτούς σημειώνουμε με το πρόσημο + τα θέματα όπου υπήρξε αύξηση του ποσοστού επιτυχίας και αντίστοιχα με αρνητικό πρόσημο – όπου είχαμε επιδείνωση των αποτελεσμάτων των μαθητών, επίσης τονίζουμε με χρωματική επισήμανση τις σημαντικές μεταβολές.
Με βάση λοιπόν τα αποτελέσματα, έχουμε την εξής εικόνα:

	A→B			B→C			A→C		
	Αριθμ. Γραμμ.	Κυκλ. Διαγ.	Λεκτ. Εξηγ.	Αριθμ γραμμ	Κυκλ. Διαγ.	Λεκτ. Εξηγ.	Αριθμ γραμμ	Κυκλ. Διαγ.	Λεκτ. Εξηγ.
V1.) $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$	—	+	+	—	—	—	—	+	+
V2.) $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{3}$	—	+	+	+	+	+	+	+	+
V3.) $\frac{4}{5}$ $\frac{8}{10}$	—	+	+	+	+	+	+	+	+
V4.) $\frac{2}{3}$ $\frac{7}{9}$	+	—	0	—	+	+	+	+	+
V5.) $\frac{4}{7}$ $\frac{2}{5}$	+	+	+	—	+	+	+	+	+
V6.) $\frac{3}{2}$ $\frac{8}{10}$	—	+	—	+	+	+	+	+	0

V7.) $\frac{6}{7}$ 1	—	+	+	+	—	0	+	+	+
V8.) $\frac{5}{4}$ 1	—	+		+	+	+	+	+	+
V9.) $\frac{7}{4}$ $1\frac{3}{4}$	+	+	—	+	+	+	+	+	+

Με βάση τον παραπάνω βοηθητικό πίνακα μπορούμε γρήγορα κάνουμε κάποιες διαπιστώσεις όπως: πρώτα απ' όλα η χρήση αριθμητικής γραμμής οδήγησε σε μείωση του ποσοστού επιτυχίας σε 6 από τις 9 ερωτήσεις (σύγκριση ομώνυμων κλασμάτων!, σύγκριση κλασματικών μονάδων, ισοδυναμία κλασμάτων, σύγκριση καταχρηστικού και μη κλάσματος, σύγκριση κλάσματος με τη μονάδα). Αντίθετα η χρήση κυκλικών διαγραμμάτων οδήγησε σε μείωση του ποσοστού επιτυχίας μόνο στην σύγκριση των κλασμάτων $\frac{2}{3}$ και $\frac{7}{9}$ (και αυτό όπως διαπιστώθηκε μετά από λεπτομερή εξέταση των αντίστοιχων ερωτηματολογίων, οφείλονταν σε δυσκολία ακριβούς σχεδίασης των αντίστοιχων κυκλικών διαγραμμάτων και στην μικρή διαφορά των κλασμάτων αυτών που δεν ήταν εύκολο να διαπιστωθεί από τους μαθητές χωρίς ένα ακριβές σχήμα). Η χρήση λεκτικών εξηγήσεων (κανόνες κ.τ.λ.) οδήγησε σε μείωση του ποσοστού επιτυχία μόνο στην σύγκριση καταχρηστικού και μη κλάσματος και στην σύγκριση καταχρηστικού κλάσματος με μικτό.

Σχετικά με τη διδασκαλία, όπως βλέπουμε η συμβολή της γενικά ήταν πολύ θετική, αξίζει εδώ να παρατηρήσουμε ότι στην πειραματική ομάδα της αριθμητικής γραμμής ενώ οδήγησε σε αύξηση του ποσοστού επιτυχίας στις 5 από τις 6 περιπτώσεις στις οποίες αρχικά όπως βλέπουμε είχαμε επιδείνωση κατά τη μετάβαση από το τεστ Α στο τεστ Β, εν τούτοις δημιούργησε μείωση σε 2 ερωτήσεις στις οποίες πριν (μετάβαση από το τεστ Α στο τεστ Β) είχαμε άνοδο του ποσοστού επιτυχίας, η αρνητική επίδραση της διδασκαλίας στις δύο αυτές περιπτώσεις (σύγκριση ετερώνυμων κλασμάτων) δεν είναι τόσο μεγάλη καθώς όπως θα δούμε και στην συνέχεια, στην συζήτηση των αποτελεσμάτων, η προηγούμενη επιτυχία στα δύο αυτά θέματα κατά το τεστ Β ήταν περισσότερο συμπτωματική καθώς βασιζόταν σε λανθασμένη αναπαράσταση των κλασμάτων με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής. Επίσης είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι η διδασκαλία οδήγησε σε μείωση του ποσοστού επιτυχίας στην σύγκριση ομωνύμων κλασμάτων και στις τρεις πειραματικές ομάδες. Η μείωση αυτή σχετικά με το ποσοστό επιτυχίας στην σύγκριση ομώνυμων κλασμάτων είναι χαρακτηριστικό ότι για την πειραματική ομάδα της αριθμητικής γραμμής εμφανίζεται και στην τελική σύγκριση του τεστ A με το τεστ C.

Βλέποντας τη μεταβολή του ποσοστού επιτυχίας για κάθε μια από τις πειραματικές ομάδες παρατηρούμε ότι, η χρήση της αριθμητικής γραμμής στο τεστ B, όπως αναφέραμε και πριν, δημιούργησε επιπλέον δυσκολίες στους μαθητές, καθώς στις 6 από τις 9 ερωτήσεις οδήγησε σε μείωση του ποσοστού επιτυχίας κατά τη μετάβαση από το τεστ A στο τεστ B. Η διδασκαλία στην συνέχεια περιόρισε το πρόβλημα καθώς είχαμε μείωση μόνο σε τρεις από τις εννιά ερωτήσεις (κατά τη μετάβαση από το τεστ B στο τεστ C). Τέλος μια ακόμη καλύτερη εικόνα έχουμε συγκρίνοντας τα τεστ A και C, όπου βλέπουμε μόνο μία περίπτωση (ερώτηση V1) όπου έχουμε επιδείνωση στο τεστ C.

Σχετικά με την ομάδα των κυκλικών διαγραμμάτων, η εικόνα είναι πολύ καλύτερη καθώς έχουμε βελτίωση του ποσοστού επιτυχίας κατά τη μετάβαση από το τεστ A στο τεστ B με την χρήση κυκλικών διαγραμμάτων, συγκεκριμένα μόνο σε μια ερώτηση (V4) έχουμε επιδείνωση του ποσοστού επιτυχίας. Μετά τη διδασκαλία έχουμε δύο ερωτήσεις όπου παρατηρείται επιδείνωση των αποτελεσμάτων στο τεστ C σε σχέση με τα αντίστοιχα στο τεστ B, πρόκειται για τις ερωτήσεις V1 και τη V7. Η βελτίωση τέλος από το τεστ A στο τεστ C είναι καθολική και στατιστικά σημαντική.
Στην ομάδα των λεκτικών εξηγήσεων η εικόνα είναι επίσης σχετικά καλή κατά τη μετάβαση από το τεστ A στο τεστ B, καθώς στις 5 από τις 9 ερωτήσεις έχουμε αύξηση του ποσοστού επιτυχίας· το ποσοστό αυτό βελτιώνεται μετά τη διδασκαλία καθώς έχουμε 7 ερωτήσεις στις οποίες έχουμε βελτίωση και τέλος συγκρίνοντας το τεστ A με το τεστ C, βλέπουμε ότι κατά το τεστ C έχουμε βελτίωση σε 8 από τις 9 συνολικά ερωτήσεις.

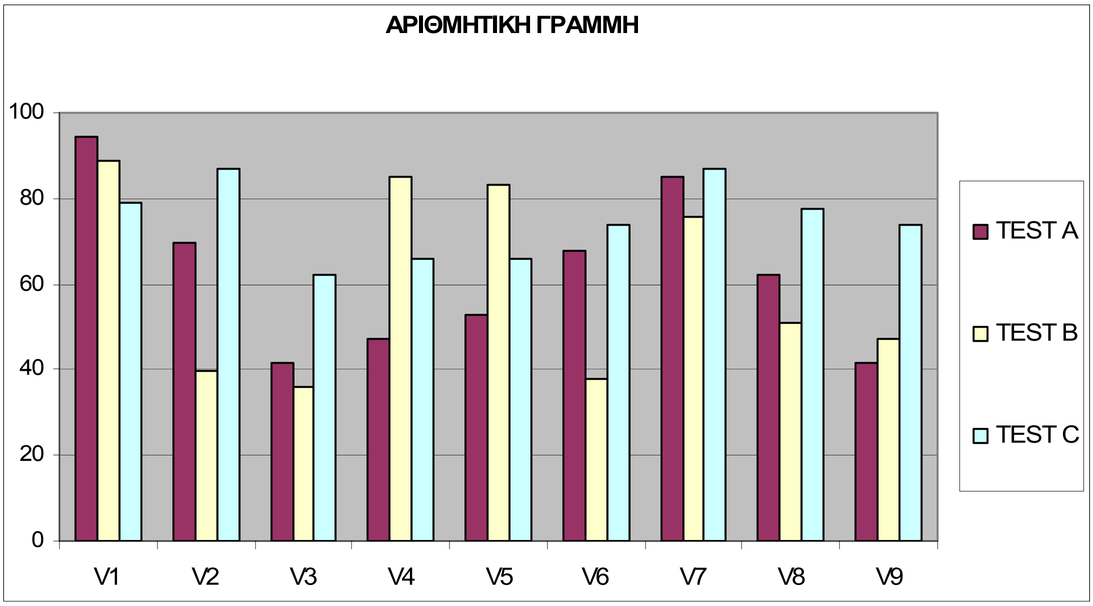
Μπορούμε χαρακτηριστικά να δούμε τις μεταβολές των ποσοστών επιτυχίας ομαδοποιώντας τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα ανά πειραματική ομάδα όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

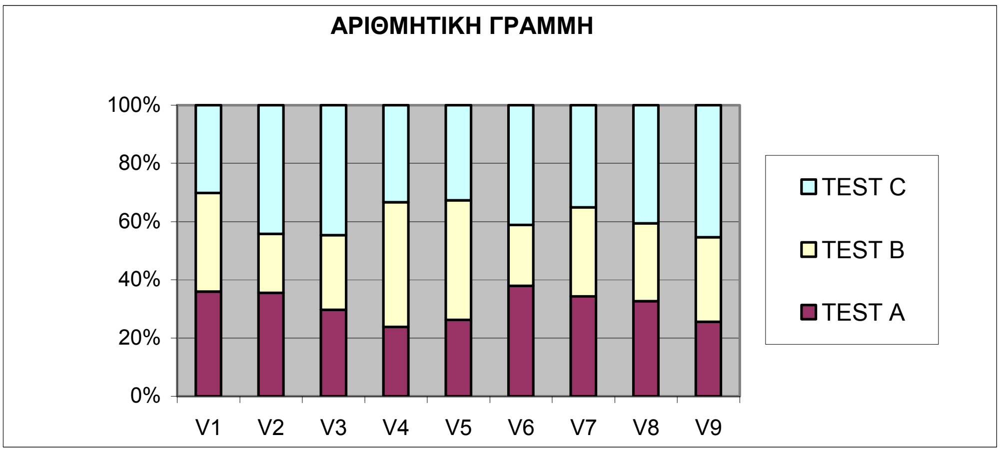
	Αριθμ. γραμμή			Κυκλικά διαγράμ.			Λεκτικές εξηγήσεις		
	A→B	B→C	B→C	A→B	B→C	B→C	A→B	B→C	B→C
V1.) $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$	—	—		+	—	+	+	—	+
V2.) $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{3}$		+	+	+	+	+	+	+	+
V3.) $\frac{4}{5}$ $\frac{8}{10}$		+	+	+	+	+	+	+	+
V4.) $\frac{2}{3}$ $\frac{7}{9}$	+		+	—	+	+	0	+	+
V5.) $\frac{4}{7}$ $\frac{2}{5}$	+		+	+	+	+	+	+	+
V6.) $\frac{3}{2}$ $\frac{8}{10}$		+	+	+	+	+	—	+	0
V7.) $\frac{6}{7}$ 1	—	+	+	+	—	+	+	0	+
V8.) $\frac{5}{4}$ 1	—	+	+	+	+	+		+	+
V9.) $\frac{7}{4}$ $1\frac{3}{4}$	+	+	+	+	+	+	—	+	+

Πιο αναλυτικά τα ποσοστά επιτυχίας για τις αντίστοιχες ερωτήσεις του κάθε τεστ, για κάθε πειραματική ομάδα χωριστά είναι τα παρακάτω:

ΠΟΣΟΣΤΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΑΝΑ ΕΡΩΤΗΣΗ

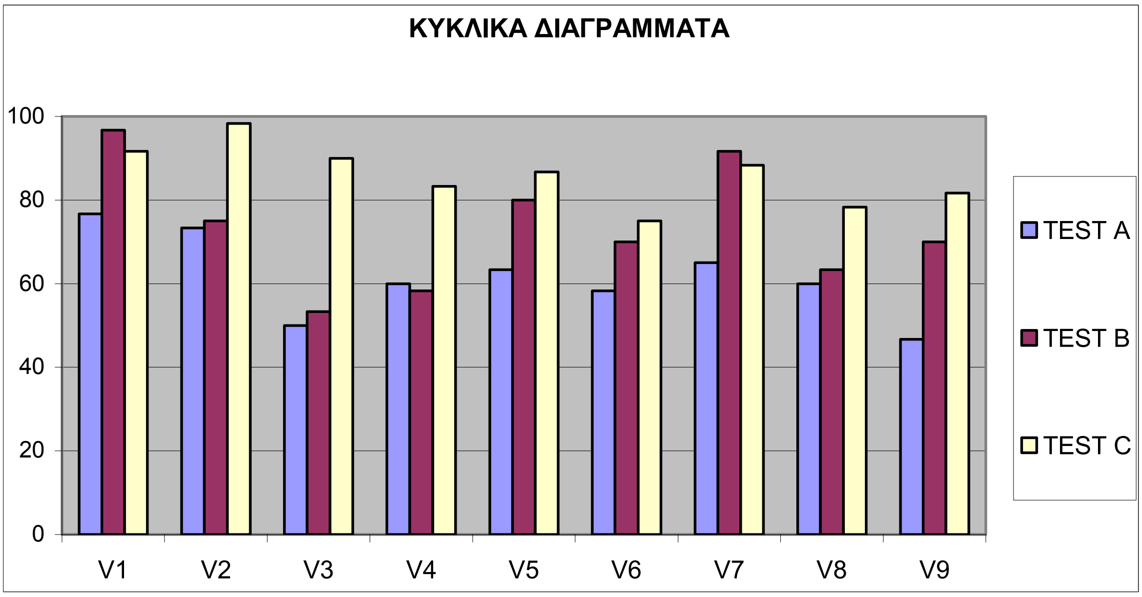
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ									
	V1	**V2**	**V3**	**V4**	**V5**	**V6**	**V7**	**V8**	**V9**
ΤΕΣΤ A	94,3	69,8	41,5	47,2	52,8	67,9	84,9	62,3	41,5
ΤΕΣΤ B	88,7	39,6	35,8	84,9	83	37,7	75,5	50,9	47,2
ΤΕΣΤ C	79,2	86,8	62,3	66	66	73,6	86,8	77,4	73,6

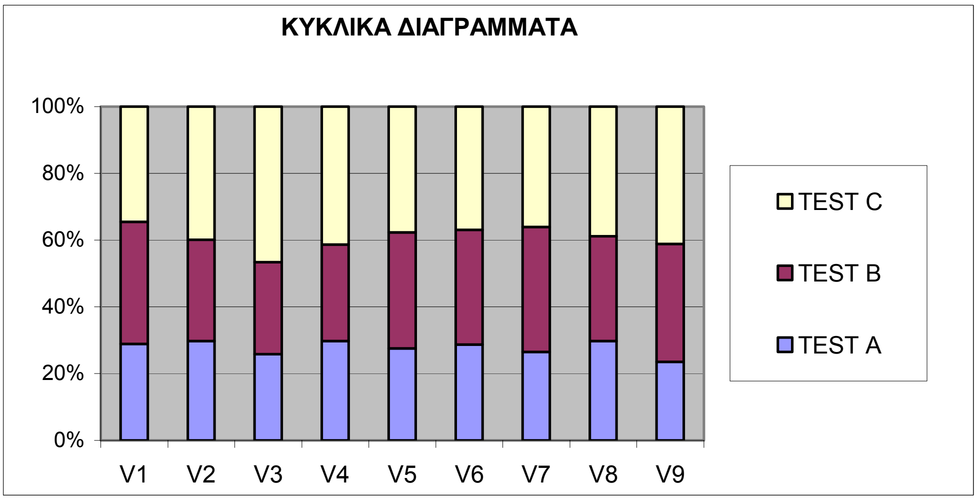




ΠΟΣΟΣΤΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΑΝΑ ΕΡΩΤΗΣΗ

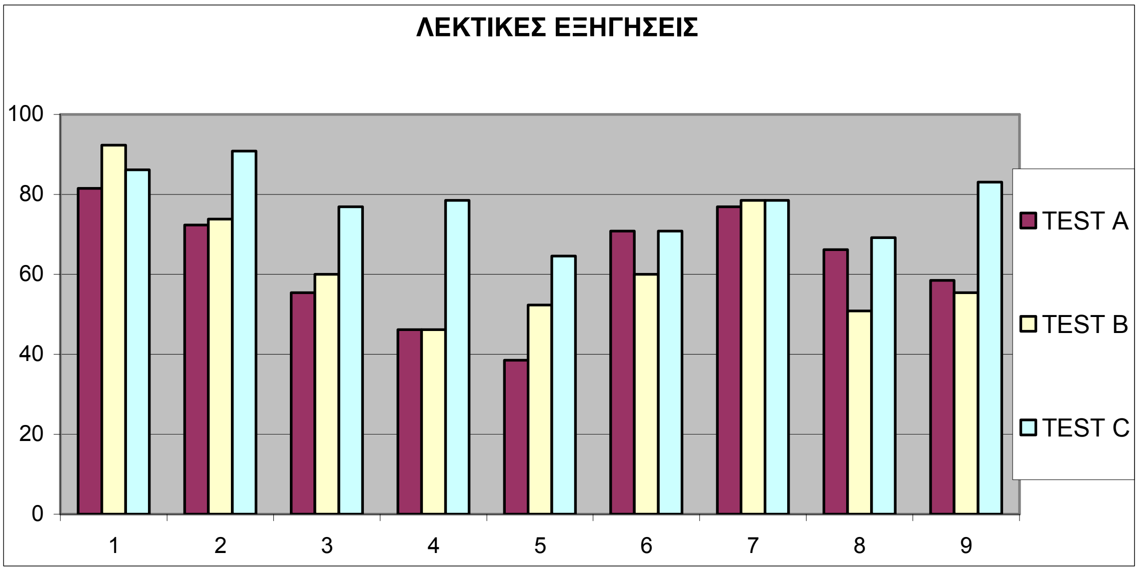
ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ									
	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9
ΤΕΣΤ Α	76,7	73,3	50	60	63,3	58,3	65	60	46,7
ΤΕΣΤ Β	96,7	75	53,3	58,3	80	70	91,7	63,3	70
ΤΕΣΤ C	91,7	98,3	90	83,3	86,7	75	88,3	78,3	81,7

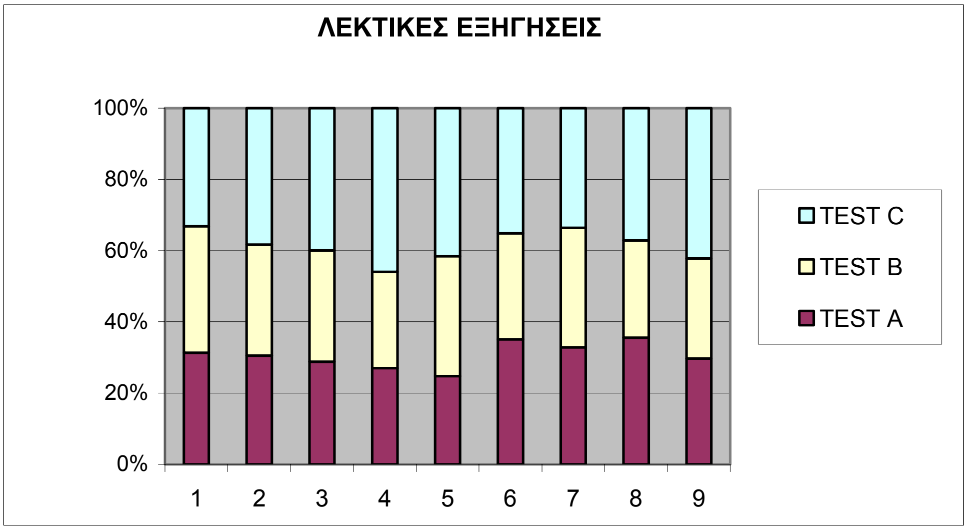




ΠΟΣΟΣΤΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΑΝΑ ΕΡΩΤΗΣΗ

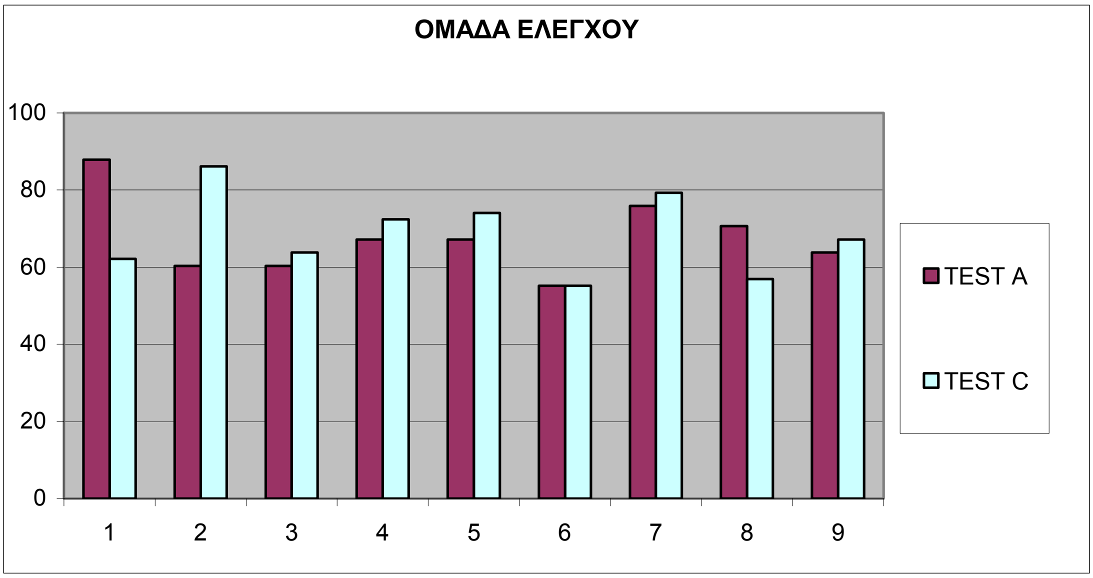
ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ									
	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9
ΤΕΣΤ A	81,5	72,3	55,4	46,2	38,5	70,8	76,9	66,2	58,5
ΤΕΣΤ B	92,3	73,8	60	46,2	52,3	60	78,5	50,8	55,4
ΤΕΣΤ C	86,2	90,8	76,9	78,5	64,6	70,8	78,5	69,2	83,1

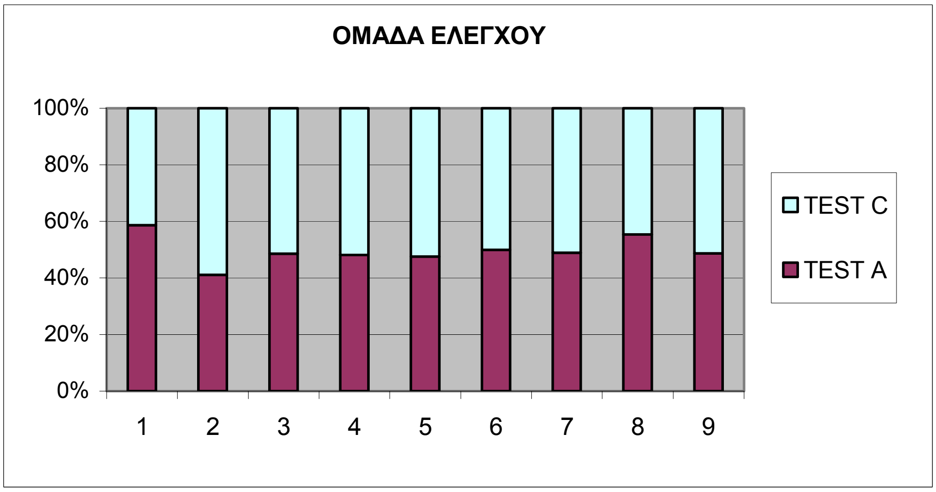




ΠΟΣΟΣΤΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΑΝΑ ΕΡΩΤΗΣΗ

ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ									
	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9
ΤΕΣΤ Α	87,9	60,3	60,3	67,2	67,2	55,2	75,9	70,7	63,8
ΤΕΣΤ C	62,1	86,2	63,8	72,4	74,1	55,2	79,3	56,9	67,2





Περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με την επίδοση των μαθητών σε κάθε ερώτηση ξεχωριστά αλλά και την συσχέτιση αυτών των αποτελεσμάτων μεταξύ τους, θα δούμε στο τελευταίο μέρος της στατιστικής επεξεργασίας, που είναι η στατιστική ανάλυση Gras. Αυτό κρίνεται απαραίτητο, καθώς έτσι ερμηνεύονται οι διακυμάνσεις ως προς το βαθμό επιτυχίας στα παραπάνω θέματα, μέσα από τη δυνατότητα που έχουμε να επισημάνουμε τις μεταξύ τους συσχετίσεις. Επίσης, η στατιστική ανάλυση Gras μας παρέχει ένα πολύτιμο εργαλείο «ιεράρχησης» των θεμάτων στη διδασκαλία αλλά και στην εξέταση των μαθητών, εντοπίζοντας τα θέματα εκείνα των οποίων η σωστή επίλυση συνεπάγεται και την σωστή επίλυση άλλων.

ΠΡΟΦΙΛ ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΩΝ

Θα εξετάσουμε τώρα εάν αυτά τα μοντέλα, που έχουν οι μαθητές σχετικά με την έννοια του κλάσματος και τη διάταξη κλασμάτων, ακολουθούνται πιστά από κάποιους μαθητές στο σύνολο των ερωτήσεων που είχαν να απαντήσουν σε κάθε ερωτηματολόγιο.

Η επιλογή των ερωτήσεων, όπως έχουμε αναφέρει, έγινε με βάση τα διάφορα μοντέλα που έχουν οι μαθητές σχετικά με τα κλάσματα και τη διάταξη των κλασμάτων. Έτσι στην εξέταση αυτή, για την καλύτερη μελέτη των αποτελεσμάτων, χωρίζουμε το ερωτηματολόγιο σε δύο ομάδες. Η πρώτη ομάδα αποτελείται από τις 6 πρώτες ερωτήσεις (V1, V2, V3, V4, V5, V6) και σ’ αυτήν εξετάζονται τα προφίλ 1, 2 και 4 στα οποία αντιστοιχούν οι ερωτήσεις αυτές και τα οποία περιγράφουμε παρακάτω, ενώ η δεύτερη ομάδα αποτελείται από τις τρεις τελευταίες ερωτήσεις (V7, V8, V9) όπου εξετάζουμε τα προφίλ 3 και 4, με τα οποία σχετίζονται οι ερωτήσεις αυτές.

Πρώτη ομάδα ερωτήσεις (V1, V2, V3, V4, V5, V6)

Προφίλ 1: ο μαθητής απαντά στα αντίστοιχα θέματα του ερωτηματολογίου (ερωτήσεις V1~6), με βάση το μοντέλο ότι μεγαλύτερο είναι το κλάσμα το οποίο έχει τους μεγαλύτερους όρους (με περιθώριο μιας τυχαίας απάντησης).

Προφίλ 2: (άρνηση του προηγούμενου μοντέλου) ο μαθητής απαντά στα αντίστοιχα θέματα του ερωτηματολογίου (ερωτήσεις V1~6), με βάση το μοντέλο ότι μεγαλύτερο είναι το κλάσμα με τους μικρότερους όρους (με περιθώριο μιας τυχαίας απάντησης).

Προφίλ 4: ο μαθητής απαντά σωστά στις ερωτήσεις V1~6.

Δεύτερη ομάδα ερωτήσεις (V7, V8, V9)

Προφίλ 3: ο μαθητής απαντά στα αντίστοιχα θέματα του ερωτηματολογίου (ερωτήσεις V7~9), με βάση το μοντέλο ότι όλα τα κλάσματα είναι μικρότερα από τη μονάδα.

Προφίλ 4: ο μαθητής απαντά σωστά στις ερωτήσεις V7~9.

Οι αντίστοιχες συχνότητες των μαθητών που κατατάσσονται σε κάθε ένα από τα παραπάνω προφίλ για κάθε τεστ χωριστά είναι οι εξής:

ΤΕΣΤ A

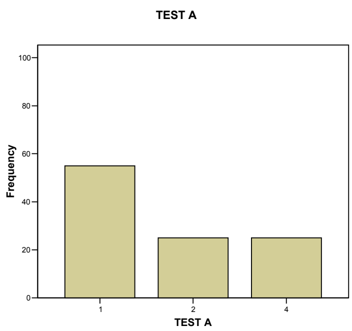
		Συχνότητα	Ποσοστό	Έγκυρο ποσοστό
Έγκυρα	1	55	23,3	52,4
	2	25	10,6	23,8
	4	25	10,6	23,8
	Σύνολο	105	44,5	100,0
Missing	System	131	55,5	
Σύνολο		236	100,0	

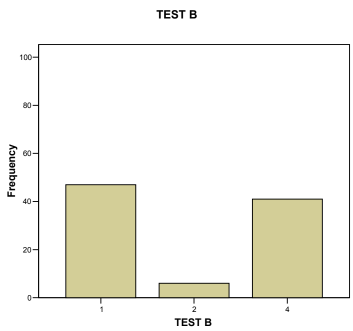
ΤΕΣΤ B

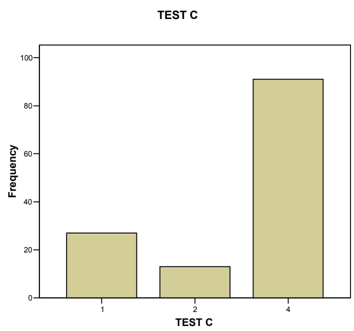
		Συχνότητα	Ποσοστό	Έγκυρο ποσοστό
Valid	1	47	19,9	50,0
	2	6	2,5	6,4
	4	41	17,4	43,6
	Σύνολο	94	39,8	100,0
Missing	System	142	60,2	
Σύνολο		236	100,0	

ΤΕΣΤ C

		Συχνότητα	Ποσοστό	Έγκυρο ποσοστό
Valid	1	27	11,4	20,6
	2	13	5,5	9,9
	4	91	38,6	69,5
	Σύνολο	131	55,5	100,0
Missing	System	105	44,5	
Σύνολο		236	100,0	







Βλέποντας τώρα το κάθε ένα από τα προφίλ αναλυτικά, σε σχέση με τις πειραματικές ομάδες και εστιάζοντας στα άτομα που βλέπουμε να κατατάσσονται αρχικά (στο τεστ Α) σε κάποιο από αυτά τα προφίλ, έχουμε για την πρώτη ομάδα (ερωτήσεις V1~6) την εξής κατανομή:

ΠΡΟΦΙΛ 1					
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ					
Α/Α	**ΦΥΛΟ**	**ΣΧΟΛΕΙΟ**	**ΤΕΣΤ Α**	**ΤΕΣΤ Β**	**ΤΕΣΤ C**
6	ΑΓΟΡΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	1	1	1
14	ΑΓΟΡΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	1	1	1
110	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	1	1	1
112	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	1	1	1
36	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	1	1	.
101	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	1	1	.
102	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	1	1	.
108	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	1	.	1
37	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	1	.	.
104	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	1	1	4
114	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	1	1	4
115	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	.	1	1
11	ΚΟΡΙΤΣΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	.	1	2
23	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	1	4
25	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	1	4
28	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	1	4
111	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	.	1	4
5	ΑΓΟΡΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	.	1	.
7	ΚΟΡΙΤΣΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	.	1	.
18	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	1	.
107	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	.	1	.
4	ΚΟΡΙΤΣΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	.	.	1
ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ					
Α/Α	**ΦΥΛΟ**	**ΣΧΟΛΕΙΟ**	**ΤΕΣΤ Α**	**ΤΕΣΤ Β**	**ΤΕΣΤ C**
95	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	1	1	1
116	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	1	1	1
91	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	1	1	.
174	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	1	1	.
176	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	1	1	.
124	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	1	1	4
125	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	1	1	4
127	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	1	1	4
92	ΚΟΡΙΤΣΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	1	.	1
84	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	1	.	.
186	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	1	.	.
94	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	1	4	.
85	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	1	.	4
99	ΚΟΡΙΤΣΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	1	2	4
181	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	1	.

187	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	1	.
120	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	.	1	4
128	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	.	1	4
ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ					
Α/Α	**ΦΥΛΟ**	**ΣΧΟΛΕΙΟ**	**ΤΕΣΤ A**	**ΤΕΣΤ B**	**ΤΕΣΤ C**
138	ΚΟΡΙΤΣΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	1	1	1
139	ΚΟΡΙΤΣΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	1	1	1
132	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	1	1	.
140	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	1	1	.
142	ΚΟΡΙΤΣΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	1	1	.
217	ΚΟΡΙΤΣΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	1	1	.
208	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	1	1	4
137	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	1	.	.
145	ΚΟΡΙΤΣΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	1	.	.
195	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	1	.	.
204	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	1	.	.
227	ΑΓΟΡΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	1	2	.
143	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	1	4	.
214	ΑΓΟΡΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	.	1	.
233	ΑΓΟΡΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	.	.	1
ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ					
Α/Α	**ΦΥΛΟ**	**ΣΧΟΛΕΙΟ**	**ΤΕΣΤ A**	**ΤΕΣΤ B**	**ΤΕΣΤ C**
42	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	1	.	1
43	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	1	.	1
52	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	1	.	1
57	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	1	.	1
62	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	1	.	1
69	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	1	.	1
74	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	1	.	1
156	ΑΓΟΡΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	1	.	1
157	ΚΟΡΙΤΣΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	1	.	1
159	ΚΟΡΙΤΣΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	1	.	1
163	ΑΓΟΡΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	1	.	1
166	ΑΓΟΡΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	1	.	1
44	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	1	.	.
48	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	1	.	.
56	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	1	.	.
160	ΑΓΟΡΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	1	.	.
164	ΑΓΟΡΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	1	.	.
153	ΑΓΟΡΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	.	1
162	ΚΟΡΙΤΣΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	.	1

ΠΡΟΦΙΛ 1

Α) Στην πειραματική ομάδα της αριθμητικής γραμμής: το προφίλ 1 παραμένει ισχυρό κατά τη μετάβαση από το τεστ Α στο τεστ Β καθώς από τα 11 άτομα που έχουμε στο τεστ Α στο προφίλ αυτό, τα 9 συνεχίζουν και στο τεστ Β (ποσοστό 81,8%) ενώ στο τεστ C μετά τη διδασκαλία συνεχίζουν 5 άτομα και έχουμε και 2 άτομα τα οποία απαντούν σε όλα τα θέματα (προφίλ 4).

Β) Στα κυκλικά διαγράμματα, και εδώ το προφίλ 1 διατηρείται κατά τη μετάβαση από το τεστ Α στο τεστ Β, αν και σε μικρότερο ποσοστό σε σχέση με την πειραματική ομάδα της αριθμητικής γραμμής που είδαμε πριν, καθώς έχουμε 14 άτομα στο τεστ Α και 8 από αυτά συνεχίζουν και στο τεστ Β (ποσοστό 57,1%) ενώ 1 άτομο περνάει στο προφίλ 4 και 1 άτομο περνάει στο προφίλ 2 (και συνεχίζει στο προφίλ 4 μετά τη διδασκαλία στο τεστ C), στην συνέχεια στο τεστ C έχουμε 3 άτομα στο προφίλ 1, ενώ 7 άτομα απαντούν σωστά σε όλα τα θέματα και περνάν στο προφίλ 4.

Γ) Στην ομάδα των λεκτικών εξηγήσεων, από τα 13 άτομα που έχουμε αρχικά στο τεστ Α, τα 7 συνεχίζουν και στο τεστ Β να ανήκουν στο προφίλ 1 (ποσοστό 53,8%) ενώ 1 άτομο περνά στο προφίλ 2 και 1 άτομο απαντά σωστά στα αντίστοιχα θέματα και περνά στο προφίλ 4. Μετά τη διδασκαλία μόνο 1 άτομο περνά στο προφίλ 4, ενώ και εδώ εμφανίζονται 3 άτομα να παραμένουν στο προφίλ 1.

Δ) Στην ομάδα ελέγχου, έχουμε και εδώ αρκετά άτομα στο προφίλ 1 το οποίο παραμένει ισχυρό κατά τη μετάβαση από το τεστ Α στο τεστ C (άλλωστε εδώ δεν υπήρξε κάποια άλλη παρέμβαση), καθώς από τα από τα 17 άτομα που κατατάσσονται στο προφίλ 1 τα 12 από αυτά συνεχίζουν να ανήκουν και στο τεστ C (ποσοστό 70,6%) ενώ τα 5 δεν ανήκουν σε κάποιο από τα προφίλ που εξετάζουμε.

Σχετικά τώρα με τους υπόλοιπους μαθητές που αρχικά στο τεστ Α δεν ανήκαν σε κάποιο συγκεκριμένο προφίλ από αυτά που αναφέραμε, αλλά εμφανίστηκαν στο τεστ Β να ανήκουν στο προφίλ 1 έχουμε τα εξής στοιχεία:

Από την ομάδα της αριθμητικής γραμμής έχουμε 10 άτομα, από την ομάδα των κυκλικών διαγραμμάτων 4 άτομα και 1 άτομο από την ομάδα των λεκτικών εξηγήσεων.

Μπορούμε εδώ να παρατηρήσουμε ότι σχετικά με την ομάδα της αριθμητικής γραμμής και το προφίλ 1, ότι από 11 άτομα που είχαμε αρχικά (στο τεστ Α) να κατατάσσονται στο προφίλ 1, κατά το τεστ Β με την αναπαράσταση της αριθμητικής γραμμής παρέμειναν 9 άτομα (έφυγαν 2) ενώ επιπλέον προσετέθησαν άλλα 10 άτομα τα οποία θα πρέπει να σημειώσουμε ότι (όπως αναφέραμε και παραπάνω) δεν ανήκαν αρχικά στο τεστ Α σε κάποιο συγκεκριμένο προφίλ, αλλά εμφανίστηκαν στο τεστ Β να ανήκουν στο προφίλ 1. Με λίγα λόγια, από τα 11 άτομα που είχαμε αρχικά (στο τεστ Α) στην συνέχεια στο τεστ Β με την αριθμητική γραμμή είχαμε 19 άτομα

(9+10), η αναπαράσταση δηλαδή με την αριθμητική γραμμή οδήγησε σε μια ενίσχυση του προφίλ 1 (ποσοστό αύξησης **72,7%**). Είναι χαρακτηριστικό άλλωστε το γεγονός (όπως θα δούμε και παρακάτω) ότι για την πειραματική ομάδα της αριθμητικής γραμμής στο τεστ B (με τις αναπαραστάσεις) δεν υπάρχει κανένα άτομο που να ανήκει στο προφίλ 2. Επίσης μια άλλη παρατήρηση, σχετικά με τους μαθητές που έχουμε να ανήκουν στο προφίλ 1 κατά το τεστ B με την αριθμητική γραμμή και οι οποίοι αρχικά (στο τεστ A) δεν ανήκαν σε κάποιο συγκεκριμένο προφίλ, είναι ότι μετά τη διδασκαλία (στο τεστ C) το προφίλ αυτό δεν διατηρείται (καθώς μόνο 1 άτομο από τα 10 εξακολουθεί να ανήκει στο προφίλ 1 κατά το τεστ C). Αντιθέτως, στα άτομα που ανήκαν στο προφίλ αυτό από την αρχή (όπου η κατανομή ήταν 11 άτομα αρχικά στο τεστ A, 9 στο τεστ B με την αριθμητική γραμμή και 5 άτομα να παραμένουν στο προφίλ 1 τελικά στο τεστ C), το προφίλ φαίνεται ισχυρό ακόμη και μετά τη διδακτική παρέμβαση.
Μια επιπλέον παρατήρηση (σχετικά με τους υπόλοιπους μαθητές που αρχικά στο τεστ A δεν ανήκαν σε κάποιο συγκεκριμένο προφίλ από αυτά που αναφέραμε, αλλά εμφανίστηκαν στο τεστ B να ανήκουν στο προφίλ 1), είναι ότι η διδασκαλία με χρήση αναπαραστάσεων και λεκτικών εξηγήσεων (καθώς ο σχεδιασμός της ήταν προσαρμοσμένος προς την συγκεκριμένη κάθε φορά πειραματική ομάδα), στην περίπτωση της ομάδας της αριθμητικής γραμμής και των κυκλικών διαγραμμάτων οδήγησε τελικά στο τεστ C στην σωστή απάντηση όλων των αντίστοιχων θεμάτων (προφίλ 4) από κάποιους μαθητές (6 άτομα στην πειραματική ομάδα της αριθμητικής γραμμής και 7 άτομα στην ομάδα των κυκλικών διαγραμμάτων), ενώ στην πειραματική ομάδα των λεκτικών εξηγήσεων (όπου ακολουθήθηκε ο αλγοριθμικός τρόπος διδασκαλίας, με κανόνες κ.τ.λ.) έχουμε μόνο 1 άτομο στο τεστ C.

Βέβαια θα πρέπει να τονίσουμε ότι ο αριθμός των μαθητών στην έρευνα αυτή είναι μικρός και το ίδιο και αντίστοιχες συχνότητες των μαθητών που παρατηρούμε στα αντίστοιχα προφίλ, επιπλέον ίσως αυτό να οφείλεται και στους αυστηρούς περιορισμούς που θέσαμε ώστε ένας μαθητής να κατατάσσεται στο αντίστοιχο προφίλ. Κατά συνέπεια τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουμε δεν μπορούμε να πούμε ότι είναι αποδεικτικά αλλά ενδεικτικά της τάσης που περιγράψαμε.

ΠΡΟΦΙΛ 2					
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ					
Α/Α	**ΦΥΛΟ**	**ΣΧΟΛΕΙΟ**	**ΤΕΣΤ Α**	**ΤΕΣΤ Β**	**ΤΕΣΤ C**
13	ΚΟΡΙΤΣΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	2	1	2
1	ΚΟΡΙΤΣΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	2	1	.
2	ΚΟΡΙΤΣΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	2	1	.
17	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	2	.	4
ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ					
100	ΚΟΡΙΤΣΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	2	2	.
80	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	2	.	.
182	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	2	.	.
123	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	2	.	4
126	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	2	.	4
167	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	2	.	4
119	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	2	1	.
178	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	2	1	.
ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ					
220	ΚΟΡΙΤΣΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	2	2	2
213	ΑΓΟΡΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	2	2	.
221	ΚΟΡΙΤΣΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	2	2	.
235	ΑΓΟΡΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	2	.	2
134	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	2	.	.
215	ΚΟΡΙΤΣΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	2	.	.
232	ΚΟΡΙΤΣΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	2	.	.
135	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	2	1	.
216	ΚΟΡΙΤΣΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	2	1	4
202	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	2	.	4
222	ΑΓΟΡΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	2	.	4
193	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	.	.	2
ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ					
65	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	2	.	2
54	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	2	.	.
61	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	.	.	2
67	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	.	.	2
152	ΑΓΟΡΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	.	2
158	ΑΓΟΡΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	.	2

ΠΡΟΦΙΛ 2

Α) Στην πειραματική ομάδα της αριθμητικής γραμμής: από τα 4 άτομα που έχουμε αρχικά (στο τεστ Α) να ανήκουν στο προφίλ 2 βλέπουμε τα 3 από αυτά στο τεστ Β να περνούν στο προφίλ 1 (ποσοστό 75%) αυτό είναι κάτι αξιοσημείωτο δεδομένου ότι το προφίλ 2 όπως το ορίσαμε βασίζεται στην άρνηση του αντίστοιχου μοντέλου που έχουμε στο προφίλ 1. Στο τεστ C μετά τη διδασκαλία 1 άτομο επανέρχεται στο προφίλ 2 και έχουμε και 1 άτομο στο προφίλ 4.

Β) Στα κυκλικά διαγράμματα, εδώ το προφίλ 2 χάνεται καθώς από τα 8 άτομα που έχουμε στο προφίλ αυτά στο τεστ Α μόνο 1 από αυτά συνεχίζει και στο τεστ Β (ποσοστό 12,5%) ενώ 2 άτομα περνούν στο προφίλ 1. Στο τεστ C έχουμε 3 άτομα να απαντούν σωστά σε όλα τα θέματα και πηγαίνουν έτσι στο προφίλ 4.

Γ) Στην ομάδα των λεκτικών εξηγήσεων, το προφίλ 2 και πάλι εξασθενεί κατά τη μετάβαση από το τεστ A στο τεστ B καθώς από τα 11 άτομα που έχουμε αρχικά (στο τεστ A), μόνο 3 συνεχίζουν και στο τεστ B να ανήκουν στο προφίλ αυτό (ποσοστό 27,3%) ενώ 2 άτομα περνούν στο προφίλ 1. Μετά τη διδασκαλία εμφανίζονται 3 άτομα στο προφίλ 2, ακόμη 3 άτομα περνούν στο προφίλ 4.

Δ) Στην ομάδα ελέγχου, από τα 2 άτομα που κατατάσσονται στο προφίλ 1, το 1 από αυτά συνεχίζει να ανήκει και στο τεστ C όπου έχουμε και άλλα 4 άτομα στο προφίλ 2 τα οποία κατά το τεστ A δεν ανήκαν σε κάποιο συγκεκριμένο προφίλ.

ΠΡΟΦΙΛ 4						
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ						
Α/Α	**ΦΥΛΟ**	**ΣΧΟΛΕΙΟ**	**ΠΕΙΡΑΜ. ΟΜΑΔΑ**	**ΤΕΣΤ A**	**ΤΕΣΤ B**	**ΤΕΣΤ C**
32	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	4	4	4
109	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	4	4	4
9	ΑΓΟΡΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	4	4	.
33	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	4	4	.
8	ΑΓΟΡΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	4	.	4
30	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	4	.	.
3	ΑΓΟΡΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	4	4	2
29	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	4	1	2
ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ						
87	ΚΟΡΙΤΣΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	4	4	4
93	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	4	4	4
97	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	4	4	4
131	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	4	4	4
89	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	4	.	4
ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ						
144	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	4	4	4
212	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	4	4	4
230	ΑΓΟΡΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	4	4	4
194	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	4	4	.
ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ						
40	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	4	.	4
49	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤΤ1	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	4	.	4
53	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	4	.	4
70	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	4	.	4
63	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	4	.	.
150	ΚΟΡΙΤΣΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	4	.	.
155	ΑΓΟΡΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	4	.	.
161	ΑΓΟΡΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	4	.	.

ΥΠΟΛΟΙΠΟΙ

10	ΑΓΟΡΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	.	4	4
16	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	.	4	4
20	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	.	4	4
103	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	.	4	4
15	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	.	4	.
24	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	.	4	.
105	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	.	4	.
106	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	.	4	.
26	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	.	.	4
81	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	.	4	4
117	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	.	4	4
168	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	.	4	4
170	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	.	4	4
175	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	.	4	4
179	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	.	4	4
180	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	.	4	4
184	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	.	4	4
185	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	.	4	4
189	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	.	4	4
171	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	.	4	.
188	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	.	4	.
82	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	.	.	4
83	ΚΟΡΙΤΣΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	.	.	4
86	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	.	.	4
88	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	.	.	4
90	ΚΟΡΙΤΣΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	.	.	4
96	ΚΟΡΙΤΣΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	.	.	4
118	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	.	.	4
121	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	.	.	4
122	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	.	.	4
129	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	.	.	4
130	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	.	.	4
169	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	.	.	4
197	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	.	4	4
198	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	.	4	4
205	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	.	4	4
226	ΚΟΡΙΤΣΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	.	4	4
192	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	.	4	2
229	ΑΓΟΡΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	.	4	.
136	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	.	.	4
146	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	.	.	4
148	ΚΟΡΙΤΣΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	.	.	4
149	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	.	.	4
190	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	.	.	4
199	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	.	.	4
206	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	.	.	4
210	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	.	.	4
219	ΑΓΟΡΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	.	.	4
223	ΑΓΟΡΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	.	.	4
225	ΚΟΡΙΤΣΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	.	.	4
228	ΑΓΟΡΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	.	.	4
231	ΚΟΡΙΤΣΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	.	.	4

39	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	.	.	4
45	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	.	.	4
46	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	.	.	4
47	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	.	.	4
51	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	.	.	4
55	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	.	.	4
58	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	.	.	4
64	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	.	.	4
68	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	.	.	4
71	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	.	.	4
72	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	.	.	4

ΠΡΟΦΙΛ 4

Βλέπουμε και σ' αυτό το προφίλ τους μαθητές αρχικά στο τεστ Α να εμφανίζονται περίπου ίσα κατανεμημένοι σε κάθε πειραματική ομάδα, η ισομερής αυτή κατανομή υποδηλώνει την καλή επιλογή του δείγματος και παράλληλα την αμεροληψία στον ορισμό της σύνθεσης των πειραματικών ομάδων (οι οποίες όπως έχουμε ήδη αναφέρει, επελέγησαν περίπου ισοπληθείς) στην έρευνα μας.

Α) Στην πειραματική ομάδα της αριθμητικής γραμμής: από τα 8 άτομα που έχουμε στο τεστ Α να ανήκουν στο προφίλ 4 βλέπουμε τα 5 από αυτά να συνεχίζουν και στο τεστ Β και 1 άτομο να περνά στο προφίλ 1 (εξ' αιτίας της αριθμογραμμής). Το γεγονός αυτό είναι μια ένδειξη ότι η αριθμητική γραμμή επιδείνωσε τα αποτελέσματα κάτι που δεν παρατηρείται στις άλλες πειραματικές ομάδες. Στο τεστ C έχουμε πάλι 3 άτομα να ανήκουν στο προφίλ 4 και 2 άτομα να περνούν στο προφίλ 2.

Β) Στα κυκλικά διαγράμματα, **έχουμε 5 άτομα με αυτό το προφίλ στο τεστ Α από τα οποία** τα 4 συνεχίζουν και στο τεστ Β ενώ **1 άτομο (όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε από το προηγούμενο προφίλ) περνά στο προφίλ 3 (α/α 89 βλ. σχετική αναφορά στο τέλος)**. Μετά τη διδασκαλία βλέπουμε στο τεστ C ότι τα 5 αυτά άτομα παραμένουν στο προφίλ 4 ενώ γενικά (μαζί με τα υπόλοιπα άτομα που αρχικά στο τεστ Α δεν ανήκαν σε κάποιο συγκεκριμένο προφίλ 1, 2, 4) παρατηρούμε ότι το προφίλ 4 αυξάνεται σταθερά τόσο στο τεστ Β όσο και στο τεστ C.

Γ) Στην ομάδα των λεκτικών εξηγήσεων, από τα 4 άτομα που έχουμε αρχικά στο τεστ Α, χαρακτηριστικά και τα 4 συνεχίζουν και στο τεστ Β να ανήκουν στο προφίλ 4 και 3 από αυτά συνεχίζουν επίσης και στο τεστ C. Γενικά παρατηρούμε ότι το προφίλ 4 αυξάνεται σταθερά τόσο στο τεστ Β όσο και κατά το τεστ C.

Δ) Στην ομάδα ελέγχου, έχουμε 8 άτομα που κατατάσσονται στο προφίλ 4, από αυτά τα 4 συνεχίζουν να ανήκουν και στο τεστ C. Εδώ παρατηρούμε και μια «αδικαιολόγητη» θα λέγαμε (καθώς δεν υπήρξε κάποια γνωστή παρέμβαση μεταξύ των δυο τεστ) αύξηση στο τεστ C των μαθητών που κατατάσσονται στο προφίλ 4 (από 8 μαθητές που είχαμε στο τεστ A έχουμε 15 στο τεστ C).

Γενικά είναι χαρακτηριστικό το γεγονός ότι μαθητές που δεν ανήκαν αρχικά στο τεστ A σε κάποιο προφίλ αλλά πέρασαν στο τεστ B στο προφίλ 4, αυτοί στην πλειοψηφία τους (69,2%) εξακολούθησαν και στο τεστ C. Ενδιαφέρον ίσως θα είχε να δούμε τα επιμέρους ποσοστά της συμπεριφοράς αυτής σε κάθε πειραματική ομάδα ξεχωριστά. Στην αριθμητική γραμμή το ποσοστό είναι 50%, στα κυκλικά διαγράμματα 83,3%, στις λεκτικές εξηγήσεις 66,7% .

Σχετικά τώρα με την δεύτερη ομάδα ερωτήσεων (V7, V8, V9) και τα αντίστοιχα προφίλ 3 και 4 έχουμε:

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

Α/Α	ΦΥΛΟ	ΣΧΟΛΕΙΟ	ΤΕΣΤ A	ΤΕΣΤ B	ΤΕΣΤ C
3	ΑΓΟΡΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	4	4	4
8	ΑΓΟΡΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	4	4	4
24	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	4	4	4
32	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	4	4	4
38	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	4	4	4
103	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	4	4	4
106	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	4	4	4
5	ΑΓΟΡΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	4	.	4
10	ΑΓΟΡΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	4	.	4
28	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	4	.	4
30	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	4	.	4
33	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	4	.	4
34	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	4	.	4
22	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	4	.	.
29	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	4	.	.
7	ΚΟΡΙΤΣΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	.	4	4
18	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	4	4
20	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	4	4
113	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	.	4	4
11	ΚΟΡΙΤΣΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	.	4	.
15	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	4	.
17	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	4	.
23	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	4	.
1	ΚΟΡΙΤΣΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	.	.	4
2	ΚΟΡΙΤΣΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	.	.	4
4	ΚΟΡΙΤΣΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	.	.	4
6	ΑΓΟΡΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	.	.	4
9	ΑΓΟΡΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	.	.	4
12	ΚΟΡΙΤΣΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	.	.	4
14	ΑΓΟΡΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	.	.	4

25	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	.	4
26	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	.	4
35	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	.	4
107	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	.	.	4
36	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	3	3	3
16	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	3	4	4
13	ΚΟΡΙΤΣΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	3	.	4
37	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	3	.	.
104	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	.	3	4
114	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	.	3	4
109	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	.	3	.
110	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	.	3	.
115	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	.	3	.
19	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	.	3

ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

Α/Α	ΦΥΛΟ	ΣΧΟΛΕΙΟ	ΤΕΣΤ Α	ΤΕΣΤ Β	ΤΕΣΤ C
83	ΚΟΡΙΤΣΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	4	4	4
86	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	4	4	4
93	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	4	4	4
96	ΚΟΡΙΤΣΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	4	4	4
97	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	4	4	4
100	ΚΟΡΙΤΣΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	4	4	4
119	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	4	4	4
183	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	4	4	4
184	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	4	4	4
186	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	4	4	4
189	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	4	4	4
168	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	4	4	4
169	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	4	4	4
170	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	4	4	4
94	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	4	.	.
81	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	.	4	4
88	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	.	4	4
121	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	.	4	4
123	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	.	4	4
128	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	.	4	4
129	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	.	4	4
130	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	.	4	4
131	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	.	4	4
126	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	.	4	4
171	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	4	4
179	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	4	4
180	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	4	4
181	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	4	4
175	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	4	4
90	ΚΟΡΙΤΣΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	.	4	.
177	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	4	.
188	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	4	.
80	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	.	.	4
98	ΚΟΡΙΤΣΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	.	.	4

118	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	.	.	4
120	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	.	.	4
124	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	.	.	4
182	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	.	4
187	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	.	4
122	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	3	3	4
125	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	3	3	4
174	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	3	.	3
87	ΚΟΡΙΤΣΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	3	4	4
167	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	3	4	.
89	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	4	3	.
127	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	.	3	4
117	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	.	3	4
176	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	3	.
91	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	.	.	3
99	ΚΟΡΙΤΣΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	.	.	3

ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

Α/Α	ΦΥΛΟ	ΣΧΟΛΕΙΟ	ΤΕΣΤ Α	ΤΕΣΤ Β	ΤΕΣΤ C
194	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	4	4	4
144	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	4	4	4
198	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	4	4	4
200	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	4	4	4
202	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	4	4	4
209	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	4	4	4
210	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	4	4	4
205	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	4	4	4
212	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	4	4	4
213	ΑΓΟΡΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	4	4	4
223	ΑΓΟΡΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	4	4	4
224	ΑΓΟΡΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	4	4	4
226	ΚΟΡΙΤΣΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	4	4	4
228	ΑΓΟΡΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	4	4	4
230	ΑΓΟΡΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	4	4	4
231	ΚΟΡΙΤΣΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	4	4	4
225	ΚΟΡΙΤΣΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	4	4	.
192	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	4	.	4
196	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	4	.	4
197	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	4	.	4
199	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	4	.	4
203	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	4	.	4
214	ΑΓΟΡΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	4	.	4
190	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	4	.	.
211	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	4	.	.
193	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	4	.	.
222	ΑΓΟΡΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	.	4	4
219	ΑΓΟΡΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	.	4	.
235	ΑΓΟΡΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	.	4	.
136	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	.	4
201	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	.	.	4
204	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	.	.	4
206	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	.	.	4

207	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	.	.	4
215	ΚΟΡΙΤΣΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	.	.	4
217	ΚΟΡΙΤΣΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	.	.	4
221	ΚΟΡΙΤΣΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	.	.	4
133	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	3	3	3
216	ΚΟΡΙΤΣΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	3	3	3
132	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	3	3	.
141	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	3	3	.
148	ΚΟΡΙΤΣΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	3	3	.
232	ΚΟΡΙΤΣΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	3	3	.
149	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	3	3	4
147	ΚΟΡΙΤΣΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	3	.	4
234	ΑΓΟΡΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	3	.	4
229	ΑΓΟΡΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	3	.	.
236	ΚΟΡΙΤΣΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	3	.	.
134	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	3	4
140	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	3	.
195	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	4	.	3
146	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	.	3

ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ

Α/Α	ΦΥΛΟ	ΣΧΟΛΕΙΟ	ΤΕΣΤ A	ΤΕΣΤ B	ΤΕΣΤ C
39	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	4	.	4
40	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	4	.	4
42	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	4	.	4
45	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	4	.	4
46	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	4	.	4
49	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	4	.	4
51	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	4	.	4
53	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	4	.	4
54	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	4	.	4
55	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	4	.	4
58	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	4	.	4
61	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	4	.	4
64	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	4	.	4
66	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	4	.	4
70	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	4	.	4
71	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	4	.	4
75	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	4	.	4
151	ΑΓΟΡΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	4	.	4
152	ΑΓΟΡΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	4	.	4
154	ΑΓΟΡΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	4	.	4
158	ΑΓΟΡΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	4	.	4
161	ΑΓΟΡΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	4	.	4
52	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	4	.	.
153	ΑΓΟΡΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	4	.	.
41	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	.	.	4
47	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	.	.	4
150	ΚΟΡΙΤΣΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	.	4
76	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	3	.	3
157	ΚΟΡΙΤΣΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	3	.	3

164	ΑΓΟΡΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	3	.	3
63	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	3	.	4
69	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	3	.	.
72	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	3	.	.
74	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	3	.	.
65	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	4	.	3
67	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	4	.	3
68	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	.	.	3
73	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	.	.	3
62	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	.	.	3
155	ΑΓΟΡΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	.	3
156	ΑΓΟΡΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	.	3
165	ΑΓΟΡΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	.	3

ΠΡΟΦΙΛ 3 & 4

A) Στην πειραματική ομάδα της αριθμητικής γραμμής: από τα 4 άτομα που έχουμε αρχικά στο τεστ Α να ανήκουν στο προφίλ 3 βλέπουμε το 1 από αυτά να συνεχίζει και στο τεστ Β αλλά και μετά τη διδασκαλία στο τεστ C. Αυτό ίσως δείχνει ότι η αριθμητική γραμμή έχει μόνο μικρή θετική επίδραση στο να οδηγήσει τους μαθητές στην αναθεώρηση της αντίληψης ότι όλα τα κλάσματα είναι μικρότερα της μονάδας, καθώς βλέπουμε μόνο 1 άτομο να απαντάει σωστά με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής και να περνά έτσι κατά το τεστ Β από το προφίλ 3 στο προφίλ 4, όπου και παραμένει και μετά τη διδασκαλία στο τεστ C. Στην εκτίμηση αυτή συνηγορεί και το γεγονός ότι στο τεστ Β βλέπουμε να προστίθενται στο προφίλ 3 και άλλα 5 άτομα τα οποία αρχικά (στο τεστ Α) δεν ανήκαν στο προφίλ αυτό, ανεβάζοντας έτσι τον αριθμό των μαθητών που ήταν στο προφίλ 3 από 4 που ήταν αρχικά στο τεστ Α σε 6 στο τεστ Β. Μετά τη διδασκαλία στο τεστ C το προφίλ 3 βλέπουμε ότι αποδυναμώνεται, καθώς έχουμε μόνο 2 άτομα να ανήκουν στο προφίλ αυτό. Σχετικά με το προφίλ 4 βλέπουμε ότι η αριθμητική γραμμή δεν επηρεάζει καθόλου θα λέγαμε καθώς στο τεστ Α έχουμε 15 άτομα στο προφίλ αυτό και 16 άτομα στο τεστ Β. Αντίθετα, η διδασκαλία έχει πολύ θετικά αποτελέσματα καθώς ο αριθμός των ατόμων που απαντούν σωστά και κατατάσσονται στο προφίλ 4 διπλασιάζεται καθώς έχουμε 32 άτομα στο τεστ C.

B) Στα κυκλικά διαγράμματα, έχουμε 5 άτομα να ανήκουν στο προφίλ 3 στο τεστ Α από τα οποία στο τεστ Β παραμένουν τα δύο, ενώ προστίθενται και άλλα 4 άτομα ανεβάζοντας τον αριθμό σε 6 συνολικά άτομα. Η ένδειξη αυτή (αν και οι συχνότητες είναι μικρές) φαίνεται να έρχεται σε αντίθεση με την άποψη ότι η χρήση κυκλικών διαγραμμάτων οδηγεί στην λανθασμένη αντίληψη από τα παιδιά ότι όλα τα κλάσματα είναι μικρότερα από τη μονάδα (μόνο μια περίπτωση εμφανίζεται αυτή του μαθητή με αύξοντα αριθμό 89 ο οποίος ενώ αρχικά είχε απαντήσει σωστά στο τεστ Α και βρισκόταν στο προφίλ 4, με τα κυκλικά διαγράμματα περνά στο προφίλ 3 κατά το τεστ Β, η περίπτωση αυτή παρουσιάζεται πιο αναλυτικά στην συνέχεια. Μετά τη διδασκαλία το προφίλ 3 και εδώ (όπως στην ομάδα της αριθμητικής γραμμής) βλέπουμε ότι αποδυναμώνεται καθώς έχουμε μόνο 3 άτομα στο τεστ C να ανήκουν στο προφίλ αυτό. Σχετικά με το προφίλ 4 βλέπουμε ότι τα κυκλικά διαγράμματα το ενισχύουν σημαντικά καθώς από 16 άτομα στο τεστ Α (παρόμοια εικόνα με αυτή στην αριθμητική γραμμή), στην συνέχεια στο τεστ Β βλέπουμε ότι διπλασιάζονται καθώς έχουμε 33 άτομα στο προφίλ αυτό. Επίσης θετική επίδραση έχει και η διδασκαλία καθώς στο τεστ C έχουμε 40 άτομα να κατατάσσονται στο προφίλ 4.

Γ) <u>Στην ομάδα των λεκτικών εξηγήσεων</u>, το προφίλ 3 φαίνεται ισχυρό τόσο αρχικά (τεστ Α) όσο κατά τη μετάβαση από το τεστ Α στο τεστ Β καθώς από τα 11 άτομα που έχουμε στο τεστ Α, τα 7 συνεχίζουν και στο τεστ Β να ανήκει στο προφίλ 3, ενώ προστίθενται επίσης και άλλα 2 άτομα τα οποία αρχικά (τεστ Α) δεν ανήκαν στο προφίλ αυτό. Μετά τη διδασκαλία το προφίλ 3 βλέπουμε και εδώ ότι φανερά αποδυναμώνεται καθώς έχουμε μόνο 4 άτομα στο τεστ C να ανήκουν στο προφίλ αυτό. Σχετικά με το προφίλ 4 το αξιοσημείωτο είναι ότι οι λεκτικές εξηγήσεις μειώνουν την επιτυχία των μαθητών, καθώς από μια ιδιαίτερα καλή εικόνα (σε σχέση με τις δύο προηγούμενες πειραματικές ομάδες) στο τεστ Α, όπου έχουμε 27 άτομα στο προφίλ αυτό βλέπουμε τον αριθμό τους να μειώνεται σε 20 άτομα στο τεστ Β (κάτι που δεν συναίβει ούτε με την αριθμητική γραμμή, ούτε με τα κυκλικά διαγράμματα). Αντίθετα, η διδασκαλία έχει πολύ θετικά αποτελέσματα καθώς ο αριθμός των ατόμων που απαντούν σωστά και κατατάσσονται στο προφίλ 4 αυξάνεται σημαντικά καθώς έχουμε 35 άτομα στο τεστ C.

Δ) <u>Στην ομάδα ελέγχου</u>, έχουμε 7 άτομα που κατατάσσονται στο προφίλ 3 και το 3 από αυτά συνεχίζουν να ανήκουν και στο τεστ C, ενώ προστίθενται επίσης και άλλα 8 άτομα τα οποία αρχικά (τεστ Α) δεν ανήκαν στο προφίλ αυτό. Σχετικά με το προφίλ 4 δεν βλέπουμε κάποια διαφοροποίηση στην ομάδα ελέγχου (κάτι φυσικό θα λέγαμε καθώς δεν υπήρξε κάποια παρέμβαση), έτσι 26 άτομα κατατάσσονται στο προφίλ αυτό στο τεστ Α και 26 άτομα βλέπουμε και στο τεστ C (τα περισσότερα διατηρούν το προφίλ 4 από το τεστ Α και κατά το τεστ C).

Στην συνέχεια παραθέτουμε με τη βοήθεια του στατιστικού προγράμματος SPSS, για κάθε πειραματική ομάδα ξεχωριστά, τις συχνότητες των αντίστοιχων προφίλ που παρατηρούνται σε κάθε τεστ και επιπλέον έναν αναλυτικό πίνακα, όπου για την πρώτη ομάδα (ερωτήσεις V1~6) φαίνεται η αλλαγή αυτών των προφίλ (προφίλ 1, 2 και 4) κατά τη μετάβαση από το ένα τεστ στο άλλο, ενώ όσον αφορά τη δεύτερη ομάδα (ερωτήσεις V7~9) εστιάζουμε στο προφίλ 3.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

ΤΕΣΤ Α

		Συχνότητα	Ποσοστό	Έγκυρο ποσοστό
Valid	**1**	11	20,8	47,8
	2	4	7,5	17,4
	4	8	15,1	34,8
	Σύνολο	23	43,4	100,0
Missing	System	30	56,6	
Σύνολο		53	100,0	

ΤΕΣΤ Β

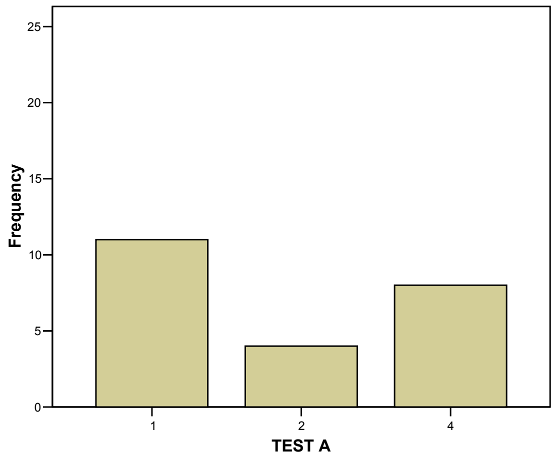
		Συχνότητα	Ποσοστό	Έγκυρο ποσοστό
Valid	**1**	23	43,4	63,9
	4	13	24,5	36,1
	Σύνολο	36	67,9	100,0
Missing	System	17	32,1	
Σύνολο		53	100,0	

ΤΕΣΤ C

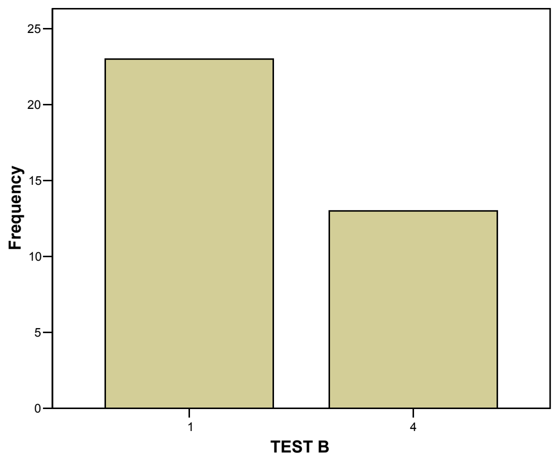
		Συχνότητα	Ποσοστό	Έγκυρο ποσοστό
Valid	**1**	7	13,2	26,9
	2	4	7,5	15,4
	4	15	28,3	57,7
	Σύνολο	26	49,1	100,0
Missing	System	27	50,9	
Σύνολο		53	100,0	

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

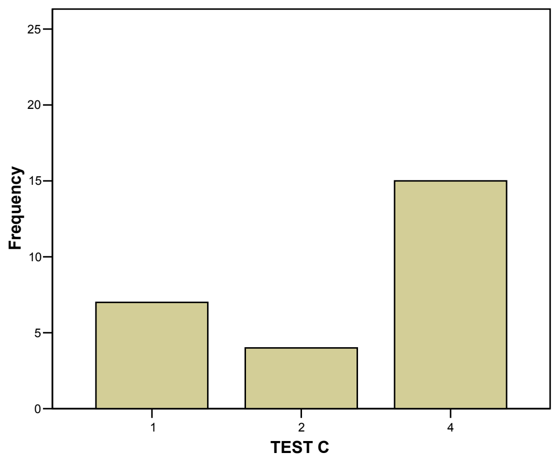
TEST A



TEST B



TEST C



ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ					
Α/Α	ΦΥΛΟ	ΣΧΟΛΕΙΟ	ΤΕΣΤ Α	ΤΕΣΤ Β	ΤΕΣΤ C
6	ΑΓΟΡΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	1	1	1
14	ΑΓΟΡΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	1	1	1
110	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	1	1	1
112	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	1	1	1
36	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	1	1	.
101	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	1	1	.
102	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	1	1	.
108	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	1	.	1
37	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	1	.	.
104	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	1	1	4
114	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	1	1	4
115	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	.	1	1
5	ΑΓΟΡΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	.	1	.
7	ΚΟΡΙΤΣΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	.	1	.
18	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	1	.
107	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	.	1	.
11	ΚΟΡΙΤΣΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	.	1	2
23	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	1	4
25	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	1	4
28	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	1	4
111	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	.	1	4
4	ΚΟΡΙΤΣΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	.	.	1
13	ΚΟΡΙΤΣΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	2	1	2
1	ΚΟΡΙΤΣΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	2	1	.
2	ΚΟΡΙΤΣΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	2	1	.
17	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	2	.	4
32	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	4	4	4
109	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	4	4	4
3	ΑΓΟΡΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	4	4	2
9	ΑΓΟΡΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	4	4	.
33	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	4	4	.
8	ΑΓΟΡΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	4	.	4
30	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	4	.	.
29	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	4	1	2
10	ΑΓΟΡΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	.	4	4
16	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	4	4
20	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	4	4
103	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	.	4	4
15	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	4	.
24	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	4	.
105	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	.	4	.
106	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	.	4	.
26	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	.	4
12	ΚΟΡΙΤΣΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	.	.	.
19	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	.	.
21	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	.	.
22	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	.	.

27	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	.	.
31	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	.	.
34	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	.	.
35	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	.	.
38	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	.	.
113	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	.	.	.

2η ομάδα ερωτήσεων (V6~9) ΠΡΟΦΙΛ 3 & 4

36	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	3	3	3
16	ΚΟΡΙΤΣΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	3	4	4
13	ΚΟΡΙΤΣΙ	ΑΜΦΙΣΣΑΣ	3	.	4
37	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	3	.	.
104	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	.	3	4
114	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	.	3	4
109	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	.	3	.
110	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	.	3	.
115	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1	.	3	.
19	ΑΓΟΡΙ	2ο ΒΟΛΟΥ	.	.	3

ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

ΤΕΣΤ Α

		Συχνότητα	Ποσοστό	Έγκυρο ποσοστό
Valid	**1**	14	23,3	51,9
	2	8	13,3	29,6
	4	5	8,3	18,5
	Σύνολο	27	45,0	100,0
Missing	System	33	55,0	
Σύνολο		60	100,0	

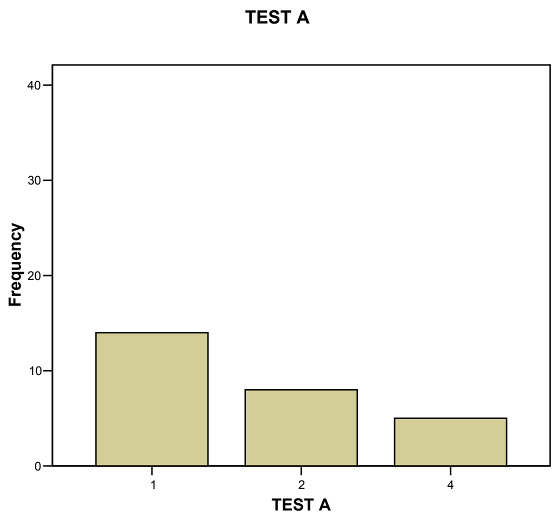
ΤΕΣΤ Β

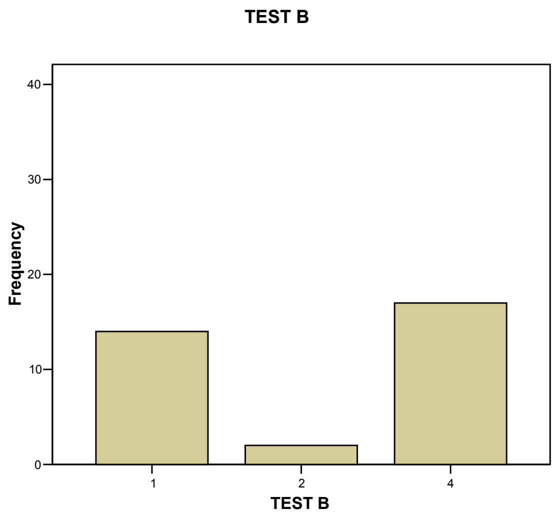
		Συχνότητα	Ποσοστό	Έγκυρο ποσοστό
Valid	**1**	14	23,3	42,4
	2	2	3,3	6,1
	4	17	28,3	51,5
	Σύνολο	33	55,0	100,0
Missing	System	27	45,0	
Σύνολο		60	100,0	

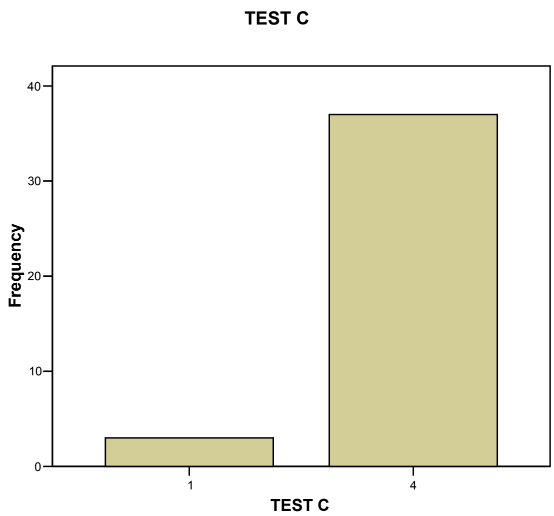
ΤΕΣΤ C

		Συχνότητα	Ποσοστό	Έγκυρο ποσοστό
Valid	**1**	3	5,0	7,5
	4	37	61,7	92,5
	Σύνολο	40	66,7	100,0
Missing	System	20	33,3	
Σύνολο		60	100,0	

ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ







ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ					
Α/Α	ΦΥΛΟ	ΣΧΟΛΕΙΟ	ΤΕΣΤ Α	ΤΕΣΤ Β	ΤΕΣΤ C
95	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	1	1	1
116	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	1	1	1
91	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	1	1	.
174	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	1	1	.
176	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	1	1	.
92	ΚΟΡΙΤΣΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	1	.	1
84	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	1	.	.
186	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	1	.	.
124	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	1	1	4
125	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	1	1	4
127	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	1	1	4
99	ΚΟΡΙΤΣΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	1	2	4
94	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	1	4	.
85	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	1	.	4
181	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	1	.
187	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	1	.
120	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	.	1	4
128	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	.	1	4
100	ΚΟΡΙΤΣΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	2	2	.
80	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	2	.	.
182	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	2	.	.
119	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	2	1	.
178	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	2	1	.
123	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	2	.	4
126	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	2	.	4
167	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	2	.	4
87	ΚΟΡΙΤΣΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	4	4	4
93	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	4	4	4
97	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	4	4	4
131	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	4	4	4
89	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	4	.	4
81	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	.	4	4
117	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	.	4	4
168	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	4	4
170	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	4	4
175	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	4	4
179	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	4	4
180	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	4	4
184	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	4	4
185	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	4	4
189	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	4	4
171	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	4	.
188	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	4	.
82	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	.	.	4
83	ΚΟΡΙΤΣΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	.	.	4
86	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	.	.	4
88	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	.	.	4

90	ΚΟΡΙΤΣΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	.	.	4
96	ΚΟΡΙΤΣΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	.	.	4
118	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	.	.	4
121	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	.	.	4
122	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	.	.	4
129	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	.	.	4
130	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	.	.	4
169	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	.	4
98	ΚΟΡΙΤΣΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	.	.	.
172	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	.	.
173	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	.	.
177	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	.	.
183	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	.	.

2η ομάδα ερωτήσεων (V6~9) ΠΡΟΦΙΛ 3 & 4

122	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	3	3	4
125	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	3	3	4
174	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	3	.	3
87	ΚΟΡΙΤΣΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	3	4	4
167	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	3	4	.
89	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	4	3	.
127	ΚΟΡΙΤΣΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	.	3	4
117	ΑΓΟΡΙ	1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2	.	3	4
176	ΑΓΟΡΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1	.	3	.
91	ΑΓΟΡΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	.	.	3
99	ΚΟΡΙΤΣΙ	25ο ΒΟΛΟΥ	.	.	3

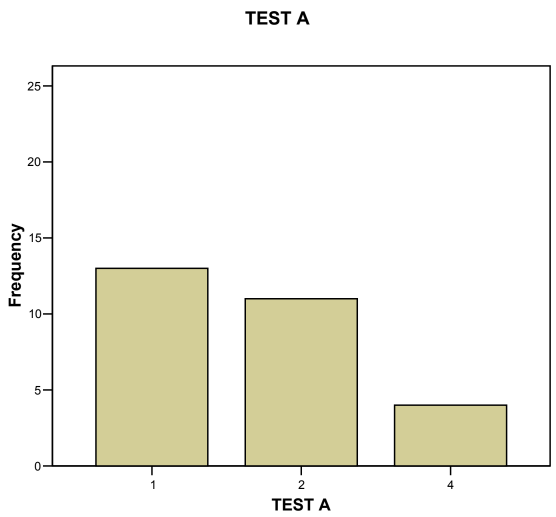
ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΤΕΣΤ Α

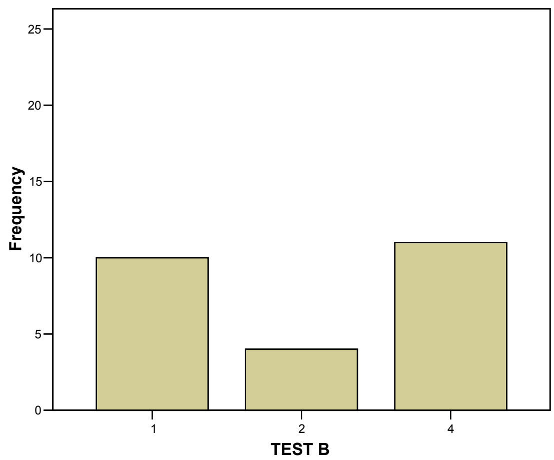
		Συχνότητα	Ποσοστό	Έγκυρο ποσοστό
Valid	**1**	13	20,0	46,4
	2	11	16,9	39,3
	4	4	6,2	14,3
	Σύνολο	28	43,1	100,0
Missing	System	37	56,9	
Σύνολο		65	100,0	

ΤΕΣΤ B				
		Συχνότητα	Ποσοστό	Έγκυρο ποσοστό
Valid	**1**	10	15,4	40,0
	2	4	6,2	16,0
	4	11	16,9	44,0
	Σύνολο	25	38,5	100,0
Missing	System	40	61,5	
Σύνολο		65	100,0	

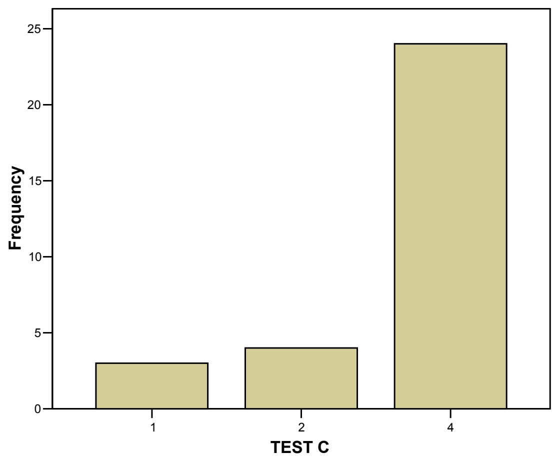
ΤΕΣΤ C				
		Συχνότητα	Ποσοστό	Έγκυρο ποσοστό
Valid	**1**	3	4,6	9,7
	2	4	6,2	12,9
	4	24	36,9	77,4
	Σύνολο	31	47,7	100,0
Missing	System	34	52,3	
Σύνολο		65	100,0	



TEST B



TEST C



ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ					
Α/Α	ΦΥΛΟ	ΣΧΟΛΕΙΟ	ΤΕΣΤ A	ΤΕΣΤ B	ΤΕΣΤ C
138	2	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	1	1	1
139	2	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	1	1	1
132	1	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	1	1	.
140	1	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	1	1	.
142	2	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	1	1	.
217	2	138ο ΑΘΗΝΑΣ	1	1	.
137	1	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	1	.	.
145	2	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	1	.	.
195	2	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	1	.	.
204	1	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	1	.	.
227	1	138ο ΑΘΗΝΑΣ	1	2	.
143	1	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	1	4	.
208	1	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	1	1	4
214	1	138ο ΑΘΗΝΑΣ	.	1	.
233	1	138ο ΑΘΗΝΑΣ	.	.	1

220	2	138ο ΑΘΗΝΑΣ	2	2	2
213	1	138ο ΑΘΗΝΑΣ	2	2	.
221	2	138ο ΑΘΗΝΑΣ	2	2	.
235	1	138ο ΑΘΗΝΑΣ	2	.	2
134	1	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	2	.	.
215	2	138ο ΑΘΗΝΑΣ	2	.	.
232	2	138ο ΑΘΗΝΑΣ	2	.	.
135	1	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	2	1	.
216	2	138ο ΑΘΗΝΑΣ	2	1	4
202	2	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	2	.	4
222	1	138ο ΑΘΗΝΑΣ	2	.	4
193	2	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	.	.	2
144	1	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	4	4	4
212	2	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	4	4	4
230	1	138ο ΑΘΗΝΑΣ	4	4	4
194	1	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	4	4	.
197	1	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	.	4	4
198	1	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	.	4	4
205	1	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	.	4	4
226	2	138ο ΑΘΗΝΑΣ	.	4	4
229	1	138ο ΑΘΗΝΑΣ	.	4	.
192	2	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	.	4	2
136	1	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	.	4
146	1	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	.	4
148	2	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	.	4
149	1	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	.	4
190	1	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	.	.	4
199	2	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	.	.	4
206	1	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	.	.	4
210	1	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	.	.	4
219	1	138ο ΑΘΗΝΑΣ	.	.	4
223	1	138ο ΑΘΗΝΑΣ	.	.	4
225	2	138ο ΑΘΗΝΑΣ	.	.	4
228	1	138ο ΑΘΗΝΑΣ	.	.	4
231	2	138ο ΑΘΗΝΑΣ	.	.	4
133	1	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	.	.
141	1	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	.	.
147	2	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	.	.
191	2	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	.	.	.
196	2	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	.	.	.
200	2	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	.	.	.
201	1	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	.	.	.
203	1	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	.	.	.
207	2	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	.	.	.
209	1	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	.	.	.
211	1	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	.	.	.
218	2	138ο ΑΘΗΝΑΣ	.	.	.
224	1	138ο ΑΘΗΝΑΣ	.	.	.
234	1	138ο ΑΘΗΝΑΣ	.	.	.
236	2	138ο ΑΘΗΝΑΣ	.	.	.

2η ομάδα ερωτήσεων (V6~9) ΠΡΟΦΙΛ 3 & 4

133	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	3	3	3
216	ΚΟΡΙΤΣΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	3	3	3
132	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	3	3	.
141	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	3	3	.
148	ΚΟΡΙΤΣΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	3	3	.
232	ΚΟΡΙΤΣΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	3	3	.
149	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	3	3	4
147	ΚΟΡΙΤΣΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	3	.	4
234	ΑΓΟΡΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	3	.	4
229	ΑΓΟΡΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	3	.	.
236	ΚΟΡΙΤΣΙ	138ο ΑΘΗΝΑΣ	3	.	.
134	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	3	4
140	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	3	.
195	ΚΟΡΙΤΣΙ	76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2	4	.	3
146	ΑΓΟΡΙ	3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	.	3

ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ

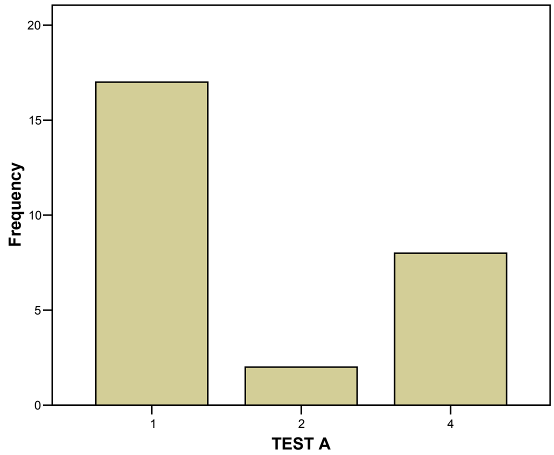
ΤΕΣΤ Α

		Συχνότητα	Ποσοστό	Έγκυρο ποσοστό
Valid	**1**	17	29,3	63,0
	2	2	3,4	7,4
	4	8	13,8	29,6
	Σύνολο	27	46,6	100,0
Missing	System	31	53,4	
Σύνολο		58	100,0	

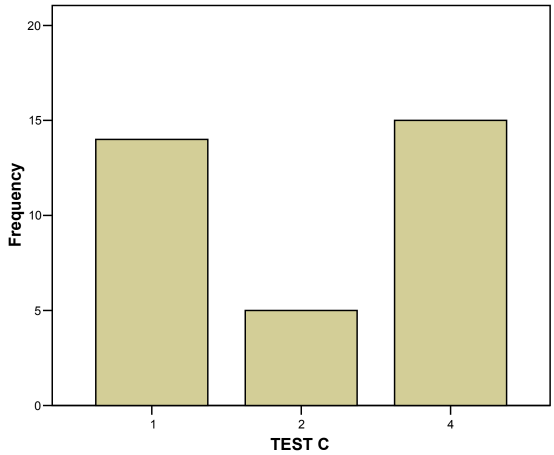
ΤΕΣΤ C

		Συχνότητα	Ποσοστό	Έγκυρο ποσοστό
Valid	**1**	14	24,1	41,2
	2	5	8,6	14,7
	4	15	25,9	44,1
	Σύνολο	34	58,6	100,0
Missing	System	24	41,4	
Σύνολο		58	100,0	

TEST A



TEST C



ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ				
Α/Α	**ΦΥΛΟ**	**ΣΧΟΛΕΙΟ**	**ΤΕΣΤ Α**	**ΤΕΣΤ C**
42	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	1	1
43	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	1	1
52	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	1	1
57	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	1	1
62	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	1	1
44	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	1	.
48	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	1	.
56	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	1	.
54	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	2	.
61	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	.	2
40	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	4	4
49	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	4	4
53	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	4	4

63	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	4	.
39	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	.	4
45	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	.	4
46	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	.	4
47	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	.	4
51	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	.	4
55	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	.	4
58	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	.	4
64	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	.	4
41	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	.	.
50	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1	.	.
59	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	.	.
60	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	.	.

2η ομάδα ερωτήσεων (V6~9) ΠΡΟΦΙΛ 3 & 4

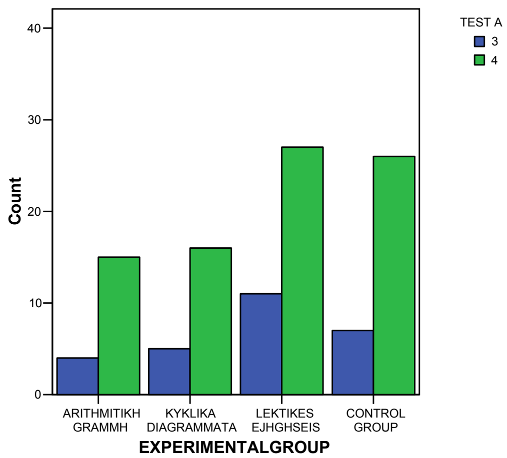
76	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	3	3
157	ΚΟΡΙΤΣΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	3	3
164	ΑΓΟΡΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	3	3
63	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	3	4
69	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	3	.
72	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	3	.
74	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	3	.
65	ΑΓΟΡΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	4	3
67	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	4	3
68	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	.	3
73	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	.	3
62	ΚΟΡΙΤΣΙ	13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2	.	3
155	ΑΓΟΡΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	3
156	ΑΓΟΡΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	3
165	ΑΓΟΡΙ	9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ	.	3

ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΑ ΠΡΟΦΙΛ 3 & 4 ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΗ ΟΜΑΔΑ ΤΩΝ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ V7~9.

	Περιπτώσεις					
	Έγκυρες		Λείπουν		Σύνολο	
	N	Ποσοστό	N	Ποσοστό	N	Ποσοστό
ΤΕΣΤ A	111	47,0%	125	53,0%	236	100,0%
ΤΕΣΤ A	90	38,1%	146	61,9%	236	100,0%
ΤΕΣΤ C	153	64,8%	83	35,2%	236	100,0%

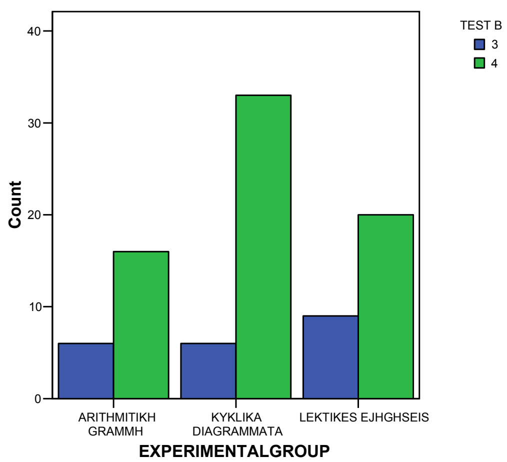
TEST A Crosstabulation				
		ΤΕΣΤ Α		Σύνολο
		3	4	
ΠΕΙΡΑΜ. ΟΜΑΔΑ & ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ**	4	15	19
	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	5	16	21
	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	11	27	38
	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	7	26	33
Σύνολο		27	84	111

Bar Chart



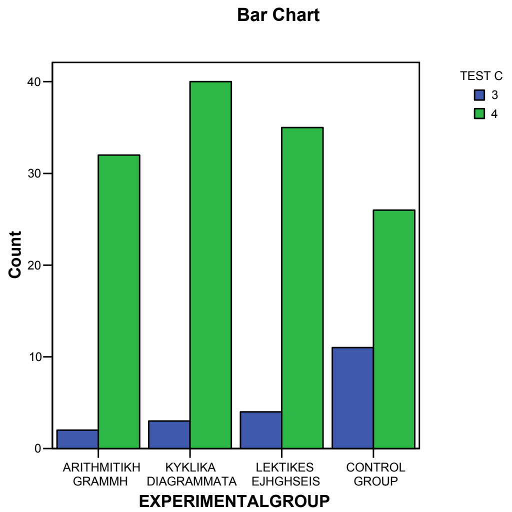
TEST B Crosstabulation				
		ΤΕΣΤ Β		Σύνολο
		3	4	
ΠΕΙΡΑΜ. ΟΜΑΔΑ	**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ**	6	16	22
	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	6	33	39
	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	9	20	29
Σύνολο		21	69	90

Bar Chart

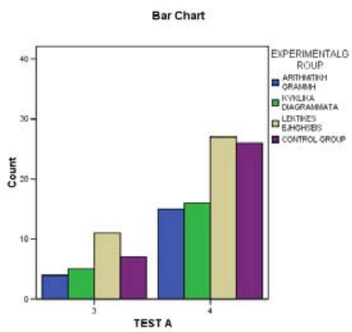


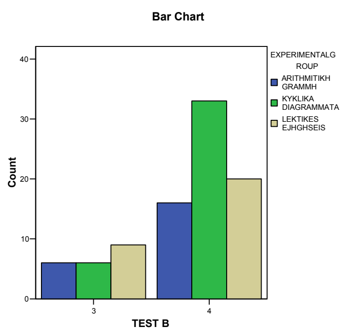
		ΤΕΣΤ C		Σύνολο
		3	4	
ΠΕΙΡΑΜ. ΟΜΑΔΑ & ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ**	2	32	34
	ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	3	40	43
	ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	4	35	39
	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	11	26	37
Σύνολο		20	133	153

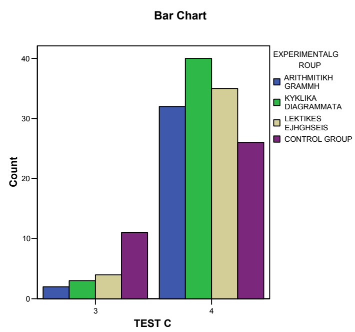
Table: **TEST C Crosstabulation**



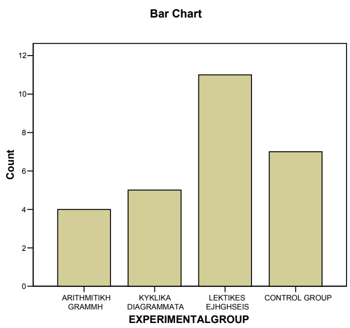
Η κατανομή των προφίλ 3 και 4 για κάθε πειραματική ομάδα και την ομάδα ελέγχου σε κάθε ένα από τα τεστ A, B, C:

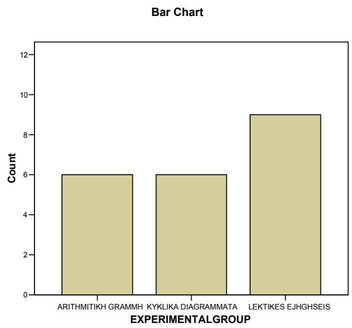


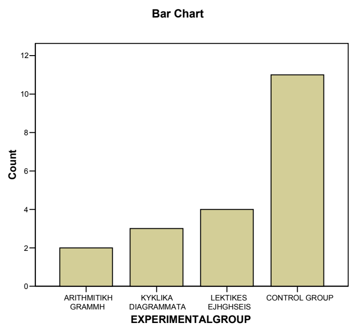




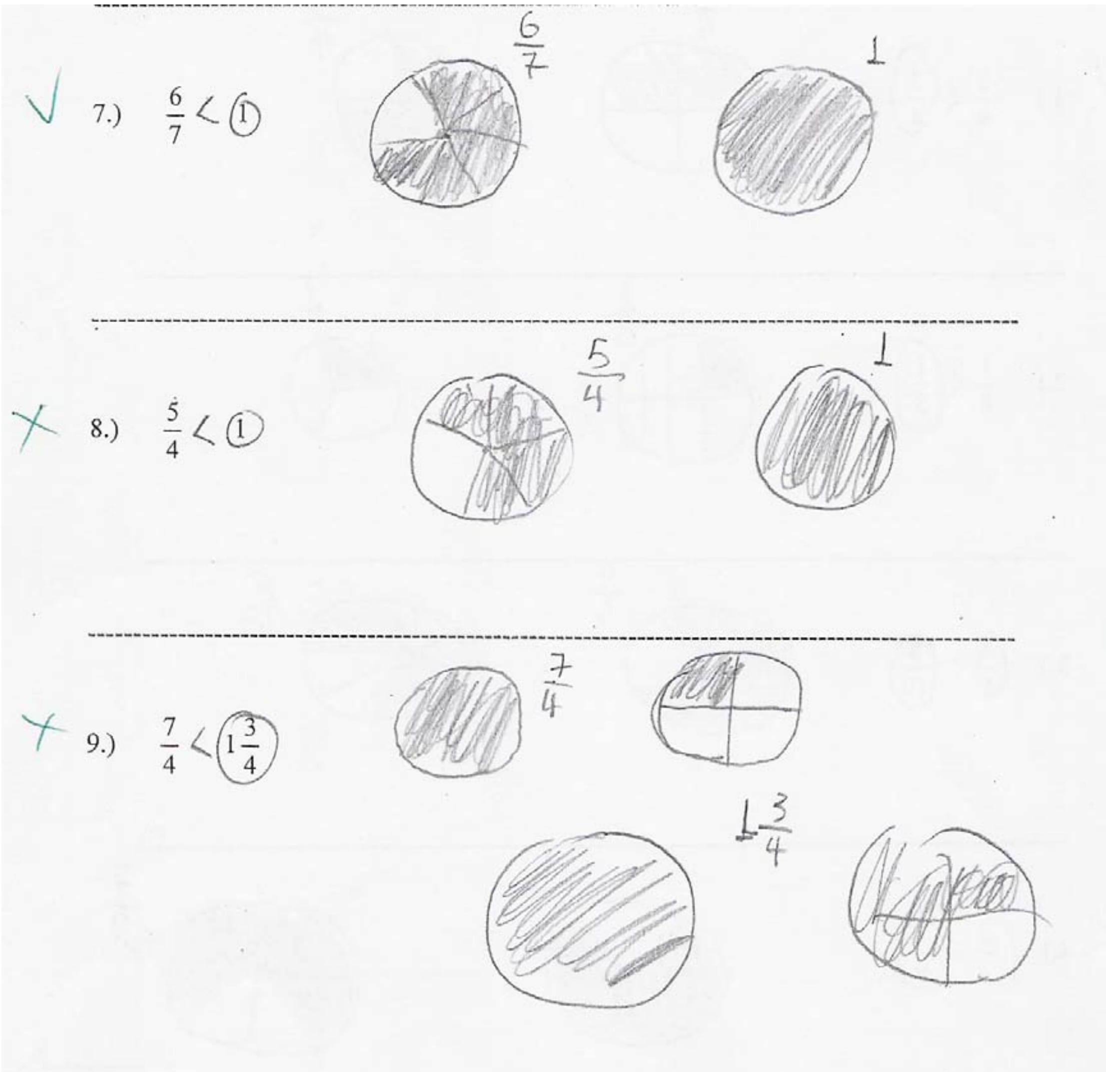
ή εστιάζοντας μόνο στην κατανομή του προφίλ 3:







Τέλος, παραθέτω τις απαντήσεις στο τεστ Β του ατόμου (από την πειραματική ομάδα των κυκλικών διαγραμμάτων) με αύξοντα αριθμό 89 στην έρευνα αυτή, το οποίο ενώ κατά το τεστ Α απάντησε σωστά σε όλα τα θέματα (προφίλ 4), κατά το τεστ Β περνά στο προφίλ 3, όπου παραμένει και στο τεστ C μετά τη διδασκαλία.



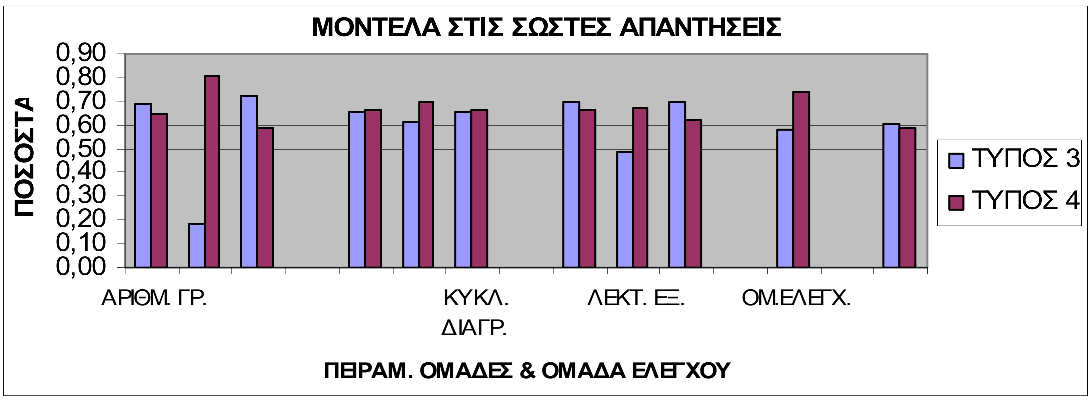
Κατά τη γνώμη μου, είναι αρκετά δύσκολο για ένα μαθητή το να παρουσιάσει με χρήση κυκλικών διαγραμμάτων ένα καταχρηστικό κλάσμα, μπορεί να το κατανοήσει ίσως καλύτερα βλέποντας το συγκριτικά μ' ένα μικτό, όπου αντιλαμβάνεται ότι ίσως χρειάζεται και μια δεύτερη μονάδα (ένα δεύτερο κύκλο) για να το παραστήσει. Η δυσκολία αυτή αναπαράστασης των καταχρηστικών κλασμάτων από τη πλευρά του μαθητή, αλλοιώνει την εικόνα που σχηματίζουμε σχετικά με την σύνδεση της χρήσης κυκλικών διαγραμμάτων και του μοντέλου εκείνου κατά το οποίο ο μαθητής θεωρεί ότι όλα τα κλάσματα είναι μικρότερα της μονάδας (δείχνοντας μια ανεξαρτησία όπως είδαμε και παραπάνω). Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι ο τρόπος με τον οποίο διδάχτηκε την έννοια του κλάσματος ο μαθητής (π.χ. με τον ορισμό του ως «μέρος», με κυκλικά διαγράμματα, κ.τ.λ.) δεν σχετίζεται με αντίστοιχα λάθη που κάνει ο μαθητής με βάση το μοντέλο αυτό, είτε ανταποκρίνεται πλήρως στο προφίλ 3 που μελετήσαμε είτε εν μέρει είτε και σε κάποιο συνδυασμό των προφίλ που παρουσιάσαμε παραπάνω.

Κατανομή των μοντέλων στις σωστές απαντήσεις

Η εικόνα σχετικά με τα μοντέλα που ακολουθούν οι μαθητές όσον αφορά τη διάταξη των κλασμάτων, μπορούμε να πούμε ότι θα είναι ολοκληρωμένη αν δούμε επίσης τις συχνότητες των μοντέλων αυτών στα θέματα που απάντησαν σωστά οι μαθητές. Όπως αναφέραμε και στον σχεδιασμό της έρευνας, τα θέματα επιλέχθηκαν έτσι ώστε σε κάποια από αυτά η σωστή απάντηση να έρχεται σε συμφωνία με τα μοντέλα αυτά σχετικά με τις αντιλήψεις των μαθητών στην διάταξη των κλασμάτων και σε άλλα να έρχεται σε αντίθεση. Μέχρι τώρα εξετάσαμε την επίδραση των μοντέλων στην αποτυχία των μαθητών, βλέποντας τις συχνότητες των αντίστοιχων μοντέλων στις λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών. Θα εξετάσουμε τώρα την επίδραση των μοντέλων αυτών όσον αφορά τις σωστές απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές σε συμωνία με αυτά. Υπενθυμίζουμε ότι με τύπο 3 θα αναφερόμαστε στο μοντέλο σύμφωνα με το οποίο οι μαθητές θεωρούν ως μεγαλύτερο κλάσμα αυτό με τους μικρότερους όρους, ενώ ως τύπου 4 χαρακτηρίζουμε τις απαντήσεις όπου οι μαθητές θεωρούν ως μεγαλύτερο κλάσμα αυτό με τους μεγαλύτερους όρους. Εξετάζουμε την ομάδα των έξι πρώτων ερωτήσεων, καθώς αυτές σχετίζονται με τα αντίστοιχα μοντέλα.
Τα αποτελέσματα είναι τα εξής:

ΤΕΣΤ Α		
	ΤΥΠΟΣ 3	**ΤΥΠΟΣ 4**
ΑΡΙΘΜ. ΓΡΑΜΜΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ	73	103
ΑΡΙΘΜ. ΓΡΑΜΜΗ ΠΟΣΟΣΤΑ	68,87%	64,78%
ΚΥΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΥΝΟΛΑ	79	120
ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΠΟΣΟΣΤΑ	65,83%	66,67%
ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ	85	122
ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΠΟΣΟΣΤΑ	69,67%	66,67%
ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ	67	129
ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΠΟΣΟΣΤΑ	57,76%	74,14%
ΣΥΝΟΛΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ	219	352
ΓΕΝΙΚΑ ΠΟΣΟΣΤΑ	64,04%	68,62%
ΤΕΣΤ Β		
ΑΡΙΘΜ. ΓΡΑΜΜΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ	15	97
ΑΡΙΘΜ. ΓΡΑΜΜΗ ΠΟΣΟΣΤΑ	18,75%	80,83%
ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ	53	90
ΚΥΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΠΟΣΟΣΤΑ	61,63%	69,77%
ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ	133	278
ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΠΟΣΟΣΤΑ	48,54%	67,64%
ΣΥΝΟΛΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ	68	187
ΓΕΝΙΚΑ ΠΟΣΟΣΤΑ	40,96%	75,10%
ΤΕΣΤ C		
ΑΡΙΘΜ. ΓΡΑΜΜΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ	55	67
ΑΡΙΘΜ. ΓΡΑΜΜΗ ΠΟΣΟΣΤΑ	72,37%	58,77%
ΚΥΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΥΝΟΛΑ	30	46
ΚΥΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΠΟΣΟΣΤΑ	65,22%	66,67%
ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ	57	77
ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΠΟΣΟΣΤΑ	69,51%	62,60%
ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ	52	76
ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΠΟΣΟΣΤΑ	60,47%	58,91%
ΣΥΝΟΛΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ	137	189
ΓΕΝΙΚΑ ΠΟΣΟΣΤΑ	65,87%	60,58%

Μια πρώτη διαπίστωση είναι ότι τα δύο μοντέλα (τύπος 3 και τύπος 4) φαίνεται ότι έχουν αρχικά την ίδια επίδραση (με βάση το ποσοστό των αντίστοιχων απαντήσεων) στις σωστές απάντησεις. Η ισορροπία αυτή όμως διαταράσσεται κατά το τεστ Β με τις αναπαραστάσεις και τις λεκτικές εξηγήσεις, όπου έχουμε διαφορροποιήσεις ανάλογα με την πειραματική ομάδα. Είναι φανερό ότι η ανάλυση αυτή των σωστών απάντήσεων, συμφωνεί με όσα έχουμε δει και στην εξέταση των μοντέλων αυτών σχετικά με τα λάθη των μαθητών. Πράγματι όπως διαπιστώνουμε για την πειραματική ομάδα της αριθμητικής γραμμής υπάρχει ουσιαστική μείωση του ποσοστού των σωστών απαντήσεων, σύμφωνα με το μοντέλο (τύπος 3) κατά το οποίο οι μαθητές θεωρούν ως μεγαλύτερο κλάσμα αυτό με τους μικρότερους όρους (από 68,87% στο τεστ Α σε 18,75% στο τεστ Β με τις αναπαραστάσεις). Από την άλλη μεριά, είναι χαρακτηριστικό ότι για το μοντέλο σύμφωνα με το οποίο οι μαθητές θεωρούν ως μεγαλύτερο κλάσμα αυτό με τους μεγαλύτερους όρους (τύπος 4), βλέπουμε μια άνοδο με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής (από 64,78% στο τεστ Α σε 80,83% στο τεστ Β). Παρόμοια εικόνα είχαμε συναντήσει, όπως προαναφέραμε στην ανάλυση των μοντέλων σχετικά με τις λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών. Μείωση παρατηρείται επίσης και για την πειραματική ομάδα των λεκτικών εξηγήσεων (από 69,67% στο τεστ Α σε 48,54% στο τεστ Β). Εδώ όμως, για το μοντέλο σύμφωνα με το οποίο οι μαθητές θεωρούν ως μεγαλύτερο κλάσμα αυτό με τους μεγαλύτερους όρους (τύπος 4), δεν παρατηρείται το φαινόμενο που είχαμε πριν στην πειραματική ομάδα της αριθμητικής γραμμής καθώς δεν παρατηρείται ιδιαίτερη μεταβολή (66,67% στο τεστ Α και 67,64% στο τεστ Β). Για την πειραματική ομάδα των κυκλικών διαγραμμάτων δεν παρατηρείται ιδιαίτερη μεταβολή. Τέλος μετά τη διδασκαλία, στο τεστ C, επαανέρχεται η ισορροπία που είχαμε αρχικά στο τεστ Α, ως προς τις αναλογίες των δύο μοντέλων στις σωστές απαντήσεις.



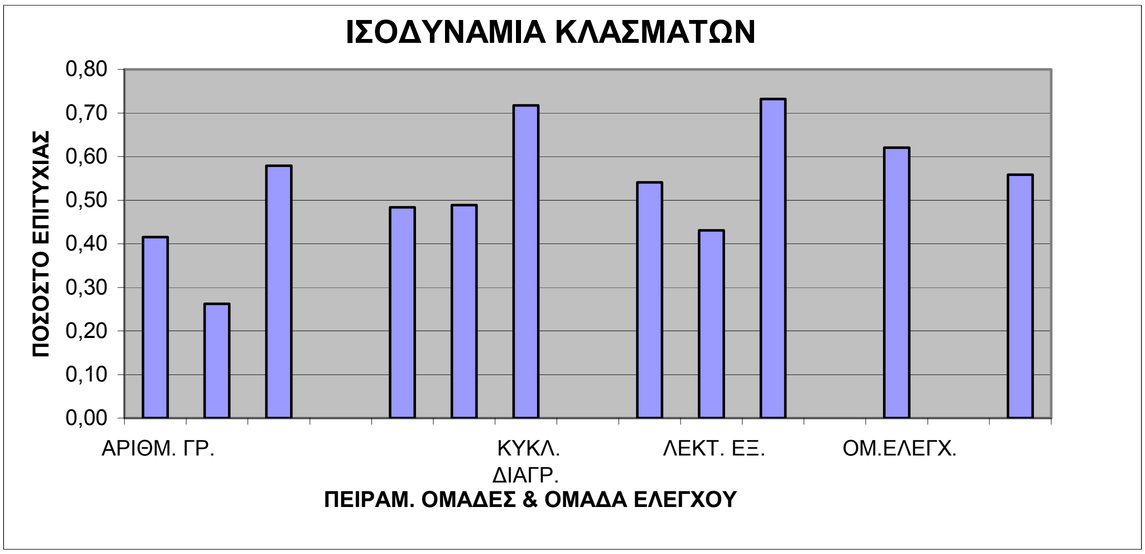
Ισοδυναμία κλασμάτων

Μια ιδιαίτερη περίπτωση στα θέματα που εξετάσαμε ως προς τη διάταξη κλασμάτων, ήταν και η ισοδυναμία κλασμάτων. Παρακάτω παρουσιάζουμε αναλυτικά για κάθε πειραματική ομάδα τα ποσοστά επιτυχίας σε κάθε τεστ σχετικά με την ισοδυναμία κλασμάτων. Δεδομένου ότι είχαμε μικρό μόνο αριθμό περιπτώσεων ισοδυναμίας (2 θέματα σε κάθε ερωτηματολόγιο), τα παρακάτω αποτελέσματα είναι μόνο ενδεικτικά.

ΤΕΣΤ Α	ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	41,5%
ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	48,3%
ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	54,1%
ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	62,1%
ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΠΟΣΟΣΤΟ	50,9%

ΤΕΣΤ Β	
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	26,3%
ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	48,8%
ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	43,1%
ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	
ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΠΟΣΟΣΤΟ	38,0%

Όπως βλέπουμε υπάρχει αξιοσημείωτη μείωση του ποσοστού επιτυχίας γα την πειραματική ομάδα της αριθμητικής γραμμής κατά τη μετάβαση από το τεστ Α στο τεστ Β με τις αναπαραστάσεις, μικρή μείωση παρατηρείται επίσης και για την ομάδα των λεκτικών εξηγήσεων, ενώ δεν παρατηρείται θα λέγαμε ιδιαίτερη μεταβολή στην πειραματική ομάδα των κυκλικών διαγραμμάτων.



ΤΕΣΤ C

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	57,9%
ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	71,7%
ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	73,2%
ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	55,8%
ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΠΟΣΟΣΤΟ	60,1%

Τέλος, μετά τη διδακτική παρέμβαση με την διδασκαλία, είχαμε στο τεστ C ουσιαστική βελτίωση του ποσοστού επιτυχίας σε όλες τις πειραματικές ομάδες (στην ομάδα ελέγχου, όπως έχουμε ήδη αναφέρει δεν έγινε καμία διδακτική παρέμβαση).

3.3 ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ GRAS

Η ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΩΣ ΕΝΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

- Ο προβληματισμός σχετικά με την έρευνα που διεξάγεται σε διάφορα εκπαιδευτικά θέματα καταδεικνύει την αναγκαιότητα χρήσης της συνεπαγωγικής μεθόδου. Ο Gras (1995) αναφέρει ότι υπάρχει ανάγκη για χρήση μιας μεθόδου ανάλυσης δεδομένων, η οποία αποτελεί «ένα ακριβή μηχανισμό συλλογής και επεξεργασίας δεδομένων κατάλληλων να ενισχύσουν ή να διαψεύσουν υποθέσεις, να εξάγουν συμπεράσματα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί μια μέθοδος ανάλυσης, η οποία ιεραρχεί και συνδέει παράγοντες.
- Η μέθοδος που προτείνει ο Gras (1995) κρίνεται κατάλληλη στην περίπτωση όπου αναζητούνται: (α) οι κύριοι παράγοντες διάκρισης σε ένα πληθυσμό μέσω των μεταβλητών, (β) ένας διαμερισμός των μεταβλητών, (γ) μια τυπολογία ή μια ταξινόμηση – μια ιεραρχική ταξινόμηση ομοιοτήτων και (δ) μια συνεπαγωγή ανάμεσα στις μεταβλητές ή τις κλάσεις μεταβλητών- ένα δέντρο συνεπαγωγής ή μια ιεραρχία συνεπαγωγής κτλ.
- Η συνεπαγωγική μέθοδος επιτρέπει την παρακολούθηση της γένεσης μιας ικανότητας και επιτρέπει την εύρεση αναλλοίωτων ή σταθερών στη σκέψη των υποκειμένων. Δεν πρόκειται για σχέσεις αιτιότητας, αλλά για ένα δείκτη ποιότητας, που επιτρέπει τον ισχυρισμό ότι η επιτυχία σε ένα έργο συνεπάγεται την επιτυχία σε κάποιο άλλο έργο με το οποίο το πρώτο έργο συνδέεται. Κατ' αναλογία η αποτυχία σε κάποιο έργο συνεπάγεται την αποτυχία σε κάποιο άλλο έργο με το οποίο το πρώτο έργο συνδέεται.

Η συνεπαγωγική μέθοδος δίνει τα εξής τρία διαγράμματα:

- (α) Συνεπαγωγικό Διάγραμμα,
- (β) Δενδροδιάγραμμα Ομοιότητας και
- (γ) Δενδροδιάγραμμα Ιεράρχησης.

Στο Συνεπαγωγικό Διάγραμμα φαίνονται οι διάφορες σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν ανάμεσα σε μεταβλητές. Οι συνεπαγωγές είναι δυνατόν να ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99% (χοντρό βέλος) ή 95% (λεπτό βέλος). Στην περίπτωση που παρουσιάζεται η συνεπαγωγή *Έργο1→ Έργο 2* αυτό σημαίνει ότι η επιτυχία στο έργο 1 συνεπάγεται επιτυχία στο Έργο 2 και η αποτυχία στο Έργο 2 συνεπάγεται αποτυχία στο Έργο 1. Αν το υποκείμενο επιτύχει στο Έργο 1 θα επιτύχει και στο Έργο 2, ενώ αν το υποκείμενο αποτύχει στο Έργο 2 θα αποτύχει και στο Έργο 1.

Στο Δενδροδιάγραμμα Ομοιότητας φαίνονται οι σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα σε διάφορα έργα. Έργα κατά την επίλυση των οποίων τα υποκείμενα συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο ομαδοποιούνται μαζί. Οι οριζόντιες συνδέσεις με έντονο μαύρο δηλώνουν την ύπαρξη ομοιότητας σε επίπεδο σημαντικότητας 99%.

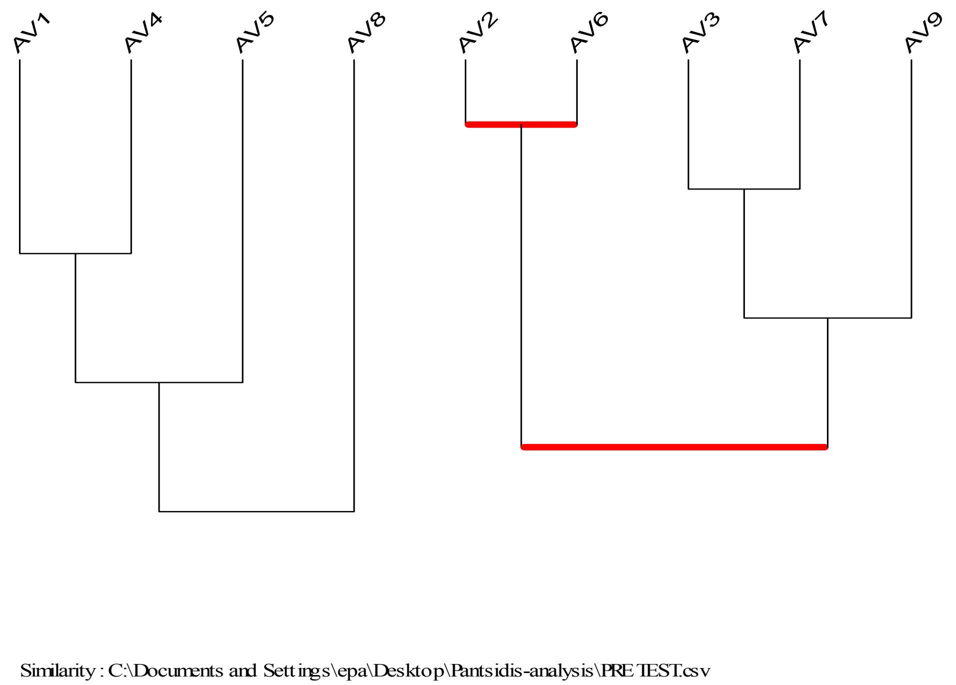
Το Δενδροδιάγραμμα Ιεράρχησης παρουσιάζει τις σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν ανάμεσα σε όλες τις μεταβλητές, κατά σειρά προτεραιότητας. Οι συνεπαγωγές με έντονο μαύρο ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99%.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ GRAS

Διερευνώντας τώρα το βαθμό δυσκολίας των επιμέρους ερωτήσεων του κάθε τεστ στις διάφορες πειραματικές ομάδες, καθώς επίσης την σχέση μεταξύ τους με βάση τα αποτελέσματα των μαθητών έχουμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

ΤΕΣΤ Α

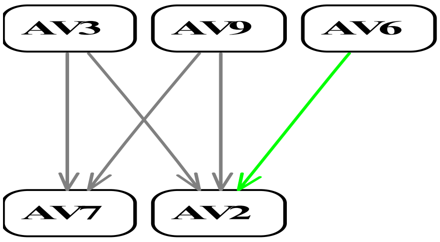
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΤΕΣΤ Α



Με βάση το γενικό διάγραμμα ομοιότητας του τεστ Α (που αφορά όλους τους μαθητές) μια ισχυρή ομάδα που εμφανίζεται μεταξύ των εννιά (9) ερωτήσεων του τεστ Α είναι αυτή που σχηματίζεται από τις ερωτήσεις AV2 και AV6.

Η εικόνα αποσαφηνίζεται μέσω του συνεπαγωγικού διαγράμματος όπου, σχετικά με την συμπεριφορά που παρατηρείται κατά τις εννιά (9) συγκρίσεις του ερωτηματολογίου, έχουμε την πληροφορία ότι επιτυχία από ένα μαθητή στην ερώτηση AV6 συνεπάγεται επιτυχία και στην ερώτηση AV2 από τον ίδιο μαθητή (με στατιστική βεβαιότητα 90%).

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ ΤΕΣΤ Α



Graph : C:\Documents and Settin99\e95a\90e:85op\Pantsidis-analysis\

Οι πράσινες γραμμές έχουν 90% σημαντικότητα και οι μαύρες γραμμές αντιστοιχούν σε 85% σημαντικότητα.

Μια δεύτερη ευρύτερη ομάδα είναι αυτή που προκύπτει από την πρώτη ομάδα που αναφέραμε (AV2 & AV6) και την ομάδα των ερωτήσεων AV3 και AV7 σε συνδυασμό με την ερώτηση AV9. Στο συνεπαγωγικό διάγραμμα τώρα, αν και κάπως πιο αμυδρά (στατιστική βεβαιότητα 85%) σκιαγραφείται, ότι επιτυχία ερώτηση AV3 συνεπάγεται επιτυχία και στις ερωτήσεις AV7 και AV2, παρόμοια επιτυχία στην ερώτηση AV9 συνεπάγεται επίσης επιτυχία στις ίδιες ερωτήσεις AV7 και AV2.

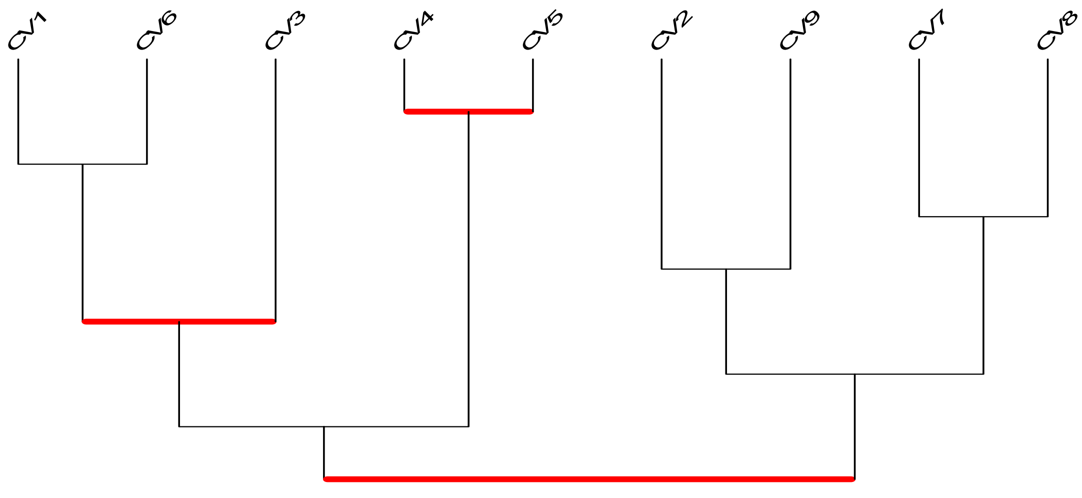
Σχολιάζοντας τα αποτελέσματα αυτά μπορούμε να πούμε ότι η κατανόηση της ισοδυναμίας κλασμάτων καταχρηστικών και μη (όπως είναι οι περιπτώσεις των ερωτήσεων AV3 και AV9) φαίνεται να είναι καθοριστική για την σύγκριση από τους μαθητές ενός καταχρηστικού κλάσματος με τη μονάδα (ερώτηση AV7) καθώς επίσης και για την σύγκριση διαφόρων κλασματικών μονάδων (ερώτηση AV2). Ιδιαίτερα η κατανόηση της διάταξης μεταξύ ενός καταχρηστικού κλάσματος και ενός μη καταχρηστικού κλάσματος φαίνεται να είναι καθοριστική για τη σύγκριση μεταξύ διαφόρων κλασματικών μονάδων.

ΤΕΣΤ C

Στο τεστ C τώρα, με βάση το γενικό διάγραμμα ομοιότητας (που αφορά όλους τους μαθητές), βλέπουμε ότι μια πρώτη ισχυρή ομάδα αποτελούν οι ερωτήσεις CV4 και CV5. Το ιεραρχικό διάγραμμα έρχεται στην συνέχεια να μας διευκρινίσει ότι επιτυχία στην ερώτηση CV5 συνεπάγεται και επιτυχία στην ερώτηση CV4 (και στην συνέχεια επιτυχία στην ομάδα αυτή οδηγεί σε επιτυχία στην ερώτηση CV2).

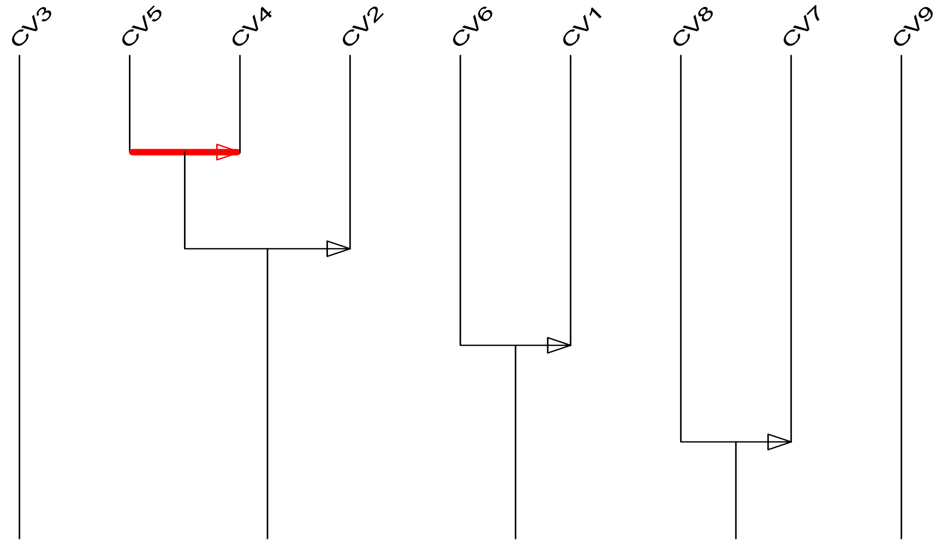
Μια δεύτερη ομάδα αποτελείται από την ομάδα των ερωτήσεων CV1 και CV6 σε συνδυασμό με την ερώτηση CV3. Με βάση ιεραρχικό διάγραμμα σκιαγραφείται, αν και κάπως πιο αμυδρά, ότι επιτυχία στην ερώτηση CV6 συνεπάγεται επιτυχία στην ερώτηση CV1.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΤΕΣΤ C



Similarity : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\POSTTEST.csv

ΙΕΡΑΡΧΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ ΤΕΣΤ C



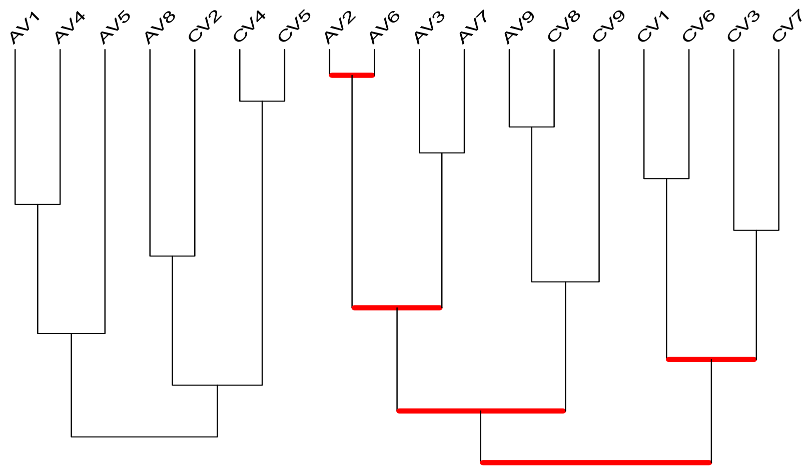
Hierarchical tree : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\POSTTEST.csv

Γενικά μεταξύ όλων των ερωτήσεων του post test παρατηρείται (με βάση το γενικό διάγραμμα ομοιότητας) μια παρόμοια συμπεριφορά (ενδεικτική της θετικής γενικά επίδρασης που είχε η διδακτική μας παρέμβαση).

Σχολιάζοντας τα αποτελέσματα θα μπορούσαμε να πούμε ότι όπως φαίνεται είναι πιο εύκολο για ένα μαθητή να απαντήσει σχετικά με τη διάταξη για παράδειγμα των ετερώνυμων κλασμάτων $\frac{3}{5}$ και $\frac{7}{10}$ (ερώτηση CV4) όπου υπάρχει μια σχέση (διπλασίου) μεταξύ των παρονομαστών όταν μάλιστα έχει κατανοήσει και μπορεί να συγκρίνει ετερώνυμα κλάσματα όπως τα $\frac{5}{9}$ και $\frac{3}{7}$ (ερώτηση CV5) όπου δεν υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των αντίστοιχων όρων των κλασμάτων αυτών.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΤΕΣΤ Α ΚΑΙ C

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΤΕΣΤ Α ΚΑΙ C



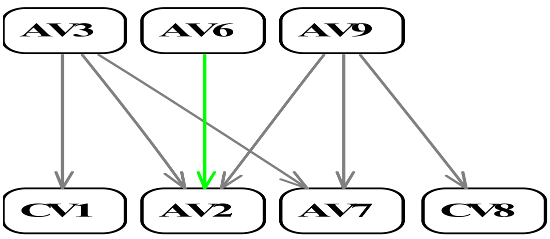
Similarity : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\PRETESTANDPOSTTEST.csv

Συγκρίνοντας τώρα το Pre test με το Post test, βλέπουμε στο αντίστοιχο διάγραμμα ομοιότητας την ισχυρή ομάδα των AV2 και AV6 που έχουμε ήδη επισημάνει (AV6$\Rightarrow$AV2), καθώς επίσης και την σύνδεση της με την ομάδα των AV3 και AV7, μόνο που εδώ τώρα η AV9 συνδέεται με την CV8 και επιπλέον η ομάδα αυτών των δύο (AV9 και CV8) με την CV9. Το στοιχείο αυτό σε συνδυασμό με την ομάδα των AV8 και CV2 που παρατηρείται μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι δεν υφίσταται το φαινόμενο της «στεγανοποίησης» μεταξύ των δυο τεστ καθώς όπως βλέπουμε εμπλέκονται μεταξύ τους.

Ο όρος στεγανοποίηση δεν αναφέρεται στη σημασία που του αποδίδουν ορισμένοι ψυχολόγοι (π.χ. Karmiloff-Smith, 1992) με την οποία υπονοείται ότι δεν υπάρχει κανενός είδους σχέση ή επικοινωνία μεταξύ δύο συνόλων δεξιοτήτων, ικανοτήτων ή γνώσεων – ή «σπονδύλων» (Karmiloff-Smith, 1992). Ο όρος στεγανοποίηση χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία με μια στατιστική έννοια: ένα σύνολο έργων, ασκήσεων ή προβλημάτων είναι στεγανοποιημένο ως προς ένα άλλο αντίστοιχο σύνολο, όταν τα δύο σύνολα σχηματίζουν διαφορετικές ομαδοποιήσεις ή κλάσεις ομαδοποιήσεων στο Δενδροδιάγραμμα Ομοιότητας που προκύπτει από τη Στατιστική Συνεπαγωγική Μέθοδο του Gras.

Σαφέστερη εικόνα έχουμε με βάση το συνεπαγωγικό διάγραμμα όπου με στατιστική βεβαιότητα 85% επιβεβαιώνεται η σχέση (καθώς τις συνεπάγονται) των ερωτήσεων AV3 & AV9 με τις AV2 & AV7 που ήδη έχουμε αναφέρει, αλλά τώρα έχουμε και την επιπλέον πληροφορία ότι επιτυχία στην AV3 συνεπάγεται επιτυχία και στην CV1 καθώς επίσης και ότι επιτυχία στην AV9 συνεπάγεται επιτυχία στην CV8.

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΤΩΝ ΤΕΣΤ Α ΚΑΙ C



Graph : C:\Documents and Settings\epa\99 95 90 85sidis-analysis\PRE

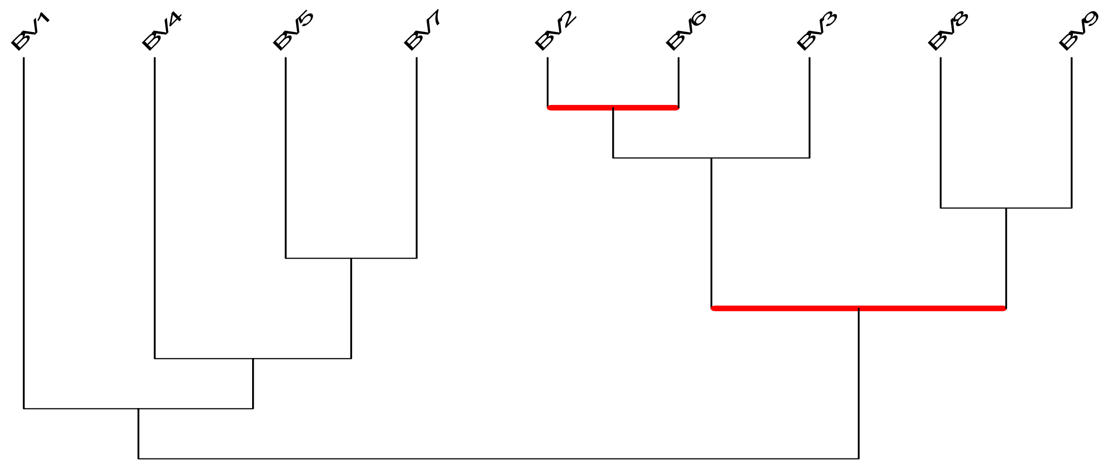
Σχολιάζοντας τα παραπάνω μπορούμε να πούμε ότι είναι φανερό πως η κατανόηση θεμάτων σχετικά με την ισοδυναμία κλασμάτων (AV3 και AV9) όπως επίσης και της σύγκρισης ενός μη καταχρηστικού κλάσματος με ένα καταχρηστικό (AV6) είναι βασική στην κατανόηση της διάταξης των κλασμάτων.

ΤΕΣΤ Β

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

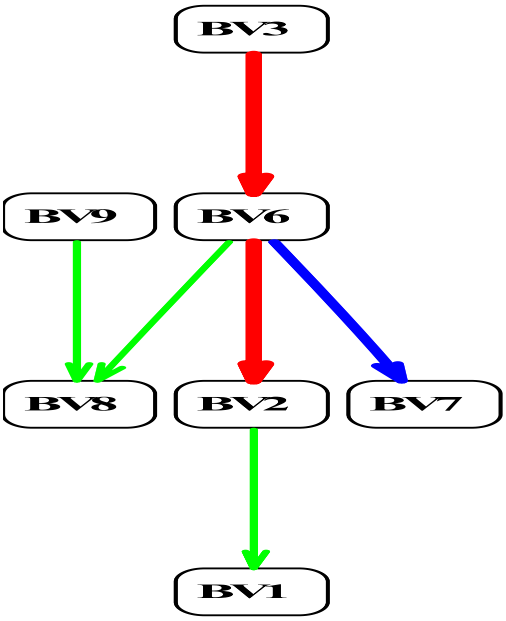
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ ΤΕΣΤ Β



Similarity : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΓΡΑΜΜΗΒ.csv

Βλέπουμε πάλι και στο τεστ Β με την αριθμητική γραμμή, στο αντίστοιχο διάγραμμα ομοιότητας, την σχέση μεταξύ των ερωτήσεων BV2 και BV6, καθώς επίσης και μια δεύτερη σχέση της ομάδας αυτής σε συνδυασμό με την ερώτηση BV3 και της ομάδας των BV8 και BV9.

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ ΤΕΣΤ B

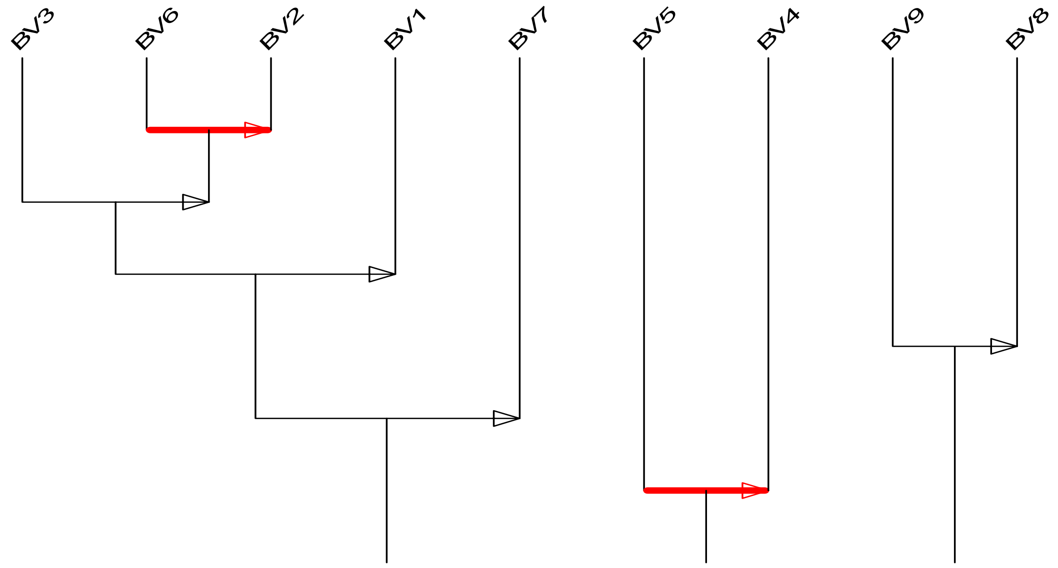


Graph : C:\Documents and Settin99\e95a\90e:85op\Pantsidis

Όπως βλέπουμε και στην συνέχεια με το συνεπαγωγικό διάγραμμα, πιο κρίσιμη (και πιο δύσκολη) ερώτηση αναδεικνύεται η BV3, καθώς επιτυχία σ’ αυτήν συνεπάγεται επιτυχία και στην ερώτηση BV6 (στατιστική βεβαιότητα 99%), η οποία με την σειρά της οδηγεί σε επιτυχή απάντηση στις ερωτήσεις BV2 (στατιστική βεβαιότητα 99%), BV7 (στατιστική βεβαιότητα 95%), BV8 (στατιστική βεβαιότητα 90%), ενώ με τη σειρά της η επιτυχία στην ερώτηση BV2 οδηγεί σε επιτυχή απάντηση και στην ερώτηση BV1. Έχουμε επίσης την πληροφορία, με στατιστική βεβαιότητα 90%, ότι επιτυχία στην ερώτηση BV9 οδηγεί σε επιτυχία και στην ερώτηση BV8. Όπως βλέπουμε η πειραματική ομάδα της αριθμητικής γραμμής διαφοροποιείται μόνο κατά ένα μικρό μέρος σε σχέση με τη γενική εικόνα του συνόλου των μαθητών που είδαμε προηγουμένως για το τεστ A και το τεστ C.

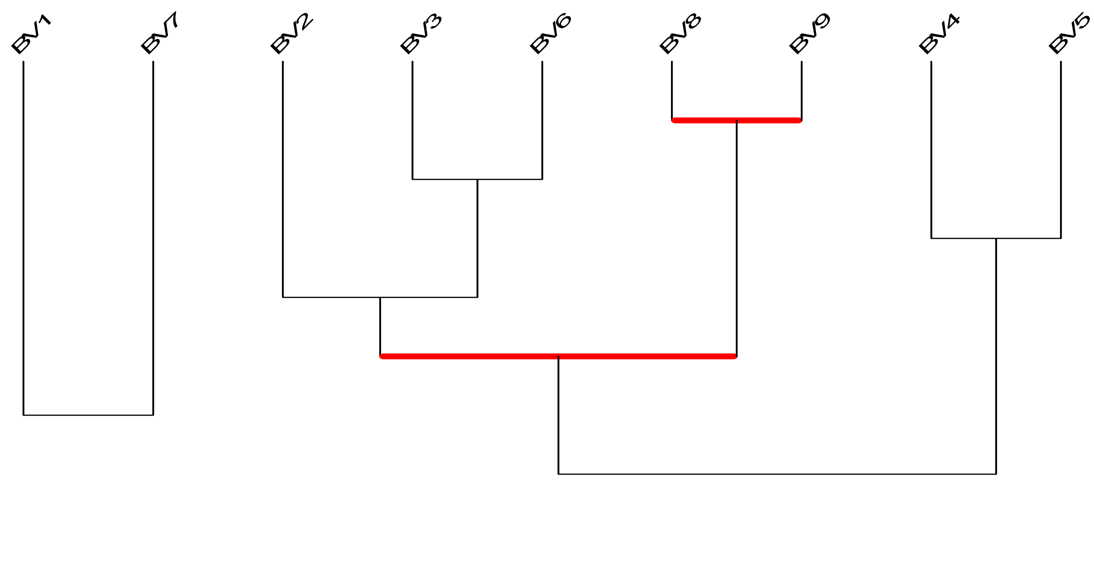
Με το ιεραρχικό διάγραμμα επιβεβαιώνονται τα παραπάνω συμπεράσματα και επιπλέον έχουμε την πληροφορία ότι επιτυχία στην ερώτηση BV5 συνεπάγεται επιτυχία και στην ερώτηση BV4 (κάτι που εμφανίζεται όπως είδαμε προηγουμένως και στα γενικά αποτελέσματα όλων των μαθητών στο τεστ C όπου και το σχολιάσαμε).

ΙΕΡΑΡΧΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ ΤΕΣΤ Β



Herarchical tree : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΓΡΑΜΜΗΒ.csv

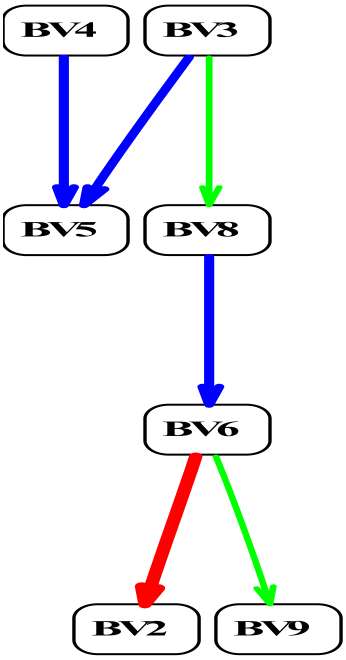
ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΤΕΣΤ Β



Similarity : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ B.csv

Βλέπουμε πάλι και στο τεστ Β με τα κυκλικά διαγράμματα, στο αντίστοιχο διάγραμμα ομοιότητας, την σχέση μεταξύ μιας πρώτης ομάδας αυτής της ερώτησης BV2 και της ομάδας των (BV3 και BV6) με μια δεύτερη ομάδα, αυτή των (BV8 και BV9) η οποία εδώ στα κυκλικά διαγράμματα είναι και η πιο ισχυρή (ενώ στην αριθμητική γραμμή ισχυρότερη ομάδα ήταν αυτή των BV2 και BV6).

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΤΕΣΤ Β



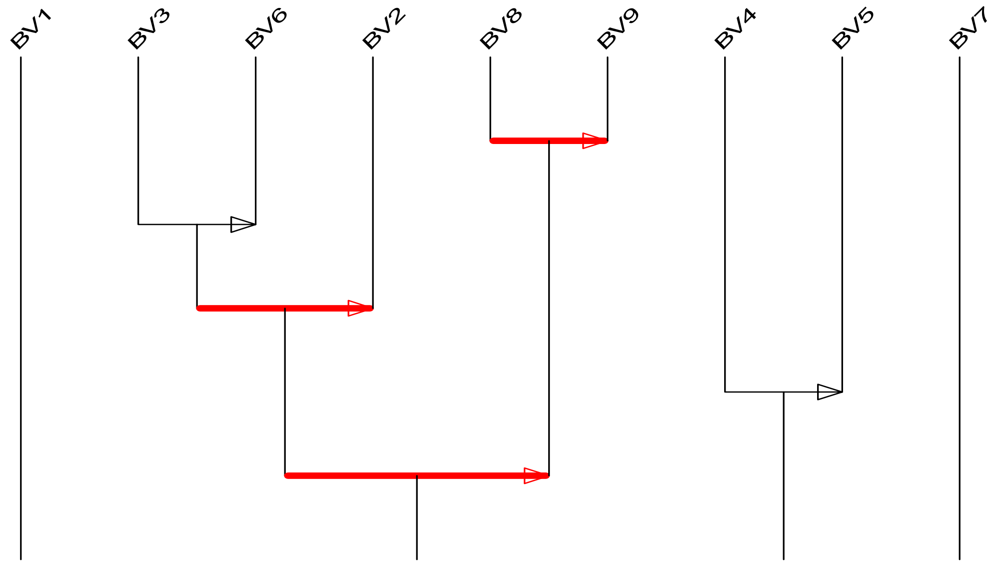
Graph : C:\Documents and S99in95\90a\85esktop\Pantsidis-analysis\KY

Ισχυρότερη συνεπαγωγή βλέπουμε και πάλι πως είναι αυτή της BV6⇒BV2 (στατιστική βεβαιότητα 99%). Επίσης ως πιο κρίσιμη στο να απαντηθεί ερώτηση είναι η BV3, καθώς αυτή οδηγεί σε επιτυχία και στην ερώτηση BV8 (αλλά και στην ερώτηση BV5 με στατιστική βεβαιότητα 95%) η οποία με την σειρά της οδηγεί σε επιτυχία την ερώτηση BV6 (στατιστική βεβαιότητα 95%) και αυτή με την σειρά της στην επιτυχή απάντηση των ερωτήσεων BV2 (στατιστική βεβαιότητα 99%) και BV9 (στατιστική βεβαιότητα 90%).

Το ιεραρχικό διάγραμμα επιβεβαιώνει τα παραπάνω συμπεράσματα και ισχυροποιεί αυτή την διαφοροποίηση σχετικά με τις ερωτήσεις BV8 και BV9.

Σχολιάζοντας μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι έχουμε μια διαφοροποίηση σε σχέση με την πειραματική ομάδα της αριθμητικής γραμμής αλλά και με τα γενικά αποτελέσματα του τεστ C, καθώς τώρα η επιτυχία στη ερώτηση BV4 συνεπάγεται επιτυχία και στην ερώτηση BV5 και επίσης η επιτυχία στη ερώτηση BV8 συνεπάγεται επιτυχία και στην ερώτηση BV9 (ενώ όπως είδαμε στην πειραματική ομάδα της αριθμητικής γραμμής τόσο στο ιεραρχικό όσο και στο συνεπαγωγικό διάγραμμα είχαμε την συνεπαγωγή και $BV9 \Rightarrow BV8$ καθώς και με βάση το ιεραρχικό διάγραμμα ότι $BV5 \Rightarrow BV4$, αλλά και με τα γενικά αποτελέσματα του τεστ C στο ιεραρχικό διάγραμμα είχαμε ότι $CV5 \Rightarrow CV4$).

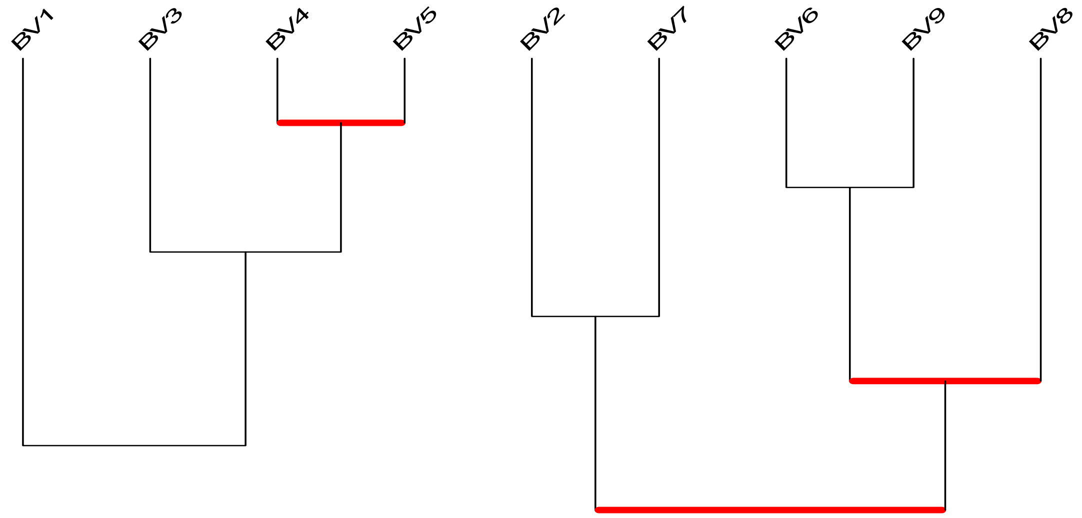
ΙΕΡΑΡΧΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΤΕΣΤ Β



Herarchical tree : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ B.csv

ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

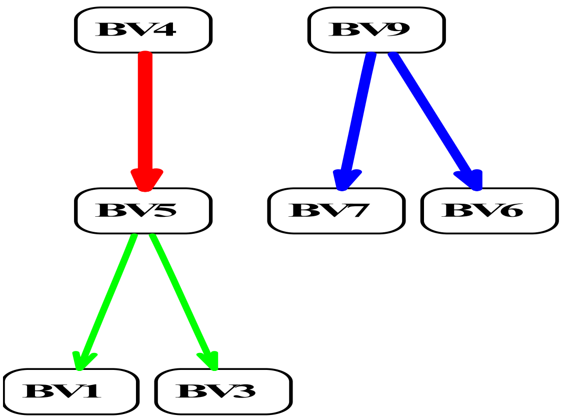
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΕΞΗΓΗΣΕΩΝ ΤΕΣΤ Β



Similarity : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ B.csv

Εδώ η εικόνα είναι αρκετά διαφοροποιημένη σε σχέση με τις δυο προηγούμενες πειραματικές ομάδες. Έτσι, ισχυρότερη ομάδα εδώ, όπως προκύπτει από το αντίστοιχο διάγραμμα ομοιότητας, είναι αυτή των ερωτήσεων BV4 και BV5.

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΕΞΗΓΗΣΕΩΝ ΤΕΣΤ Β



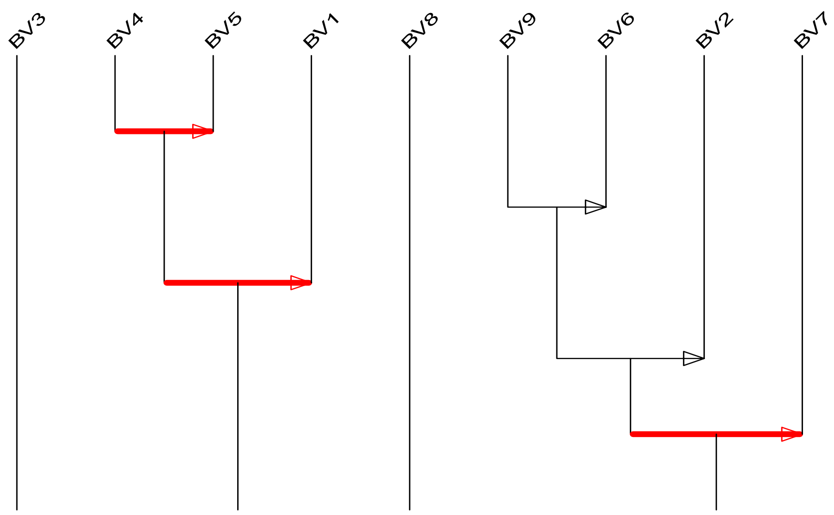
Graph : C:\Documents and Settings\ep 99 95 90 85 ntsidis-analysi

Όπως φαίνεται και από το συνεπαγωγικό διάγραμμα, η συνεπαγωγή της BV5 από την BV4 είναι η ισχυρότερη συνεπαγωγή (στατιστική βεβαιότητα 99%), κάτι που είδαμε και στα κυκλικά διαγράμματα σ' αντίθεση με την εικόνα που είχαμε από τα ιεραρχικά διαγράμματα της αριθμητικής γραμμής και του γενικού post test όπου είχαμε ότι BV5$\Rightarrow$BV4. Το ιεραρχικό διάγραμμα επιβεβαιώνει την συνεπαγωγή αυτή (BV4$\Rightarrow$BV5) και επιπλέον δίνει την συνεπαγωγή της BV1 από την ομάδα αυτή των ερωτήσεων BV4 και BV5. Μια άλλη ομάδα είναι αυτή που αποτελείται από την ομάδα των ερωτήσεων BV6 & BV9 σε συνδυασμό με την ερώτηση BV8. Με βάση το συνεπαγωγικό (αλλά και το ιεραρχικό) διάγραμμα έχουμε ότι BV9$\Rightarrow$BV6.

Τέλος έχουμε και μια ευρύτερη ομάδα που αποτελείται από την προηγούμενη ομάδα (των ερωτήσεων BV6 & BV9 σε συνδυασμό με την ερώτηση BV8) και την ομάδα των ερωτήσεων (BV2 & BV7). Με βάση το συνεπαγωγικό έχουμε όπως αναφέραμε και πριν ότι BV9$\Rightarrow$BV6 αλλά και επίσης ότι BV9$\Rightarrow$BV7. Το ιεραρχικό διάγραμμα επιβεβαιώνεται την εικόνα αυτή και επιπλέον συνδέει την ερώτηση BV2 ως απόρροια της ομάδας των ερωτήσεων BV9 & BV6.

Σχολιάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα θα πρέπει να σημειώσουμε ότι υποβαθμίζεται η κρισιμότητα της απάντησης-αιτιολόγησης της ερώτησης BV3, καθώς κυρίαρχο ρόλο τώρα έχει η ερώτηση BV4 και επίσης (αν και κάπως μικρότερο) η ερώτηση BV9.

ΙΕΡΑΡΧΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΕΞΗΓΗΣΕΩΝ ΤΕΣΤ Β



Herarchical tree : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΛΕΚΤΙ ΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙ Σ B.csv

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΤΕΣΤ ΞΕΧΩΡΙΣΤΑ ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΜΙΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ

Βλέποντας τις επιδόσεις σε κάθε τεστ ξεχωριστά για κάθε ερώτηση έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

Όπως βλέπουμε στο διάγραμμα ομοιότητας έχουμε τις εξής σημαντικές ομάδες:

Α) Ισχυρότερη ομάδα όλων των ερωτήσεων και στα τρία (3) τεστ είναι αυτή των ερωτήσεων BV2 και BV6. Με βάση τώρα το συνεπαγωγικό διάγραμμα αποσαφηνίζεται ότι επιτυχία στην ερώτηση BV6 συνεπάγεται επιτυχία και στην ερώτηση BV2, καθώς μια από τις τρεις πιο σημαντικές συνεπαγωγές του διαγράμματος είναι η BV6$\Rightarrow$BV2 (στατιστική βεβαιότητα 99%).

Β) Μια άλλη ευρύτερη ομάδα αποτελούν η προηγούμενη ομάδα (των BV2 & BV6) σε συνδυασμό με την BV3 και η ομάδα των ερωτήσεων AV9 & BV9 σε συνδυασμό με την BV8. Με βάση το συνεπαγωγικό διάγραμμα έχουμε συγκεκριμένα ότι BV3$\Rightarrow$BV6$\Rightarrow$BV2 (δύο από τις τρεις πιο σημαντικές συνεπαγωγές και οι δύο, στατιστική βεβαιότητα 99%) και την λιγότερο σημαντική συνεπαγωγή BV6$\Rightarrow$BV8.

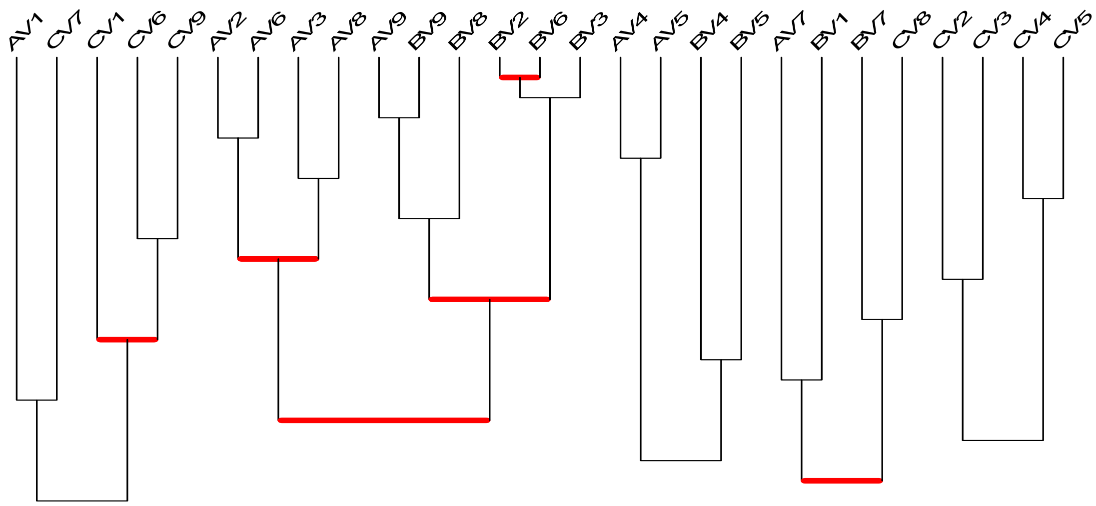
Γ) Αντίστοιχη ομάδα έχουμε στο pre-test αυτή που αποτελείται από την ομάδα των AV2 και AV6 και την ομάδα των ερωτήσεων AV3 και AV8. Με βάση το συνεπαγωγικό διάγραμμα έχουμε συγκεκριμένα ότι AV3$\Rightarrow$AV8$\Rightarrow$AV6$\Rightarrow$AV2 (όπου η AV6$\Rightarrow$AV2 είναι η τρίτη σημαντική συνεπαγωγή του διαγράμματος, με στατιστική βεβαιότητα 99% . Το ιεραρχικό διάγραμμα επιβεβαιώνει τα παραπάνω συμπεράσματα και ισχυροποιεί την ομάδα των AV3 και AV2 με την συνεπαγωγή AV3$\Rightarrow$AV2 ενώ στην συνέχεια επισημαίνεται (και διαφοροποιείται σε σχέση με το συνεπαγωγικό διάγραμμα) ότι η AV6 συνεπάγεται από την ομάδα των AV3 & AV2 και στην συνέχεια από το σύνολο αυτών των ερωτήσεων έχουμε την είσοδο μιας νέας συνεπαγωγής από αυτές, της ερώτησης AV7 που έρχεται να προστεθεί αντί της AV8 που είχαμε στα προηγούμενα δύο διαγράμματα. Επίσης η ομάδα όλων των παραπάνω ερωτήσεων (AV3 & AV2 & AV6 & AV7) συνεπάγεται από την ομάδα των ερωτήσεων AV9 και BV9 η οποία στην (Β) περίπτωση που είδαμε παραπάνω (τόσο στο διάγραμμα ομοιότητας όσο και στο συνεπαγωγικό διάγραμμα), σε συνδυασμό με την BV8, συνδεόταν με τις BV2, BV6 και BV3. Οι BV2, BV6 και BV3 στο ιεραρχικό διάγραμμα (όπως και στο συνεπαγωγικό διάγραμμα συνδέονται (συνεπάγοντας την επιτυχία) με τη BV1.

Δ) Μια άλλη ευρύτερη ομάδα αποτελούν οι ομάδες που είδαμε στις περιπτώσεις (Β) και (Γ).

Ε) Στο τεστ C διακρίνουμε την ομάδα που αποτελείται από την ερώτηση CV1 και την ομάδα των CV6 & CV9. Με βάση το συνεπαγωγικό διάγραμμα έχουμε συγκεκριμένα ότι CV9⇒(στατιστική βεβαιότητα 90%) CV6⇒CV1 (στατιστική βεβαιότητα 95%)

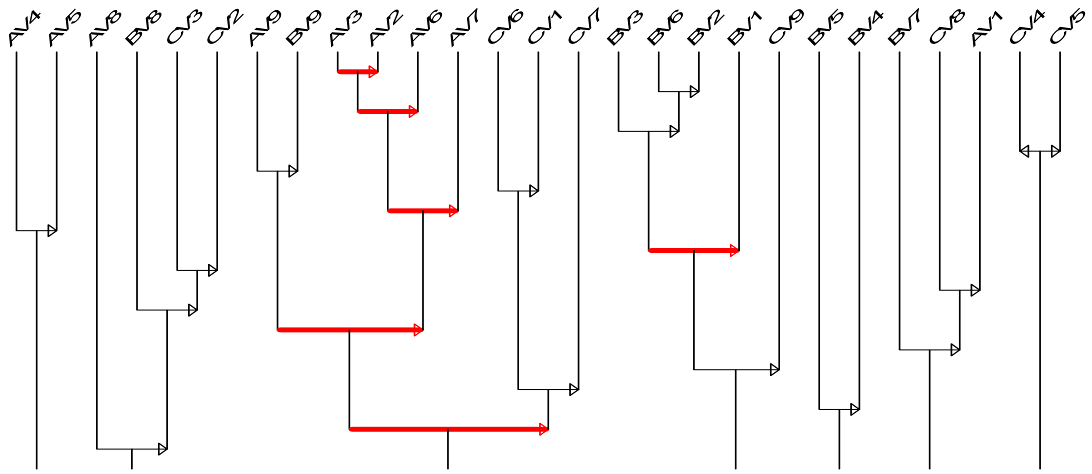
ΣΤ) Τέλος έχουμε μια σύνθετη ομάδα από ερωτήσεις και των τριών (3) τεστ που αποτελείται από την ομάδα των AV7 και BV1 και την ομάδα των BV7 και CV8.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ [ΤΕΣΤ A, B, C]



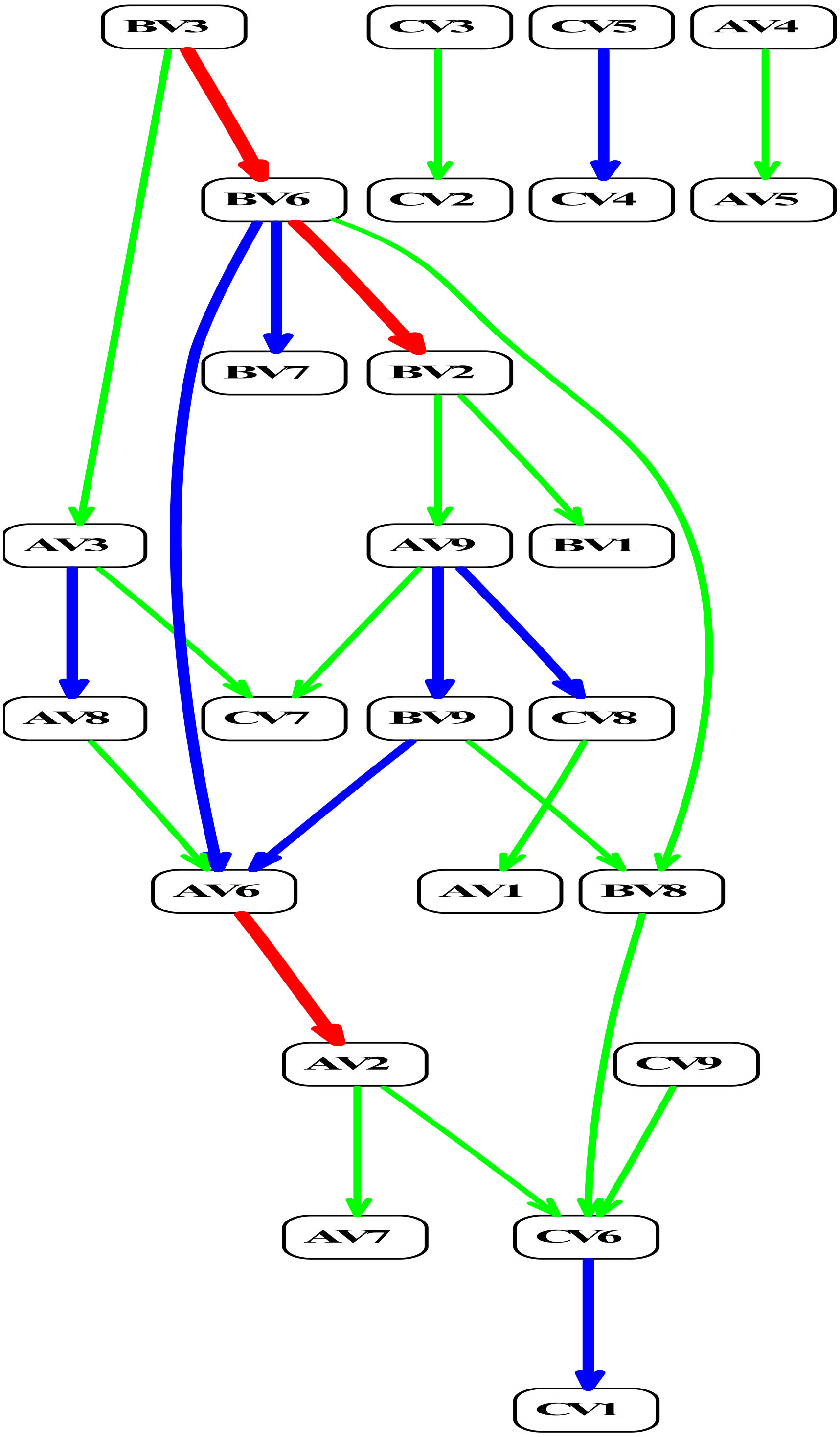
Similarity : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΓΡΑΜΜΗΒΑC.csv

ΙΕΡΑΡΧΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ [ΤΕΣΤ A, B, C]



Hierarchical tree : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΓΡΑΜΜΗΒΑC.csv

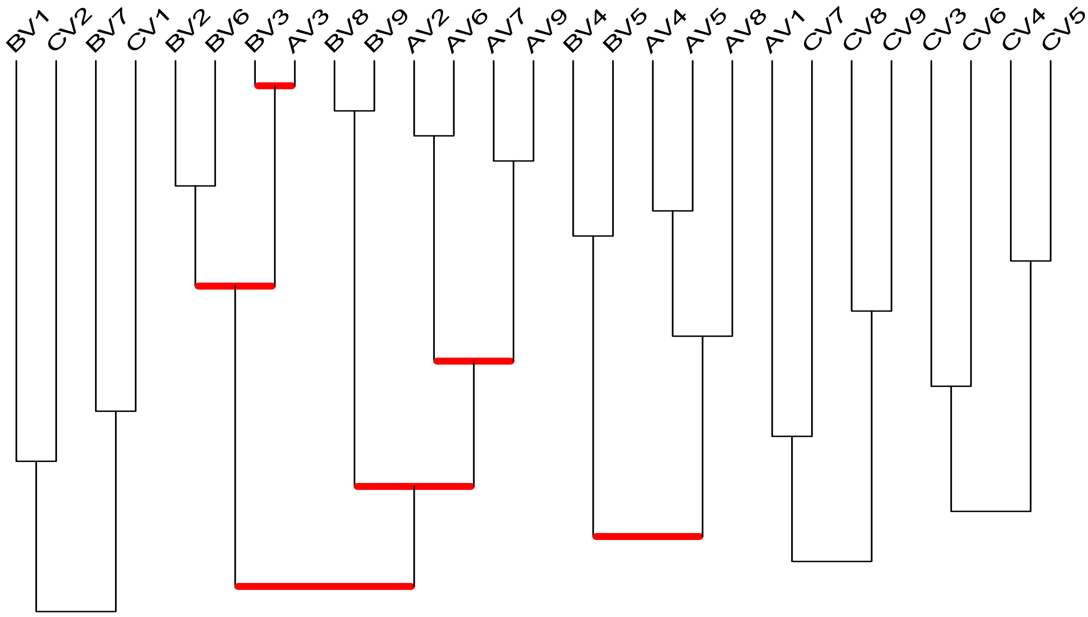
ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ [ΤΕΣΤ Α, Β, C]



Graph : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\F99nt95lis90n

ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ [ΤΕΣΤ A, B, C]



Similarity : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BAC.csv

Όπως βλέπουμε στο διάγραμμα ομοιότητας έχουμε τις εξής σημαντικές ομάδες:

A) Ισχυρότερη ομάδα όλων των ερωτήσεων και στα τρία (3) τεστ είναι αυτή των ερωτήσεων BV3 και AV3. Με βάση το συνεπαγωγικό διάγραμμα έχουμε συγκεκριμένα ως μια από τις δύο σημαντικότερες συνεπαγωγές (στατιστική βεβαιότητα 99%) ότι AV3⇒BV3. Η δεύτερη εξίσου σημαντική (στατιστική βεβαιότητα 99%) συνεπαγωγή είναι της ομάδας (αν και όχι ιδιαίτερα εμφανούς στο αντίστοιχο διάγραμμα ομοιότητας) των ερωτήσεων CV4, CV5 συγκεκριμένα είναι CV4⇒CV5.

B) Μια δεύτερη σημαντική ομάδα είναι αυτή που αποτελείται από την πρώτη ομάδα (των BV3 και AV3) και την ομάδα των BV2 και BV6. Με βάση το συνεπαγωγικό διάγραμμα έχουμε συγκεκριμένα BV6⇒BV2 (αναλυτικότερα είναι AV3⇒BV3⇒AV6⇒(ή AV7 ή BV8)⇒BV6⇒BV9⇒AV2⇒BV2). Το ιεραρχικό διάγραμμα επιβεβαιώνει τα παραπάνω συμπεράσματα (αν και τώρα η ομάδα των AV6, AV2 απορρέει από την ομάδα των ερωτήσεων AV3, BV3, BV6, BV2) και έρχεται τελικά να προσθέσει και την ερώτηση CV6.

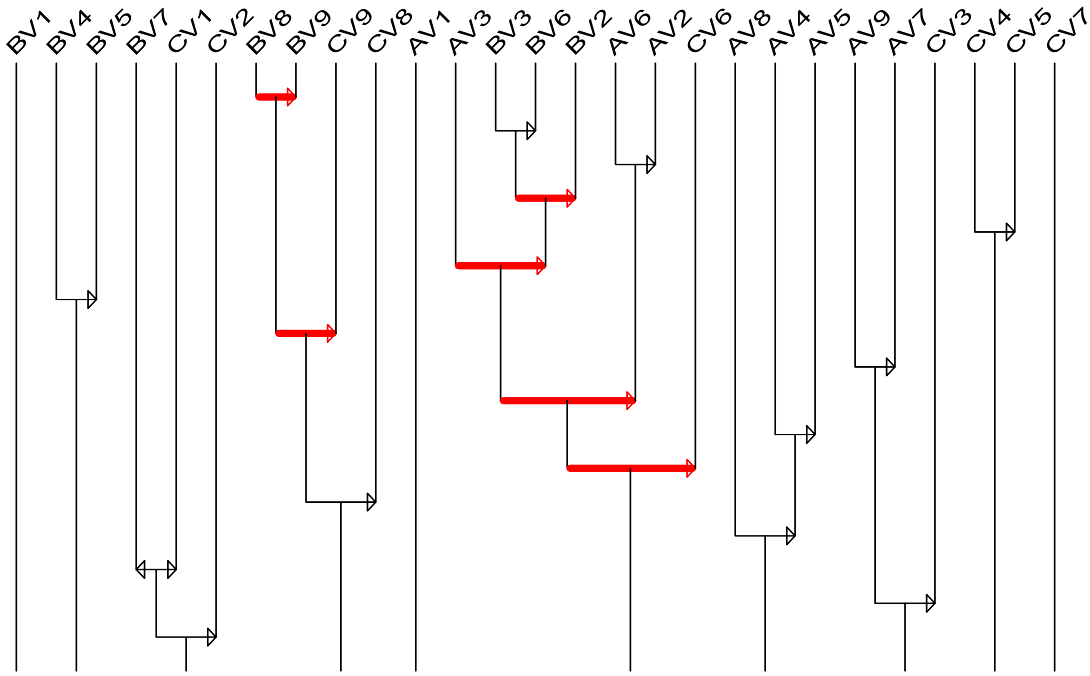
Γ) Μια άλλη ομάδα ερωτήσεων του τεστ Α αποτελείται από την ομάδα των AV2 & AV6 και την ομάδα των AV7 & AV9. Με βάση το συνεπαγωγικό αλλά και το κυριαρχικό διάγραμμα έχουμε συγκεκριμένα ότι AV9$\Rightarrow$AV7.

Δ) Η προηγούμενη ομάδα της περίπτωσης (Γ) μαζί με την ομάδα των BV8 & BV9 του τεστ Β, δίνει μια άλλη ευρύτερη ομάδα. Ιδιαίτερα στο ιεραρχικό διάγραμμα αναδεικνύεται η συνεπαγωγή BV8$\Rightarrow$BV9 (η οποία προκύπτει και από το συνεπαγωγικό διάγραμμα) και επιπλέον η ομάδα των BV8 & BV9 συνδέεται ισχυρά (με βάση το κυρίως το ιεραρχικό διάγραμμα αλλά επίσης και σε συμφωνία με το συνεπαγωγικό διάγραμμα), καθώς την συνεπάγεται, με την ερώτηση CV9.

Ε) Μια ακόμη πιο μεγάλη ομάδα, με βάση πάντα το διάγραμμα ομοιότητας έχουμε από την ομάδα της περίπτωσης (Β) και την ομάδα της περίπτωσης (Δ).

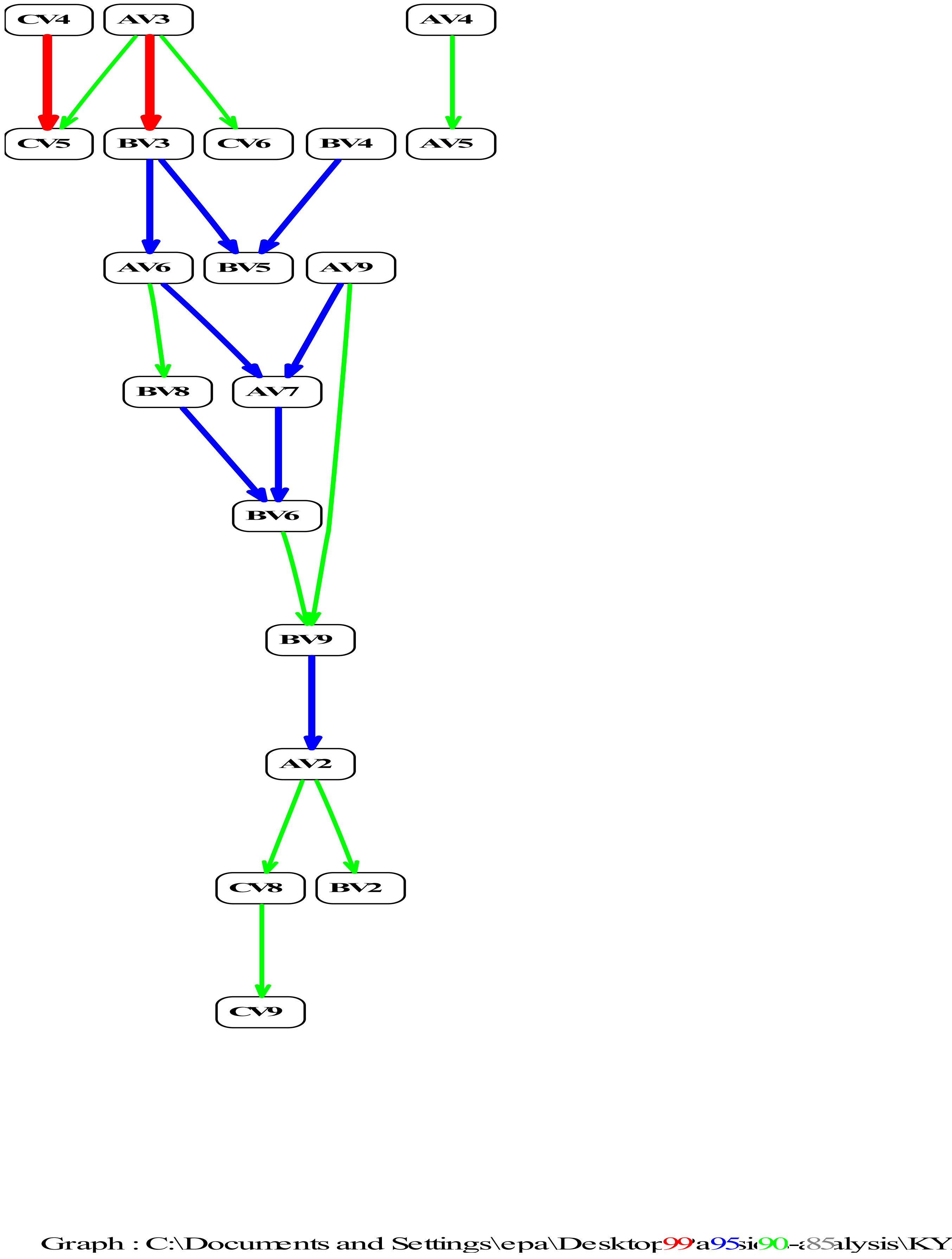
ΣΤ) Τέλος, μια άλλη μεγάλη ομάδα αποτελούν η ομάδα των ερωτήσεων BV4 & BV5 από το τεστ Β και η ομάδα των AV4 & AV5 σε συνδυασμό με την AV8 από το τεστ Α. Από το συνεπαγωγικό διάγραμμα έχουμε συγκεκριμένα ότι BV4$\Rightarrow$BV5 και AV4$\Rightarrow$AV5, αλλά δε φαίνεται να συσχετίζονται αυτές οι δύο ομάδες.

ΙΕΡΑΡΧΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ [ΤΕΣΤ Α, Β, C]



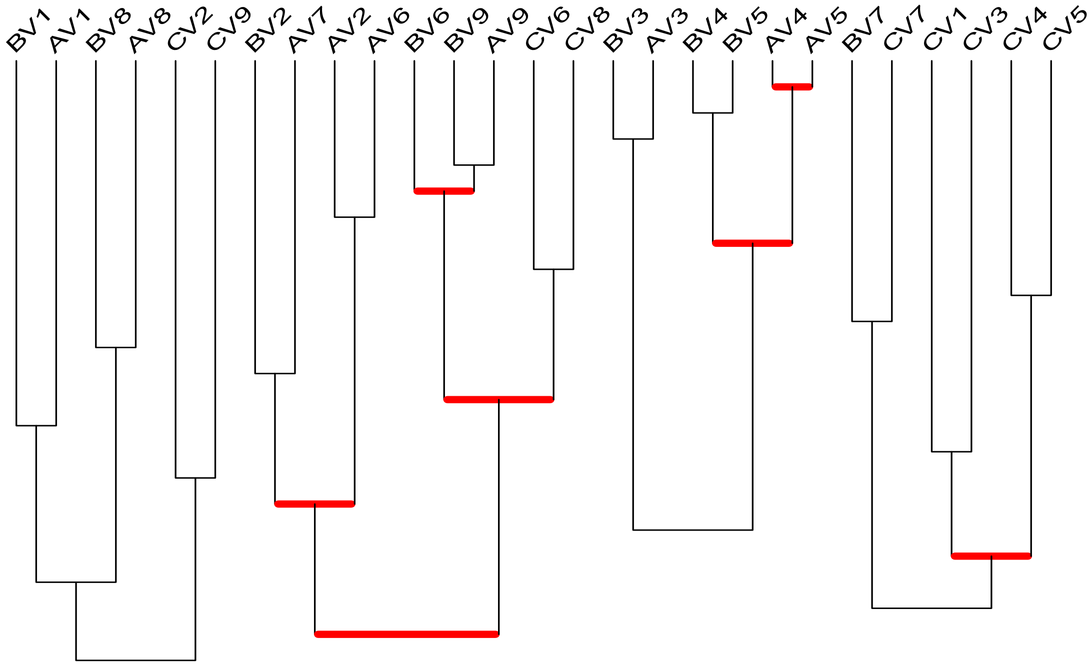
Herarchical tree : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BAC.csv

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ [ΤΕΣΤ Α, Β, C]



ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΕΞΗΓΗΣΕΩΝ [ΤΕΣΤ A, B, C]



Similarity : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ BAC.csv

Όπως βλέπουμε στο διάγραμμα ομοιότητας έχουμε τις εξής σημαντικές ομάδες:

A) Ισχυρότερη ομάδα όλων των ερωτήσεων και στα τρία (3) τεστ είναι αυτή των ερωτήσεων AV4 και AV5. Με βάση το συνεπαγωγικό διάγραμμα έχουμε συγκεκριμένα ότι **AV5**$\Rightarrow$BV4$\Rightarrow$**AV4** (στατιστική βεβαιότητα 95%), κάτι που επιβεβαιώνεται και από το ιεραρχικό διάγραμμα όπου η ομάδα των ερωτήσεων AV4 και AV5 του τεστ A φαίνεται να οδηγεί στην αντίστοιχη ομάδα των BV4 και BV5 του τεστ B.

B) Η προηγούμενη ομάδα του τεστ A (των ερωτήσεων AV4 & AV5) με την αντίστοιχη ομάδα του τεστ B (των λεκτικών εξηγήσεων) των ερωτήσεων BV4 & BV5, δίνει μια άλλη ισχυρή ομάδα. Πιο συγκεκριμένα με βάση το συνεπαγωγικό διάγραμμα έχουμε ότι AV5$\Rightarrow$BV4$\Rightarrow$AV4$\Rightarrow$BV5. Επίσης τα παραπάνω επιβεβαιώνονται και στο ιεραρχικό διάγραμμα ως σημαντικά, όπου επιπλέον η ομάδα αυτή συνδέεται (καθώς οδηγεί με τη σειρά της) με την ομάδα των ερωτήσεων AV1 & BV1 σε συνδυασμό με την AV8. Άλλωστε η συνεπαγωγή AV5$\Rightarrow$AV1 είναι μια από τις τρεις πιο σημαντικές (στατιστική βεβαιότητα 99%) συνεπαγωγές του συνεπαγωγικού διαγράμματος (αν και η ομάδα των ερωτήσεων AV5, AV1 δεν είναι ιδιαίτερα εμφανής στο αντίστοιχο διάγραμμα ομοιότητας).

Γ) Μια τρίτη ομάδα έχουμε από την ομάδα των BV9 & AV9 σε συνδυασμό με την BV6. Με βάση το συνεπαγωγικό διάγραμμα έχουμε συγκεκριμένα ότι BV9$\Rightarrow$AV9 (ιδιαίτερα σημαντική συνεπαγωγή, στατιστική βεβαιότητα 99%) και BV9$\Rightarrow$BV6 (στατιστική βεβαιότητα 95%). Επίσης τα παραπάνω επιβεβαιώνονται και στο ιεραρχικό διάγραμμα.

Δ) Μια ευρύτερη ομάδα αποτελούν η ομάδα της περίπτωσης (Γ) και η ομάδα των ερωτήσεων CV6 & CV8. Με βάση το συνεπαγωγικό διάγραμμα έχουμε συγκεκριμένα ότι (BV6, ή AV9)$\Rightarrow$CV8$\Rightarrow$CV6. Τα παραπάνω επιβεβαιώνονται και στο ιεραρχικό διάγραμμα, όπου τονίζεται ως ιδιαίτερα σημαντική η σύνδεση της ομάδας των BV9 & AV9 με την ερώτηση CV8.

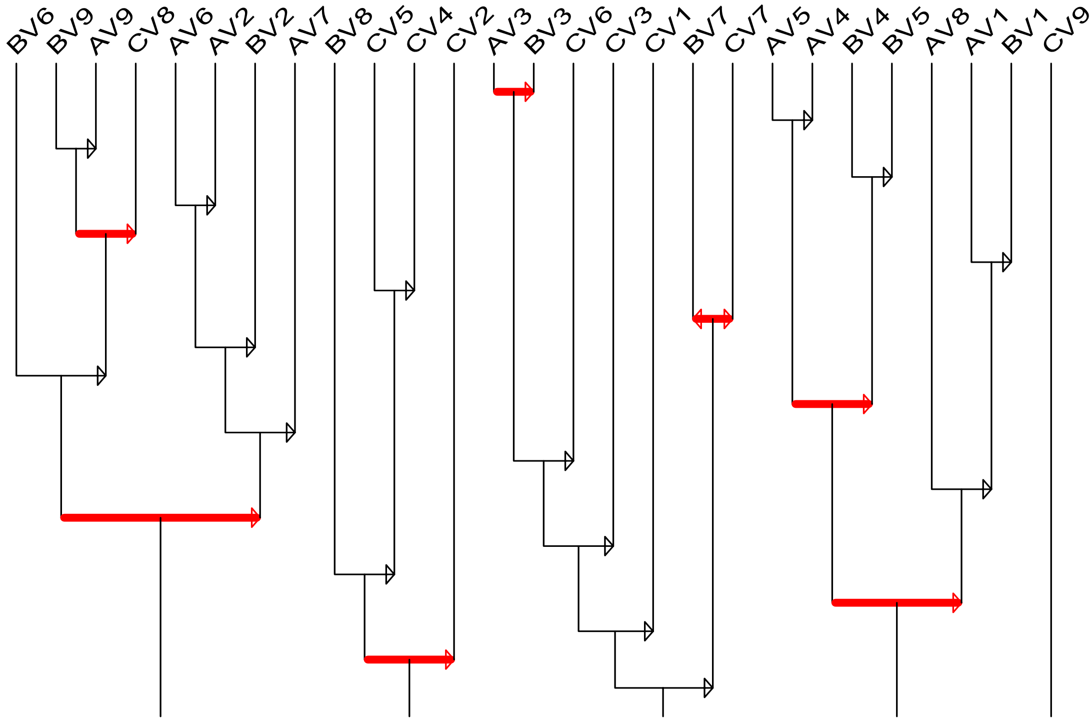
Ε) Οι ομάδες BV2 & AV7 και AV2 & AV6 αποτελούν μια άλλη ομάδα. Με βάση το συνεπαγωγικό διάγραμμα έχουμε συγκεκριμένα ότι AV6$\Rightarrow$AV2$\Rightarrow$BV2$\Rightarrow$AV7. Τα παραπάνω επιβεβαιώνονται και με βάση το ιεραρχικό διάγραμμα όπου η ομάδα αυτή (Ε) συνδέεται ως απόρροια της (Δ) ομάδας (μ’ εξαίρεση την ερώτηση CV6).

ΣΤ) Μια ευρύτερη ομάδα έχουμε από τις ομάδες των περιπτώσεων (Δ) και (Ε).

Ζ) Τέλος μια ακόμη ομάδα ερωτήσεων του τεστ C, αποτελούν η ομάδα των ερωτήσεων CV1 & CV3 και η ομάδα των ερωτήσεων CV4 & CV5. Με βάση το συνεπαγωγικό διάγραμμα έχουμε συγκεκριμένα ότι CV5$\Rightarrow$CV4 (στατιστική βεβαιότητα 95%), ενώ για τις ερωτήσεις CV1 & CV3 δεν έχουμε κάποια συνεπαγωγή, μόνο στο ιεραρχικό διάγραμμα σκιαγραφείται (αν και κάπως αμυδρά) ότι CV3$\Rightarrow$CV1. Στο ιεραρχικό διάγραμμα επίσης η ερώτηση CV2 συνδέεται ως απόρροια με την ομάδα των ερωτήσεων CV5 & CV4 σε συνδυασμό με την ερώτηση BV8.

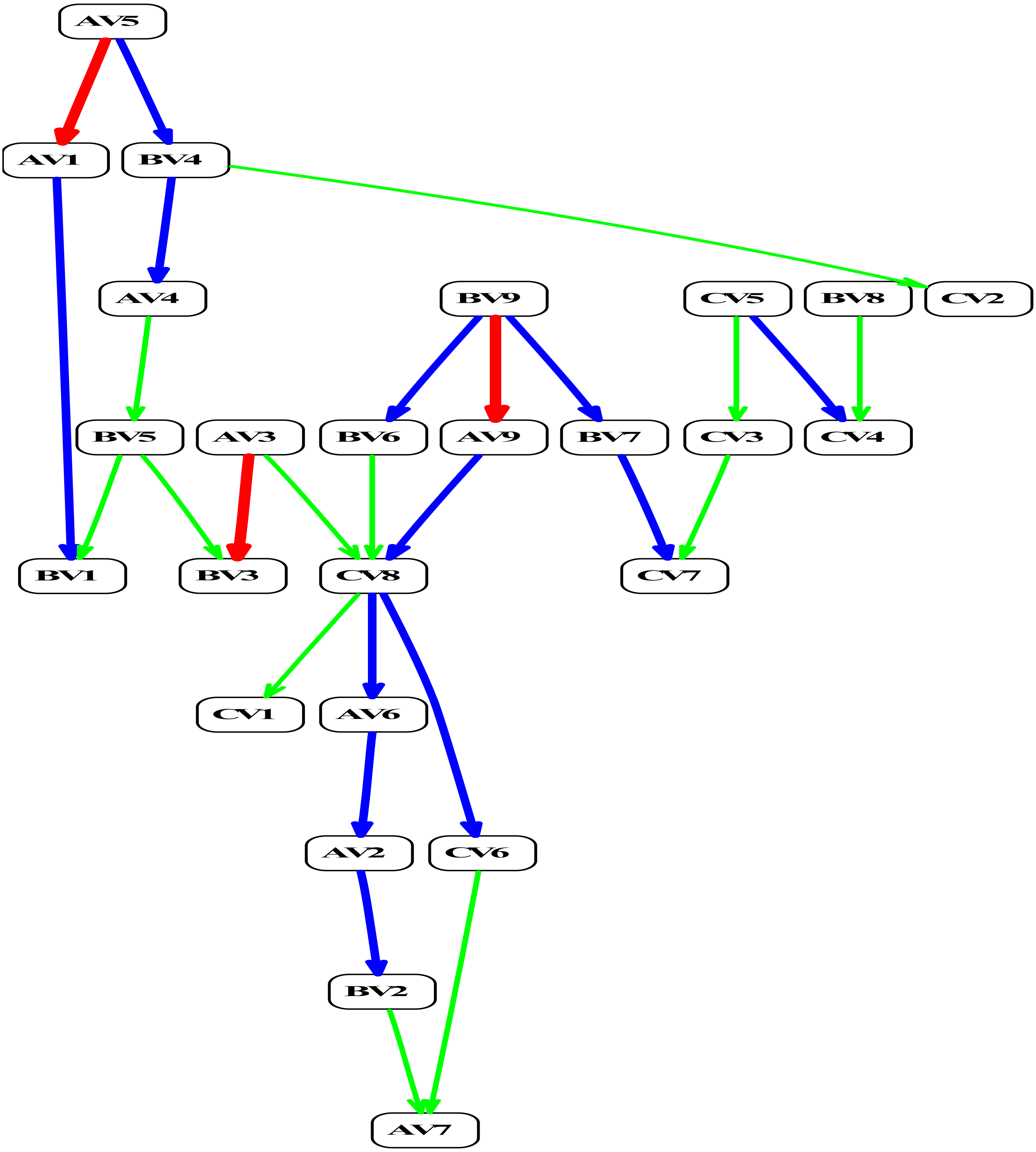
Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι παρόλο που η ομάδα των BV3 & AV3 δεν εμφανίζεται ως ιδιαίτερα ισχυρή στο διάγραμμα ομοιότητας, εντούτοις αποτελεί μια από τις τρεις σημαντικότερες συνεπαγωγές (στατιστική βεβαιότητα 99%) τόσο στο συνεπαγωγικό όσο και στο ιεραρχικό διάγραμμα. Επίσης πιο εμφανής στο ιεραρχικό αλλά και στο συνεπαγωγικό διάγραμμα (παρά στο διάγραμμα ομοιότητας) είναι η ομάδα των ερωτήσεων BV7 και CV7.

ΙΕΡΑΡΧΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΕΞΗΓΗΣΕΩΝ [ΤΕΣΤ A, B, C]



Herarchical tree : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΛΕΚΤΙ ΚΕΣ ΕΞΗΓ ΗΣΕΙ Σ BAC.csv

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΕΞΗΓΗΣΕΩΝ [ΤΕΣΤ Α, Β, C]



Graph : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysi

3.4 ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Είναι φανερή η επίδραση της προϋπάρχουσας γνώσης στις εξωτερικές αναπαραστάσεις, αλλά και η επίδραση των αναπαραστάσεων όσον αφορά την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και της διάταξης των κλασμάτων. Η επίδραση αυτή είναι εμφανής βλέποντας τις επιδόσεις των μαθητών κατά το τεστ B, σε σύγκριση με το αρχικό τεστ A (που ήταν χωρίς αναπαραστάσεις). Είναι χαρακτηριστική η μείωση στην απόδοση των μαθητών σχετικά με τη διάταξη των κλασμάτων, όταν τους ζητήθηκε να χρησιμοποιήσουν την αναπαράσταση κλάσματος με τη βοήθεια αριθμητικής γραμμής πριν προχωρήσουν στην σύγκριση κλασμάτων. Όπως είδαμε, η χρήση της αριθμητικής γραμμής στην αναπαράσταση των κλασμάτων, οδήγησε σε μια αύξηση των λαθών που σχετίζονται με το μοντέλο ότι μεγαλύτερο είναι το κλάσμα με τους μεγαλύτερους όρους. Τα λάθη αυτά, σε ένα μεγάλο βαθμό οφείλονταν στο ότι οι μαθητές προχωρούσαν σε λανθασμένη αναπαράσταση των κλασματικών μονάδων, αντιστοιχώντας με ίδιο τμήμα στην αριθμητική γραμμή διαφορετικές κλασματικές μονάδες, συγχέοντας την μονάδα με την κλασματική μονάδα κ.τ.λ., τους λόγους στους οποίους οφείλεται αυτή η αύξηση, προσεγγίζουμε στη συζήτηση που ακολουθεί. Σε αντίθεση, η χρήση των κυκλικών διαγραμμάτων, όπως διαπιστώσαμε είχε θετικά αποτελέσματα, αν και εδώ παρουσιάστηκε κάποια σύγχυση μεταξύ κλασματικής και ακέραιας μονάδας, εντούτοις αυτή ήταν περιορισμένη και μόνο σε περιπτώσεις καταχρηστικών κλασμάτων. Η «αυτοεξήγηση» (self-explanation) από τη πλευρά των μαθητών, μέσω των λεκτικών εξηγήσεων, σχετικά με τους λόγους που τους οδηγούν στα συγκεκριμένα αποτελέσματα στη διάταξη των κλασμάτων, όπως είδαμε δεν επηρεάζει την απόδοση τους. Αξιοσημείωτη είναι η θετική επίδραση της διδακτικής παρέμβασης, μέσω της διδασκαλίας, σε όλες τις πειραματικές ομάδες, όπως αυτή φαίνεται μέσα από τα αποτελέσματα κατά το τεστ C. Τέλος θα ήθελα, ολοκληρώνοντας αυτή την εργασία, να αναφερθώ σε κάποιες διαπιστώσεις μου μέσα από την διόρθωση των ερωτηματολογίων και την στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων τους.

Σχετικά με τις αναπαραστάσεις

- Ένα βασικό αίτιο που οι μαθητές προχωρούσαν σε λάθος απαντήσεις στο τεστ B, ήταν οι αναπαραστάσεις που είχαν από ένα μη ακριβές ή λανθασμένο σχήμα.

- Σε περιπτώσεις όπου υπήρχε πλήρη αδυναμία αναπαράστασης των κλασμάτων, αυτή είχε ως αποτέλεσμα την απουσία απάντησης στις αντίστοιχες περιπτώσεις, φανερώνοντας έτσι την έλλειψη βεβαιότητας από μέρους των μαθητών σχετικά με τις αντίστοιχες απαντήσεις που έδωσαν στο pre-test (ενδεχομένως και το τυχαίο των απαντήσεων αυτών), μεγεθύνοντας έτσι τη διάσταση του προβλήματος της κατανόησης των κλασμάτων από τους μαθητές, είναι ενδεικτικό επίσης της δυσκολίας μετάφρασης (μετάβασης) μεταξύ των αναπαραστάσεων.

- Σε άλλες πάλι περιπτώσεις η παντελή αδυναμία για αναπαράσταση ή λεκτική εξήγηση οδήγησε μόνο σε σύγκριση, βάση ενδεχομένως κάποιων μοντέλων που έχει ο μαθητής και τα οποία ίσως αδυνατεί να περιγράψει ή τεκμηριώσει με χρήση αναπαραστάσεων.

- Παρατηρήθηκε επίσης σε αρκετές περιπτώσεις όπου οι μαθητές είχαν κάνει αναπαράσταση των κλασμάτων να μη προχωρούν σε σύγκριση, κάτι που μπορεί να οφείλεται (πέρα από το ενδεχόμενο κάποια να τα ξέχασαν) στο γεγονός ότι οι αναπαραστάσεις αυτές έρχονταν σε σύγκρουση με τις απαντήσεις που έδωσαν στο pre-test με βάση τα άτυπα λανθάνοντα διαισθητικά (naive) μοντέλα με βάση τη θεωρία που έχουμε αναφέρει (και την οποία εξετάζουμε στην έρευνα μας). Στις περιπτώσεις αυτές μπορούμε να πούμε ότι η πληροφορία που έπαιρναν οι μαθητές από τις συγκεκριμένες αναπαραστάσεις δεν ήταν, όπως φαίνεται, αρκετά ισχυρή ώστε να προκαλέσει αυτή την εννοιολογική αλλαγή (που επίσης εξετάζουμε στην έρευνα αυτή), κάτι το οποίο αν δεν επιτεύχθηκε απόλυτα σε όλες τις περιπτώσεις, εντούτοις όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα (τεστ C) ενισχύθηκε σε σημαντικό βαθμό από τη διδασκαλία που ακολούθησε μετά το τεστ B.

- Αξιοσημείωτο είναι ότι σε παρόμοιες περιπτώσεις (όπου οι αναπαραστάσεις έρχονταν σε σύγκρουση με τις απαντήσεις που έδωσαν στο pre-test με βάση τα άτυπα λανθάνοντα διαισθητικά (naive) μοντέλα με βάση τη θεωρία μας), όπου ο μαθητής αμφέβαλλε για την ορθότητα της πληροφορίας που είχε μέσω των αναπαραστάσεων, σε όσες τελικά προχωρούσε σε σύγκριση, παρατηρήθηκε να εμμένει (παραβλέποντας το σχήμα) στην αρχική του απάντηση ακολουθώντας τη θεωρία που αναφέραμε , κάτι που φανερώνει το πόσο καλά εδραιωμένα είναι αυτά τα άτυπα λανθάνοντα διαισθητικά (naive) μοντέλα στην αντίληψη του μαθητή.

- Παρατηρήθηκαν ψευδοκανόνες (distracter) όπως π.χ. μεγαλύτερο είναι γενικά το κλάσμα με το μικρότερο παρονομαστή (ή ενδεχομένως με τους μικρότερους όρους γενικότερα, περίπτωση λάθους 3 όπως διαπίστωσα από τα αποτελέσματα της έρευνας).

- Όπως έχει παρατηρηθεί και σε παρόμοιες έρευνες (βλ. Γαγάτσης), φαίνεται και εδώ από τα αποτελέσματα (ποσοστά επιτυχίας ανά τεστ), ότι η εικόνα μπορεί να παίξει κάποιο ρόλο π.χ. με την παρέμβαση κατάλληλης διδασκαλίας τόσο πριν όσο και μετά την εξέταση.

- Επιβεβαιώνεται αυτό που έχει επισημανθεί και σε παρόμοιες έρευνες (βλ. Γαγάτσης), ότι κάθε γεωμετρικό μοντέλο μας προτείνει μια αναπαράσταση αλλά κάθε αναπαράσταση δεν είναι γεωμετρικό μοντέλο. Είναι γνωστό ότι η αριθμητική γραμμή δημιουργεί προβλήματα διότι δεν είναι γεωμετρικό μοντέλο, καθώς επίσης και το ότι δεν βοηθούν όλες οι αναπαραστάσεις στην κατανόηση από τους μαθητές.

- Τέλος θα πρέπει να σημειωθεί σχετικά με τις μεταβολές των ποσοστών επιτυχίας ότι η εικόνα των ερωτηματολογίων είναι ακόμη πιο σύνθετη καθώς η χρήση αναπαραστάσεων στο τεστ B, αφ' ενός διορθώνει κάποια σφάλματα στις συγκρίσεις των κλασμάτων που έγιναν αρχικά στο pre-test αλλά δημιουργεί και νέα σφάλματα λόγω των αναπαραστάσεων, με άλλα λόγια η διαφοροποίηση στις απαντήσεις -πεποιθήσεις του μαθητή είναι ακόμη μεγαλύτερη απ' ότι εμφανίζεται στη διαφορά ποσοστών επιτυχίας μεταξύ των τριών (3) τεστ. Ο ρόλος της διδασκαλίας – συζήτησης - αποσαφήνισης όπως φαίνεται και από τα αποτελέσματα κατά το τελικό τεστ C, γίνεται ακόμη πιο σημαντικός όσον αφορά την χρήση αναπαραστάσεων προς μια καλύτερη κατανόηση των διαφόρων μαθηματικών εννοιών όπως συγκεκριμένα εδώ της διάταξης των κλασμάτων.

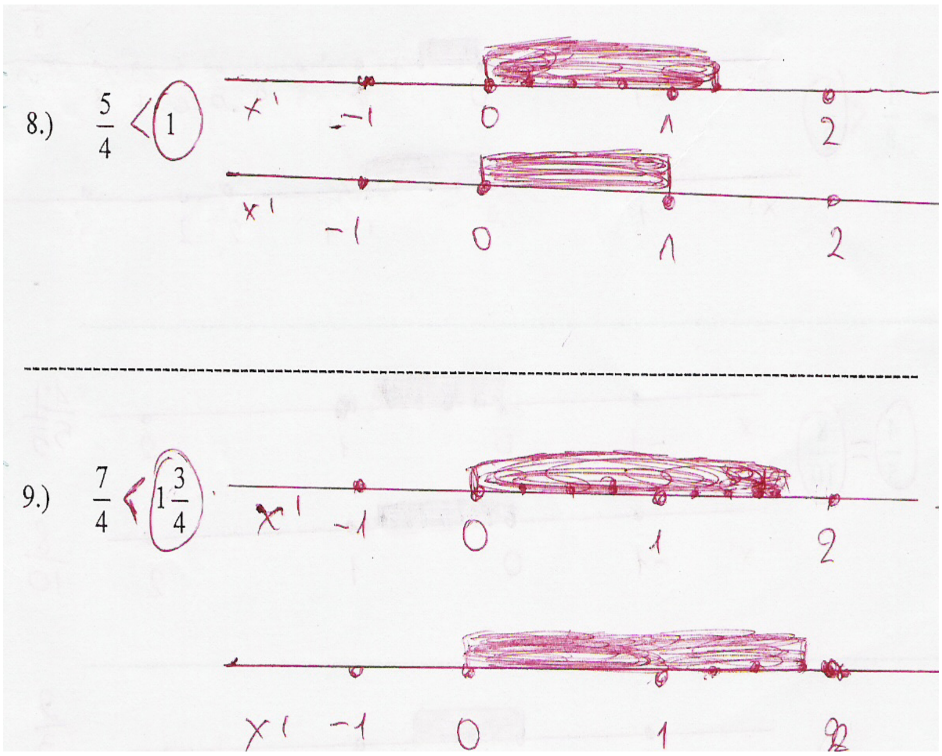
Σχετικά με την αριθμητική γραμμή

- Η αδυναμία χειρισμού της ευθείας (όπως και των άλλων αναπαραστάσεων) οδηγεί τους μαθητές από αρχικά σωστές απαντήσεις (στο pre-test A) σε λανθασμένες στην συνέχεια (στο τεστ Β). Μια δυσκολία ήταν για παράδειγμα ο μερισμός της ακέραιας μονάδας σε ίσα μέρη, όπου ενώ χώριζαν την ακέραια μονάδα με σημεία στα αντίστοιχα μέρη, πρόσθεταν και ένα επιπλέον στο τέλος για τη μονάδα. Άλλη περίπτωση όπου δυσκολεύτηκαν ήταν κατά την γραμμοσκίαση, όπου μετρώντας σημεία (με τα οποία είχαν χωρίσει την ακέραια μονάδα) αντί για μέρη, για να γραμμοσκιάσουν τα αντίστοιχα μέρη που δήλωνε ο αριθμητής κάθε κλάσματος, ξεκινούσαν μετρώντας και το σημείο 0 της αριθμητικής γραμμής σαν ένα μέρος με αποτέλεσμα να γραμμοσκιάζουν πάντα ένα μέρος λιγότερο. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση ενός μαθητή ο οποίος όταν χρειάστηκε να παραστήσει τις κλασματικές μονάδες $\frac{1}{8}$ και $\frac{1}{3}$ γραμμοσκίασε το κομμάτι μέχρι το πρώτο σημείο (χωρίς κάποια συγκεκριμένη αρχή)

- Χαρακτηριστικό λάθος είναι ότι οι μαθητές παίρνουν άνισες ακέραιες μονάδες στην κάθε αριθμητική γραμμή (ή ακόμη και στην ίδια αριθμητική γραμμή) για να παραστήσουν το κάθε κλάσμα, με αποτέλεσμα να οδηγούνται σε λάθος κατά την σύγκριση (κάτι που παρατηρείται επίσης και στα ερωτηματολόγια με τα κυκλικά διαγράμματα).

- Σε αρκετές περιπτώσεις παρά το ότι οι μαθητές έκαναν το σχήμα δεν πείστηκαν ώστε να προχωρήσουν στην σύγκριση των κλασμάτων είτε από έλλειψη βεβαιότητας για την εικόνα που είχαν από την συγκεκριμένη αναπαράσταση, είτε διότι το αποτέλεσμα ερχόταν πιθανώς σε αντίθεση με τα διαισθητικά μοντέλα τους σχετικά με τη διάταξη των κλασμάτων είτε διότι ερχόταν σε αντίθεση με αυτό που ανέμεναν στηριζόμενοι ενδεχομένως σε αλγοριθμικούς κανόνες. Το σημείο αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία καθώς ο μαθητής αρχίζει να αμφιβάλλει για τη γνώση που κατείχε μέχρι τώρα και αρχίζει έτσι να εισχωρεί σε μια αρχική φάση εννοιολογικής αλλαγής.

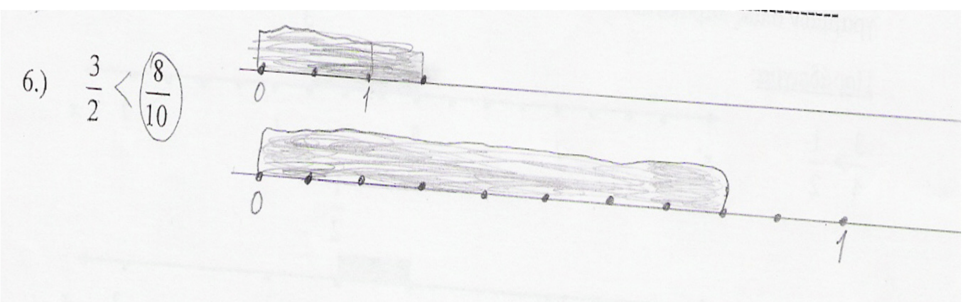
- Παρατηρήθηκε επίσης στις απαντήσεις αρκετών μαθητών στα ερωτηματολόγια του τεστ Β, οι συγκρίσεις στις οποίες προχωρούσαν να έρχονται σε αντίθεση με τις εικόνες των αναπαραστάσεων, δείχνοντας μεγαλύτερη εμπιστοσύνη στα διαισθητικά τους μοντέλα ή στους αλγοριθμικούς κανόνες που είχαν διδαχτεί. Οι αναπαραστάσεις με βάση αυτό μπορούμε να πούμε ότι στη φάση αυτή της παρέμβασης μας γι αυτούς τους μαθητές, δεν αποδείχτηκαν ικανές από μόνες τους στο να αλλάξουν τις ήδη υπάρχουσες αντιλήψεις-πεποιθήσεις τους όσον αφορά τη διάταξη των κλασμάτων (σίγουρα όμως δημιούργησαν κάποιους πρώτους προβληματισμούς όπως φάνηκε από τα σχόλια τους).

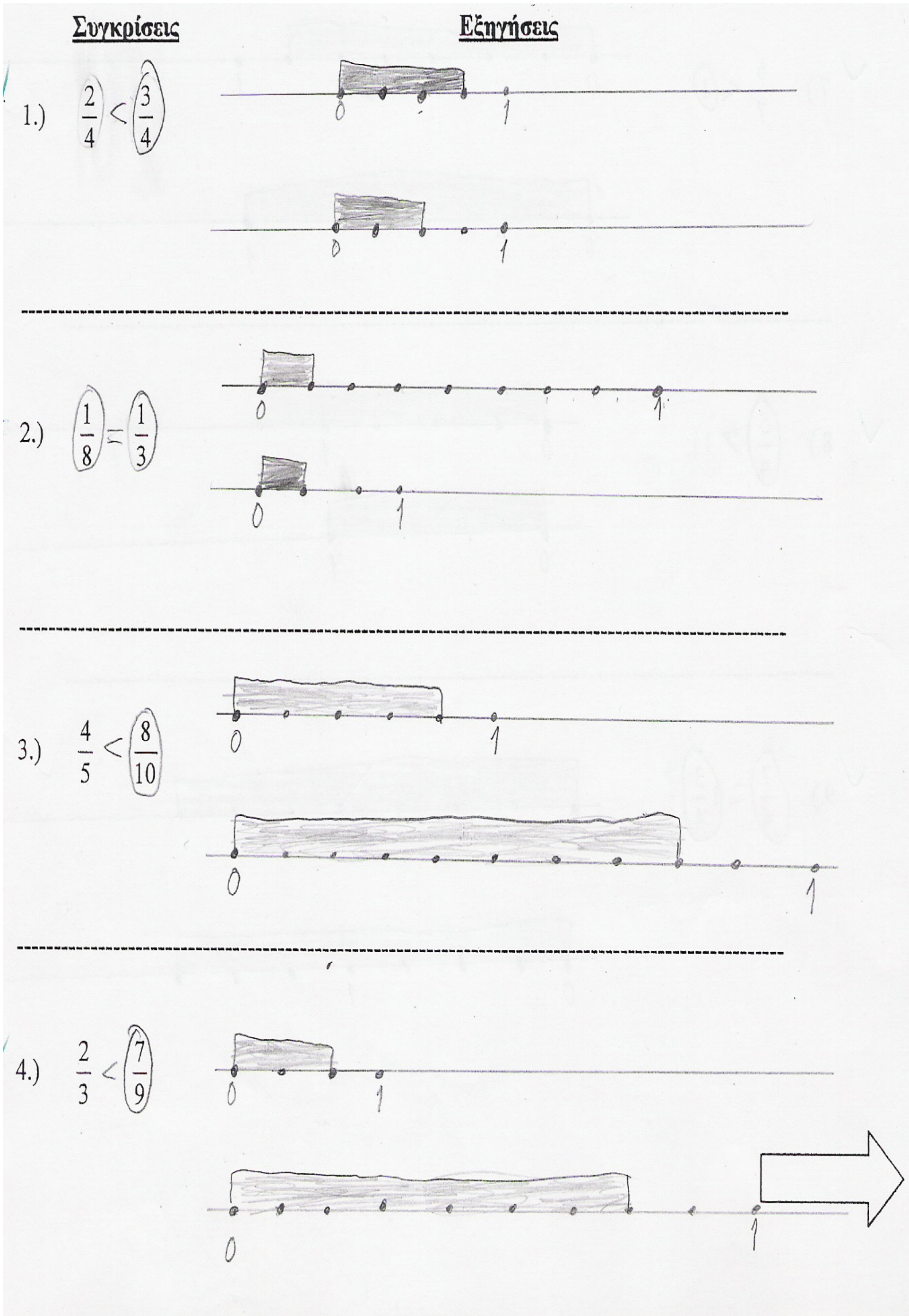


- Εμφανής ήταν επίσης η αδυναμία των μαθητών στην κατανόηση και κατ' επέκταση στην παράσταση των καταχρηστικών κλασμάτων (όπως π.χ. το $\frac{3}{2}$) τα οποία θεωρούσαν ως μέρος της μονάδας και άρα πάντα μικρότερα της. Το πρόβλημα αυτό κάποιοι μαθητές φάνηκε να το ξεπερνούν όταν αντιμετώπιζαν σύγκριση καταχρηστικού κλάσματος με μικτό αριθμό (όπως για παράδειγμα στην τελευταία ερώτηση $\frac{7}{4}$ με $1\frac{3}{4}$), γεγονός που φανερώνει ότι και η ίδια η επιλογή των ερωτήσεων και της σειράς με την οποία η μια διαδέχεται την άλλη (σημαντικές πληροφορίες προς αυτή την κατεύθυνση έχουμε μέσω της στατιστικής ανάλυσης Gras), διαδραματίζει κάποιο ρόλο όσον αφορά την αλλαγή των πεποιθήσεων του μαθητή και την αντιμετώπιση οποιονδήποτε παρανοήσεων ή κενών στην γνώση που ήδη κατέχει.

- Αν και η πρόσθεση κλασμάτων δεν ήταν αντικείμενο της έρευνας αυτής, ωστόσο φάνηκαν κάποια προβλήματα και προς αυτή την κατεύθυνση, καθώς με βάση τις παραστάσεις των μαθητών στην αριθμητική γραμμή φαίνεται να αντιλαμβάνονται π.χ. πως το άθροισμα $\frac{6}{7}$ με $\frac{1}{7}$ και η μονάδα αποτελούν δύο διαφορετικά πράγματα.

- Διαπιστώθηκε επίσης ότι σε αρκετούς μαθητές η αριθμητική γραμμή ενισχύει το αντίστοιχο διαισθητικό μοντέλο που σχετίζεται με τα λάθη τύπου 4, καθώς οι μαθητές προκειμένου να μοιράσουν την ακέραια μονάδα σε περισσότερα μέρη για να παραστήσουν ένα κλάσμα, παριστάνουν με μεγαλύτερο τμήμα την ακέραια μονάδα για το κλάσμα αυτό (με τους μεγαλύτερους όρους) και στην συνέχεια με ίσα τμήματα τις διαφορετικές κλασματικές μονάδες (π.χ. για το $\frac{1}{2}$ και το $\frac{1}{10}$). Έτσι, η παράσταση του κλάσματος με μεγάλους όρους φαινόταν να αντιστοιχεί σε μεγαλύτερο τμήμα (π.χ. $\frac{3}{2}<\frac{8}{10}$), καθώς η σύγκριση περιοριζόταν ουσιαστικά μόνο στους αριθμητές των κλασμάτων.



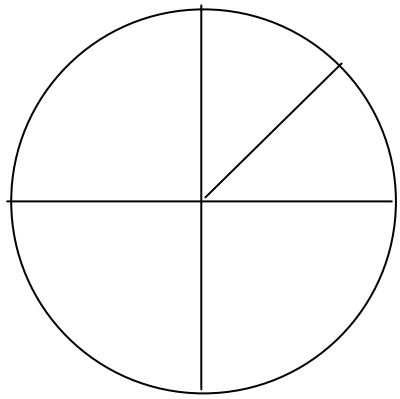


- Τέλος σε κάποιες ελάχιστες περιπτώσεις, όπου αντί για αριθμητική γραμμή (όπως του είχε υποδειχθεί) ο μαθητής χρησιμοποίησε ράβδο, τα αποτελέσματα ήταν πολύ καλά.

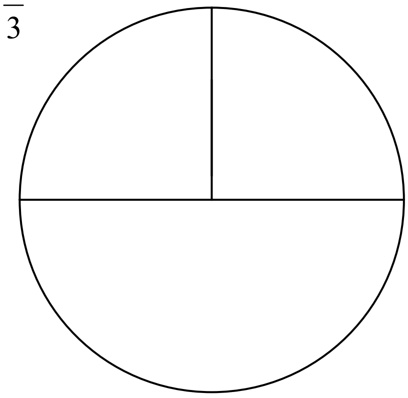
Σχετικά με τα κυκλικά διαγράμματα

- Η δυσκολία στο σχεδιασμό, η έλλειψη ακρίβειας στο μερισμό του κύκλου ήταν σύνηθες πρόβλημα με αποτέλεσμα αυτή δυσκολία στην κατασκευή σχημάτων να τους οδηγεί μέσω των λάθος σχημάτων σε λανθασμένες απαντήσεις (π.χ. σε πάρα πολλά ερωτηματολόγια το $\frac{4}{7}$ αντιστοιχούσε στο μισό κυκλικό δίσκο, επίσης αρκετοί μαθητές δυσκολεύτηκαν να συγκρίνουν το $\frac{2}{3}$ με το $\frac{7}{9}$ λόγω της μικρής διαφοράς τους). Η αδυναμία αυτή αναδεικνύει επίσης και την σπουδαιότητα της εκμάθησης αντίστοιχων αλγοριθμικών κανόνων.

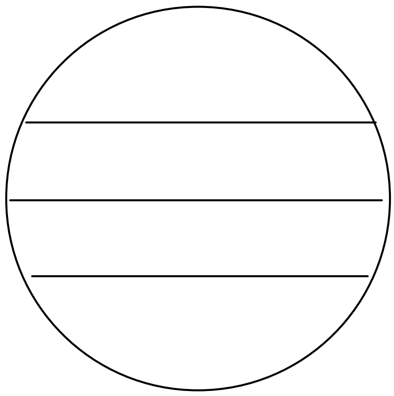
- Ήταν προφανής η σύγχυση σχετικά με τις κλασματικές μονάδες, έτσι σε πολλά ερωτηματολόγια παρατηρήθηκε στις απαντήσεις των μαθητών κατά τον διαχωρισμό του κύκλου, κάποιο κομμάτι να είναι εμφανώς μικρότερο σε σχέση με τ' άλλα, π.χ. στο $\frac{5}{4}$ σχεδίαζαν



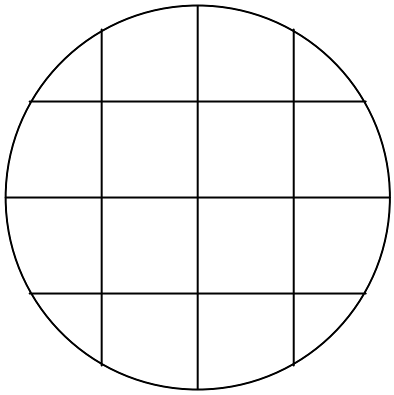
ή το κλασικό σφάλμα με το κλάσμα $\frac{1}{3}$ ή $\frac{2}{3}$



Σε άλλες πάλι περιπτώσεις παρατηρήθηκε διαχωρισμός του κύκλου της μορφής



ή επίσης και της μορφής



ενώ κάποιος μαθητής ακολούθησε ακόμη πιο «πολυγωνικό» διαχωρισμό προσεγγίζοντας κάτι σαν την επιφάνεια μιας μπάλας ποδοσφαίρου. Φάνηκε δηλαδή να μη λαμβάνουν υπόψη τους ότι τα μέρη αυτά πρέπει να είναι ίσα μεταξύ τους.

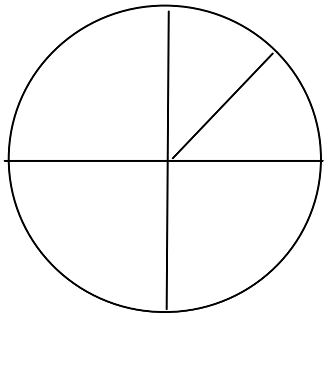
- Ένα άλλο σφάλμα είχε να κάνει με το ότι οι κάποιοι μαθητές δεν αντιλαμβάνονταν ότι οι ακέραιες μονάδες (οι κυκλικοί δίσκοι) για κάθε κλάσμα θα 'πρεπε να είναι ίσες, με αποτέλεσμα παίρνοντας κατά τον σχεδιασμό άνισες «πίτες» να οδηγούνται σε λάθος απαντήσεις (π.χ. $\frac{1}{8}=\frac{1}{3}$).

- Σε άλλες περιπτώσεις πάλι παρατηρήθηκε ότι ενώ γινόταν σωστά ο διαχωρισμός του κύκλου από το μαθητή, στην συνέχεια μαύριζε το υπόλοιπο μέρος από αυτό που αντιστοιχούσε κανονικά.

- Σε άλλες πάλι περιπτώσεις παρατηρήθηκε οι μαθητές να δίνουν σωστές απαντήσεις αν και η εικόνα (λόγω λάθους σχεδιασμού, έλλειψη ακρίβειας κ.τ.λ.) δε συνηγορούσε σε κάτι τέτοιο, όπως επίσης και το αντίθετο, δηλαδή,

- Είχαμε λάθος απαντήσεις, σύμφωνα με τα μοντέλα λαθών (2, 3, 4) που έχουμε αναφέρει, σε αντίθεση με την πληροφόρηση που είχαν από σωστά σχήματα που είχαν σχεδιάσει, κάτι που υποδηλώνει ότι η επίδραση αυτών των μοντέλων σε μερικούς μαθητές είναι ισχυρότερη από την εικόνα που τους δίνεται μέσα από διάφορες αναπαραστάσεις.

- Εμφανής επίσης ήταν η σύγχυση των μαθητών σχετικά με την αναπαράσταση καταχρηστικών κλασμάτων, π.χ. για το $\frac{5}{4}$

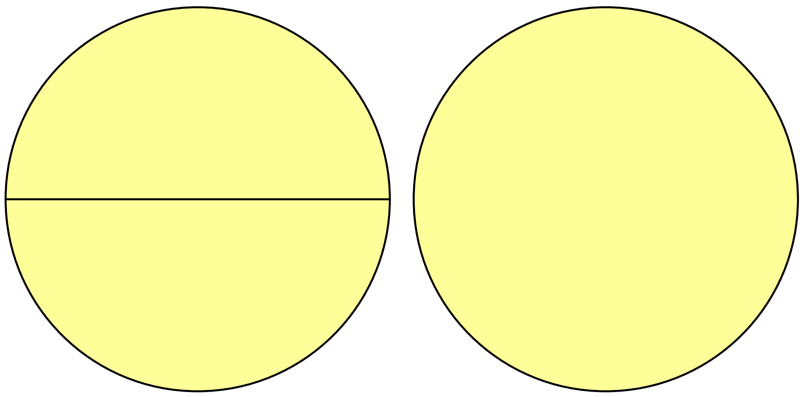


κάτι που συνηγορεί και στην άποψη μας ότι

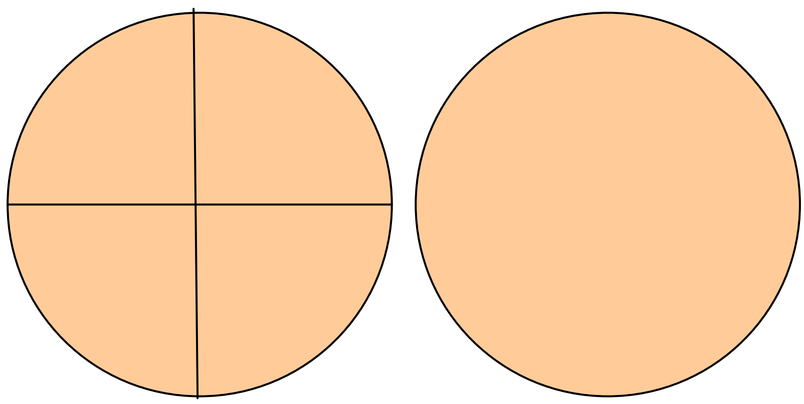
οι μαθητές έχουν το διαισθητικό μοντέλο, ότι όλα τα κλάσματα είναι μικρότερα της μονάδας.

Επίσης στα καταχρηστικά κλάσματα παρατηρήθηκε σύγχυση μεταξύ κλασματικής και ακέραιας μονάδας,

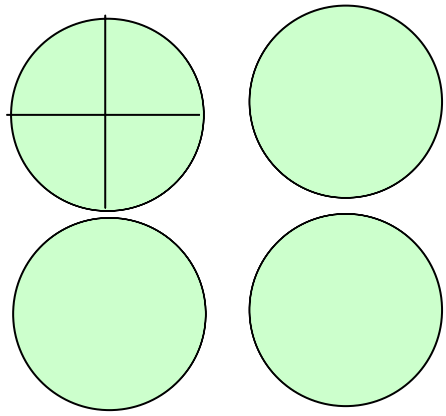
π.χ. για το $\frac{3}{2}$



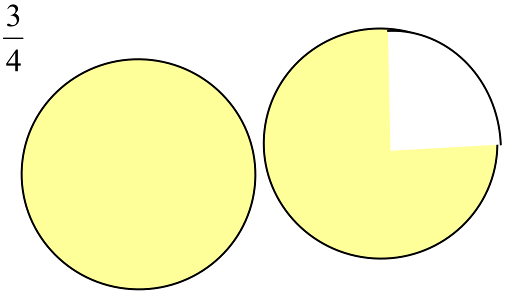
ή π.χ. για το $\frac{5}{4}$



Ομοίως και στο $\frac{7}{4}$



Αξιοσημείωτο είναι ότι στους ίδιους μαθητές το πρόβλημα αυτό φαινόταν να εξαφανίζεται στους μικτούς, όπως π.χ. το $1\frac{3}{4}$



- Η διδασκαλία των κλασμάτων με χρήση κυκλικών διαγραμμάτων βέβαια συνηγορεί στην διαμόρφωση από αρκετούς μαθητές της λανθασμένης πεποίθησης ότι κάθε κλάσμα είναι μέρος της μονάδας και κατά συνέπεια όλα τα κλάσματα είναι μικρότερα της μονάδας. Είναι φανερό ότι οι αναπαραστάσεις δημιουργούν κάποια προβλήματα στους μαθητές.

Σχετικά με τις λεκτικές εξηγήσεις

- Η εμφανής αδυναμία αρκετών μαθητών να εξηγήσουν λεκτικά κάποιες συγκρίσεις (στο τεστ Β) τους οδήγησε στο να μην απαντήσουν, κάτι που δηλώνει το τυχαίο ενδεχομένως σε μια σωστή απάντηση στην αντίστοιχη ερώτηση στο pre-test (όπου όλοι τα απάντησαν σε όλες τις ερωτήσεις), μεγεθύνεται έτσι η διάσταση του προβλήματος όπως αυτή φάνηκε αρχικά μέσα από τα αποτελέσματα του pre-test σχετικά με την κατανόηση των κλασμάτων και ιδιαίτερα με τη διάταξη που μελετούμε.

- Αρκετοί μαθητές ανέφεραν απλά ότι σύγκριναν τα κλάσματα με την βοήθεια κυκλικών διαγραμμάτων («πιτούλες») χωρίς να δίνουν κάποια σχήματα ή κάποια άλλη πληροφορία, ενώ οι περισσότερες από τις απαντήσεις αυτές ήταν λανθασμένες.

- Μέσα από τις λεκτικές εξηγήσεις των μαθητών αναδύεται το πρόβλημα χρήσης και κατανόησης της ιδιαίτερης ορολογίας των μαθηματικών με το οποίο εκφράζεται ο αλγοριθμικός τρόπος σκέψης και την απόσταση που υπάρχει μεταξύ αυτού και του λεξιλογίου που χρησιμοποιούν και καταλαβαίνουν στην καθημερινή τους ζωή. Ανάμεσα στις λεκτικές εξηγήσεις των μαθητών εξαιτίας του παραπάνω προβλήματος γίνεται λόγος π.χ. για κλάσματα «συνώνυμα», για παρονομαστές «ομώνυμους», ενώ προτιμούν να εκφράζουν το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) ως «καπελάκια» και τα κυκλικά διαγράμματα ως «πιτούλες».

- Παρόλα αυτά στις λεκτικές εξηγήσεις κυριαρχεί η διατύπωση αλγοριθμικών κανόνων από τη ανάλογη θεωρία που έχουν διδαχτεί, έστω και αν αυτοί είναι σε αρκετές περιπτώσεις ελλιπείς ή ακόμη και λανθασμένοι.

Γενικές παρατηρήσεις

- Η ελλιπής γνώση των αντίστοιχων κανόνων (ημιμάθεια) δημιουργούσε διάφορα λάθη, π.χ. κάνοντας τα κλάσματα ομώνυμα με τα «καπελάκια» όπως έλεγε, πολλαπλασίαζε το καπελάκι με τον παρονομαστή ενώ το πρόσθετε στον αριθμητή, κ.τ.λ.

- Η δυσκολία στην χρήση συμβόλων από το μαθητή αποτελεί μια άλλη πηγή λαθών, π.χ. χρησιμοποίηση του συμβόλου = αντί του συμβόλου $\Rightarrow$ ή του $\Leftrightarrow$ (το οποίο ίσως δεν γνωρίζουν), επίσης φάνηκε ότι μπερδεύουν τα σύμβολα $<$ και $>$ καθώς άλλα κλάσματα ισχυρίζονταν ότι είναι μεγαλύτερα (βάζοντας τα σε κύκλο) και άλλα έδειχναν ως μεγαλύτερα με τα αντίστοιχα σύμβολα ή σε άλλες πάλι περιπτώσεις απέφευγαν τελείως τα σύμβολα βάζοντας απλώς το μεγαλύτερο κλάσμα σε κύκλο.

- Σε κάποια ερωτηματολόγια παρουσιάστηκαν συγχρόνως λάθη τύπου 3 και 4, γεγονός το οποίο φανερώνει την σύγχυση (λόγω ελλιπούς γνώσης, αποσαφήνισης και ενδεχομένως κάποιων λαθών που γίνονται κατά τη διδασκαλία), που υπάρχει σχετικά με τους κανόνες διάταξης (αλγοριθμικό μοντέλο) και τα άτυπα διαισθητικά μοντέλα.

- Τα προβλήματα αυτά που αναφέραμε, σε συνδυασμό με αρκετά άσχετα λάθη, δείχνουν το μέγεθος του προβλήματος σχετικά με την κατανόηση των κλασμάτων και ειδικότερα της διάταξης που μελετήσαμε, όπως προκύπτει με βάση την επίδοση των μαθητών στα συγκεκριμένα τεστ.

- Το χρονικό διάστημα που διαμεσολάβησε μεταξύ των απαντήσεων στα ερωτηματολόγια B και C, διασφαλίζει την μονιμότητα και το στέρεο της γνώσης που αποκτήθηκε κατόπιν της διδακτικής παρέμβασης μας.

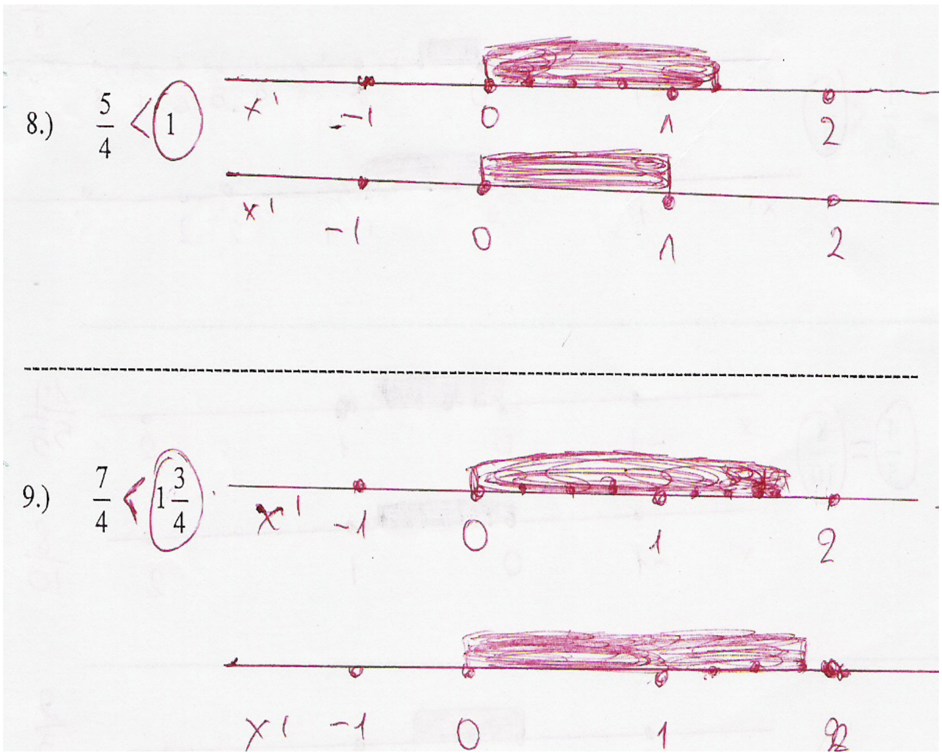
- Σχετικά με τα λάθη τύπου 3, τα οποία δεν είναι τυχαία καθώς, όπως διαπιστώνουμε και στην έρευνα μας, έχουν μια συστηματικότητα μπορούμε να πούμε ότι οδηγείται σ' αυτά ο μαθητής καθώς αντιλαμβάνεται ότι το κλάσμα είναι διαφορετικό από δύο ξεχωριστούς φυσικούς αριθμούς. μπορούμε να πούμε ότι αποτελούν ίσως και μια εξήγηση της παρερμηνείας ενός κανόνα. Για παράδειγμα εδώ ο γνωστός κανόνας που λέει ότι αν δυο κλάσματα έχουν τον ίδιο αριθμητή τότε μεγαλύτερο είναι αυτό που έχει το μικρότερο παρονομαστή (ένας κανόνας που επίσης οδηγεί το μαθητή στο να αντιληφθεί ότι το κλάσμα είναι διαφορετικό από δύο ξεχωριστούς φυσικούς αριθμούς), μπορεί να παραφραστεί από το μαθητή ότι γενικά μεγαλύτερο είναι το κλάσμα με τους μικρότερους όρους.

- Μια άλλη ερμηνεία σχετικά με τα λάθη τύπου 3, μπορεί να είναι ότι ο μαθητής και πάλι (όπως και στα λάθη τύπου 4) αντιλαμβάνεται το κλάσμα ως δύο ξεχωριστούς φυσικούς αριθμούς αλλά ίσως να συγκρίνει τη διαφορά αριθμητή και παρονομαστή και να θεωρεί ως μεγαλύτερο το κλάσμα στο οποίο παρατηρείται η μικρότερη διαφορά. Θα ήταν χρήσιμο να γίνει μια έρευνα η οποία να εξηγεί τα αίτια αυτών των λαθών και να μας απαντά σχετικά με το ποια ερμηνεία (από τις παραπάνω ή κάποια άλλη) θεωρείται κυρίαρχη.

3.5 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Ο ρόλος της διδασκαλίας – συζήτησης - αποσαφήνισης με χρήση κατάλληλων εξωτερικών αναπαραστάσεων (όπως διαπιστώσαμε και από τα αποτελέσματα κατά το τελικό τεστ C), **είναι ουσιώδης** για μια καλύτερη κατανόηση των διαφόρων μαθηματικών εννοιών όπως συγκεκριμένα εδώ της διάταξης των κλασμάτων. Στοχεύοντας σε μια όσο το δυνατόν αποδοτικότερη διδασκαλία, θα ήθελα ως επίλογο αυτής της εργασίας, να παραθέσω τις εξής προτάσεις:

Όπως έχουμε αναφέρει, μπορούν να υπάρξουν ασυμφωνίες και συγκρούσεις μεταξύ πολλών προηγμένων μαθηματικών εννοιών (όπως η έννοια του κλάσματος) και "πρωταρχικών/ αφελών μαθηματικών". **Καλό είναι λοιπόν να λαμβάνεται υπόψη κατά τη διδασκαλία ότι, οι διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών** (οι οποίες αποδεικνύονται πολύ ισχυρές στην αντίληψη τους), **μπορούν να είναι αιτία συστηματικών λαθών τους στα μαθηματικά**. Αρκεί να θυμηθούμε την αντίληψη των μαθητών ότι όλα τα κλάσματα είναι μικρότερα της μονάδας, αντίληψη η οποία παρέμενε και μετά την πληροφορία από την εξωτερική αναπαράσταση ότι αυτό δεν συμβαίνει πάντα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα, όπως είδαμε ήταν το εξής:

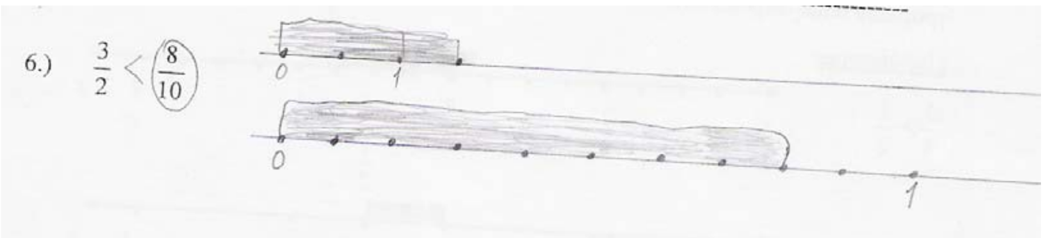


Σε τέτοιες περιπτωσεις, όπου οι νέες πληροφορίες που δέχεται κάποιος έρχονται σε σύγκρουση με την προγενέστερη γνώση του, την οποία αποκτά στη βάση της καθημερινής εμπειρίας, το είδος της μάθησης που απαιτείται είναι η «εννοιολογική αλλαγή». Εννοιολογική αλλαγή απαιτείται και στην περιπτώση της έννοιας του κλάσματος, δεδομένου ότι είναι αναγκαία μια σημαντική αναδιοργάνωση της προγενέστερης γνώσης των μαθητών για τους φυσικούς αριθμούς, Το γεγονός ότι τα παιδιά δεν προχωρούν σε αυτή την αναδιοργάνωση, αλλά αντίθετα σταδιακά αφομοιώνουν τις νέες πληροφορίες, ενσωματώνοντας τες στις παλιές (με αποτέλεσμα να οδηγούνται στα λάθη που είδαμε), μας οδηγεί να καταλάβουμε ποιος πρέπει να είναι ο ρόλος του δασκάλου.
<u>**Ο ρόλος του δασκάλου σε τέτοιες περιπτώσεις είναι**</u>**: να προσπαθεί να κατευθύνει τα παιδιά με τη κατάλληλη διδασκαλία διαφόρων θεμάτων, να αντιληφθούν την ασυμβατότητα των διαισθητικών πεποιθήσεων τους με τις νέες πληροφορίες (που εδώ στην περίπτωση μας, αφορούν την έννοια του κλάσματος).**

Ένα πλεονέκτημα της εννοιολογικής αλλαγής είναι όπως είδαμε ότι, μπορεί να προβλέψει και να εξηγήσει τα συστηματικά λάθη και τις παρερμηνείες των μαθητών.
Στην συνέχεια θα προχωρήσω σε κάποιες κύριες επισημάνσεις σχετικά με αυτά τα συστηματικά λάθη και παρερμηνείες που διαπιστώσαμε και τα οποία πιστεύω θα βοηθήσουν στον σχεδιασμό της κατάλληλης διδασκαλίας.
Οι επισημάνσεις μου έχουν να κάνουν με την χρήση εξωτερικών αναπαραστάσεων στην διδασκαλία, έτσι μπορούμε να πούμε ότι:

- Η χρήση εξωτερικών αναπαραστάσεων (όπως στο παράδειγμα που παρέθεσα προηγουμένως), ακόμη και αν δεν αποδεικνύεται πάντα ικανή από μόνη της στο να αλλάξει τις ήδη υπάρχουσες αντιλήψεις-πεποιθήσεις των μαθητών όσον αφορά τη διάταξη των κλασμάτων, εντούτοις, η **ασυμβατότητα** αυτή μεταξύ διαισθητικής αντίληψης και της εικόνας που έχουν μέσω της εξωτερικής αναπαράστασης, δημιουργεί κάποιους πρώτους προβληματισμούς, τους οποίους μπορούμε να συζητήσουμε διεξοδικά κατά τη διδασκαλία μας, όπου π.χ. για τη συγκεκριμένη χαρακτηριστική λανθασμένη αντίληψη, ότι όλα τα κλάσματα είναι μικρότερα της μονάδας, να κατευθύνουμε τους μαθητές στη σχέση μεταξύ του αριθμητή και του παρονομαστή και στην ανάπτυξη όλων των δυνατών περιπτώσεων όπου ένα κλάσμα μπορεί να είναι μικρότερο, ίσο ή ακόμα και μεγαλύτερο από τη μονάδα.

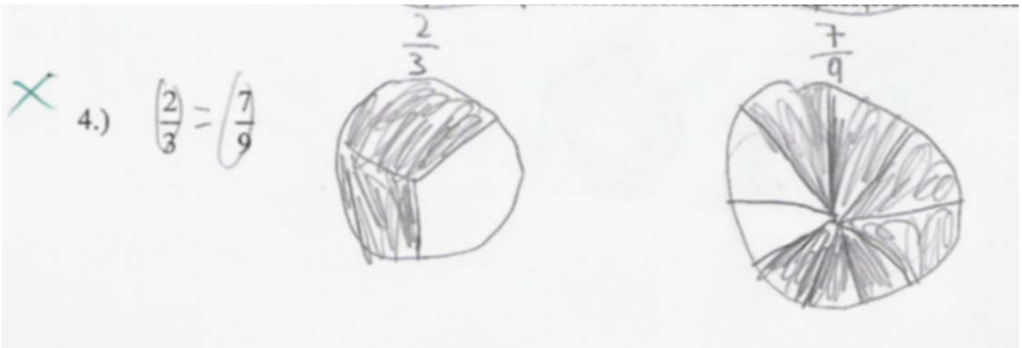
- **<u>Σχετικά με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής στην αναπαράσταση των κλασμάτων</u>**, το γεγονός ότι αυτή όπως είδαμε οδηγεί σε μια αύξηση των λαθών που σχετίζονται με το μοντέλο ότι μεγαλύτερο είναι το κλάσμα με τους μεγαλύτερους όρους, είναι κάτι που δεν πρέπει να μας διαφεύγει κατά την χρήση αυτής της εξωτερικής αναπαράστασης κατά τη διδασκαλία μας. Καθώς τα λάθη αυτά, σε ένα μεγάλο βαθμό, οφείλονταν στο ότι οι μαθητές προχωρούσαν σε λανθασμένη αναπαράσταση των κλασματικών μονάδων, αντιστοιχώντας με ίδιο τμήμα στην αριθμητική γραμμή διαφορετικές κλασματικές μονάδες και παριστάνοντας την ακέραια μονάδα με τμήματα διαφορετικού μήκους για κάθε κλάσμα, ή συγχέοντας την μονάδα με την κλασματική μονάδα,



πιστεύω ότι αυτό είναι κάτι που θα πρέπει να το αποσαφηνίσουμε κατά τη διδασκαλία μας, και ο τρόπος για να γίνει αυτό είναι μέσα από παραδείγματα σωστής αναπαράστασης διαφόρων κλασματικών μονάδων και συζητώντας διεξοδικά στην συνέχεια σχετικά με τη διάταξη τους αλλά και σχετικά με το αναλλοίωτο της μονάδας κατά την αναπαράσταση του κάθε κλάσματος.

- **<u>Σχετικά με τη διδασκαλία των σχετικών αλγοριθμικών κανόνων</u>** (π.χ. όταν έχουμε δύο ομώνυμα κλάσματα, μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει το μεγαλύτερο αριθμητή), και διαδικασιών (π.χ. για να συγκρίνω δύο ετερώνυμα κλάσματα τα μετατρέπω σε ομώνυμα και τα συγκρίνουμε όπως είπαμε πριν, ή μπορούμε επίσης να κάνουμε την αντίστοιχη διαίρεση για το καθένα του αριθμητή με τον παρονομαστή και συγκρίνω στην συνέχεια τα αποτελέσματα), **θεωρώ ότι καλό είναι να αναδεικνύουμε την χρησιμότητα και άρα την σπουδαιότητα της εκμάθησης τους, μέσα από παραδείγματα με χρήση εξωτερικών αναπαραστάσεων**, όπως:

π.χ.



όπου όπως είδαμε η μικρή διαφορά των κλασμάτων σε συνδυασμό με τη δυσκολία στο σχεδιασμό και την έλλειψη ακρίβειας στο μερισμό του κύκλου (σύνηθες πρόβλημα), να τους οδηγεί μέσω των λάθος σχημάτων σε λανθασμένες απαντήσεις). Παραδείγματα όπως το παραπάνω, αναδεικνύουν επίσης και την αναγκαιότητα της χρήσης και του ευέλικτου χειρισμού πολλαπλών αναπαραστάσεων.

- Μέσα από την εμφανή αδυναμία όπως είδαμε αρκετών μαθητών να εξηγήσουν λεκτικά κάποιες συγκρίσεις (κάτι που τους οδήγησε στο να μην απαντήσουν στο τεστ Β), αναδύεται **το πρόβλημα χρήσης και κατανόησης της ιδιαίτερης ορολογίας των μαθηματικών με το οποίο εκφράζεται ο αλγοριθμικός τρόπος σκέψης**. Η σύνδεση των αφηρημένων αλγοριθμικών κανόνων και διαδικασιών με την παράσταση τους χρησιμοποιώντας εξωτερικές αναπαραστάσεις, πιστεύω θα τους καταστήσει λιγότερο αφηρημένους και περισσότερο κατανοητούς και κατ' επέκταση θα βοηθήσει και στην εκμάθηση της αντίστοιχης ορολογίας (π.χ. ομώνυμα, ετερώνυμα, ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, κ.τ.λ.) κάτι που είναι απαραίτητο για τη μετάβαση τους σε αλγεβρικά θέματα αργότερα στο Γυμνάσιο.

- Σχετικά με τα λάθη τύπου 3, τα οποία δεν είναι τυχαία καθώς, όπως διαπιστώσαμε και στην έρευνα μας, έχουν μια συστηματικότητα. Να θυμίσουμε ότι πιθανές υποθέσεις που μπορούμε να κάνουμε σχετικά με αυτά τα λάθη είναι ότι:

ο μαθητής οδηγείται σ' αυτά καθώς αντιλαμβάνεται ότι το κλάσμα είναι διαφορετικό από δύο ξεχωριστούς φυσικούς αριθμούς. Αν ισχύει κάτι τέτοιο, μπορούμε να πούμε ότι αποτελούν ίσως και **μια εξήγηση της παρερμηνείας ενός κανόνα**. Για παράδειγμα εδώ ο γνωστός κανόνας που λέει ότι αν δυο κλάσματα έχουν τον ίδιο αριθμητή τότε μεγαλύτερο είναι αυτό που έχει το μικρότερο παρονομαστή (ένας κανόνας που επίσης οδηγεί το μαθητή στο να αντιληφθεί ότι το κλάσμα είναι διαφορετικό από δύο ξεχωριστούς φυσικούς αριθμούς), μπορεί να παραφραστεί από το μαθητή ότι γενικά μεγαλύτερο είναι το κλάσμα με τους μικρότερους όρους. Η αναζήτηση των αιτιών αυτής της παράφρασης (π.χ. ελλιπής γνώση των αντίστοιχων κανόνων-ημιμάθεια), μπορεί να μας διαφωτίσει γενικότερα πάνω στα αίτια της παρερμηνείας ενός κανόνα.

Μια αντίθετη ερμηνεία που επίσης έχουμε αναφέρει μπορεί να είναι, ότι ο μαθητής και πάλι (όπως και στα λάθη τύπου 4) αντιλαμβάνεται το κλάσμα ως δύο ξεχωριστούς φυσικούς αριθμούς αλλά ίσως να συγκρίνει τη διαφορά αριθμητή και παρονομαστή και να θεωρεί ως μεγαλύτερο το κλάσμα στο οποίο παρατηρείται η μικρότερη διαφορά.

Πιστεύω θα ήταν χρήσιμο να γίνει μια έρευνα η οποία να εξηγεί τα αίτια αυτών των λαθών και να μας απαντά σχετικά με το ποια ερμηνεία (από τις παραπάνω ή κάποια άλλη) θεωρείται κυρίαρχη.

- Η παρατήρηση σχετικά με την αδυναμία των μαθητών στην κατανόηση και κατ' επέκταση στην παράσταση των καταχρηστικών κλασμάτων (όπως π.χ. το $\frac{3}{2}$) τα οποία θεωρούσαν ως μέρος της μονάδας και άρα πάντα μικρότερα της και το γεγονός ότι το πρόβλημα αυτό, κάποιοι μαθητές, φάνηκε να το ξεπερνούν όταν αντιμετώπιζαν σύγκριση καταχρηστικού κλάσματος με μικτό αριθμό (όπως για παράδειγμα στην τελευταία ερώτηση $\frac{7}{4}$ με $1\frac{3}{4}$), φανερώνει ότι και η ίδια η επιλογή των θεμάτων και της σειράς με την οποία η μια διαδέχεται την άλλη διαδραματίζει κάποιο ρόλο όσον αφορά την αλλαγή των πεποιθήσεων του μαθητή και την αντιμετώπιση οποιονδήποτε παρανοήσεων ή κενών στην γνώση που ήδη κατέχει. Σημαντικές πληροφορίες προς αυτή την κατεύθυνση, όπως είδαμε, έχουμε μέσω της στατιστικής ανάλυσης Gras, τέτοιου είδους έρευνες ασφαλώς είναι δύσκολο να εφαρμοστούν από ένα δάσκαλο πριν από τον σχεδιασμό της διδασκαλίας του ή τη διεξαξωγή ενός τεστ, αποτελεί όμως πιστεύω ένα χρήσιμο διερευνητικό εργαλείο για την ιεράρχηση των θεμάτων διδασκαλίας σε ένα ευρύτερο πλαίσιο όπως αυτό του σχεδιασμού ενός αναλυτικού εκπαιδευτικού προγράμματος.

Τέλος, θα ήθελα να επισημάνω ότι ο ιδιαίτερος ρόλος των εξωτερικών αναπαραστάσεων και της αυτό-εξήγησης είναι να βοηθήσουν μαθητές που λειτουργούν διαισθητικά, να αναπτύξουν τις μεταγνωστικές δεξιότητες (να γνωρίζουν τι κάνουν και γιατί το κάνουν) που απαιτούνται ώστε να ξεπεράσουν τα λάθη στα οποία κατευθύνονται από τη προγενέστερή τους γνώση. Καθοριστική για την επίτευξη αυτού του στόχου είναι η διδασκαλία με χρήση εξωτερικών αναπαραστάσεων και η συνειδητή συμμετοχή των μαθητών σ' αυτή.

Στο παράρτημα που ακολουθεί στο τέλος, δίνουμε έναν αναλυτικό πίνακα με τα ποσοστά επιτυχίας της κάθε ερώτησης στα τρία τεστ (τεστ A, B, C) για κάθε σχολείο χωριστά, καθώς επίσης και τα πλήρη αποτελέσματα της στατιστικής ανάλυσης Gras.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

<u>Ελληνική Βιβλιογραφία</u>

Βοσνιάδου, Στ., (2000). Η ψυχολογία των μαθηματικών. Εκδόσεις Gutenberg.

Βοσνιάδου, Στ., (2003). Εισαγωγή στην Ψυχολογία, Τόμος Α΄. Εκδόσεις Gutenberg.

Βοσνιάδου, Στ., (2006). Σχεδιάζοντας περιβάλλοντα μάθησης υποστηριζόμενα από τις σύγχρονες τεχνολογίες. Εκδόσεις Gutenberg.

Γαγάτσης, Α. (1995). Διδακτική και ιστορία των Μαθηματικών. Θεσσαλονίκη: Έκδοση συγγραφέα.

Ασβεστά, Α., & Γαγάτσης, Α. (1995). Προβλήματα ερμηνείας και η έννοια της συνάρτησης. Στο Α. Γαγάτσης (Ed.), Διδακτική και ιστορία των μαθηματικών. Θεσσαλονίκη: Art of Text.

Γαγάτσης, Α., & Καφίδας, Α. (1995). Λάθη μαθητών Δημοτικού και Γυμνασίου σε προβλήματα αναλογιών. Στο Α. Γαγάτσης (Ed.), Διδακτική και ιστορία των μαθηματικών. Θεσσαλονίκη: Art of Text.

Γαγάτσης, Α. & Σπύρου Π. (2000). Πολλαπλές αναπαραστάσεις, ανθρώπινη νοημοσύνη και μάθηση. Αθήνα: Έκδοση συγγραφέων.

Κολιάδης Α. Εμμανουήλ, (2001), *Γνωστική Ψυχολογία, Γνωστική Νευροεπιστήμη και Εκπαιδευτική Πράξη*. Σύνθεση: Αθήνα, σ.σ. 352-53.

Σπύρου, Π., (2000), Επιστημολογία των Μαθηματικών, Σημειώσεις Παραδόσεων.

Σταφυλίδου Σταματία, (2001), Διατριβή με θέμα *Μαθηματικές Έννοιες και Διαδικασίες Μάθησης: η ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος*. Αθήνα.

Τζελεπίδης Π. Α. Μ. (2001). Νοήμονα Συστήματα, Τόμος 1. Εκδόσεις Σταμούλη, Αθήνα.

Ξένη Βιβλιογραφία

Bilman D. (1999), Representations, pp. 649-659, in A Companion to Cognitive Science, (Edit. By Bechtel & Graham G.), Blackwell, London.

Caravita, S., & Halden, O. (1994). Re-framing the problem of conceptual change. *Learning and Instruction,* 4, 89-111. Carey, S. (1985). *Conceptual change in chil(lllood.* Cambridge, MA MIT Press.

Chi, M. T. H., Slotta, J. D., & de Leeuw, N. (1994). From things to processes: a theory of conceptual change *for* learning science concepts *learning and Instruction,* 4, 27-43.

Christou, C., Gagatsis, A., & Zachariadis, T. (2002). The Difficulty Level of Representations in Mathematical Relationships. Scientia Paedagogica Experimentalis, 39, 1.

Davis Joan, (2001), Conceptual Change.

Demetriou, A., & Raftopoulos, A. (1999). Modeling the Developing Mind : From Structure to Change. Developmental Review, 19, 319-368.

Doumas, L. A. A., & Hummel, J. E. (2004). A fundamental limitation of symbol-argument-argument notation as a model of human relational representations. In Proceedings of the Twenty-Second Annual Conference of the Cognitive Science Society, 327-332.

Dufour - Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation. In C. Janvier (Ed.), Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Edelman, S., & Intrator, N. (2003). Towards structural systematicity in distributed, statically bound visual representations. Cognitive Science, 27,73-109.

Elder, A. (2002). Characterizing fifth grade students’ epistemological beliefs in science. In Hofer, B. & Pintrich, P. (Eds.), *Personal Epistemology: The psychology of beliefs about knowledge and knowing (pp 347-363).* Mahwah: Lawrence Erlbaum Association.

Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Gelepithis P. A. M. (1991). The Possibility of Machine Intelligence and the Impossibility of Human-Machine Communication. Published in Cybernetica, XXXIV, No 4, pp 255-268. ΣΧΟΛΕΙΟ of Computing and Information Systems, Kingston University, England.

Gelepithis P. A. M. (2004). Remarks on the Foundations of Cybernetics and Cognitive Science, Kybernetes, Vol. 33, Nos 9/10, ρρ.1396-1410. Cognitive Science Laboratory, Kingston University, England.

Glaserfeld, E. V. (1987). Learning as a constructive activity. In C. Janvier (Ed.) Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Glaserfeld, E. V. (1987). Preliminaries to any theory of representation. In C. Janvier (Ed.) Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Goldin, G. A. (1987). Levels of Language in Mathematics Problem Solving. In C. Janvier (Ed.), Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics (pp. 59-65). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Goldin, G. A. (1988). Representational Systems, Learning, and Problem Solving in Mathematics. The Journal of Mathematical Behavior, 17 (2), 137-165.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A Joint Perspective of the Idea of Representation in Learning and Doing Mathematics. In von L. P. Steffe & Mahwah, Theories of Mathematical Learning (pp. 397-430). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hartnett, P. M., & Gelman, R. (1998). Early understandings of number: paths of barriers to the construction of new understandings? *Learning and 1nstruction,* 8, 341-374.

Hofer, B. & Pintrich, P. (Eds.). (2002). *Personal Epistemology: The psychology of beliefs about knowledge and knowing (pp 347-363).* Mahwah: Lawrence Erlbaum Association.

Holyoak K. J. & Morrison R. G. (2004). The Cambridge Handbook of Thinking and Reasoning. Cambridge.

Ioannides, C., & Vosniadou, S. (2001). The changing meanings of force: from coherence to fragmentation. *Cognitive Science Quarterly,* 2(1), 5-62.

Ioannidou, I**.,** & Vosniadou, S. (2001). The development of knowledge about the composition and layering of the earth's interior. *Nea Paedia,* 31,107-150 (στα Ελληνικά).

Janvier, C. (1987). Translation Processes in Mathematics Education. In C. Janvier (Ed.), Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J. (1985). Representation and Problem Solving: Methodological Issues Related to Modelling. In E. A. Silver (Ed.), Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives (pp. 381-398). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J. (1987a). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.) Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J. (1987b). Toward a Theory of Symbol Use in Mathematics. In C. Janvier (Ed.), Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics (pp. 159-195). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (ρρ. 390-419). New York: Macmillan.

Kouka, A., Vosniadou, S., & Tsaparlis, G. (2001). The development of students' understanding of water as a solvent. Biennial meeting of the European science education association, Thessaloniki, Greece.

Kyrkos, C., & Vosniadou, S. (1997). Mental models of plant nutrition. Seventh European conference for research οη leaming and instruction, Athens, Greece.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and Translations Among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. In C. Janvier (Ed.), Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Megalakaki, O., Ioannides, C., Vosniadou, S., & Tiberghien, A. (1997). Differentiating force from energy: children's understanding of the concepts of energy and force. Seventh European conference for research on learning and instruction, Athens, Greece.

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2002). Conceptual change ίη mathematics: understanding the real numbers. In M. Limon, & L. Mason (Eds.), *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice* (pp. 233-258). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Piaget, J., Inhelder, B. (1958). The growth of logical thinking from childhood to adolescence, New York: Basic Books Inc.

Piaget, J. (1970). The child's conception of movement and speed, London: Routledge Kegan Paul.

Piaget, J., Inhelder, B. (1975). The origin of the idea of chance in children, New York: Norton.

Piaget, J., Grize, J.B., Szeminska, A., Bang, V. (1977). Epistemology and Psychology of functions, Dordrecht, Holland: Reidel.

Posner, G.J., Strike, K.A., Hewson, P.W., Gertzog, W.A., (1982). Accomodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education, 66, 211-227.*

Vosniadou, S., & Brewer, W. F. (1992). Mental models of the earth: a study of conceptual change in childhood. *Cognitiveve Psychology,* 24, 535-585.

Vosniadou, S.(1994). Capturing and modeling the process of conceptual change. *Learning and Instruction,* 4, pp. 45-69.

Vosniadou, S.(1999). Conceptual change research: state of the art and future direction. In W. Schnotz, S. Vosniadou , M. Carretero, *New perspectives on conceptual change* (pp.3-13). Oxford: Elsevier.

Vosniadou, S., Ioannidis, C., Dimitrakopoulou, A., Papadimitriou, E. (2001). Designing learning enviroments to promote conceptual change in science. *Learning and Instruction,* 11, 381-419.

Vosniadou, S., & Verschaaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction,* 14, 445-451.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2002). Conceptual change in mathematics: From the set of natural to the set of rational numbers. *Proceedings of the third European symposium on conceptual change, Turku, Finland*

Vosniadou, S. (2003). Exploring the relationships between conceptual change and intentional learning. In G. M. Sinatra, & P. R. Pintrich (Eds.), / Intentional conceptual change (pp. 377-406). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (ρρ. 191-215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Seeger, F. (1998). Representations in the Mathematical Classroom: Reflections and Constructions. In von F. Seeger, J. Voight & U. Waschescio (Eds.), The culture of the mathematical classroom (pp. 308-343). Cambridge: Cambridge UP.

Stafylidou, S. & Vosniadou, S. (2004). Students' understanding of the numerical value of fractions: A conceptual change approach. *Learning and Instruction.*

Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How students (mis)understand science and mathematics: Intuitive rules.* New York: Teachers College Press.

Stufflebeam R. S. (1999). Representations and computation, pp 636-648, in A Companion to Cognitive Science, (Edit. By Bechtel & Graham G.), Blackwell, London.

Singer J., A., Resnick, B., L. (1992). Representations of Proportional Relationships: Are Children Part-Part or Part-Whole Reasoners?, Educational Studies in Mathematics, Vol 23, No 3, pp. 231-246.

Tirosh, D., & Tsamir, P. (2004). What can matllematics education gain from the conceptual change approach and what can the conceptual change approach gain from its application to mathematics education? In L. Verschaffel and S. Vosniadou (Eds). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching, *Learning and Instruction,* doi: 10. 101 6/j.learninstruc.2004.06.017.

Verschaffel, L., Greer, B., &De Corte, E. (2000). Making Sense of World Problems, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Von Glaserfeld, E. (1987b). Preliminaries to any Theory of Representation. In C. Janvier (Ed.), Problems of Representations in the Theory and Learning of Mathematics (pp. 215-225). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακας με τα ποσοστά επιτυχίας της κάθε ερώτησης στα τρία τεστ (τεστ Α, Β, C) για κάθε πειραματική ομάδα και για την ομάδα ελέγχου και για κάθε τμήμα των Δημοτικών Σχολείων που συμμετείχαν στην έρευνα χωριστά.

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ					**ΑΜΦΙΣΣΑΣ**				
ΤΕΣΤ A	100	57,1	28,6	42,9	35,7	71,4	92,9	50	57,1
ΤΕΣΤ B	92,9	35,7	28,6	85,7	92,9	28,6	85,7	50	71,4
ΤΕΣΤ C	57,1	71,4	42,9	64,3	71,4	71,4	92,9	100	100
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ					**2ο ΒΟΛΟΥ**				
ΤΕΣΤ A	91,7	91,7	66,7	45,8	54,2	87,5	95,8	75	50
ΤΕΣΤ B	87,5	45,8	45,8	83,3	70,8	41,7	70,8	58,3	50
ΤΕΣΤ C	95,8	87,5	75	58,3	54,2	83,3	95,8	66,7	66,7
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ					**1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ1**				
ΤΕΣΤ A	93,3	46,7	13,3	53,3	66,7	33,3	60	53,3	13,3
ΤΕΣΤ B	86,7	33,3	26,7	86,7	93,3	40	73,3	40	20
ΤΕΣΤ C	73,3	100	60	80	80	60	66,7	73,3	60
ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ					**25ο ΒΟΛΟΥ**				
ΤΕΣΤ A	100	66,7	61,9	71,4	61,9	61,9	71,4	61,9	47,6
ΤΕΣΤ B	90,5	90,5	52,4	33,3	71,4	76,2	90,5	57,1	57,1
ΤΕΣΤ C	85,7	95,2	81	90,5	95,2	81	85,7	61,9	71,4
ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ					**1ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ ΣΤ2**				
ΤΕΣΤ A	93,8	68,8	25	50	50	43,8	37,5	43,8	37,5
ΤΕΣΤ B	100	50	18,8	68,8	81,3	56,3	87,5	56,3	68,8
ΤΕΣΤ C	87,5	100	93,8	100	93,8	93,8	93,8	100	100
ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ					**76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ1**				
ΤΕΣΤ A	43,5	82,6	56,5	56,5	73,9	65,2	78,3	69,6	52,2
ΤΕΣΤ B	100	78,3	78,3	73,9	87	73,9	95,7	73,9	82,6
ΤΕΣΤ C	100	100	95,7	65,2	73,9	56,5	87	78,3	78,3
ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ					**3ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ**				
ΤΕΣΤ A	83,3	44,4	33,3	72,2	72,2	27,8	50	55,6	5,6
ΤΕΣΤ B	94,4	55,6	44,4	66,7	61,1	33,3	77,8	50	11,1
ΤΕΣΤ C	83,3	94,4	72,2	94,4	77,8	44,4	66,7	27,8	83,3
ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ					**76ο ΑΘΗΝΑΣ ΣΤ2**				
ΤΕΣΤ A	91,3	69,6	87	43,5	30,4	87	91,3	91,3	82,6
ΤΕΣΤ B	100	82,6	91,3	47,8	73,9	65,2	73,9	47,8	65,2
ΤΕΣΤ C	87	87	87	78,3	60,9	82,6	87	87	91,3
ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ					**138ο ΑΘΗΝΑΣ**				
ΤΕΣΤ A	70,8	95,8	41,7	29,2	20,8	87,5	83,3	50	75

ΤΕΣΤ B	83,3	79,2	41,7	29,2	25	75	83,3	54,2	79,2
ΤΕΣΤ C	87,5	91,7	70,8	66,7	58,3	79,2	79,2	83,3	75
ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ					13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ1				
ΤΕΣΤ A	94,7	57,9	63,2	73,7	78,9	63,2	73,7	89,5	68,4
ΤΕΣΤ C	63,2	84,2	68,4	78,9	100	68,4	84,2	73,7	89,5
ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ					13ο ΒΟΛΟΥ ΣΤ2				
ΤΕΣΤ A	77,3	72,7	72,7	63,6	54,5	54,5	77,3	63,6	50
ΤΕΣΤ C	68,2	81,8	72,7	68,2	63,6	54,5	81,8	45,5	50
ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ					9ο Ν. ΙΩΝΙΑΣ				
ΤΕΣΤ A	94,1	47,1	41,2	64,7	70,6	47,1	76,5	58,8	76,5
ΤΕΣΤ C	52,9	94,1	47,1	70,6	58,8	41,2	70,6	52,9	64,7

ΠΙΝΑΚΕΣ SPSS

Πίνακας 3.1β

Τεστ χ2 για το τεστ Α:

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	19,313(a)	10	,036
Likelihood Ratio	21,327	10	,019
Linear-by-Linear Association	,818	1	,366
N of Valid Cases	1602		

a 3 cells (16,7%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 3,57.

Πίνακας 3.2β

Τεστ χ2 για το τεστ Β:

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	98,717(a)	10	,000
Likelihood Ratio	98,487	10	,000
Linear-by-Linear Association	3,036	1	,081

N of Valid Cases	1602		
a 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 27,10.			

Πίνακας 3.2β

Τεστ χ2 για το τεστ Β:

Chi-Square Tests			
	Value	**df**	**Asymp. Sig. (2-sided)**
Pearson Chi-Square	34,730(a)	10	,000
Likelihood Ratio	36,969	10	,000
Linear-by-Linear Association	,487	1	,485
N of Valid Cases	1602		
a 3 cells (16,7%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 1,19.			

Πίνακας 3.3β

Τεστ χ2 για το τεστ C:

Chi-Square Tests			
	Value	**df**	**Asymp. Sig. (2-sided)**
Pearson Chi-Square	34,730(a)	10	,000
Likelihood Ratio	36,969	10	,000
Linear-by-Linear Association	,487	1	,485
N of Valid Cases	1602		
a 3 cells (16,7%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 1,19.			

ΑΝΆΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

Πίνακας 3.4β

Tests of Within-Subjects Contrasts(a) Measure: MEASURE_1						
Source	**FACTOR1**	**Type III Sum of Squares**	**df**	**Mean Square**	**F**	**Sig.**
FACTOR1	**Linear**	,943	1	,943	,343	,561
Error(FACTOR1)	**Linear**	143,057	52	2,751		
a EXPERIME = ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ						

Tests of Between-Subjects Effects(a) Measure: MEASURE_1 Transformed Variable: Average					
Source	**Type III Sum of Squares**	**df**	**Mean Square**	**F**	**Sig.**
Intercept	3239,585	1	3239,585	486,291	,000
Error	346,415	52	6,662		
a EXPERIME = ARITHMITIKH GRAMMH					

Πίνακας 3.5β

Tests of Within-Subjects Contrasts(a) Measure: MEASURE_1						
Source	**FACTOR1**	**Type III Sum of Squares**	**df**	**Mean Square**	**F**	**Sig.**
FACTOR1	**Linear**	31,736	1	31,736	10,297	,002
	Quadratic	19,132	1	19,132	8,186	,006
Error(FACTOR1)	**Linear**	160,264	52	3,082		
	Quadratic	121,535	52	2,337		
a EXPERIME = ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ						

Tests of Between-Subjects Effects(a) Measure: MEASURE_1 Transformed Variable: Average					
Source	**Type III Sum of Squares**	**df**	**Mean Square**	**F**	**Sig.**
Intercept	5580,906	1	5580,906	751,000	,000
Error	386,428	52	7,431		
a EXPERIME = ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ					

Πίνακας 3.6β

Tests of Within-Subjects Contrasts(a) Measure: MEASURE_1

Source	FACTOR1	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
FACTOR1	**Linear**	33,075	1	33,075	22,844	,000
Error(FACTOR1)	**Linear**	85,425	59	1,448		
a EXPERIME = ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ						

Tests of Between-Subjects Effects(a)
Measure: MEASURE_1
Transformed Variable: Average

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Intercept	4404,408	1	4404,408	717,664	,000
Error	362,092	59	6,137		
a EXPERIME = ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ					

Πίνακας 3.7β

Tests of Within-Subjects Contrasts(a)
Measure: MEASURE_1

Source	FACTOR1	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
FACTOR1	**Linear**	145,200	1	145,200	64,027	,000
	Quadratic	,100	1	,100	,065	,799
Error(FACTOR1)	**Linear**	133,800	59	2,268		
	Quadratic	90,233	59	1,529		
a EXPERIME ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ						

Tests of Between-Subjects Effects(a)
Measure: MEASURE_1
Transformed Variable: Average

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Intercept	7880,450	1	7880,450	1252,494	,000
Error	371,217	59	6,292		
a EXPERIME ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ					

Πίνακας 3.8β

Tests of Within-Subjects Contrasts(a)
Measure: MEASURE_1

Source	FACTOR1	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
FACTOR1	**Linear**	3,077E-02	1	3,077E-02	,021	,887

Error(FACTOR1)	**Linear**	95,969	64	1,500		
a EXPERIME = ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ						

Tests of Between-Subjects Effects(a)
Measure: MEASURE_1
Transformed Variable: Average

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Intercept	4189,569	1	4189,569	863,743	,000
Error	310,431	64	4,850		
a EXPERIME = ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ					

Πίνακας 3.9β

Tests of Within-Subjects Contrasts(a)
Measure: MEASURE_1

Source	FACTOR1	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
FACTOR1	**Linear**	56,892	1	56,892	27,151	,000
	Quadratic	17,241	1	17,241	12,767	,001
Error(FACTOR1)	**Linear**	134,108	64	2,095		
	Quadratic	86,426	64	1,350		
a EXPERIME ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ						

Tests of Between-Subjects Effects(a)
Measure: MEASURE_1
Transformed Variable: Average

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Intercept	7286,482	1	7286,482	1169,195	,000
Error	398,851	64	6,232		
a EXPERIME ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ					

Πίνακας 3.10β

Tests of Within-Subjects Contrasts
Measure: MEASURE_1

Source	FACTOR1	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
FACTOR1	**Linear**	152,706	1	152,706	57,642	,000
	Quadratic	11,586	1	11,586	6,073	,015
FACTOR1 * EXPERIME	**Linear**	17,201	1	17,201	6,493	,012

	Quadratic	8,825	1	8,825	4,626	,034
Error(FACTOR1)	**Linear**	294,064	111	2,649		
	Quadratic	211,768	111	1,908		

Tests of Between-Subjects Effects
Measure: MEASURE_1
Transformed Variable: Average

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Intercept	13278,462	1	13278,462	1945,384	,000
EXPERIME	40,444	1	40,444	5,925	,017
Error	757,644	111	6,826		

Πίνακας 3.11β

Tests of Within-Subjects Contrasts
Measure: MEASURE_1

Source	FACTOR1	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
FACTOR1	**Linear**	108,270	1	108,270	53,919	,000
FACTOR1 * EXPERIME	**Linear**	65,967	2	32,984	16,426	,000
Error(FACTOR1)	**Linear**	337,349	168	2,008		

Tests of Between-Subjects Effects
Measure: MEASURE_1
Transformed Variable: Average

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Intercept	13583,373	1	13583,373	2751,493	,000
EXPERIME	18,390	2	9,195	1,863	,158
Error	829,370	168	4,937		

Πίνακας 3.12β

Tests of Within-Subjects Contrasts
Measure: MEASURE_1

Source	FACTOR1	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
FACTOR1	**Linear**	209,357	1	209,357	85,567	,000
	Quadratic	26,274	1	26,274	15,420	,000
FACTOR1 * EXPERIME	**Linear**	19,851	2	9,925	4,057	,019
	Quadratic	10,672	2	5,336	3,131	,046
Error(FACTOR1)	**Linear**	428,172	175	2,447		

	Quadratic	298,194	175	1,704		

Tests of Between-Subjects Effects Measure: MEASURE_1 Transformed Variable: Average					
Source	**Type III Sum of Squares**	**df**	**Mean Square**	**F**	**Sig.**
Intercept	20501,437	1	20501,437	3102,261	,000
EXPERIME	44,420	2	22,210	3,361	,037
Error	1156,496	175	6,609		

Πίνακας 3.13β

Tests of Within-Subjects Contrasts Measure: MEASURE_1						
Source	**FACTOR1**	**Type III Sum of Squares**	**df**	**Mean Square**	**F**	**Sig.**
FACTOR1	**Linear**	162,294	1	162,294	79,863	,000
FACTOR1 * EXPERIME	**Linear**	66,753	3	22,251	10,950	,000
Error(FACTOR1)	**Linear**	471,456	232	2,032		

Tests of Between-Subjects Effects Measure: MEASURE_1 Transformed Variable: Average					
Source	**Type III Sum of Squares**	**df**	**Mean Square**	**F**	**Sig.**
Intercept	18715,857	1	18715,857	4017,463	,000
EXPERIME	18,392	3	6,131	1,316	,270
Error	1080,801	232	4,659		

Πίνακας 3.14β

T-Test

Paired Samples Statistics						
ΠΕΙΡΑΜ. ΟΜΑΔΕΣ			**Mean**	**N**	**Τυπική απόκλιση**	**Μέσο τυπικό σφάλμα**
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	**Pair 1**	**SumA**	5,62	53	2,096	,288
		sumB	5,43	53	2,240	,308

	Pair 2	**sumB**	5,43	53	2,240	,308
		sumC	6,72	53	1,854	,255
	Pair 3	**SumA**	5,62	53	2,096	,288
		sumC	6,72	53	1,854	,255
ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	**Pair 1**	**SumA**	5,53	60	1,827	,236
		sumB	6,58	60	2,061	,266
	Pair 2	**sumB**	6,58	60	2,061	,266
		sumC	7,73	60	1,582	,204
	Pair 3	**SumA**	5,53	60	1,827	,236
		sumC	7,73	60	1,582	,204
ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	**Pair 1**	**SumA**	5,66	65	1,642	,204
		sumB	5,69	65	1,912	,237
	Pair 2	**sumB**	5,69	65	1,912	,237
		sumC	6,98	65	1,824	,226
	Pair 3	**SumA**	5,66	65	1,642	,204
		sumC	6,98	65	1,824	,226
ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	**Pair 1**	**SumA**	.	0(a)	.	.
		sumB	.	0(a)	.	.
	Pair 2	**sumB**	.	0(a)	.	.
		sumC	.	0(a)	.	.
	Pair 3	**SumA**	6,09	58	1,760	,231
		sumC	6,17	58	2,045	,268
a The correlation and t cannot be computed because there are no valid pairs.						

(όπου SumA, SumB, SumC είναι αντίστοιχα το σύνολο των επιτυχών απαντήσεων σε κάθε τεστ αντίστοιχα)

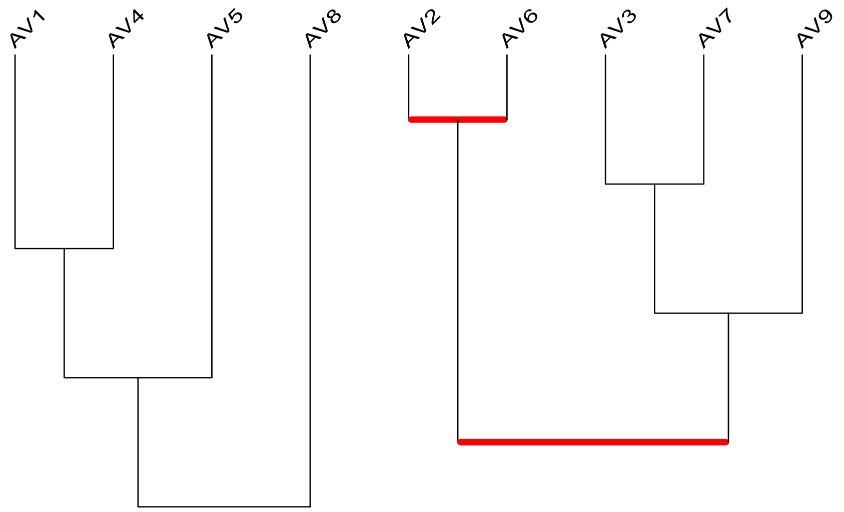
Πίνακας 3.15β

Paired Samples Test										
ΠΕΙΡΑΜ. ΟΜΑΔΕΣ			**Paired Differences**					**t**	**df**	**Sig. (2-tailed)**
			Μέσος όρος	**Τυπ. απόκλιση**	**Μέσο τυπ. σφάλμα**	**95% Confidence Interval of the Difference**				
						Lower	**Upper**			
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ	**Pair 1**	**SumA -**	,189	2,346	,322	-,458	,835	,586	52	,561

		sumB								
	Pair 2	**sumB - sumC**	-1,283	2,143	,294	-1,874	-,692	-4,359	52	,000
	Pair 3	**SumA - sumC**	-1,094	2,483	,341	-1,779	-,410	-3,209	52	,002
ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	**Pair 1**	**SumA - sumB**	-1,050	1,702	,220	-1,490	-,610	-4,780	59	,000
	Pair 2	**sumB - sumC**	-1,150	1,990	,257	-1,664	-,636	-4,476	59	,000
	Pair 3	**SumA - sumC**	-2,200	2,130	,275	-2,750	-1,650	-8,002	59	,000
ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	**Pair 1**	**SumA - sumB**	-,031	1,732	,215	-,460	,398	-,143	64	,887
	Pair 2	**sumB - sumC**	-1,292	1,774	,220	-1,732	-,853	-5,873	64	,000
	Pair 3	**SumA - sumC**	-1,323	2,047	,254	-1,830	-,816	-5,211	64	,000
ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	**Pair 3**	**SumA - sumC**	-,086	1,232	,162	-,410	,238	-,533	57	,596

Πλήρη αποτελέσματα της στατιστικής ανάλυσης Gras

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ PRE-TEST



Similarity : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\PRETEST.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ PRE-TEST

nb col : 9, nb lig : 178

	Occurrence	Average	Standard deviations:
AV1	: 149.00	0.84	0.37
AV2	: 128.00	0.72	0.45
AV3	: 88.00	0.49	0.50
AV4	: 91.00	0.51	0.50
AV5	: 91.00	0.51	0.50
AV6	: 117.00	0.66	0.47
AV7	: 134.00	0.75	0.43
AV8	: 112.00	0.63	0.48
AV9	: 88.00	0.49	0.50

Correlation indexes:

	AV1	AV2	AV3	AV4	AV5	AV6	AV7	AV8	AV9
AV1		-0.11	-0.08	0.21	0.06	-0.16	0.06	0.10	0.07
AV2			0.37	-0.44	-0.36	0.63	0.40	0.04	0.34
AV3				0.05	0.05	0.38	0.33	0.18	0.19
AV4					0.51	-0.33	-0.22	0.11	-0.04
AV5						-0.42	-0.17	0.13	-0.13
AV6							0.38	0.13	0.36
AV7								-0.06	0.33
AV8									0.22
AV9									

Similarity indexes:

	AV1	AV2	AV3	AV4	AV5	AV6	AV7	AV8	AV9
AV1	1.00	0.52	0.52	0.84	0.69	0.46	0.67	0.72	0.70
AV2	0.52	1.00	0.91	0.03	0.07	0.96	0.86	0.55	0.90
AV3	0.52	0.91	1.00	0.22	0.22	0.87	0.91	0.66	0.44

AV4	0.84	0.03	0.22	1.00	0.78	0.02	0.24	0.56	0.00
AV5	0.69	0.07	0.22	0.78	1.00	0.00	0.30	0.59	0.00
AV6	0.46	0.96	0.87	0.02	0.00	1.00	0.88	0.60	0.86
AV7	0.67	0.86	0.91	0.24	0.30	0.88	1.00	0.47	0.91
AV8	0.72	0.55	0.66	0.56	0.59	0.60	0.47	1.00	0.71
AV9	0.70	0.90	0.44	0.00	0.00	0.86	0.91	0.71	1.00

Classification at level : 1 : (AV2 AV6) similarity : 0.957089

Classification at level : 2 : (AV3 AV7) similarity : 0.909862

Classification at level : 3 : (AV1 AV4) similarity : 0.840857

Classification at level : 4 : ((AV3 AV7) AV9) similarity : 0.827849

Classification at level : 5 : ((AV1 AV4) AV5) similarity : 0.602425

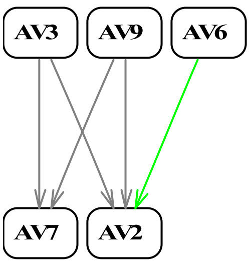
Classification at level : 6 : ((AV2 AV6) ((AV3 AV7) AV9)) similarity : 0.576098

Classification at level : 7 : (((AV1 AV4) AV5) AV8) similarity : 0.374489

The most significant node is at level : 1

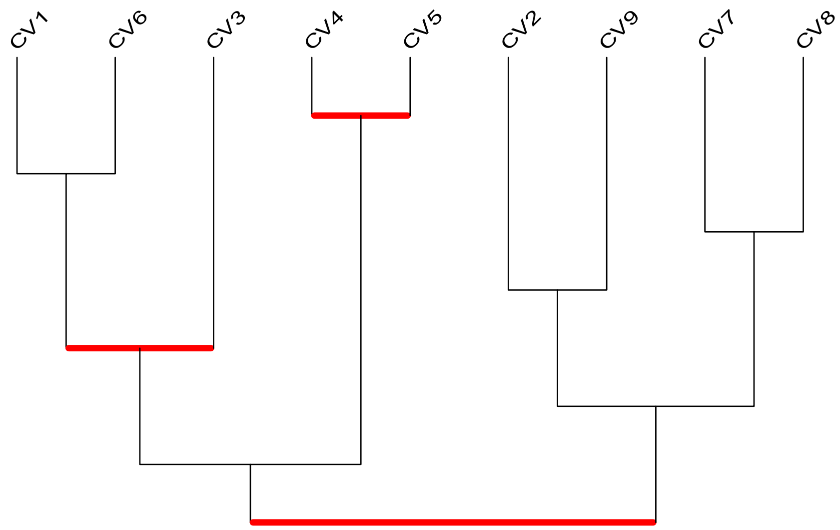
Significant nodes
at level: 1
at level: 6

ΣΥΝ ΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ PRE-TEST
Οι πράσινες γραμμές έχουν 90% σημαντικότητα και οι μαύρες γραμμές αντιστοιχούν σε 85% σημαντικότητα



Graph : C:\Documents and Settin99\c95a\90e:85op\Pantsidis-analysis\PRE TEST.csv

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ POST-TEST



Similarity : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\POSTTEST.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ POST-TEST

nb col : 9, nb lig : 178

	Occurrence	Average	Standard deviations:
CV1	: 153.00	0.86	0.35
CV2	: 164.00	0.92	0.27
CV3	: 137.00	0.77	0.42
CV4	: 136.00	0.76	0.42
CV5	: 129.00	0.72	0.45
CV6	: 130.00	0.73	0.44
CV7	: 150.00	0.84	0.36
CV8	: 133.00	0.75	0.43
CV9	: 142.00	0.80	0.40

Correlation indexes:

	CV1	CV2	CV3	CV4	CV5	CV6	CV7	CV8	CV9
CV1		0.18	0.28	0.00	0.04	0.30	0.23	0.17	0.12
CV2			0.14	0.23	0.24	0.01	-0.07	0.07	0.16
CV3				0.23	0.26	0.18	0.28	0.14	0.06
CV4					0.58	0.05	-0.02	0.04	0.08
CV5						0.02	0.01	0.08	0.10
CV6							0.22	0.23	0.26
CV7								0.32	0.05
CV8									0.32
CV9									

Similarity indexes:

	CV1	CV2	CV3	CV4	CV5	CV6	CV7	CV8	CV9
CV1	1.00	0.75	0.82	0.64	0.67	0.85	0.77	0.76	0.72
CV2	0.75	1.00	0.75	0.80	0.81	0.68	0.64	0.72	0.76
CV3	0.82	0.75	1.00	0.75	0.79	0.72	0.82	0.69	0.63
CV4	0.64	0.80	0.75	1.00	0.94	0.60	0.61	0.59	0.66
CV5	0.67	0.81	0.79	0.94	1.00	0.54	0.63	0.61	0.68
CV6	0.85	0.68	0.72	0.60	0.54	1.00	0.80	0.75	0.80
CV7	0.77	0.64	0.82	0.61	0.63	0.80	1.00	0.85	0.66
CV8	0.76	0.72	0.69	0.59	0.61	0.75	0.85	1.00	0.83
CV9	0.72	0.76	0.63	0.66	0.68	0.80	0.66	0.83	1.00

Classification at level : 1 : (CV4 CV5) similarity : 0.940484

Classification at level : 2 : (CV1 CV6) similarity : 0.848695

Classification at level : 3 : (CV7 CV8) similarity : 0.848382

Classification at level : 4 : (CV2 CV9) similarity : 0.760633

Classification at level : 5 : ((CV1 CV6) CV3) similarity : 0.675637

Classification at level : 6 : ((CV2 CV9) (CV7 CV8)) similarity : 0.48142

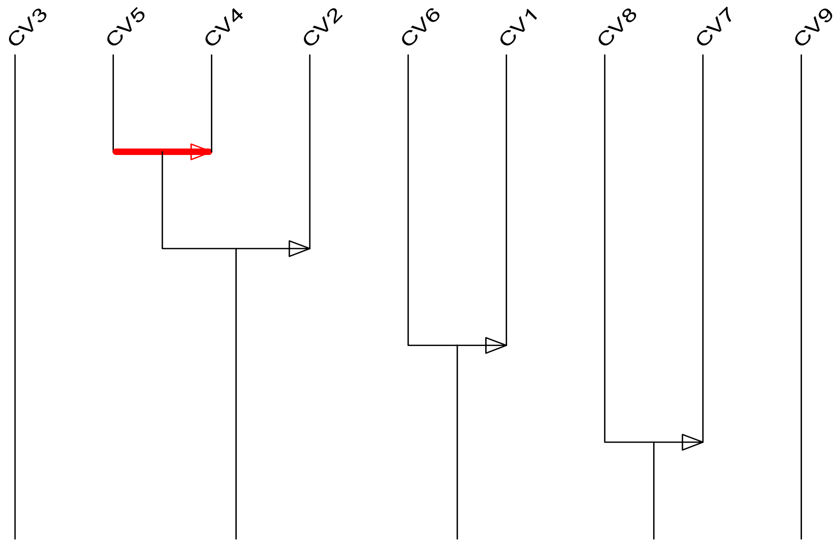
Classification at level : 7 : (((CV1 CV6) CV3) (CV4 CV5)) similarity : 0.23952

Classification at level : 8 : ((((CV1 CV6) CV3) (CV4 CV5)) ((CV2 CV9) (CV7 CV8))) similarity : 0.0175437

The most significant node is at level : 1

Significant nodes
at level: 1
at level: 5
at level: 8

ΙΕΡΑΡΧΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ POST-TEST



Herarchical tree : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\POSTTEST.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΙΕΡΑΡΧΙΚΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΤΟΥ POST-TEST

nb col : 9, nb lig : 178

	Occurrence	Average	Standard deviations:
CV1	: 153.00	0.86	0.35
CV2	: 164.00	0.92	0.27
CV3	: 137.00	0.77	0.42
CV4	: 136.00	0.76	0.42
CV5	: 129.00	0.72	0.45
CV6	: 130.00	0.73	0.44
CV7	: 150.00	0.84	0.36
CV8	: 133.00	0.75	0.43
CV9	: 142.00	0.80	0.40

Correlation indexes:

	CV1	CV2	CV3	CV4	CV5	CV6	CV7	CV8	CV9
CV1		0.18	0.28	0.00	0.04	0.30	0.23	0.17	0.12
CV2			0.14	0.23	0.24	0.01	-0.07	0.07	0.16
CV3				0.23	0.26	0.18	0.28	0.14	0.06
CV4					0.58	0.05	-0.02	0.04	0.08
CV5						0.02	0.01	0.08	0.10
CV6							0.22	0.23	0.26
CV7								0.32	0.05
CV8									0.32
CV9									

Cohesitive indexes: (according to the entropic method)
Computation with poisson law

	CV1	CV2	CV3	CV4	CV5	CV6	CV7	CV8	CV9
CV1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CV2	0	0	0	0	0	0	0	0	0

CV3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CV4	0	0.27	0	0	0.51	0	0	0	0
CV5	0	0.56	0	0.78	0	0	0	0	0
CV6	0.42	0	0	0	0	0	0	0	0
CV7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CV8	0	0	0	0	0	0	0.28	0	0
CV9	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Classification at level : 1 : (CV5 CV4) cohesion : 0.78

Classification at level : 2 : ((CV5 CV4) CV2) cohesion : 0.49

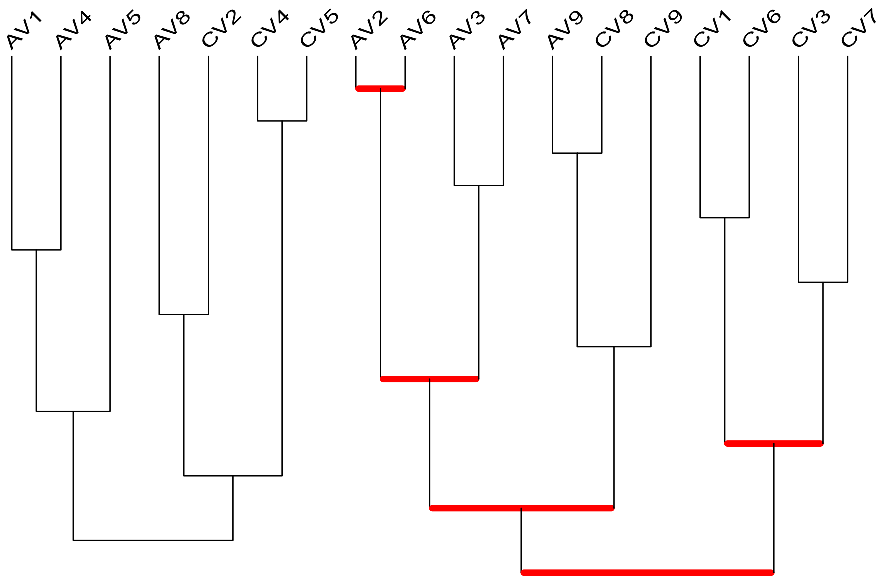
Classification at level : 3 : (CV6 CV1) cohesion : 0.417

Classification at level : 4 : (CV8 CV7) cohesion : 0.283

The most significant node is at level : 1

Significant nodes
at level: 1

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ PRE-TEST ΚΑΙ POST-TEST



Similarity : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\PRE TEST AND POST TEST.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ PRE -TEST ΚΑΙ POST-TEST

nb col : 18, nb lig : 178

	Occurrence	Average	Standard deviations:
AV1	: 149.00	0.84	0.37
AV2	: 128.00	0.72	0.45
AV3	: 88.00	0.49	0.50
AV4	: 91.00	0.51	0.50
AV5	: 91.00	0.51	0.50
AV6	: 117.00	0.66	0.47
AV7	: 134.00	0.75	0.43

```
AV8   : 112.00     0.63       0.48
AV9   : 88.00      0.49       0.50
CV1   : 153.00     0.86       0.35
CV2   : 164.00     0.92       0.27
CV3   : 137.00     0.77       0.42
CV4   : 136.00     0.76       0.42
CV5   : 129.00     0.72       0.45
CV6   : 130.00     0.73       0.44
CV7   : 150.00     0.84       0.36
CV8   : 133.00     0.75       0.43
CV9   : 142.00     0.80       0.40
```

Correlation indexes:

```
  AV1  AV2  AV3  AV4  AV5  AV6  AV7  AV8  AV9  CV1  CV2  CV3  CV4  CV5  CV6  CV7
CV8  CV9

AV1      -0.11-0.080.21 0.06 -0.160.06 0.10 0.07 -0.130.04 -0.130.04 0.00 0.01 0.02 0.02
0.01
AV2           0.37 -0.44-0.360.63 0.40 0.04 0.34 0.29 -0.040.19 -0.08-0.020.27 0.21 0.30 0.21
AV3                0.05 0.05 0.38 0.33 0.18 0.19 0.21 -0.050.22 0.10 0.08 0.27 0.18 0.19 0.05
AV4                     0.51 -0.33-0.220.11 -0.04-0.100.05 -0.050.09 -0.02-0.21-0.05-0.16-0.27
AV5                          -0.42-0.170.13 -0.13-0.040.05 -0.000.14 0.08 -0.26-0.05-0.18-0.18
AV6                               0.38 0.13 0.36 0.19 -0.080.11 -0.09-0.050.33 0.08 0.26 0.26
AV7                                    -0.060.33 0.11 -0.170.12 -0.10-0.180.21 0.22 0.21 0.07
AV8                                         0.22 -0.080.12 0.05 0.15 0.07 -0.02-0.040.09 0.05
AV9                                              0.08 -0.050.06 0.02 -0.090.15 0.15 0.34 0.19
CV1                                                   0.18 0.28 0.00 0.04 0.30 0.23 0.17 0.12
CV2                                                        0.14 0.23 0.24 0.01 -0.070.07 0.16
CV3                                                             0.23 0.26 0.18 0.28 0.14 0.06
CV4                                                                  0.58 0.05 -0.020.04 0.08
CV5                                                                       0.02 0.01 0.08 0.10
CV6                                                                            0.22 0.23 0.26
CV7                                                                                 0.32 0.05
CV8                                                                                      0.32
CV9
```

Similarity indexes:

```
  AV1  AV2  AV3  AV4  AV5  AV6  AV7  AV8  AV9  CV1  CV2  CV3  CV4  CV5  CV6  CV7
CV8  CV9

AV1  1.00 0.52 0.52 0.84 0.69 0.46 0.67 0.72 0.70 0.55 0.70 0.51 0.65 0.62 0.62 0.64 0.64
0.62
AV2  0.52 1.00 0.91 0.03 0.07 0.96 0.86 0.55 0.90 0.84 0.65 0.74 0.47 0.49 0.77 0.79 0.80
0.77
AV3  0.52 0.91 1.00 0.22 0.22 0.87 0.91 0.66 0.44 0.85 0.64 0.83 0.69 0.63 0.85 0.82 0.78
0.65
AV4  0.84 0.03 0.22 1.00 0.78 0.02 0.24 0.56 0.00 0.52 0.72 0.48 0.68 0.48 0.22 0.56 0.32
0.24
AV5  0.69 0.07 0.22 0.78 1.00 0.00 0.30 0.59 0.00 0.59 0.72 0.56 0.74 0.62 0.17 0.56 0.28
0.34
AV6  0.46 0.96 0.87 0.02 0.00 1.00 0.88 0.60 0.86 0.79 0.62 0.68 0.45 0.46 0.84 0.70 0.80
0.82
AV7  0.67 0.86 0.91 0.24 0.30 0.88 1.00 0.47 0.91 0.72 0.58 0.67 0.45 0.36 0.74 0.79 0.73
0.65
AV8  0.72 0.55 0.66 0.56 0.59 0.60 0.47 1.00 0.71 0.56 0.76 0.62 0.72 0.60 0.49 0.58 0.64
0.64
AV9  0.70 0.90 0.44 0.00 0.00 0.86 0.91 0.71 1.00 0.72 0.64 0.64 0.58 0.37 0.72 0.79 0.91
0.82
```

CV1 0.55 0.84 0.85 0.52 0.59 0.79 0.72 0.56 0.72 1.00 0.75 0.82 0.64 0.67 0.85 0.77 0.76 0.72
CV2 0.70 0.65 0.64 0.72 0.72 0.62 0.58 0.76 0.64 0.75 1.00 0.75 0.80 0.81 0.68 0.64 0.72 0.76
CV3 0.51 0.74 0.83 0.48 0.56 0.68 0.67 0.62 0.64 0.82 0.75 1.00 0.75 0.79 0.72 0.82 0.69 0.63
CV4 0.65 0.47 0.69 0.68 0.74 0.45 0.45 0.72 0.58 0.64 0.80 0.75 1.00 0.94 0.60 0.61 0.59 0.66
CV5 0.62 0.49 0.63 0.48 0.62 0.46 0.36 0.60 0.37 0.67 0.81 0.79 0.94 1.00 0.54 0.63 0.61 0.68
CV6 0.62 0.77 0.85 0.22 0.17 0.84 0.74 0.49 0.72 0.85 0.68 0.72 0.60 0.54 1.00 0.80 0.75 0.80
CV7 0.64 0.79 0.82 0.56 0.56 0.70 0.79 0.58 0.79 0.77 0.64 0.82 0.61 0.63 0.80 1.00 0.85 0.66
CV8 0.64 0.80 0.78 0.32 0.28 0.80 0.73 0.64 0.91 0.76 0.72 0.69 0.59 0.61 0.75 0.85 1.00 0.83
CV9 0.62 0.77 0.65 0.24 0.34 0.82 0.65 0.64 0.82 0.72 0.76 0.63 0.66 0.68 0.80 0.66 0.83 1.00

Classification at level : 1 : (AV2 AV6) similarity : 0.957089

Classification at level : 2 : (CV4 CV5) similarity : 0.940484

Classification at level : 3 : (AV9 CV8) similarity : 0.913438

Classification at level : 4 : (AV3 AV7) similarity : 0.909862

Classification at level : 5 : (CV1 CV6) similarity : 0.848695

Classification at level : 6 : (AV1 AV4) similarity : 0.840857

Classification at level : 7 : (CV3 CV7) similarity : 0.81697

Classification at level : 8 : (AV8 CV2) similarity : 0.76198

Classification at level : 9 : ((AV9 CV8) CV9) similarity : 0.693844

Classification at level : 10 : ((AV2 AV6) (AV3 AV7)) similarity : 0.692358

Classification at level : 11 : ((AV1 AV4) AV5) similarity : 0.602425

Classification at level : 12 : ((CV1 CV6) (CV3 CV7)) similarity : 0.456486

Classification at level : 13 : ((AV8 CV2) (CV4 CV5)) similarity : 0.438509

Classification at level : 14 : (((AV2 AV6) (AV3 AV7)) ((AV9 CV8) CV9)) similarity : 0.321889

Classification at level : 15 : (((AV1 AV4) AV5) ((AV8 CV2) (CV4 CV5))) similarity : 0.0282478

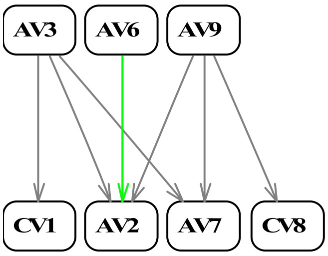
Classification at level : 16 : ((((AV2 AV6) (AV3 AV7)) ((AV9 CV8) CV9)) ((CV1 CV6) (CV3 CV7))) similarity : 0.0110582

The most significant node is at level : 16

Significant nodes
at level: 1

at level: 10
at level: 12
at level: 14
at level: 16

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑ ΓΡΑΜΜΑ ΤΩΝ PRE-TEST ΚΑΙ POST-TEST



Graph : C:\Documents and Settings\epa\99s95p90Pa85sidis-analysis\PRE TEST AND POST TEST.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΤΟΥ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΤΩΝ PRE-TEST ΚΑΙ POST- TEST

nb col : 18, nb lig : 178

	Occurrence	Average	Standard deviations:
AV1	: 149.00	0.84	0.37
AV2	: 128.00	0.72	0.45
AV3	: 88.00	0.49	0.50
AV4	: 91.00	0.51	0.50
AV5	: 91.00	0.51	0.50
AV6	: 117.00	0.66	0.47
AV7	: 134.00	0.75	0.43
AV8	: 112.00	0.63	0.48
AV9	: 88.00	0.49	0.50
CV1	: 153.00	0.86	0.35
CV2	: 164.00	0.92	0.27
CV3	: 137.00	0.77	0.42
CV4	: 136.00	0.76	0.42
CV5	: 129.00	0.72	0.45
CV6	: 130.00	0.73	0.44
CV7	: 150.00	0.84	0.36
CV8	: 133.00	0.75	0.43
CV9	: 142.00	0.80	0.40

Correlation indexes:

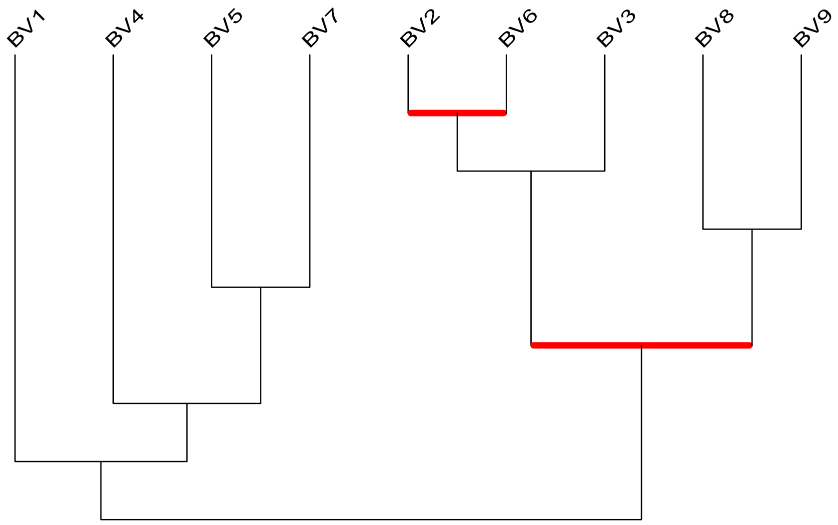
AV1 AV2 AV3 AV4 AV5 AV6 AV7 AV8 AV9 CV1 CV2 CV3 CV4 CV5 CV6 CV7 CV8 CV9

AV1 -0.11-0.080.21 0.06 -0.160.06 0.10 0.07 -0.130.04 -0.130.04 0.00 0.01 0.02 0.02
0.01
AV2 0.37 -0.44-0.360.63 0.40 0.04 0.34 0.29 -0.040.19 -0.08-0.020.27 0.21 0.30 0.21
AV3 0.05 0.05 0.38 0.33 0.18 0.19 0.21 -0.050.22 0.10 0.08 0.27 0.18 0.19 0.05
AV4 0.51 -0.33-0.220.11 -0.04-0.100.05 -0.050.09 -0.02-0.21-0.05-0.16-0.27
AV5 -0.42-0.170.13 -0.13-0.040.05 -0.000.14 0.08 -0.26-0.05-0.18-0.18
AV6 0.38 0.13 0.36 0.19 -0.080.11 -0.09-0.050.33 0.08 0.26 0.26
AV7 -0.060.33 0.11 -0.170.12 -0.10-0.180.21 0.22 0.21 0.07
AV8 0.22 -0.080.12 0.05 0.15 0.07 -0.02-0.040.09 0.05
AV9 0.08 -0.050.06 0.02 -0.090.15 0.15 0.34 0.19
CV1 0.18 0.28 0.00 0.04 0.30 0.23 0.17 0.12
CV2 0.14 0.23 0.24 0.01 -0.070.07 0.16
CV3 0.23 0.26 0.18 0.28 0.14 0.06
CV4 0.58 0.05 -0.020.04 0.08
CV5 0.02 0.01 0.08 0.10
CV6 0.22 0.23 0.26
CV7 0.32 0.05
CV8 0.32
CV9

Implicative indexes: (according to the entropic method)
Computation with poisson law

	AV1	AV2	AV3	AV4	AV5	AV6	AV7	AV8	AV9	CV1	CV2	CV3	CV4	CV5	CV6	CV7	CV8	CV9
AV1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AV2	0	0	0	0	0	75	65	0	0	67	0	0	0	0	0	0	37	0
AV3	0	88	0	21	21	83	88	59	45	85	0	78	55	48	80	79	71	44
AV4	81	0	14	0	77	0	0	44	0	0	48	0	50	0	0	0	0	0
AV5	44	0	14	77	0	0	0	48	0	0	48	0	63	43	0	0	0	0
AV6	0	91	36	0	0	0	75	0	29	57	0	0	0	0	66	0	55	63
AV7	0	43	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AV8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	56	0	0	0	0	0	0	0
AV9	53	86	45	0	0	82	88	65	0	56	0	45	31	0	62	73	88	76
CV1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CV2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CV3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	44	0	0	0	0	0	0	0	0
CV4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	61	0	0	71	0	0	0	0
CV5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	74	0	84	0	0	0	0	0
CV6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	68	0	0	0	0	0	0	0	0
CV7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CV8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	62	0	48	
CV9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ –ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ Β



Similarity : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΓΡΑΜΜΗΒ.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ Β

nb col : 9, nb lig : 53

	Occurrence	Average	Standard deviations:
BV1	: 47.00	0.89	0.32
BV2	: 21.00	0.40	0.49
BV3	: 19.00	0.36	0.48
BV4	: 45.00	0.85	0.36
BV5	: 44.00	0.83	0.38
BV6	: 20.00	0.38	0.48
BV7	: 40.00	0.75	0.43
BV8	: 27.00	0.51	0.50
BV9	: 25.00	0.47	0.50

Correlation indexes:

	BV1	BV2	BV3	BV4	BV5	BV6	BV7	BV8	BV9
BV1		0.29	0.27	-0.15	-0.16	0.28	0.35	0.01	0.10
BV2			0.60	0.13	-0.04	0.72	0.19	0.25	0.32
BV3				0.10	-0.08	0.64	0.15	0.18	0.24
BV4					0.37	0.11	0.13	0.01	0.08
BV5						-0.06	0.33	0.16	0.23
BV6							0.35	0.37	0.28
BV7								0.14	0.28
BV8									0.40
BV9									

Similarity indexes:

	BV1	BV2	BV3	BV4	BV5	BV6	BV7	BV8	BV9
BV1	1.00	0.71	0.70	0.44	0.44	0.70	0.66	0.50	0.57
BV2	0.71	1.00	1.00	0.61	0.46	1.00	0.71	0.84	0.90
BV3	0.70	1.00	1.00	0.59	0.42	1.00	0.67	0.77	0.84
BV4	0.44	0.61	0.59	1.00	0.67	0.60	0.57	0.51	0.57

BV5	0.44	0.46	0.42	0.67	1.00	0.44	0.69	0.63	0.69
BV6	0.70	1.00	1.00	0.60	0.44	1.00	0.84	0.93	0.88
BV7	0.66	0.71	0.67	0.57	0.69	0.84	1.00	0.64	0.76
BV8	0.50	0.84	0.77	0.51	0.63	0.93	0.64	1.00	0.93
BV9	0.57	0.90	0.84	0.57	0.69	0.88	0.76	0.93	1.00

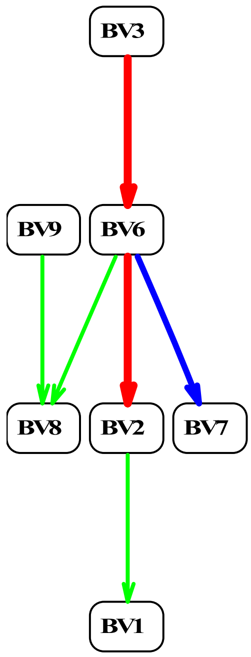
Classification at level : 1 : (BV2 BV6) similarity : 0.999368
Classification at level : 2 : ((BV2 BV6) BV3) similarity : 0.99655
Classification at level : 3 : (BV8 BV9) similarity : 0.929904
Classification at level : 4 : (BV5 BV7) similarity : 0.686014
Classification at level : 5 : (((BV2 BV6) BV3) (BV8 BV9)) similarity : 0.664446
Classification at level : 6 : (BV4 (BV5 BV7)) similarity : 0.445145
Classification at level : 7 : (BV1 (BV4 (BV5 BV7))) similarity : 0.293288
Classification at level : 8 : ((BV1 (BV4 (BV5 BV7))) (((BV2 BV6) BV3) (BV8 BV9))) similarity : 0.0325557

The most significant node is at level : 1

Significant nodes

at level: 1
at level: 5

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ Β



Graph : C:\Documents and Settin99\e95a\90e:85op\Pantsidis-analysis\ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ Β.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ Β

nb col : 9, nb lig : 53

	Occurrence	Average	Standard deviations:
BV1	: 47.00	0.89	0.32
BV2	: 21.00	0.40	0.49
BV3	: 19.00	0.36	0.48
BV4	: 45.00	0.85	0.36
BV5	: 44.00	0.83	0.38
BV6	: 20.00	0.38	0.48
BV7	: 40.00	0.75	0.43
BV8	: 27.00	0.51	0.50
BV9	: 25.00	0.47	0.50

Correlation indexes:

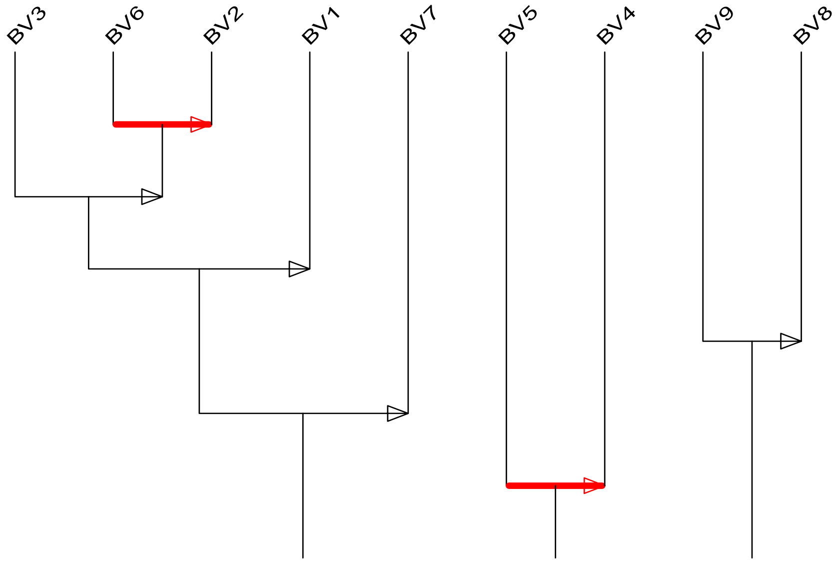
	BV1	BV2	BV3	BV4	BV5	BV6	BV7	BV8	BV9
BV1		0.29	0.27	-0.15	-0.16	0.28	0.35	0.01	0.10
BV2			0.60	0.13	-0.04	0.72	0.19	0.25	0.32
BV3				0.10	-0.08	0.64	0.15	0.18	0.24
BV4					0.37	0.11	0.13	0.01	0.08
BV5						-0.06	0.33	0.16	0.23
BV6							0.35	0.37	0.28
BV7								0.14	0.28
BV8									0.40
BV9									

Implicative indexes: (according to the classic theory)

Computation with poisson law

	BV1	BV2	BV3	BV4	BV5	BV6	BV7	BV8	BV9
BV1	0	63	61	28	28	62	71	45	51
BV2	91	0	98	61	29	100	76	81	86
BV3	88	99	0	55	22	99	68	71	78
BV4	25	54	51	0	77	53	55	45	51
BV5	23	42	39	79	0	41	75	58	63
BV6	90	100	99	58	25	0	96	93	83
BV7	83	62	58	56	81	75	0	59	71
BV8	37	75	66	39	67	86	65	0	90
BV9	54	82	73	52	80	78	86	92	0

ΙΕΡΑΡΧΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ Β



Herarchical tree : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΓΡΑΜΜΗΒ.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΙΕΡΑΡΧΙΚΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ Β

nb col : 9, nb lig : 53

	Occurrence	Average	Standard deviations:
BV1	: 47.00	0.89	0.32
BV2	: 21.00	0.40	0.49
BV3	: 19.00	0.36	0.48
BV4	: 45.00	0.85	0.36
BV5	: 44.00	0.83	0.38
BV6	: 20.00	0.38	0.48
BV7	: 40.00	0.75	0.43
BV8	: 27.00	0.51	0.50
BV9	: 25.00	0.47	0.50

Correlation indexes:

	BV1	BV2	BV3	BV4	BV5	BV6	BV7	BV8	BV9
BV1		0.29	0.27	-0.15	-0.16	0.28	0.35	0.01	0.10
BV2			0.60	0.13	-0.04	0.72	0.19	0.25	0.32
BV3				0.10	-0.08	0.64	0.15	0.18	0.24
BV4					0.37	0.11	0.13	0.01	0.08
BV5						-0.06	0.33	0.16	0.23
BV6							0.35	0.37	0.28

BV7	0.14	0.28
BV8		0.40
BV9		

Cohesitive indexes: (according to the classic theory)
Computation with poisson law

	BV1	BV2	BV3	BV4	BV5	BV6	BV7	BV8	BV9
BV1	0	0.30	0.26	0	0	0.28	0.50	0	0.03
BV2	0.90	0	0.99	0.27	0	1.00	0.60	0.70	0.82
BV3	0.85	1.00	0	0.11	0	1.00	0.44	0.50	0.66
BV4	0	0.09	0.04	0	0.64	0.06	0.11	0	0.02
BV5	0	0	0	0.67	0	0	0.58	0.19	0.31
BV6	0.88	1.00	1.00	0.19	0	0	0.97	0.92	0.75
BV7	0.75	0.29	0.19	0.14	0.71	0.58	0	0.21	0.49
BV8	0	0.58	0.37	0	0.41	0.80	0.35	0	0.89
BV9	0.09	0.74	0.54	0.05	0.68	0.64	0.81	0.92	0

Classification at level : 1 : (BV6 BV2) cohesion : 1

Classification at level : 2 : (BV3 (BV6 BV2)) cohesion : 0.998

Classification at level : 3 : ((BV3 (BV6 BV2)) BV1) cohesion : 0.935

Classification at level : 4 : (BV9 BV8) cohesion : 0.918

Classification at level : 5 : (((BV3 (BV6 BV2)) BV1) BV7) cohesion : 0.781

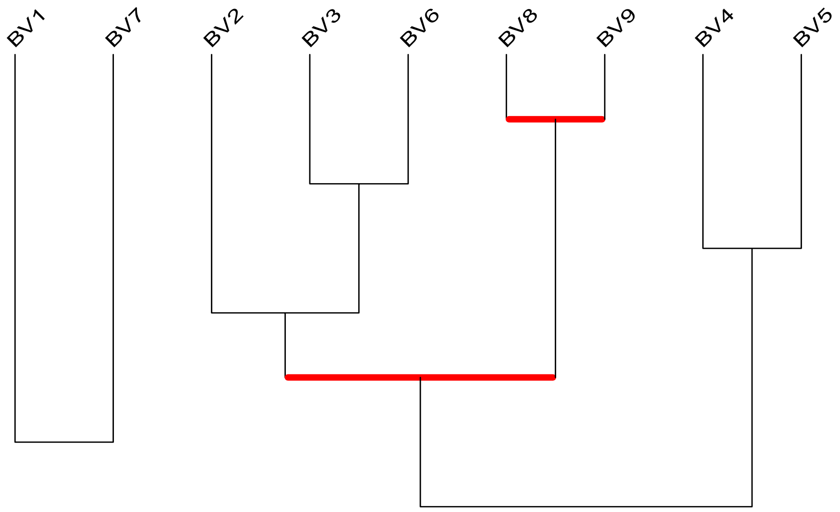
Classification at level : 6 : (BV5 BV4) cohesion : 0.675

The most significant node is at level : 1

Significant nodes

at level: 1
at level: 6

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Β



Similarity : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ B.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Β

nb col : 9, nb lig : 60

	Occurrence	Average	Standard deviations:
BV1	: 58.00	0.97	0.18
BV2	: 45.00	0.75	0.43
BV3	: 32.00	0.53	0.50
BV4	: 35.00	0.58	0.49
BV5	: 48.00	0.80	0.40
BV6	: 42.00	0.70	0.46
BV7	: 55.00	0.92	0.28
BV8	: 38.00	0.63	0.48
BV9	: 42.00	0.70	0.46

Correlation indexes:

	BV1	BV2	BV3	BV4	BV5	BV6	BV7	BV8	BV9
BV1		-0.11	0.20	0.22	0.14	0.08	-0.06	0.24	0.28
BV2			0.46	-0.25	0.00	0.63	0.24	0.36	0.38
BV3				0.09	0.37	0.55	0.20	0.40	0.34
BV4					0.42	-0.26	-0.25	0.13	0.04
BV5						-0.24	-0.15	0.22	0.04
BV6							0.33	0.48	0.44
BV7								0.02	0.20
BV8									0.63
BV9									

Similarity indexes:

BV1 BV2 BV3 BV4 BV5 BV6 BV7 BV8 BV9

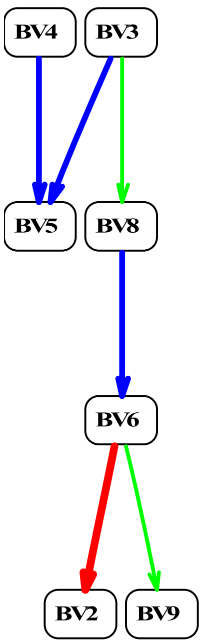
BV1	1.00	0.47	0.58	0.58	0.54	0.53	0.49	0.58	0.59
BV2	0.47	1.00	0.89	0.26	0.50	0.91	0.61	0.80	0.79
BV3	0.58	0.89	1.00	0.62	0.81	0.95	0.62	0.90	0.83
BV4	0.58	0.26	0.62	1.00	0.83	0.24	0.36	0.65	0.54
BV5	0.54	0.50	0.81	0.83	1.00	0.33	0.44	0.68	0.53
BV6	0.53	0.91	0.95	0.24	0.33	1.00	0.66	0.89	0.85
BV7	0.49	0.61	0.62	0.36	0.44	0.66	1.00	0.51	0.60
BV8	0.58	0.80	0.90	0.65	0.68	0.89	0.51	1.00	0.95
BV9	0.59	0.79	0.83	0.54	0.53	0.85	0.60	0.95	1.00

Classification at level : 1 : (BV8 BV9) similarity : 0.948311
Classification at level : 2 : (BV3 BV6) similarity : 0.94584
Classification at level : 3 : (BV4 BV5) similarity : 0.827648
Classification at level : 4 : (BV2 (BV3 BV6)) similarity : 0.826782
Classification at level : 5 : ((BV2 (BV3 BV6)) (BV8 BV9)) similarity : 0.52646
Classification at level : 6 : (BV1 BV7) similarity : 0.490882
Classification at level : 7 : (((BV2 (BV3 BV6)) (BV8 BV9)) (BV4 BV5)) similarity : 0.118238

The most significant node is at level : 1

Significant nodes
at level: 1
at level: 5

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Β



Graph : C:\Documents and S99in95\90a\85esktop\Pantsidis-analysis\ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Β.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Β

nb col : 9, nb lig : 60

	Occurrence	Average	Standard deviations:
BV1	: 58.00	0.97	0.18
BV2	: 45.00	0.75	0.43
BV3	: 32.00	0.53	0.50
BV4	: 35.00	0.58	0.49
BV5	: 48.00	0.80	0.40
BV6	: 42.00	0.70	0.46
BV7	: 55.00	0.92	0.28
BV8	: 38.00	0.63	0.48
BV9	: 42.00	0.70	0.46

Correlation indexes:

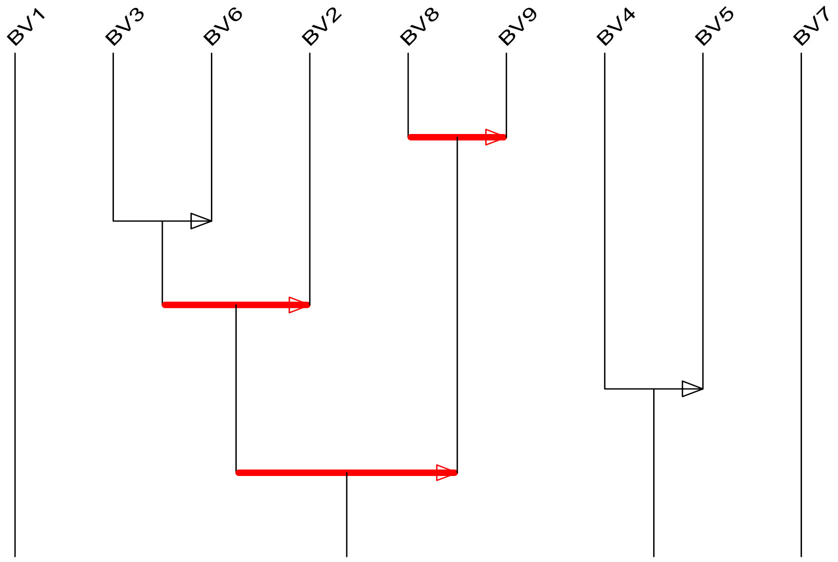
	BV1	BV2	BV3	BV4	BV5	BV6	BV7	BV8	BV9
BV1		-0.11	0.20	0.22	0.14	0.08	-0.06	0.24	0.28
BV2			0.46	-0.25	0.00	0.63	0.24	0.36	0.38
BV3				0.09	0.37	0.55	0.20	0.40	0.34
BV4					0.42	-0.26	-0.25	0.13	0.04
BV5						-0.24	-0.15	0.22	0.04
BV6							0.33	0.48	0.44
BV7								0.02	0.20
BV8									0.63
BV9									

Implicative indexes: (according to the classic theory)

Computation with poisson law

	BV1	BV2	BV3	BV4	BV5	BV6	BV7	BV8	BV9
BV1	0	38	53	54	49	47	35	55	57
BV2	19	0	89	19	41	98	72	84	87
BV3	66	99	0	57	95	100	75	95	92
BV4	69	11	57	0	97	11	8	63	48
BV5	47	42	79	84	0	20	22	68	47
BV6	41	99	95	17	14	0	86	94	93
BV7	28	62	58	29	31	68	0	46	58
BV8	72	91	90	62	77	97	39	0	100
BV9	75	90	82	48	46	93	68	99	0

ΙΕΡΑΡΧΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Β



Herarchical tree : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Β.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΙΕΡΑΡΧΙΚΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Β

nb col : 9, nb lig : 60

	Occurrence	Average	Standard deviations:
BV1	: 58.00	0.97	0.18
BV2	: 45.00	0.75	0.43
BV3	: 32.00	0.53	0.50
BV4	: 35.00	0.58	0.49
BV5	: 48.00	0.80	0.40
BV6	: 42.00	0.70	0.46
BV7	: 55.00	0.92	0.28
BV8	: 38.00	0.63	0.48
BV9	: 42.00	0.70	0.46

Correlation indexes:

	BV1	BV2	BV3	BV4	BV5	BV6	BV7	BV8	BV9
BV1		-0.11	0.20	0.22	0.14	0.08	-0.06	0.24	0.28
BV2			0.46	-0.25	0.00	0.63	0.24	0.36	0.38
BV3				0.09	0.37	0.55	0.20	0.40	0.34
BV4					0.42	-0.26	-0.25	0.13	0.04
BV5						-0.24	-0.15	0.22	0.04
BV6							0.33	0.48	0.44
BV7								0.02	0.20
BV8									0.63
BV9									

Cohesitive indexes: (according to the classic theory)

Computation with poisson law

	BV1	BV2	BV3	BV4	BV5	BV6	BV7	BV8	BV9
BV1	0	0	0.07	0.10	0	0	0	0.12	0.17
BV2	0	0	0.86	0	0	0.99	0.52	0.77	0.82
BV3	0.37	0.99	0	0.18	0.96	1.00	0.57	0.95	0.91
BV4	0.45	0	0.16	0	0.98	0	0	0.31	0
BV5	0	0	0.68	0.78	0	0	0	0.43	0
BV6	0	1.00	0.96	0	0	0	0.82	0.95	0.94
BV7	0	0.28	0.19	0	0	0.42	0	0	0.20
BV8	0.51	0.90	0.88	0.28	0.63	0.98	0	0	1.00
BV9	0.59	0.88	0.74	0	0	0.94	0.42	0.99	0

Classification at level : 1 : (BV8 BV9) cohesion : 0.999

Classification at level : 2 : (BV3 BV6) cohesion : 0.999

Classification at level : 3 : ((BV3 BV6) BV2) cohesion : 0.997

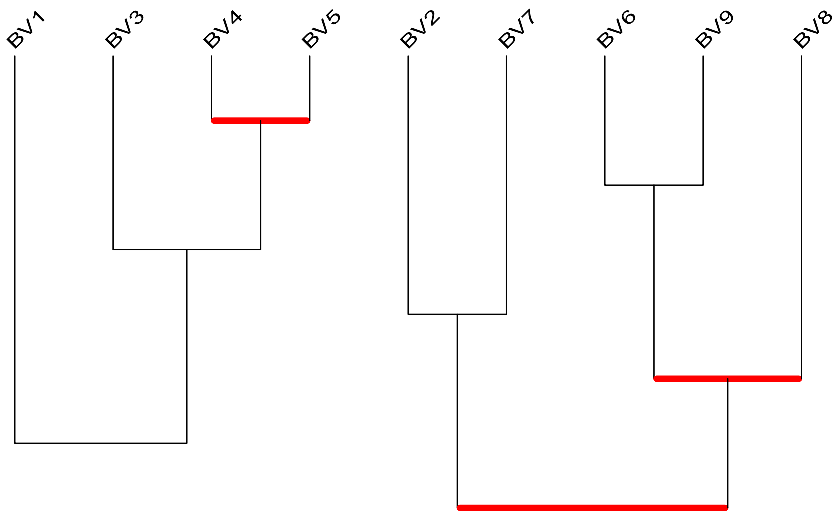
Classification at level : 4 : (BV4 BV5) cohesion : 0.981

Classification at level : 5 : (((BV3 BV6) BV2) (BV8 BV9)) cohesion : 0.93

The most significant node is at level : 1

Significant nodes
at level: 1
at level: 3
at level: 5

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ Β



Similarity : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ Β.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ Β

nb col : 9, nb lig : 65

	Occurrence	Average	Standard deviations:
BV1	: 60.00	0.92	0.27
BV2	: 48.00	0.74	0.44
BV3	: 39.00	0.60	0.49
BV4	: 30.00	0.46	0.50
BV5	: 34.00	0.52	0.50
BV6	: 39.00	0.60	0.49
BV7	: 51.00	0.78	0.41
BV8	: 33.00	0.51	0.50
BV9	: 36.00	0.55	0.50

Correlation indexes:

	BV1	BV2	BV3	BV4	BV5	BV6	BV7	BV8	BV9
BV1		0.09	0.00	0.27	0.30	0.00	0.13	0.06	0.09
BV2			0.23	-0.36	-0.29	0.30	0.28	0.11	0.24
BV3				0.00	0.35	0.17	0.11	0.01	0.03
BV4					0.64	-0.13	-0.12	-0.01	-0.04
BV5						-0.03	-0.05	0.05	0.07
BV6							0.18	0.26	0.53
BV7								0.01	0.36
BV8									0.23
BV9									

Similarity indexes:

	BV1	BV2	BV3	BV4	BV5	BV6	BV7	BV8	BV9
BV1	1.00	0.54	0.50	0.67	0.68	0.50	0.55	0.54	0.55
BV2	0.54	1.00	0.72	0.14	0.21	0.78	0.71	0.63	0.75
BV3	0.50	0.72	1.00	0.50	0.89	0.70	0.60	0.52	0.53
BV4	0.67	0.14	0.50	1.00	1.00	0.32	0.38	0.48	0.44
BV5	0.68	0.21	0.89	1.00	1.00	0.46	0.45	0.57	0.61
BV6	0.50	0.78	0.70	0.32	0.46	1.00	0.67	0.83	0.96
BV7	0.55	0.71	0.60	0.38	0.45	0.67	1.00	0.51	0.81
BV8	0.54	0.63	0.52	0.48	0.57	0.83	0.51	1.00	0.81
BV9	0.55	0.75	0.53	0.44	0.61	0.96	0.81	0.81	1.00

Classification at level : 1 : (BV4 BV5) similarity : 0.995367

Classification at level : 2 : (BV6 BV9) similarity : 0.964649

Classification at level : 3 : (BV3 (BV4 BV5)) similarity : 0.796532

Classification at level : 4 : (BV2 BV7) similarity : 0.706779

Classification at level : 5 : ((BV6 BV9) BV8) similarity : 0.684565

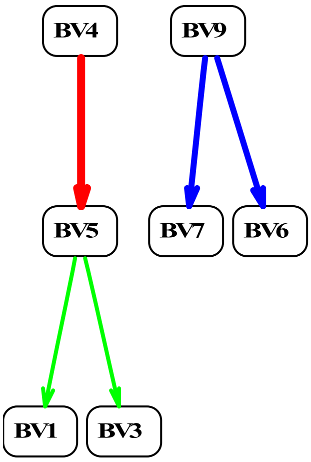
Classification at level : 6 : (BV1 (BV3 (BV4 BV5))) similarity : 0.314011

Classification at level : 7 : ((BV2 BV7) ((BV6 BV9) BV8)) similarity : 0.2919

The most significant node is at level : 1

Significant nodes
at level: 1
at level: 5
at level: 7

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ Β



Graph : C:\Documents and Settings\ep:99Ͻ95kι90ι\85ntsidis-analysis\ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ B.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ Β

nb col : 9, nb lig : 65

	Occurrence	Average	Standard deviations:
BV1	: 60.00	0.92	0.27
BV2	: 48.00	0.74	0.44
BV3	: 39.00	0.60	0.49
BV4	: 30.00	0.46	0.50
BV5	: 34.00	0.52	0.50
BV6	: 39.00	0.60	0.49
BV7	: 51.00	0.78	0.41
BV8	: 33.00	0.51	0.50
BV9	: 36.00	0.55	0.50

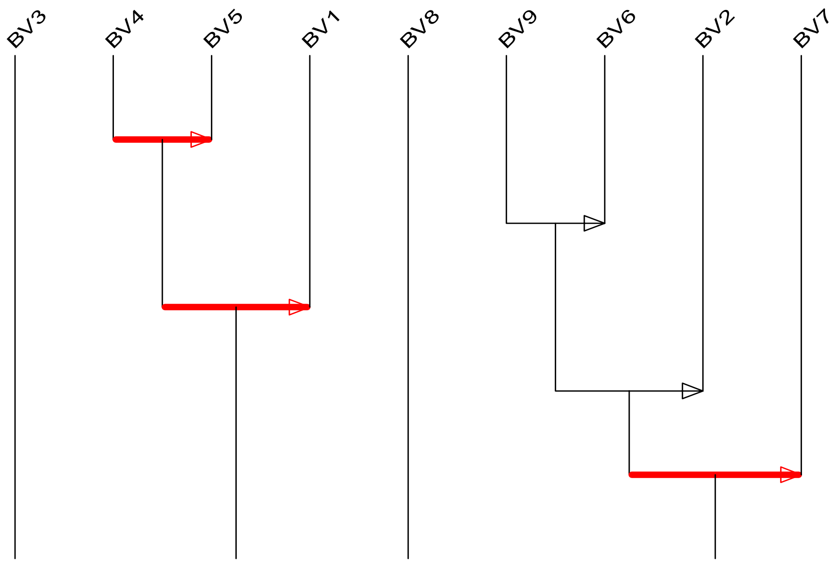
Correlation indexes:

	BV1	BV2	BV3	BV4	BV5	BV6	BV7	BV8	BV9
BV1		0.09	0.00	0.27	0.30	0.00	0.13	0.06	0.09
BV2			0.23	-0.36	-0.29	0.30	0.28	0.11	0.24
BV3				0.00	0.35	0.17	0.11	0.01	0.03
BV4					0.64	-0.13	-0.12	-0.01	-0.04
BV5						-0.03	-0.05	0.05	0.07
BV6							0.18	0.26	0.53
BV7								0.01	0.36
BV8									0.23
BV9									

Implicative indexes: (according to the classic theory)
Computation with poisson law

	BV1	BV2	BV3	BV4	BV5	BV6	BV7	BV8	BV9
BV1	0	50	45	62	64	45	53	49	51
BV2	50	0	72	13	17	80	81	58	73
BV3	35	80	0	44	88	69	60	46	47
BV4	90	3	42	0	100	23	20	41	37
BV5	93	7	93	99	0	39	31	51	55
BV6	35	88	69	28	40	0	73	80	98
BV7	55	78	56	34	39	65	0	46	81
BV8	47	63	45	42	51	85	42	0	80
BV9	52	83	47	39	55	99	95	77	0

ΙΕΡΑΡΧΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ Β



Herarchical tree : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΛΕΚΤΙ ΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙ Σ B.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΙΕΡΑΡΧΙΚΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ Β

nb col : 9, nb lig : 65

	Occurrence	Average	Standard deviations:
BV1	: 60.00	0.92	0.27
BV2	: 48.00	0.74	0.44
BV3	: 39.00	0.60	0.49
BV4	: 30.00	0.46	0.50
BV5	: 34.00	0.52	0.50
BV6	: 39.00	0.60	0.49
BV7	: 51.00	0.78	0.41
BV8	: 33.00	0.51	0.50
BV9	: 36.00	0.55	0.50

Correlation indexes:

	BV1	BV2	BV3	BV4	BV5	BV6	BV7	BV8	BV9
BV1		0.09	0.00	0.27	0.30	0.00	0.13	0.06	0.09
BV2			0.23	-0.36	-0.29	0.30	0.28	0.11	0.24
BV3				0.00	0.35	0.17	0.11	0.01	0.03
BV4					0.64	-0.13	-0.12	-0.01	-0.04
BV5						-0.03	-0.05	0.05	0.07
BV6							0.18	0.26	0.53
BV7								0.01	0.36
BV8									0.23
BV9									

Cohesitive indexes: (according to the classic theory)
Computation with poisson law

	BV1	BV2	BV3	BV4	BV5	BV6	BV7	BV8	BV9
BV1	0	0.01	0	0.27	0.34	0	0.07	0	0.02
BV2	0.01	0	0.53	0	0	0.69	0.71	0.19	0.54
BV3	0	0.69	0	0	0.86	0.45	0.24	0	0
BV4	0.88	0	0	0	1.00	0	0	0	0
BV5	0.93	0	0.92	1.00	0	0	0	0.02	0.12
BV6	0	0.85	0.45	0	0	0	0.55	0.69	0.99
BV7	0.12	0.64	0.16	0	0	0.36	0	0	0.72
BV8	0	0.31	0	0	0.02	0.79	0	0	0.68
BV9	0.06	0.75	0	0	0.12	1.00	0.96	0.64	0

Classification at level : 1 : (BV4 BV5) cohesion : 1

Classification at level : 2 : (BV9 BV6) cohesion : 0.996

Classification at level : 3 : ((BV4 BV5) BV1) cohesion : 0.935

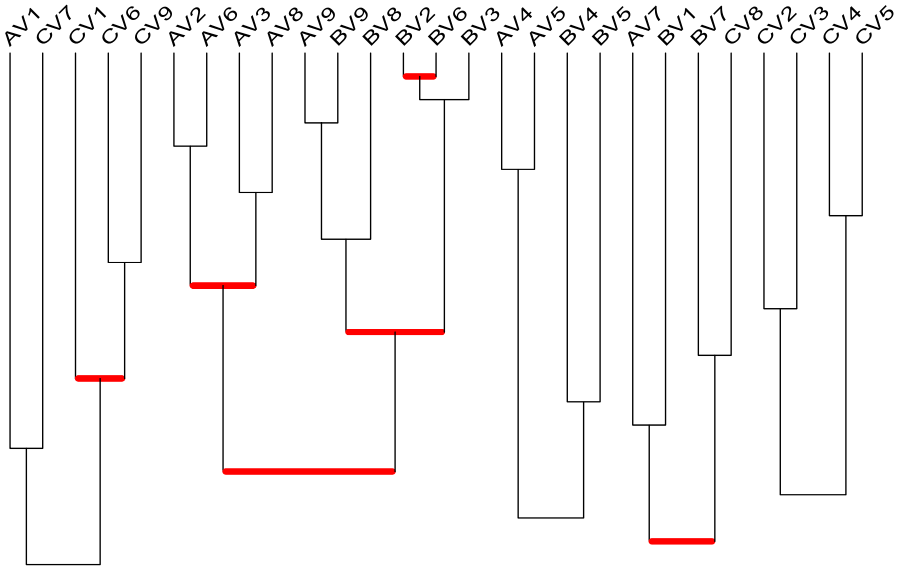
Classification at level : 4 : ((BV9 BV6) BV2) cohesion : 0.86

Classification at level : 5 : (((BV9 BV6) BV2) BV7) cohesion : 0.787

The most significant node is at level : 1

Significant nodes
at level: 1
at level: 3
at level: 5

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ ABC



Similarity : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΓΡΑΜΜΗBAC.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ ABC

nb col : 27, nb lig : 53

	Occurrence	Average	Standard deviations:
AV1	: 50.00	0.94	0.23
AV2	: 37.00	0.70	0.46
AV3	: 22.00	0.42	0.49
AV4	: 25.00	0.47	0.50
AV5	: 28.00	0.53	0.50
AV6	: 36.00	0.68	0.47
AV7	: 45.00	0.85	0.36
AV8	: 33.00	0.62	0.48
AV9	: 22.00	0.42	0.49
BV1	: 47.00	0.89	0.32
BV2	: 21.00	0.40	0.49
BV3	: 19.00	0.36	0.48
BV4	: 45.00	0.85	0.36
BV5	: 44.00	0.83	0.38
BV6	: 20.00	0.38	0.48
BV7	: 40.00	0.75	0.43
BV8	: 27.00	0.51	0.50
BV9	: 25.00	0.47	0.50
CV1	: 42.00	0.79	0.41
CV2	: 46.00	0.87	0.34

CV3	: 33.00	0.62	0.48
CV4	: 35.00	0.66	0.47
CV5	: 35.00	0.66	0.47
CV6	: 39.00	0.74	0.44
CV7	: 46.00	0.87	0.34
CV8	: 41.00	0.77	0.42
CV9	: 39.00	0.74	0.44

Correlation indexes:
AV1 AV2 AV3 AV4 AV5 AV6 AV7 AV8 AV9 BV1 BV2 BV3 BV4 BV5 BV6 BV7
BV8 BV9 CV1 CV2 CV3 CV4 CV5 CV6 CV7 CV8 CV9

AV1 0.02 -0.130.23 -0.070.01 0.12 -0.020.21 -0.090.20 -0.160.12 0.32 0.19 0.43 0.09
0.23 -0.130.15 -0.020.17 0.17 0.04 -0.100.45 0.04
AV2 0.55 -0.20-0.210.78 0.41 0.34 0.39 0.15 0.36 0.49 -0.16-0.080.51 0.10 0.26 0.37
0.47 -0.140.08 -0.12-0.210.45 0.23 0.14 0.17
AV3 0.12 0.26 0.50 0.36 0.42 0.38 0.06 0.26 0.41 0.03 -0.130.37 -0.050.14 0.12
0.24 -0.120.18 0.12 -0.040.16 0.33 0.09 0.07
AV4 0.44 -0.16-0.13-0.040.20 -0.380.16 -0.080.19 0.23 0.04 -0.16-0.21-0.21-
0.170.03 0.03 0.20 0.04 -0.29-0.080.06 -0.38
AV5 -0.24-0.190.04 -0.20-0.100.15 0.15 0.13 -0.020.03 -0.01-0.25-0.320.08
0.08 0.04 0.20 0.04 -0.22-0.03-0.24-0.22
AV6 0.39 0.38 0.50 0.14 0.23 0.43 -0.060.01 0.37 0.17 0.13 0.41 0.25 -
0.270.05 -0.07-0.240.51 0.09 0.11 0.23
AV7 0.11 0.25 0.35 0.23 0.21 -0.03-0.190.22 0.25 0.01 0.29 0.30 -
0.160.11 -0.19-0.190.11 0.30 0.28 0.23
AV8 0.10 0.09 0.15 0.34 -0.11-0.140.28 -0.080.09 -0.04-0.110.16
0.20 0.10 -0.07-0.02-0.070.04 -0.11
AV9 -0.060.41 0.25 0.25 0.18 0.21 0.04 0.06 0.51 0.15 -0.120.02
0.04 -0.120.24 0.33 0.36 0.24
BV1 0.29 0.27 -0.15-0.160.28 0.35 0.01 0.10 0.26 0.21 0.09 -
0.000.12 0.06 0.04 0.09 0.33
BV2 0.60 0.13 -0.040.72 0.19 0.25 0.32 0.32 0.20 0.31
0.09 -0.070.14 0.20 0.25 0.22
BV3 0.10 -0.080.64 0.15 0.18 0.24 0.29 0.06 0.26 -
0.05-0.130.18 0.18 0.03 0.18
BV4 0.37 0.11 0.13 0.01 0.08 -0.090.15 0.11 0.03
0.25 -0.010.15 0.02 0.11
BV5 -0.060.33 0.16 0.23 -0.11-0.03-0.040.21
0.21 0.07 -0.180.24 -0.04
BV6 0.35 0.37 0.28 0.21 0.19 0.20 0.07 0.07
0.20 0.07 0.24 0.20
BV7 0.14 0.28 0.14 0.17 0.01 0.05 0.15
0.26 0.04 0.32 0.35
BV8 0.40 0.15 0.29 0.33 0.01 0.01 0.35
0.06 0.10 0.27
BV9 0.11 -0.190.03 -0.20-0.040.31
0.15 0.24 0.22
CV1 0.21 0.27 -0.17-0.170.54
0.35 -0.170.22
CV2 0.39 0.31 0.31 0.15 0.01
-0.080.15
CV3 0.26 0.10 0.06 0.16 -
0.050.15
CV4 0.58 -0.16-
0.160.09 0.02
CV5 -0.16-0.16-
0.010.11
CV6 0.27 0.08
0.51

CV7 0.32 0.27
CV8 0.29
CV9

Similarity indexes:

AV1 AV2 AV3 AV4 AV5 AV6 AV7 AV8 AV9 BV1 BV2 BV3 BV4 BV5 BV6 BV7
BV8 BV9 CV1 CV2 CV3 CV4 CV5 CV6 CV7 CV8 CV9

AV1 1.00 0.51 0.43 0.61 0.47 0.50 0.53 0.49 0.61 0.48 0.61 0.41 0.53 0.59 0.60 0.64 0.54
0.61 0.46 0.54 0.49 0.57 0.57 0.51 0.48 0.65 0.51
AV2 0.51 1.00 0.95 0.28 0.28 0.96 0.74 0.80 0.88 0.58 0.87 0.94 0.40 0.45 0.95 0.58 0.77
0.86 0.81 0.42 0.58 0.39 0.31 0.82 0.63 0.60 0.63
AV3 0.43 0.95 1.00 0.69 0.84 0.94 0.78 0.92 0.95 0.54 0.87 0.97 0.53 0.38 0.95 0.44 0.70
0.69 0.73 0.40 0.73 0.65 0.44 0.67 0.75 0.59 0.58
AV4 0.61 0.28 0.69 1.00 0.94 0.32 0.40 0.44 0.79 0.25 0.75 0.37 0.65 0.69 0.57 0.33 0.22
0.21 0.34 0.53 0.54 0.73 0.55 0.21 0.44 0.56 0.15
AV5 0.47 0.28 0.84 0.94 1.00 0.24 0.36 0.55 0.22 0.43 0.72 0.73 0.60 0.48 0.55 0.49 0.19
0.12 0.57 0.56 0.55 0.72 0.55 0.28 0.48 0.28 0.28
AV6 0.50 0.96 0.94 0.32 0.24 1.00 0.73 0.83 0.94 0.58 0.77 0.92 0.46 0.51 0.88 0.64 0.65
0.89 0.68 0.34 0.55 0.44 0.28 0.86 0.55 0.59 0.69
AV7 0.53 0.74 0.78 0.40 0.36 0.73 1.00 0.57 0.70 0.63 0.70 0.68 0.49 0.41 0.69 0.64 0.51
0.73 0.65 0.43 0.57 0.38 0.38 0.56 0.62 0.64 0.63
AV8 0.49 0.80 0.92 0.44 0.55 0.83 0.57 1.00 0.64 0.55 0.70 0.89 0.42 0.39 0.84 0.43 0.61
0.44 0.41 0.60 0.71 0.60 0.43 0.48 0.45 0.54 0.40
AV9 0.61 0.88 0.95 0.79 0.22 0.94 0.70 0.64 1.00 0.45 0.96 0.87 0.70 0.66 0.83 0.54 0.59
0.98 0.65 0.40 0.53 0.55 0.34 0.76 0.75 0.83 0.76
BV1 0.48 0.58 0.54 0.25 0.43 0.58 0.63 0.55 0.45 1.00 0.71 0.70 0.44 0.44 0.70 0.66 0.50
0.57 0.61 0.57 0.55 0.50 0.57 0.53 0.51 0.54 0.66
BV2 0.61 0.87 0.87 0.75 0.72 0.77 0.70 0.70 0.96 0.71 1.00 1.00 0.61 0.46 1.00 0.71 0.84
0.90 0.79 0.66 0.86 0.62 0.41 0.65 0.66 0.75 0.74
BV3 0.41 0.94 0.97 0.37 0.73 0.92 0.68 0.89 0.87 0.70 1.00 1.00 0.59 0.42 1.00 0.67 0.77
0.84 0.78 0.55 0.82 0.44 0.33 0.71 0.64 0.53 0.71
BV4 0.53 0.40 0.53 0.65 0.60 0.46 0.49 0.42 0.70 0.44 0.61 0.59 1.00 0.67 0.60 0.57 0.51
0.57 0.46 0.56 0.57 0.52 0.66 0.49 0.56 0.51 0.56
BV5 0.59 0.45 0.38 0.69 0.48 0.51 0.41 0.39 0.66 0.44 0.46 0.42 0.67 1.00 0.44 0.69 0.63
0.69 0.44 0.49 0.47 0.64 0.64 0.54 0.42 0.63 0.47
BV6 0.60 0.95 0.95 0.57 0.55 0.88 0.69 0.84 0.83 0.70 1.00 1.00 0.60 0.44 1.00 0.84 0.93
0.88 0.71 0.65 0.76 0.59 0.59 0.72 0.56 0.74 0.72
BV7 0.64 0.58 0.44 0.33 0.49 0.64 0.64 0.43 0.54 0.66 0.71 0.67 0.57 0.69 0.84 1.00 0.64
0.76 0.59 0.59 0.51 0.55 0.62 0.68 0.52 0.71 0.74
BV8 0.54 0.77 0.70 0.22 0.19 0.65 0.51 0.61 0.59 0.50 0.84 0.77 0.51 0.63 0.93 0.64 1.00
0.93 0.64 0.70 0.85 0.52 0.52 0.82 0.55 0.60 0.76
BV9 0.61 0.86 0.69 0.21 0.12 0.89 0.73 0.44 0.98 0.57 0.90 0.84 0.57 0.69 0.88 0.76 0.93
1.00 0.61 0.36 0.54 0.27 0.45 0.80 0.61 0.73 0.73
CV1 0.46 0.81 0.73 0.34 0.57 0.68 0.65 0.41 0.65 0.61 0.79 0.78 0.46 0.44 0.71 0.59 0.64
0.61 1.00 0.60 0.71 0.37 0.37 0.82 0.66 0.40 0.65
CV2 0.54 0.42 0.40 0.53 0.56 0.34 0.43 0.60 0.40 0.57 0.66 0.55 0.56 0.49 0.65 0.59 0.70
0.36 0.60 1.00 0.73 0.68 0.68 0.58 0.50 0.46 0.58
CV3 0.49 0.58 0.73 0.54 0.55 0.55 0.57 0.71 0.53 0.55 0.86 0.82 0.57 0.47 0.76 0.51 0.85
0.54 0.71 0.73 1.00 0.75 0.60 0.56 0.60 0.46 0.64
CV4 0.57 0.39 0.65 0.73 0.72 0.44 0.38 0.60 0.55 0.50 0.62 0.44 0.52 0.64 0.59 0.55 0.52
0.27 0.37 0.68 0.75 1.00 0.92 0.36 0.40 0.57 0.52
CV5 0.57 0.31 0.44 0.55 0.55 0.28 0.38 0.43 0.34 0.57 0.41 0.33 0.66 0.64 0.59 0.62 0.52
0.45 0.37 0.68 0.60 0.92 1.00 0.36 0.40 0.49 0.60
CV6 0.51 0.82 0.67 0.21 0.28 0.86 0.56 0.48 0.76 0.53 0.65 0.71 0.49 0.54 0.72 0.68 0.82
0.80 0.82 0.58 0.56 0.36 0.36 1.00 0.64 0.56 0.84
CV7 0.48 0.63 0.75 0.44 0.48 0.55 0.62 0.45 0.75 0.51 0.66 0.64 0.56 0.42 0.56 0.52 0.55
0.61 0.66 0.50 0.60 0.40 0.40 0.64 1.00 0.66 0.64

CV8 0.65 0.60 0.59 0.56 0.28 0.59 0.64 0.54 0.83 0.54 0.75 0.53 0.51 0.63 0.74 0.71 0.60 0.73 0.40 0.46 0.46 0.57 0.49 0.56 0.66 1.00 0.70
CV9 0.51 0.63 0.58 0.15 0.28 0.69 0.63 0.40 0.76 0.66 0.74 0.71 0.56 0.47 0.72 0.74 0.76 0.73 0.65 0.58 0.64 0.52 0.60 0.84 0.64 0.70 1.00

Classification at level : 1 : (BV2 BV6) similarity : 0.999368

Classification at level : 2 : ((BV2 BV6) BV3) similarity : 0.99655

Classification at level : 3 : (AV9 BV9) similarity : 0.980101

Classification at level : 4 : (AV2 AV6) similarity : 0.961546

Classification at level : 5 : (AV4 AV5) similarity : 0.944517

Classification at level : 6 : (AV3 AV8) similarity : 0.924002

Classification at level : 7 : (CV4 CV5) similarity : 0.923996

Classification at level : 8 : ((AV9 BV9) BV8) similarity : 0.864721

Classification at level : 9 : (CV6 CV9) similarity : 0.83884

Classification at level : 10 : ((AV2 AV6) (AV3 AV8)) similarity : 0.831559

Classification at level : 11 : (CV2 CV3) similarity : 0.73485

Classification at level : 12 : (((AV9 BV9) BV8) ((BV2 BV6) BV3)) similarity : 0.713736

Classification at level : 13 : (BV7 CV8) similarity : 0.708663

Classification at level : 14 : (CV1 (CV6 CV9)) similarity : 0.672831

Classification at level : 15 : (BV4 BV5) similarity : 0.667192

Classification at level : 16 : (AV7 BV1) similarity : 0.62988

Classification at level : 17 : (AV1 CV7) similarity : 0.476019

Classification at level : 18 : (((AV2 AV6) (AV3 AV8)) (((AV9 BV9) BV8) ((BV2 BV6) BV3))) similarity : 0.432462

Classification at level : 19 : ((CV2 CV3) (CV4 CV5)) similarity : 0.323194

Classification at level : 20 : ((AV4 AV5) (BV4 BV5)) similarity : 0.225281

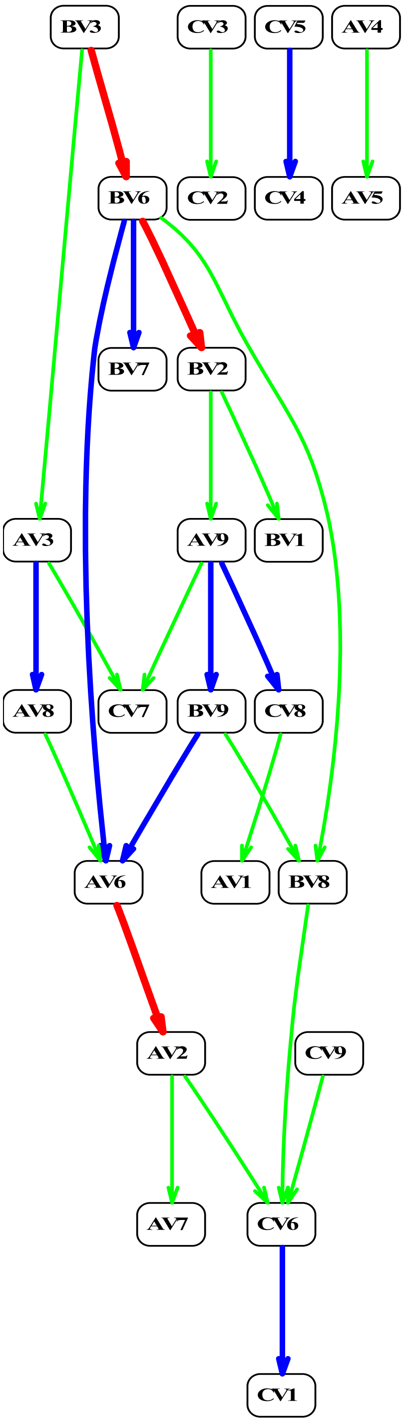
Classification at level : 21 : ((AV7 BV1) (BV7 CV8)) similarity : 0.194862

Classification at level : 22 : ((AV1 CV7) (CV1 (CV6 CV9))) similarity : 0.0852764

The most significant node is at level : 18

Significant nodes
at level: 1
at level: 10
at level: 12
at level: 14
at level: 18
at level: 21

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ ABC



Graph : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\I99nt95li:90n.85/sis\ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ BAC.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ BAC

nb col : 27, nb lig : 53

	Occurrence	Average	Standard deviations:
AV1	: 50.00	0.94	0.23
AV2	: 37.00	0.70	0.46
AV3	: 22.00	0.42	0.49
AV4	: 25.00	0.47	0.50
AV5	: 28.00	0.53	0.50
AV6	: 36.00	0.68	0.47
AV7	: 45.00	0.85	0.36
AV8	: 33.00	0.62	0.48
AV9	: 22.00	0.42	0.49
BV1	: 47.00	0.89	0.32
BV2	: 21.00	0.40	0.49
BV3	: 19.00	0.36	0.48
BV4	: 45.00	0.85	0.36
BV5	: 44.00	0.83	0.38
BV6	: 20.00	0.38	0.48
BV7	: 40.00	0.75	0.43
BV8	: 27.00	0.51	0.50
BV9	: 25.00	0.47	0.50
CV1	: 42.00	0.79	0.41
CV2	: 46.00	0.87	0.34
CV3	: 33.00	0.62	0.48
CV4	: 35.00	0.66	0.47
CV5	: 35.00	0.66	0.47
CV6	: 39.00	0.74	0.44
CV7	: 46.00	0.87	0.34
CV8	: 41.00	0.77	0.42
CV9	: 39.00	0.74	0.44

Correlation indexes:

AV1 AV2 AV3 AV4 AV5 AV6 AV7 AV8 AV9 BV1 BV2 BV3 BV4 BV5 BV6 BV7 BV8 BV9 CV1 CV2 CV3 CV4 CV5 CV6 CV7 CV8 CV9

AV1 0.02 -0.130.23 -0.070.01 0.12 -0.020.21 -0.090.20 -0.160.12 0.32 0.19 0.43 0.09 0.23 -0.130.15 -0.020.17 0.17 0.04 -0.100.45 0.04
AV2 0.55 -0.20-0.210.78 0.41 0.34 0.39 0.15 0.36 0.49 -0.16-0.080.51 0.10 0.26 0.37 0.47 -0.140.08 -0.12-0.210.45 0.23 0.14 0.17
AV3 0.12 0.26 0.50 0.36 0.42 0.38 0.06 0.26 0.41 0.03 -0.130.37 -0.050.14 0.12 0.24 -0.120.18 0.12 -0.040.16 0.33 0.09 0.07
AV4 0.44 -0.16-0.13-0.040.20 -0.380.16 -0.080.19 0.23 0.04 -0.16-0.21-0.21-0.170.03 0.03 0.20 0.04 -0.29-0.080.06 -0.38
AV5 -0.24-0.190.04 -0.20-0.100.15 0.15 0.13 -0.020.03 -0.01-0.25-0.320.08 0.08 0.04 0.20 0.04 -0.22-0.03-0.24-0.22
AV6 0.39 0.38 0.50 0.14 0.23 0.43 -0.060.01 0.37 0.17 0.13 0.41 0.25 -0.270.05 -0.07-0.240.51 0.09 0.11 0.23
AV7 0.11 0.25 0.35 0.23 0.21 -0.03-0.190.22 0.25 0.01 0.29 0.30 -0.160.11 -0.19-0.190.11 0.30 0.28 0.23
AV8 0.10 0.09 0.15 0.34 -0.11-0.140.28 -0.080.09 -0.04-0.110.16 0.20 0.10 -0.07-0.02-0.070.04 -0.11
AV9 -0.060.41 0.25 0.25 0.18 0.21 0.04 0.06 0.51 0.15 -0.120.02 0.04 -0.120.24 0.33 0.36 0.24
BV1 0.29 0.27 -0.15-0.160.28 0.35 0.01 0.10 0.26 0.21 0.09 -0.000.12 0.06 0.04 0.09 0.33

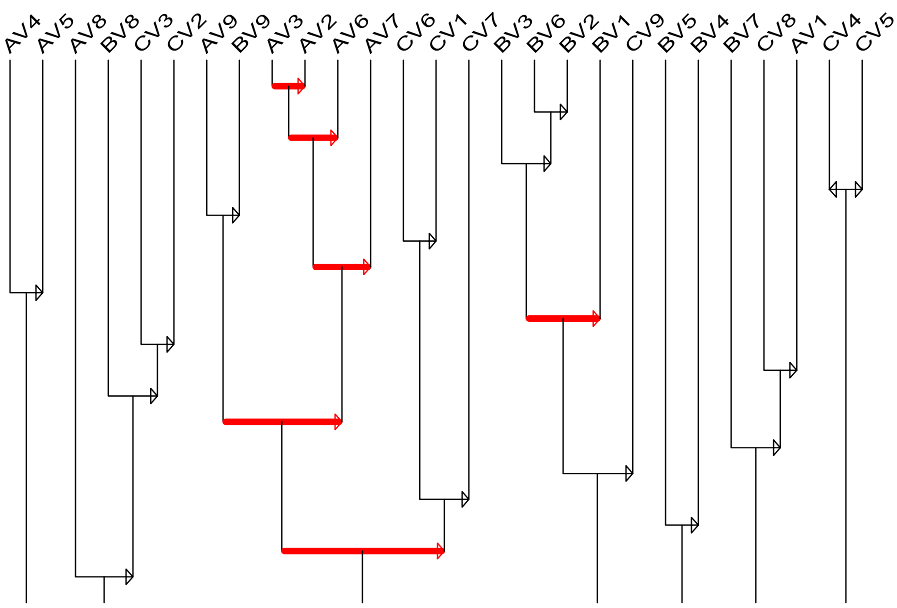
BV2 0.60 0.13 -0.040.72 0.19 0.25 0.32 0.32 0.20 0.31
0.09 -0.070.14 0.20 0.25 0.22
BV3 0.10 -0.080.64 0.15 0.18 0.24 0.29 0.06 0.26 -
0.05-0.130.18 0.18 0.03 0.18
BV4 0.37 0.11 0.13 0.01 0.08 -0.090.15 0.11 0.03
0.25 -0.010.15 0.02 0.11
BV5 -0.060.33 0.16 0.23 -0.11-0.03-0.040.21
0.21 0.07 -0.180.24 -0.04
BV6 0.35 0.37 0.28 0.21 0.19 0.20 0.07 0.07
0.20 0.07 0.24 0.20
BV7 0.14 0.28 0.14 0.17 0.01 0.05 0.15
0.26 0.04 0.32 0.35
BV8 0.40 0.15 0.29 0.33 0.01 0.01 0.35
0.06 0.10 0.27
BV9 0.11 -0.190.03 -0.20-0.040.31
0.15 0.24 0.22
CV1 0.21 0.27 -0.17-0.170.54
0.35 -0.170.22
CV2 0.39 0.31 0.31 0.15 0.01
-0.080.15
CV3 0.26 0.10 0.06 0.16 -
0.050.15
CV4 0.58 -0.16-
0.160.09 0.02
CV5 -0.16-0.16-
0.010.11
CV6 0.27 0.08
0.51
CV7 0.32 0.27
CV8 0.29
CV9

Implicative indexes: (according to the classic theory)
Computation with poisson law
AV1 AV2 AV3 AV4 AV5 AV6 AV7 AV8 AV9 BV1 BV2 BV3 BV4 BV5 BV6 BV7
BV8 BV9 CV1 CV2 CV3 CV4 CV5 CV6 CV7 CV8 CV9

AV1 0 44 40 56 41 44 48 43 54 34 54 39 48 61 53 68 49 56 35 49
43 53 53 45 34 69 45
AV2 35 0 91 25 23 100 92 82 81 60 79 86 20 30 88 55 73 82 95 22
53 28 20 92 72 60 64
AV3 13 100 0 61 81 99 96 96 89 45 77 90 42 17 88 30 64 61 83 17
72 62 33 69 94 56 52
AV4 76 14 60 0 95 19 18 35 70 3 65 34 73 80 49 17 17 18 15 42
47 74 48 7 24 50 4
AV5 21 15 75 92 0 12 14 49 22 21 62 62 61 34 48 38 16 11 52 50
49 73 48 13 31 11 13
AV6 33 100 89 28 19 0 91 87 89 58 67 83 30 41 79 66 59 85 75 11
49 34 17 96 51 57 73
AV7 47 80 70 35 30 77 0 53 63 75 62 59 37 24 60 66 45 67 71 25
53 28 28 52 71 69 64
AV8 29 87 87 38 49 90 56 0 56 51 61 78 23 20 74 29 55 38 25 63
70 56 33 38 27 47 26
AV9 71 96 89 72 17 99 84 59 0 24 91 75 84 72 71 45 51 97 67 17
45 47 22 83 94 96 83
BV1 28 56 49 23 38 54 71 51 41 0 63 61 28 28 62 71 45 51 64 59
51 43 53 47 43 50 69
BV2 69 95 78 67 66 80 82 68 92 91 0 98 61 29 100 76 81 86 93 76
90 57 29 65 76 85 80

BV3 9 100 93 31 67 98 78 93 78 88 99 0 55 22 99 68 71 78 90 46
84 32 20 74 71 43 74
BV4 47 29 47 59 55 37 37 34 63 25 54 51 0 77 53 55 45 51 34 55
53 46 66 41 55 44 52
BV5 71 35 35 63 42 44 23 31 58 23 42 39 79 0 41 75 58 63 31 36
40 63 63 50 23 66 38
BV6 68 100 90 49 47 95 80 87 73 90 100 99 58 25 0 96 93 83 78 74
76 52 52 77 49 83 77
BV7 90 55 40 29 43 63 72 34 48 83 62 58 56 81 75 0 59 71 59 61
44 49 60 73 43 80 83
BV8 45 82 61 19 15 63 39 56 51 37 75 66 39 67 86 65 0 90 66 87
88 44 44 93 48 57 84
BV9 76 94 60 18 9 96 89 35 95 54 82 73 52 80 78 86 92 0 59 12
47 15 35 89 64 82 79
CV1 22 88 65 30 51 69 76 33 57 70 71 67 30 29 62 58 58 54 0 65
71 27 27 93 80 25 67
CV2 48 32 37 47 50 23 26 57 37 60 58 49 54 38 57 57 66 32 61 0
75 69 69 56 41 35 56
CV3 29 54 65 48 49 49 56 70 47 51 77 71 56 33 66 42 82 48 81 93
0 79 56 51 63 33 64
CV4 59 26 57 67 68 34 17 56 48 36 54 40 43 71 51 49 45 24 20 84
77 0 98 22 19 54 44
CV5 59 18 40 48 48 16 17 35 32 56 37 32 77 71 51 63 45 39 20 84
56 98 0 22 19 40 58
CV6 38 90 60 19 23 93 54 40 68 45 57 61 38 49 63 74 79 75 96 59
50 26 26 0 76 52 94
CV7 26 63 67 39 42 51 69 38 67 42 58 56 54 26 50 45 49 55 74 41
57 31 31 67 0 71 67
CV8 90 58 53 50 23 55 74 48 76 50 67 47 42 69 65 79 54 67 24 30
38 53 42 52 79 0 75
CV9 38 63 51 14 23 70 70 31 68 82 65 61 54 34 63 84 72 67 70 59
61 45 56 94 76 78 0

ΙΕΡΑΡΧΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ ΒΑC



Herarchical tree : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΓΡΑΜΜΗΒΑC.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΙΕΡΑΡΧΙΚΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ BAC

nb col : 27, nb lig : 53

	Occurrence	Average	Standard deviations:
AV1	: 50.00	0.94	0.23
AV2	: 37.00	0.70	0.46
AV3	: 22.00	0.42	0.49
AV4	: 25.00	0.47	0.50
AV5	: 28.00	0.53	0.50
AV6	: 36.00	0.68	0.47
AV7	: 45.00	0.85	0.36
AV8	: 33.00	0.62	0.48
AV9	: 22.00	0.42	0.49
BV1	: 47.00	0.89	0.32
BV2	: 21.00	0.40	0.49
BV3	: 19.00	0.36	0.48
BV4	: 45.00	0.85	0.36
BV5	: 44.00	0.83	0.38
BV6	: 20.00	0.38	0.48
BV7	: 40.00	0.75	0.43
BV8	: 27.00	0.51	0.50
BV9	: 25.00	0.47	0.50
CV1	: 42.00	0.79	0.41
CV2	: 46.00	0.87	0.34
CV3	: 33.00	0.62	0.48
CV4	: 35.00	0.66	0.47
CV5	: 35.00	0.66	0.47
CV6	: 39.00	0.74	0.44
CV7	: 46.00	0.87	0.34
CV8	: 41.00	0.77	0.42
CV9	: 39.00	0.74	0.44

Correlation indexes:

AV1 AV2 AV3 AV4 AV5 AV6 AV7 AV8 AV9 BV1 BV2 BV3 BV4 BV5 BV6 BV7 BV8 BV9 CV1 CV2 CV3 CV4 CV5 CV6 CV7 CV8 CV9

AV1 0.02 -0.130.23 -0.070.01 0.12 -0.020.21 -0.090.20 -0.160.12 0.32 0.19 0.43 0.09 0.23 -0.130.15 -0.020.17 0.17 0.04 -0.100.45 0.04
AV2 0.55 -0.20-0.210.78 0.41 0.34 0.39 0.15 0.36 0.49 -0.16-0.080.51 0.10 0.26 0.37 0.47 -0.140.08 -0.12-0.210.45 0.23 0.14 0.17
AV3 0.12 0.26 0.50 0.36 0.42 0.38 0.06 0.26 0.41 0.03 -0.130.37 -0.050.14 0.12 0.24 -0.120.18 0.12 -0.040.16 0.33 0.09 0.07
AV4 0.44 -0.16-0.13-0.040.20 -0.380.16 -0.080.19 0.23 0.04 -0.16-0.21-0.21-0.170.03 0.03 0.20 0.04 -0.29-0.080.06 -0.38
AV5 -0.24-0.190.04 -0.20-0.100.15 0.15 0.13 -0.020.03 -0.01-0.25-0.320.08 0.08 0.04 0.20 0.04 -0.22-0.03-0.24-0.22
AV6 0.39 0.38 0.50 0.14 0.23 0.43 -0.060.01 0.37 0.17 0.13 0.41 0.25 -0.270.05 -0.07-0.240.51 0.09 0.11 0.23
AV7 0.11 0.25 0.35 0.23 0.21 -0.03-0.190.22 0.25 0.01 0.29 0.30 -0.160.11 -0.19-0.190.11 0.30 0.28 0.23
AV8 0.10 0.09 0.15 0.34 -0.11-0.140.28 -0.080.09 -0.04-0.110.16 0.20 0.10 -0.07-0.02-0.070.04 -0.11
AV9 -0.060.41 0.25 0.25 0.18 0.21 0.04 0.06 0.51 0.15 -0.120.02 0.04 -0.120.24 0.33 0.36 0.24
BV1 0.29 0.27 -0.15-0.160.28 0.35 0.01 0.10 0.26 0.21 0.09 -0.000.12 0.06 0.04 0.09 0.33

BV2 0.60 0.13 -0.040.72 0.19 0.25 0.32 0.32 0.20 0.31
0.09 -0.070.14 0.20 0.25 0.22
BV3 0.10 -0.080.64 0.15 0.18 0.24 0.29 0.06 0.26 -
0.05-0.130.18 0.18 0.03 0.18
BV4 0.37 0.11 0.13 0.01 0.08 -0.090.15 0.11 0.03
0.25 -0.010.15 0.02 0.11
BV5 -0.060.33 0.16 0.23 -0.11-0.03-0.040.21
0.21 0.07 -0.180.24 -0.04
BV6 0.35 0.37 0.28 0.21 0.19 0.20 0.07 0.07
0.20 0.07 0.24 0.20
BV7 0.14 0.28 0.14 0.17 0.01 0.05 0.15
0.26 0.04 0.32 0.35
BV8 0.40 0.15 0.29 0.33 0.01 0.01 0.35
0.06 0.10 0.27
BV9 0.11 -0.190.03 -0.20-0.040.31
0.15 0.24 0.22
CV1 0.21 0.27 -0.17-0.170.54
0.35 -0.170.22
CV2 0.39 0.31 0.31 0.15 0.01
-0.080.15
CV3 0.26 0.10 0.06 0.16 -
0.050.15
CV4 0.58 -0.16-
0.160.09 0.02
CV5 -0.16-0.16-
0.010.11
CV6 0.27 0.08
0.51
CV7 0.32 0.27
CV8 0.29
CV9

Cohesitive indexes: (according to the classic theory)
Computation with poisson law

AV1 AV2 AV3 AV4 AV5 AV6 AV7 AV8 AV9 BV1 BV2 BV3 BV4 BV5 BV6 BV7
BV8 BV9 CV1 CV2 CV3 CV4 CV5 CV6 CV7 CV8 CV9

AV1 0 0 0 0.14 0 0 0 0 0.10 0 0.09 0 0 0.27 0.08 0.43 0 0.14 0 0 0
0.07 0.07 0 0 0.46 0
AV2 0 0 0.90 0 0 1.00 0.91 0.74 0.72 0.25 0.67 0.81 0 0 0.85 0.13 0.53 0.73 0.95
0 0.08 0 0 0.92 0.52 0.24 0.34
AV3 0 1.00 0 0.27 0.72 1.00 0.97 0.98 0.87 0 0.63 0.88 0 0 0.84 0 0.33 0.27 0.76
0 0.52 0.28 0 0.45 0.95 0.13 0.06
AV4 0.60 0 0.24 0 0.96 0 0 0 0.47 0 0.35 0 0.53 0.68 0 0 0 0 0 0 0
0.57 0 0 0 0 0
AV5 0 0 0.60 0.92 0 0 0 0 0 0 0.29 0.29 0.26 0 0 0 0 0 0.06 0.01 0
0.55 0 0 0 0 0
AV6 0 1.00 0.87 0 0 0 0.90 0.83 0.87 0.19 0.41 0.75 0 0 0.68 0.37 0.23 0.79 0.60
0 0 0 0 0.97 0.04 0.16 0.55
AV7 0 0.68 0.47 0 0 0.64 0 0.07 0.31 0.58 0.27 0.21 0 0 0.24 0.39 0 0.40 0.51 0
0.07 0 0 0.06 0.49 0.45 0.34
AV8 0 0.83 0.82 0 0 0.89 0.13 0 0.14 0.03 0.27 0.66 0 0 0.57 0 0.12 0 0
0.32 0.47 0.16 0 0 0 0 0
AV9 0.50 0.97 0.87 0.52 0 1.00 0.78 0.21 0 0 0.90 0.58 0.78 0.52 0.50 0 0.04 0.99
0.40 0 0 0 0 0.76 0.95 0.97 0.76
BV1 0 0.13 0 0 0 0.10 0.50 0.02 0 0 0.30 0.26 0 0 0.28 0.50 0 0.03 0.33
0.21 0.02 0 0.07 0 0 0 0.46

BV2 0.46 0.96 0.65 0.40 0.37 0.70 0.74 0.42 0.92 0.90 0 0.99 0.27 0 1.00 0.60 0.70 0.82
0.93 0.62 0.88 0.17 0 0.36 0.62 0.80 0.70
BV3 0 1.00 0.92 0 0.41 0.99 0.65 0.93 0.65 0.85 1.00 0 0.11 0 1.00 0.44 0.50 0.66
0.89 0 0.78 0 0 0.56 0.51 0 0.56
BV4 0 0 0 0.22 0.12 0 0 0 0.31 0 0.09 0.04 0 0.64 0.06 0.11 0 0.02 0 0.11
0.07 0 0.39 0 0.11 0 0.06
BV5 0.50 0 0 0.31 0 0 0 0 0.20 0 0 0 0.67 0 0 0.58 0.19 0.31 0 0 0
0.31 0.31 0 0 0.39 0
BV6 0.42 1.00 0.88 0 0 0.96 0.70 0.83 0.54 0.88 1.00 1.00 0.19 0 0 0.97 0.92 0.75
0.66 0.56 0.61 0.05 0.05 0.63 0 0.75 0.63
BV7 0.88 0.11 0 0 0 0.31 0.52 0 0 0.75 0.29 0.19 0.14 0.71 0.58 0 0.21 0.49 0.21
0.26 0 0 0.24 0.53 0 0.69 0.75
BV8 0 0.74 0.27 0 0 0.32 0 0.16 0.03 0 0.58 0.37 0 0.41 0.80 0.35 0 0.89 0.38
0.83 0.85 0 0 0.92 0 0.17 0.77
BV9 0.60 0.95 0.24 0 0 0.97 0.87 0 0.96 0.09 0.74 0.54 0.05 0.68 0.64 0.81 0.92 0
0.22 0 0 0 0 0.87 0.34 0.72 0.67
CV1 0 0.86 0.36 0 0.03 0.46 0.60 0 0.17 0.47 0.49 0.41 0 0 0.28 0.19 0.20 0.11 0
0.36 0.50 0 0 0.92 0.70 0 0.40
CV2 0 0 0 0 0.01 0 0 0.16 0 0.23 0.20 0 0.10 0 0.17 0.18 0.37 0 0.27 0
0.58 0.46 0.46 0.13 0 0 0.13
CV3 0 0.09 0.35 0 0 0 0.13 0.47 0 0.03 0.64 0.50 0.13 0 0.39 0 0.73 0 0.72
0.93 0 0.66 0.16 0.02 0.32 0 0.34
CV4 0.21 0 0.17 0.40 0.42 0 0 0.14 0 0 0.10 0 0 0.49 0.03 0 0 0 0 0.77
0.62 0 0.99 0 0 0.09 0
CV5 0.21 0 0 0 0 0 0 0 0 0.14 0 0 0.63 0.49 0.03 0.30 0 0 0 0.77
0.14 0.99 0 0 0 0 0.18
CV6 0 0.88 0.23 0 0 0.93 0.09 0 0.42 0 0.17 0.26 0 0 0.31 0.56 0.68 0.58 0.97
0.20 0.01 0 0 0 0.60 0.05 0.95
CV7 0 0.31 0.40 0 0 0.02 0.45 0 0.40 0 0.20 0.15 0.10 0 0 0 0 0.12 0.55 0
0.16 0 0 0.40 0 0.50 0.40
CV8 0.89 0.19 0.06 0 0 0.13 0.56 0 0.60 0 0.39 0 0 0.46 0.35 0.66 0.10 0.40 0 0
0 0.07 0 0.05 0.67 0 0.59
CV9 0 0.31 0.03 0 0 0.48 0.47 0 0.42 0.73 0.36 0.26 0.09 0 0.31 0.77 0.51 0.40
0.47 0.20 0.26 0 0.15 0.95 0.60 0.64 0

Classification at level : 1 : (AV3 AV2) cohesion : 1

Classification at level : 2 : (BV6 BV2) cohesion : 1

Classification at level : 3 : ((AV3 AV2) AV6) cohesion : 0.999

Classification at level : 4 : (BV3 (BV6 BV2)) cohesion : 0.998

Classification at level : 5 : (CV4 CV5) cohesion : 0.988

Classification at level : 6 : (AV9 BV9) cohesion : 0.985

Classification at level : 7 : (CV6 CV1) cohesion : 0.97

Classification at level : 8 : (((AV3 AV2) AV6) AV7) cohesion : 0.962

Classification at level : 9 : (AV4 AV5) cohesion : 0.956

Classification at level : 10 : ((BV3 (BV6 BV2)) BV1) cohesion : 0.935

Classification at level : 11 : (CV3 CV2) cohesion : 0.933

Classification at level : 12 : (CV8 AV1) cohesion : 0.886

Classification at level : 13 : (BV8 (CV3 CV2)) cohesion : 0.871

Classification at level : 14 : ((AV9 BV9) (((AV3 AV2) AV6) AV7)) cohesion : 0.857

Classification at level : 15 : (BV7 (CV8 AV1)) cohesion : 0.812

Classification at level : 16 : (((BV3 (BV6 BV2)) BV1) CV9) cohesion : 0.773

Classification at level : 17 : ((CV6 CV1) CV7) cohesion : 0.74

Classification at level : 18 : (BV5 BV4) cohesion : 0.675

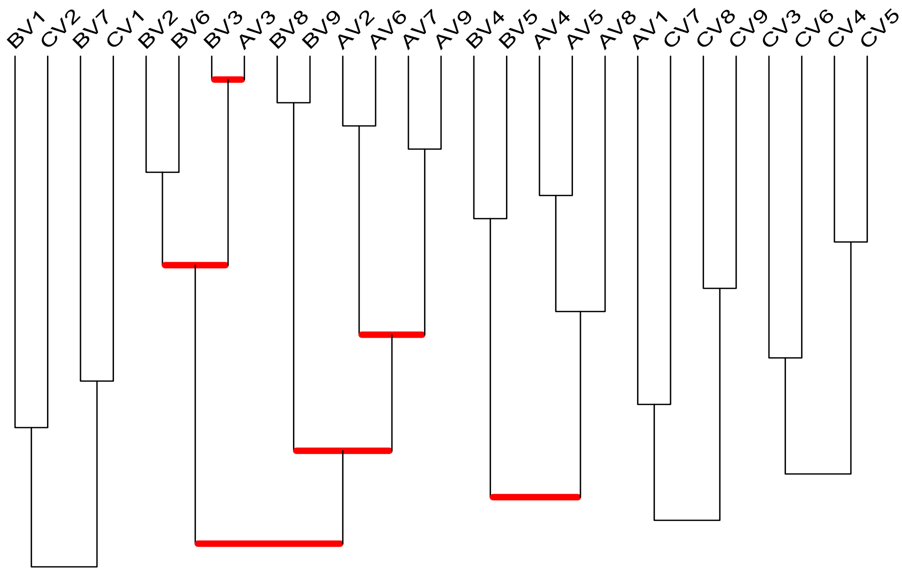
Classification at level : 19 : (((AV9 BV9) (((AV3 AV2) AV6) AV7)) ((CV6 CV1) CV7)) cohesion : 0.621

Classification at level : 20 : (AV8 (BV8 (CV3 CV2))) cohesion : 0.48

The most significant node is at level : 1

Significant nodes
at level: 1
at level: 3
at level: 8
at level: 10
at level: 14
at level: 19

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BAC



Similarity : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BAC.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BAC

nb col : 27, nb lig : 60

	Occurrence	Average	Standard deviations:
BV1	: 58.00	0.97	0.18
BV2	: 45.00	0.75	0.43
BV3	: 32.00	0.53	0.50
BV4	: 35.00	0.58	0.49
BV5	: 48.00	0.80	0.40
BV6	: 42.00	0.70	0.46
BV7	: 55.00	0.92	0.28
BV8	: 38.00	0.63	0.48
BV9	: 42.00	0.70	0.46
AV1	: 46.00	0.77	0.42
AV2	: 44.00	0.73	0.44
AV3	: 30.00	0.50	0.50
AV4	: 36.00	0.60	0.49
AV5	: 38.00	0.63	0.48
AV6	: 35.00	0.58	0.49
AV7	: 39.00	0.65	0.48
AV8	: 36.00	0.60	0.49
AV9	: 28.00	0.47	0.50
CV1	: 55.00	0.92	0.28
CV2	: 59.00	0.98	0.13
CV3	: 54.00	0.90	0.30
CV4	: 50.00	0.83	0.37
CV5	: 52.00	0.87	0.34
CV6	: 45.00	0.75	0.43
CV7	: 53.00	0.88	0.32
CV8	: 47.00	0.78	0.41
CV9	: 49.00	0.82	0.39

Correlation indexes:

BV1 BV2 BV3 BV4 BV5 BV6 BV7 BV8 BV9 AV1 AV2 AV3 AV4 AV5 AV6 AV7 AV8 AV9 CV1 CV2 CV3 CV4 CV5 CV6 CV7 CV8 CV9

BV1 -0.110.20 0.22 0.14 0.08 -0.060.24 0.28 -0.100.10 0.00 0.04 0.05 0.03 0.06 0.23 -0.01-0.06-0.02-0.060.17 -0.07-0.11-0.070.13 0.15

BV2 0.46 -0.250.00 0.63 0.24 0.36 0.38 -0.050.44 0.42 0.00 -0.200.37 0.14 0.08 0.08 0.24 -0.080.06 0.15 0.23 0.29 0.27 0.07 0.02

BV3 0.09 0.37 0.55 0.20 0.40 0.34 -0.200.34 0.60 0.26 0.19 0.43 0.36 0.19 0.21 0.20 -0.120.24 0.03 0.12 0.15 0.08 0.08 0.07

BV4 0.42 -0.26-0.250.13 0.04 -0.31-0.200.10 0.07 0.27 0.11 0.09 0.00 -0.02-0.25-0.110.17 0.17 0.07 0.06 0.01 -0.030.12

BV5 -0.24-0.150.22 0.04 -0.18-0.110.33 0.27 0.31 0.08 -0.190.27 0.05 0.00 -0.070.11 0.00 0.05 0.10 -0.050.14 0.09

BV6 0.33 0.48 0.44 0.07 0.59 0.44 -0.09-0.200.48 0.51 0.06 0.25 0.33 -0.090.15 0.20 0.17 0.38 0.10 0.19 0.25

BV7 0.02 0.20 0.12 0.36 0.18 -0.12-0.100.11 0.16 -0.120.04 0.56 0.43 0.10 0.03 0.06 -0.030.27 0.28 0.01

BV8 0.63 -0.090.48 0.35 -0.13-0.150.41 0.31 0.23 0.30 0.02 -0.100.09 0.12 0.01 0.28 0.05 0.19 0.44

BV9 -0.190.59 0.29 -0.24-0.200.33 0.21 0.13 0.32 0.07 -0.090.15 0.20 0.06 0.04 0.22 0.36 0.44

AV1 -0.15-0.160.27 -0.17-0.15-0.07-0.05-0.04-0.17-0.07-
0.18-0.14-0.100.14 0.05 -0.10-0.16
AV2 0.38 -0.42-0.460.56 0.35 -0.030.34 0.36 0.22 0.18
0.03 -0.010.26 0.25 0.41 0.40
AV3 0.07 0.07 0.37 0.31 0.14 0.07 0.18 -0.130.22 0.18
0.29 0.35 0.05 0.12 0.13
AV4 0.37 -0.21-0.170.31 -0.05-0.12-0.11-0.05-0.09-
0.02-0.160.02 -0.18-0.30
AV5 -0.360.02 0.30 0.02 -0.10-0.100.09 0.03
0.11 -0.20-0.060.02 -0.27
AV6 0.44 -0.070.18 0.23 0.15 0.06 0.08 -
0.030.29 0.01 0.13 0.30
AV7 -0.100.41 0.03 -0.100.22 0.05 0.02
0.14 0.06 0.04 0.01
AV8 0.22 -0.12-0.11-0.050.09 -
0.020.00 -0.080.07 -0.04
AV9 0.04 -0.140.20 0.06 -0.120.08
0.13 0.25 0.18
CV1 0.43 0.10 -0.130.06 0.10
0.08 0.28 0.17
CV2 -0.04-0.06-0.05-0.08-
0.050.25 -0.06
CV3 0.15 0.20 0.32 0.22
0.23 -0.01
CV4 0.75 0.36 -
0.020.20 0.25
CV5 0.34 0.01 0.15
0.07
CV6 0.15 0.07
0.22
CV7 0.31 0.10
CV8 0.48
CV9

Similarity indexes:

BV1 BV2 BV3 BV4 BV5 BV6 BV7 BV8 BV9 AV1 AV2 AV3 AV4 AV5 AV6 AV7
AV8 AV9 CV1 CV2 CV3 CV4 CV5 CV6 CV7 CV8 CV9

BV1 1.00 0.47 0.58 0.58 0.54 0.53 0.49 0.58 0.59 0.47 0.53 0.50 0.51 0.52 0.51 0.52 0.58
0.49 0.49 0.50 0.49 0.54 0.48 0.47 0.49 0.53 0.54
BV2 0.47 1.00 0.89 0.26 0.50 0.91 0.61 0.80 0.79 0.47 0.81 0.88 0.50 0.32 0.82 0.63 0.58
0.59 0.61 0.49 0.53 0.60 0.63 0.71 0.64 0.55 0.52
BV3 0.58 0.89 1.00 0.62 0.81 0.95 0.62 0.90 0.83 0.30 0.83 0.99 0.81 0.73 0.93 0.87 0.74
0.79 0.62 0.47 0.66 0.53 0.60 0.66 0.55 0.57 0.57
BV4 0.58 0.26 0.62 1.00 0.83 0.24 0.36 0.65 0.54 0.23 0.30 0.64 0.59 0.79 0.64 0.60 0.50
0.47 0.36 0.47 0.61 0.63 0.55 0.56 0.51 0.47 0.60
BV5 0.54 0.50 0.81 0.83 1.00 0.33 0.44 0.68 0.53 0.38 0.42 0.79 0.72 0.74 0.57 0.35 0.72
0.55 0.50 0.49 0.55 0.50 0.52 0.57 0.48 0.59 0.55
BV6 0.53 0.91 0.95 0.24 0.33 1.00 0.66 0.89 0.85 0.56 0.90 0.90 0.41 0.31 0.91 0.90 0.56
0.78 0.66 0.48 0.58 0.63 0.60 0.79 0.56 0.64 0.68
BV7 0.49 0.61 0.62 0.36 0.44 0.66 1.00 0.51 0.60 0.55 0.66 0.61 0.43 0.44 0.56 0.58 0.43
0.53 0.64 0.55 0.53 0.51 0.52 0.48 0.58 0.61 0.50
BV8 0.58 0.80 0.90 0.65 0.68 0.89 0.51 1.00 0.95 0.42 0.88 0.87 0.35 0.34 0.89 0.81 0.75
0.84 0.51 0.48 0.55 0.59 0.50 0.74 0.53 0.66 0.81
BV9 0.59 0.79 0.83 0.54 0.53 0.85 0.60 0.95 1.00 0.35 0.90 0.81 0.26 0.31 0.82 0.70 0.64
0.84 0.53 0.48 0.58 0.63 0.54 0.54 0.62 0.76 0.79
AV1 0.47 0.47 0.30 0.23 0.38 0.56 0.55 0.42 0.35 1.00 0.38 0.34 0.74 0.35 0.36 0.43 0.45
0.46 0.43 0.49 0.41 0.41 0.45 0.60 0.52 0.43 0.40

AV2 0.53 0.81 0.83 0.30 0.42 0.90 0.66 0.88 0.90 0.38 1.00 0.86 0.15 0.13 0.93 0.79 0.47 0.84 0.66 0.54 0.59 0.52 0.49 0.70 0.63 0.78 0.75
AV3 0.50 0.88 0.99 0.64 0.79 0.90 0.61 0.87 0.81 0.34 0.86 1.00 0.59 0.59 0.91 0.85 0.68 0.61 0.61 0.46 0.65 0.66 0.72 0.83 0.54 0.62 0.62
AV4 0.51 0.50 0.81 0.59 0.72 0.41 0.43 0.35 0.26 0.74 0.15 0.59 1.00 0.86 0.26 0.31 0.83 0.42 0.43 0.47 0.47 0.43 0.49 0.35 0.51 0.34 0.27
AV5 0.52 0.32 0.73 0.79 0.74 0.31 0.44 0.34 0.31 0.35 0.13 0.59 0.86 1.00 0.14 0.52 0.81 0.53 0.44 0.48 0.55 0.52 0.57 0.32 0.46 0.52 0.29
AV6 0.51 0.82 0.93 0.64 0.57 0.91 0.56 0.89 0.82 0.36 0.93 0.91 0.26 0.14 1.00 0.90 0.41 0.75 0.63 0.54 0.54 0.56 0.48 0.77 0.51 0.62 0.74
AV7 0.52 0.63 0.87 0.60 0.35 0.90 0.58 0.81 0.70 0.43 0.79 0.85 0.31 0.52 0.90 1.00 0.39 0.91 0.52 0.48 0.63 0.53 0.51 0.63 0.54 0.53 0.51
AV8 0.58 0.58 0.74 0.50 0.72 0.56 0.43 0.75 0.64 0.45 0.47 0.68 0.83 0.81 0.41 0.39 1.00 0.78 0.43 0.47 0.47 0.57 0.49 0.50 0.44 0.56 0.47
AV9 0.49 0.59 0.79 0.47 0.55 0.78 0.53 0.84 0.84 0.46 0.84 0.61 0.42 0.53 0.75 0.91 0.78 1.00 0.53 0.46 0.64 0.55 0.40 0.59 0.60 0.74 0.67
CV1 0.49 0.61 0.62 0.36 0.50 0.66 0.64 0.51 0.53 0.43 0.66 0.61 0.43 0.44 0.63 0.52 0.43 0.53 1.00 0.55 0.53 0.45 0.52 0.55 0.52 0.61 0.56
CV2 0.50 0.49 0.47 0.47 0.49 0.48 0.55 0.48 0.48 0.49 0.54 0.46 0.47 0.48 0.54 0.48 0.47 0.46 0.55 1.00 0.49 0.49 0.49 0.49 0.49 0.55 0.49
CV3 0.49 0.53 0.66 0.61 0.55 0.58 0.53 0.55 0.58 0.41 0.59 0.65 0.47 0.55 0.54 0.63 0.47 0.64 0.53 0.49 1.00 0.56 0.57 0.65 0.57 0.60 0.49
CV4 0.54 0.60 0.53 0.63 0.50 0.63 0.51 0.59 0.63 0.41 0.52 0.66 0.43 0.52 0.56 0.53 0.57 0.55 0.45 0.49 0.56 1.00 0.81 0.72 0.49 0.62 0.63
CV5 0.48 0.63 0.60 0.55 0.52 0.60 0.52 0.50 0.54 0.45 0.49 0.72 0.49 0.57 0.48 0.51 0.49 0.40 0.52 0.49 0.57 0.81 1.00 0.68 0.50 0.58 0.53
CV6 0.47 0.71 0.66 0.56 0.57 0.79 0.48 0.74 0.54 0.60 0.70 0.83 0.35 0.32 0.77 0.63 0.50 0.59 0.55 0.49 0.65 0.72 0.68 1.00 0.58 0.55 0.64
CV7 0.49 0.64 0.55 0.51 0.48 0.56 0.58 0.53 0.62 0.52 0.63 0.54 0.51 0.46 0.51 0.54 0.44 0.60 0.52 0.49 0.57 0.49 0.50 0.58 1.00 0.65 0.54
CV8 0.53 0.55 0.57 0.47 0.59 0.64 0.61 0.66 0.76 0.43 0.78 0.62 0.34 0.52 0.62 0.53 0.56 0.74 0.61 0.55 0.60 0.62 0.58 0.55 0.65 1.00 0.77
CV9 0.54 0.52 0.57 0.60 0.55 0.68 0.50 0.81 0.79 0.40 0.75 0.62 0.27 0.29 0.74 0.51 0.47 0.67 0.56 0.49 0.49 0.63 0.53 0.64 0.54 0.77 1.00

Classification at level : 1 : (BV3 AV3) similarity : 0.987776

Classification at level : 2 : (BV8 BV9) similarity : 0.948311

Classification at level : 3 : (AV2 AV6) similarity : 0.926121

Classification at level : 4 : (AV7 AV9) similarity : 0.913012

Classification at level : 5 : (BV2 BV6) similarity : 0.909275

Classification at level : 6 : (AV4 AV5) similarity : 0.861927

Classification at level : 7 : (BV4 BV5) similarity : 0.827648

Classification at level : 8 : (CV4 CV5) similarity : 0.805334

Classification at level : 9 : ((BV2 BV6) (BV3 AV3)) similarity : 0.800334

Classification at level : 10 : (CV8 CV9) similarity : 0.771917

Classification at level : 11 : ((AV4 AV5) AV8) similarity : 0.685769

Classification at level : 12 : ((AV2 AV6) (AV7 AV9)) similarity : 0.67069

Classification at level : 13 : (CV3 CV6) similarity : 0.65278

Classification at level : 14 : (BV7 CV1) similarity : 0.642006

Classification at level : 15 : (AV1 CV7) similarity : 0.522935

Classification at level : 16 : (BV1 CV2) similarity : 0.498239

Classification at level : 17 : ((BV8 BV9) ((AV2 AV6) (AV7 AV9))) similarity : 0.441082

Classification at level : 18 : ((CV3 CV6) (CV4 CV5)) similarity : 0.263089

Classification at level : 19 : ((BV4 BV5) ((AV4 AV5) AV8)) similarity : 0.247238

Classification at level : 20 : ((AV1 CV7) (CV8 CV9)) similarity : 0.178543

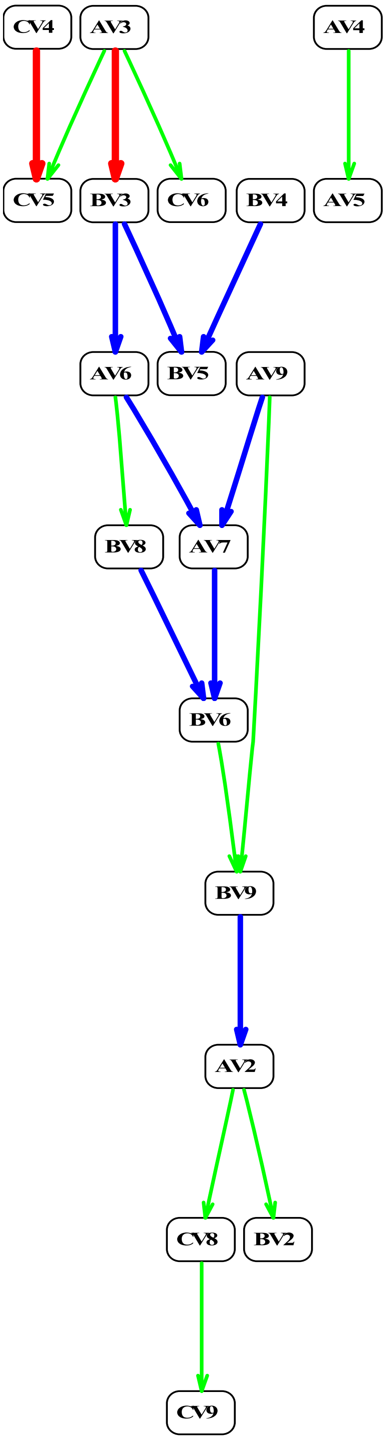
Classification at level : 21 : (((BV2 BV6) (BV3 AV3)) ((BV8 BV9) ((AV2 AV6) (AV7 AV9))))
similarity : 0.169262

Classification at level : 22 : ((BV1 CV2) (BV7 CV1)) similarity : 0.0912392

The most significant node is at level : 21

Significant nodes
at level: 1
at level: 9
at level: 12
at level: 17
at level: 19
at level: 21

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BAC



Graph : C:\Documents and Settings\epa\Desktop 99 95 90 85 alysis\ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BAC.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

nb col : 27, nb lig : 60

	Occurrence	Average	Standard deviations:
BV1	: 58.00	0.97	0.18
BV2	: 45.00	0.75	0.43
BV3	: 32.00	0.53	0.50
BV4	: 35.00	0.58	0.49
BV5	: 48.00	0.80	0.40
BV6	: 42.00	0.70	0.46
BV7	: 55.00	0.92	0.28
BV8	: 38.00	0.63	0.48
BV9	: 42.00	0.70	0.46
AV1	: 46.00	0.77	0.42
AV2	: 44.00	0.73	0.44
AV3	: 30.00	0.50	0.50
AV4	: 36.00	0.60	0.49
AV5	: 38.00	0.63	0.48
AV6	: 35.00	0.58	0.49
AV7	: 39.00	0.65	0.48
AV8	: 36.00	0.60	0.49
AV9	: 28.00	0.47	0.50
CV1	: 55.00	0.92	0.28
CV2	: 59.00	0.98	0.13
CV3	: 54.00	0.90	0.30
CV4	: 50.00	0.83	0.37
CV5	: 52.00	0.87	0.34
CV6	: 45.00	0.75	0.43
CV7	: 53.00	0.88	0.32
CV8	: 47.00	0.78	0.41
CV9	: 49.00	0.82	0.39

Correlation indexes:
BV1 BV2 BV3 BV4 BV5 BV6 BV7 BV8 BV9 AV1 AV2 AV3 AV4 AV5 AV6 AV7 AV8 AV9 CV1 CV2 CV3 CV4 CV5 CV6 CV7 CV8 CV9

BV1 -0.110.20 0.22 0.14 0.08 -0.060.24 0.28 -0.100.10 0.00 0.04 0.05 0.03 0.06 0.23 -0.01-0.06-0.02-0.060.17 -0.07-0.11-0.070.13 0.15
BV2 0.46 -0.250.00 0.63 0.24 0.36 0.38 -0.050.44 0.42 0.00 -0.200.37 0.14 0.08 0.08 0.24 -0.080.06 0.15 0.23 0.29 0.27 0.07 0.02
BV3 0.09 0.37 0.55 0.20 0.40 0.34 -0.200.34 0.60 0.26 0.19 0.43 0.36 0.19 0.21 0.20 -0.120.24 0.03 0.12 0.15 0.08 0.08 0.07
BV4 0.42 -0.26-0.250.13 0.04 -0.31-0.200.10 0.07 0.27 0.11 0.09 0.00 -0.02-0.25-0.110.17 0.17 0.07 0.06 0.01 -0.030.12
BV5 -0.24-0.150.22 0.04 -0.18-0.110.33 0.27 0.31 0.08 -0.190.27 0.05 0.00 -0.070.11 0.00 0.05 0.10 -0.050.14 0.09
BV6 0.33 0.48 0.44 0.07 0.59 0.44 -0.09-0.200.48 0.51 0.06 0.25 0.33 -0.090.15 0.20 0.17 0.38 0.10 0.19 0.25
BV7 0.02 0.20 0.12 0.36 0.18 -0.12-0.100.11 0.16 -0.120.04 0.56 0.43 0.10 0.03 0.06 -0.030.27 0.28 0.01
BV8 0.63 -0.090.48 0.35 -0.13-0.150.41 0.31 0.23 0.30 0.02 -0.100.09 0.12 0.01 0.28 0.05 0.19 0.44
BV9 -0.190.59 0.29 -0.24-0.200.33 0.21 0.13 0.32 0.07 -0.090.15 0.20 0.06 0.04 0.22 0.36 0.44
AV1 -0.15-0.160.27 -0.17-0.15-0.07-0.05-0.04-0.17-0.07-0.18-0.14-0.100.14 0.05 -0.10-0.16

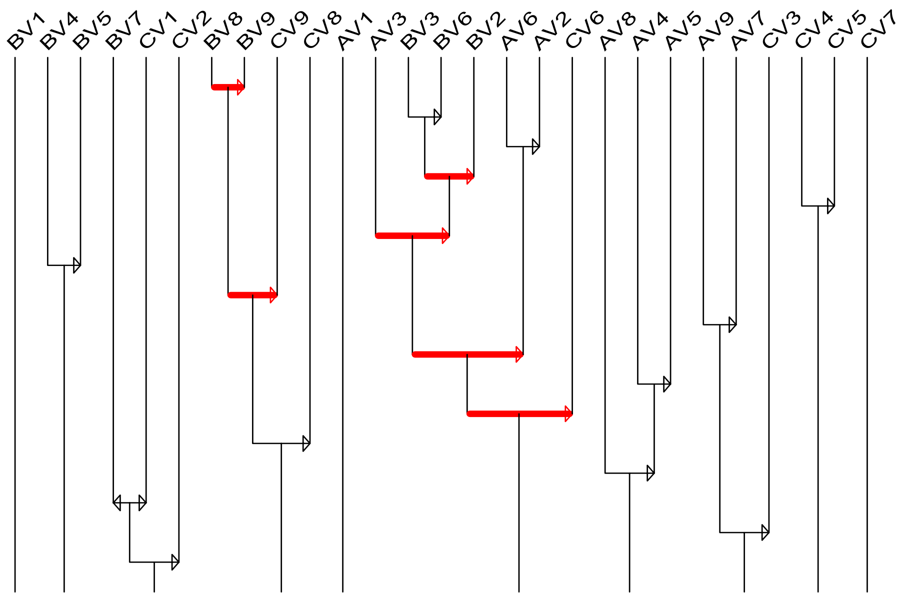
AV2 0.38 -0.42-0.460.56 0.35 -0.030.34 0.36 0.22 0.18
0.03 -0.010.26 0.25 0.41 0.40
AV3 0.07 0.07 0.37 0.31 0.14 0.07 0.18 -0.130.22 0.18
0.29 0.35 0.05 0.12 0.13
AV4 0.37 -0.21-0.170.31 -0.05-0.12-0.11-0.05-0.09-
0.02-0.160.02 -0.18-0.30
AV5 -0.360.02 0.30 0.02 -0.10-0.100.09 0.03
0.11 -0.20-0.060.02 -0.27
AV6 0.44 -0.070.18 0.23 0.15 0.06 0.08 -
0.030.29 0.01 0.13 0.30
AV7 -0.100.41 0.03 -0.100.22 0.05 0.02
0.14 0.06 0.04 0.01
AV8 0.22 -0.12-0.11-0.050.09 -
0.020.00 -0.080.07 -0.04
AV9 0.04 -0.140.20 0.06 -0.120.08
0.13 0.25 0.18
CV1 0.43 0.10 -0.130.06 0.10
0.08 0.28 0.17
CV2 -0.04-0.06-0.05-0.08-
0.050.25 -0.06
CV3 0.15 0.20 0.32 0.22
0.23 -0.01
CV4 0.75 0.36 -
0.020.20 0.25
CV5 0.34 0.01 0.15
0.07
CV6 0.15 0.07
0.22
CV7 0.31 0.10
CV8 0.48
CV9

Implicative indexes: (according to the classic theory)
Computation with poisson law
BV1 BV2 BV3 BV4 BV5 BV6 BV7 BV8 BV9 AV1 AV2 AV3 AV4 AV5 AV6 AV7
AV8 AV9 CV1 CV2 CV3 CV4 CV5 CV6 CV7 CV8 CV9

BV1 0 38 53 54 49 47 35 55 57 38 48 45 46 47 46 47 54 45 35 25
36 50 37 38 37 49 50
BV2 19 0 89 19 41 98 72 84 87 36 91 86 44 22 84 61 53 53 72 17
47 62 71 79 77 51 44
BV3 66 99 0 57 95 100 75 95 92 14 93 99 82 73 95 93 73 72 75 10
83 44 62 69 51 54 53
BV4 69 11 57 0 97 11 8 63 48 7 15 58 54 82 60 57 43 41 8 12 68
69 50 51 39 35 62
BV5 47 42 79 84 0 20 22 68 47 24 31 76 72 76 53 25 72 50 37 19
52 41 46 54 33 59 52
BV6 41 99 95 17 14 0 86 94 93 52 99 89 33 21 93 96 51 72 86 16
61 70 66 90 54 69 78
BV7 28 62 58 29 31 68 0 46 58 52 70 56 36 37 52 55 36 47 84 60
47 44 45 40 62 64 43
BV8 72 91 90 62 77 97 39 0 100 28 97 85 27 24 92 85 75 80 39 13
53 61 40 83 46 71 97
BV9 75 90 82 48 46 93 68 99 0 19 99 77 18 21 83 71 61 79 46 16
61 70 49 48 72 89 95
AV1 20 37 25 16 22 51 53 33 23 0 25 29 74 25 29 35 38 41 19 18
18 24 28 60 45 30 23
AV2 43 92 81 22 27 98 88 93 98 23 0 83 9 6 95 84 40 79 88 52
64 45 37 77 75 91 90

AV3 26 98 99 59 94 98 71 92 88 17 96 0 54 54 93 90 65 53 71 9
80 74 91 94 46 63 64
AV4 34 41 79 53 84 29 19 25 13 84 4 53 0 91 18 20 85 37 19 12
29 26 35 20 41 17 7
AV5 36 16 69 80 88 18 21 24 18 18 3 53 89 0 8 46 83 47 21 13
53 45 57 16 29 44 10
AV6 32 94 93 60 55 98 56 94 90 20 100 89 17 6 0 96 33 68 79 44
46 53 33 87 39 63 88
AV7 37 64 87 56 17 98 63 84 73 31 89 82 22 46 93 0 30 88 41 14
75 47 42 64 48 47 42
AV8 70 54 70 43 84 52 19 76 64 33 37 63 85 85 34 28 0 72 19 12
29 55 35 41 25 52 34
AV9 24 55 75 39 49 84 41 89 92 33 94 54 33 45 73 97 79 0 41 8
77 50 17 55 63 86 75
CV1 28 62 58 29 42 68 84 46 48 31 70 56 36 37 60 46 36 47 0 60
47 31 45 51 46 64 55
CV2 31 41 41 41 40 41 55 41 41 41 51 41 41 41 49 41 41 42 55 0
38 40 39 41 38 51 40
CV3 27 48 62 57 52 55 47 51 55 28 58 60 41 51 49 61 41 58 47 23
0 54 58 70 60 62 40
CV4 50 59 47 60 42 64 40 56 64 28 46 61 36 47 51 48 53 50 24 20
56 0 99 80 37 64 69
CV5 25 65 55 50 47 59 44 44 49 33 41 68 43 54 41 46 43 36 44 22
59 97 0 75 40 57 48
CV6 19 79 62 51 54 87 32 76 48 60 76 80 27 22 77 61 44 53 52 17
83 87 85 0 60 51 72
CV7 26 67 50 45 37 52 64 48 62 47 65 49 46 39 45 49 38 55 45 22
61 39 41 56 0 71 51
CV8 46 51 52 40 60 65 75 65 83 31 88 57 26 46 58 48 51 69 75 54
69 67 60 51 80 0 93
CV9 49 45 52 57 52 71 39 86 87 26 84 57 19 20 73 45 41 61 58 20
37 71 48 68 51 90 0

ΙΕΡΑΡΧΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BAC



Herarchical tree : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BAC.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΙΕΡΑΡΧΙΚΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

nb col : 27, nb lig : 60

	Occurrence	Average	Standard deviations:
BV1	: 58.00	0.97	0.18
BV2	: 45.00	0.75	0.43
BV3	: 32.00	0.53	0.50
BV4	: 35.00	0.58	0.49
BV5	: 48.00	0.80	0.40
BV6	: 42.00	0.70	0.46
BV7	: 55.00	0.92	0.28
BV8	: 38.00	0.63	0.48
BV9	: 42.00	0.70	0.46
AV1	: 46.00	0.77	0.42
AV2	: 44.00	0.73	0.44
AV3	: 30.00	0.50	0.50
AV4	: 36.00	0.60	0.49
AV5	: 38.00	0.63	0.48
AV6	: 35.00	0.58	0.49
AV7	: 39.00	0.65	0.48
AV8	: 36.00	0.60	0.49
AV9	: 28.00	0.47	0.50
CV1	: 55.00	0.92	0.28
CV2	: 59.00	0.98	0.13
CV3	: 54.00	0.90	0.30
CV4	: 50.00	0.83	0.37
CV5	: 52.00	0.87	0.34
CV6	: 45.00	0.75	0.43
CV7	: 53.00	0.88	0.32
CV8	: 47.00	0.78	0.41
CV9	: 49.00	0.82	0.39

Correlation indexes:

BV1 BV2 BV3 BV4 BV5 BV6 BV7 BV8 BV9 AV1 AV2 AV3 AV4 AV5 AV6 AV7 AV8 AV9 CV1 CV2 CV3 CV4 CV5 CV6 CV7 CV8 CV9

BV1 -0.110.20 0.22 0.14 0.08 -0.060.24 0.28 -0.100.10 0.00 0.04 0.05 0.03 0.06 0.23 -0.01-0.06-0.02-0.060.17 -0.07-0.11-0.070.13 0.15
BV2 0.46 -0.250.00 0.63 0.24 0.36 0.38 -0.050.44 0.42 0.00 -0.200.37 0.14 0.08 0.08 0.24 -0.080.06 0.15 0.23 0.29 0.27 0.07 0.02
BV3 0.09 0.37 0.55 0.20 0.40 0.34 -0.200.34 0.60 0.26 0.19 0.43 0.36 0.19 0.21 0.20 -0.120.24 0.03 0.12 0.15 0.08 0.08 0.07
BV4 0.42 -0.26-0.250.13 0.04 -0.31-0.200.10 0.07 0.27 0.11 0.09 0.00 -0.02-0.25-0.110.17 0.17 0.07 0.06 0.01 -0.030.12
BV5 -0.24-0.150.22 0.04 -0.18-0.110.33 0.27 0.31 0.08 -0.190.27 0.05 0.00 -0.070.11 0.00 0.05 0.10 -0.050.14 0.09
BV6 0.33 0.48 0.44 0.07 0.59 0.44 -0.09-0.200.48 0.51 0.06 0.25 0.33 -0.090.15 0.20 0.17 0.38 0.10 0.19 0.25
BV7 0.02 0.20 0.12 0.36 0.18 -0.12-0.100.11 0.16 -0.120.04 0.56 0.43 0.10 0.03 0.06 -0.030.27 0.28 0.01
BV8 0.63 -0.090.48 0.35 -0.13-0.150.41 0.31 0.23 0.30 0.02 -0.100.09 0.12 0.01 0.28 0.05 0.19 0.44
BV9 -0.190.59 0.29 -0.24-0.200.33 0.21 0.13 0.32 0.07 -0.090.15 0.20 0.06 0.04 0.22 0.36 0.44
AV1 -0.15-0.160.27 -0.17-0.15-0.07-0.05-0.04-0.17-0.07-0.18-0.14-0.100.14 0.05 -0.10-0.16

AV2 0.38 -0.42-0.460.56 0.35 -0.030.34 0.36 0.22 0.18
0.03 -0.010.26 0.25 0.41 0.40
AV3 0.07 0.07 0.37 0.31 0.14 0.07 0.18 -0.130.22 0.18
0.29 0.35 0.05 0.12 0.13
AV4 0.37 -0.21-0.170.31 -0.05-0.12-0.11-0.05-0.09-
0.02-0.160.02 -0.18-0.30
AV5 -0.360.02 0.30 0.02 -0.10-0.100.09 0.03
0.11 -0.20-0.060.02 -0.27
AV6 0.44 -0.070.18 0.23 0.15 0.06 0.08 -
0.030.29 0.01 0.13 0.30
AV7 -0.100.41 0.03 -0.100.22 0.05 0.02
0.14 0.06 0.04 0.01
AV8 0.22 -0.12-0.11-0.050.09 -
0.020.00 -0.080.07 -0.04
AV9 0.04 -0.140.20 0.06 -0.120.08
0.13 0.25 0.18
CV1 0.43 0.10 -0.130.06 0.10
0.08 0.28 0.17
CV2 -0.04-0.06-0.05-0.08-
0.050.25 -0.06
CV3 0.15 0.20 0.32 0.22
0.23 -0.01
CV4 0.75 0.36 -
0.020.20 0.25
CV5 0.34 0.01 0.15
0.07
CV6 0.15 0.07
0.22
CV7 0.31 0.10
CV8 0.48
CV9

Cohesitive indexes: (according to the classic theory)
Computation with poisson law

BV1 BV2 BV3 BV4 BV5 BV6 BV7 BV8 BV9 AV1 AV2 AV3 AV4 AV5 AV6 AV7
AV8 AV9 CV1 CV2 CV3 CV4 CV5 CV6 CV7 CV8 CV9

BV1 0 0 0.07 0.10 0 0 0 0.12 0.17 0 0 0 0 0 0 0 0.11 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
BV2 0 0 0.86 0 0 0.99 0.52 0.77 0.82 0 0.90 0.80 0 0 0.77 0.26 0.08 0.07 0.52 0
0 0.29 0.51 0.67 0.62 0.03 0
BV3 0.37 0.99 0 0.18 0.96 1.00 0.57 0.95 0.91 0 0.93 1.00 0.73 0.55 0.96 0.93 0.54 0.53
0.57 0 0.75 0 0.28 0.44 0.03 0.10 0.08
BV4 0.45 0 0.16 0 0.98 0 0 0.31 0 0 0 0.19 0.09 0.74 0.23 0.16 0 0 0 0
0.42 0.45 0 0.03 0 0 0.28
BV5 0 0 0.68 0.78 0 0 0 0.43 0 0 0 0.60 0.53 0.62 0.07 0 0.53 0 0 0
0.06 0 0 0.09 0 0.22 0.04
BV6 0 1.00 0.96 0 0 0 0.82 0.95 0.94 0.04 0.99 0.86 0 0 0.93 0.97 0.03 0.52 0.82
0 0.25 0.47 0.38 0.88 0.10 0.44 0.65
BV7 0 0.28 0.19 0 0 0.42 0 0 0.20 0.04 0.48 0.15 0 0 0.05 0.13 0 0 0.76
0.24 0 0 0 0 0.28 0.34 0
BV8 0.51 0.90 0.88 0.28 0.63 0.98 0 0 1.00 0 0.98 0.79 0 0 0.91 0.80 0.58 0.68 0
0 0.06 0.25 0 0.76 0 0.50 0.98
BV9 0.59 0.88 0.74 0 0 0.94 0.42 0.99 0 0 0.99 0.63 0 0 0.75 0.49 0.26 0.68 0 0
0.25 0.47 0 0 0.52 0.87 0.96
AV1 0 0 0 0 0 0.03 0.08 0 0 0 0 0 0.57 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0.24 0 0 0

AV2 0 0.92 0.72 0 0 0.99 0.85 0.93 0.99 0 0 0.76 0 0 0.96 0.77 0 0.67 0.85 0.05 0.33 0 0 0.62 0.59 0.90 0.89
AV3 0 0.99 1.00 0.23 0.94 0.99 0.50 0.92 0.86 0 0.97 0 0.09 0.10 0.93 0.88 0.36 0.08 0.50 0 0.69 0.55 0.90 0.95 0 0.31 0.34
AV4 0 0 0.66 0.08 0.78 0 0 0 0 0.78 0 0.08 0 0.90 0 0 0.79 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
AV5 0 0 0.45 0.68 0.84 0 0 0 0 0 0 0.07 0.87 0 0 0 0.75 0 0 0 0.06 0 0.17 0 0 0 0
AV6 0 0.94 0.94 0.23 0.12 0.99 0.14 0.95 0.88 0 1.00 0.86 0 0 0 0.97 0 0.43 0.67 0 0 0.07 0 0.83 0 0.32 0.85
AV7 0 0.33 0.83 0.14 0 0.99 0.31 0.78 0.54 0 0.87 0.73 0 0 0.93 0 0 0.85 0 0 0.58 0 0 0.33 0 0 0
AV8 0.47 0.11 0.48 0 0.78 0.04 0 0.62 0.33 0 0 0.30 0.79 0.79 0 0 0 0.53 0 0 0 0.13 0 0 0 0.05 0
AV9 0 0.12 0.59 0 0 0.78 0 0.86 0.92 0 0.94 0.09 0 0 0.53 0.98 0.66 0 0 0 0.63 0 0 0.12 0.32 0.80 0.59
CV1 0 0.28 0.19 0 0 0.42 0.76 0 0 0 0.48 0.15 0 0 0.25 0 0 0 0 0.24 0 0 0 0.02 0 0.34 0.13
CV2 0 0 0 0 0 0 0.11 0 0 0 0.02 0 0 0 0 0 0 0 0.11 0 0 0 0 0 0 0.03 0
CV3 0 0 0.29 0.17 0.04 0.13 0 0.03 0.13 0 0.19 0.24 0 0.03 0 0.27 0 0.20 0 0 0 0.11 0.19 0.46 0.24 0.29 0
CV4 0 0.23 0 0.24 0 0.33 0 0.15 0.33 0 0 0.25 0 0 0.03 0 0.07 0 0 0 0.14 0 1.00 0.69 0 0.34 0.46
CV5 0 0.35 0.12 0 0 0.23 0 0 0 0 0 0.42 0 0.09 0 0 0 0 0 0 0.22 0.98 0 0.58 0 0.17 0
CV6 0 0.67 0.28 0.02 0.11 0.82 0 0.62 0 0.25 0.60 0.69 0 0 0.63 0.26 0 0.07 0.04 0 0.75 0.83 0.79 0 0.24 0.03 0.51
CV7 0 0.41 0.01 0 0 0.06 0.34 0 0.29 0 0.37 0 0 0 0 0 0 0.11 0 0 0.26 0 0 0.15 0 0.49 0.01
CV8 0 0.02 0.05 0 0.23 0.36 0.58 0.36 0.75 0 0.84 0.16 0 0 0.20 0 0.03 0.44 0.58 0.10 0.45 0.39 0.23 0.02 0.68 0 0.93
CV9 0 0 0.04 0.16 0.04 0.49 0 0.80 0.82 0 0.77 0.16 0 0 0.55 0 0 0.27 0.20 0 0 0.49 0 0.42 0.02 0.89 0

Classification at level : 1 : (BV8 BV9) cohesion : 0.999

Classification at level : 2 : (BV3 BV6) cohesion : 0.999

Classification at level : 3 : (AV6 AV2) cohesion : 0.999

Classification at level : 4 : ((BV3 BV6) BV2) cohesion : 0.997

Classification at level : 5 : (CV4 CV5) cohesion : 0.997

Classification at level : 6 : (AV3 ((BV3 BV6) BV2)) cohesion : 0.995

Classification at level : 7 : (BV4 BV5) cohesion : 0.981

Classification at level : 8 : ((BV8 BV9) CV9) cohesion : 0.978

Classification at level : 9 : (AV9 AV7) cohesion : 0.978

Classification at level : 10 : ((AV3 ((BV3 BV6) BV2)) (AV6 AV2)) cohesion : 0.955

Classification at level : 11 : (AV4 AV5) cohesion : 0.898

Classification at level : 12 : (((AV3 ((BV3 BV6) BV2)) (AV6 AV2)) CV6) cohesion : 0.877

Classification at level : 13 : (((BV8 BV9) CV9) CV8) cohesion : 0.845

Classification at level : 14 : (AV8 (AV4 AV5)) cohesion : 0.824

Classification at level : 15 : (BV7 CV1) cohesion : 0.764

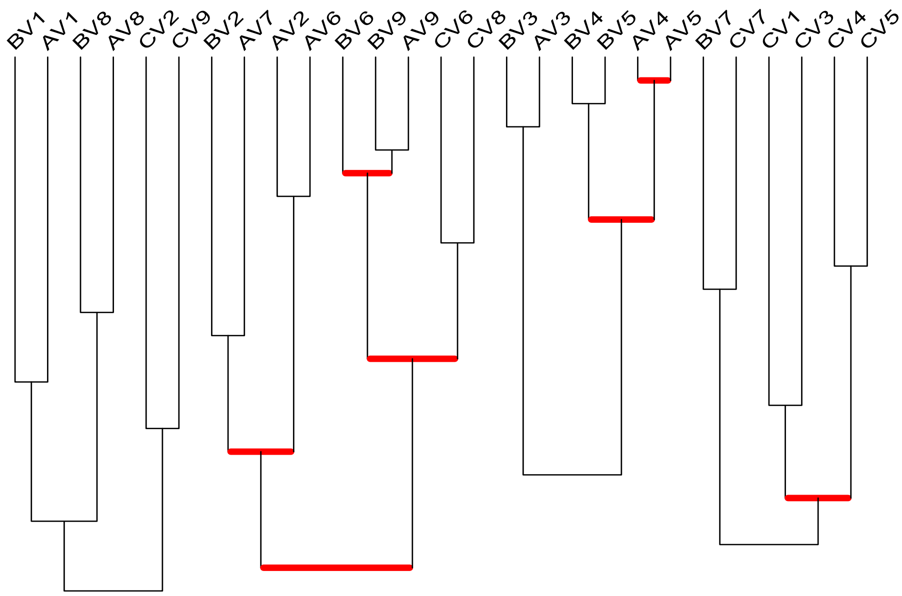
Classification at level : 16 : ((AV9 AV7) CV3) cohesion : 0.707

Classification at level : 17 : ((BV7 CV1) CV2) cohesion : 0.353

The most significant node is at level : 1

Significant nodes
at level: 1
at level: 4
at level: 6
at level: 8
at level: 10
at level: 12

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ BAC



Similarity : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ BAC.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ «ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ BAC»

nb col : 27, nb lig : 65

	Occurrence	Average	Standard deviations:
BV1	: 60.00	0.92	0.27

BV2	: 48.00	0.74	0.44
BV3	: 39.00	0.60	0.49
BV4	: 30.00	0.46	0.50
BV5	: 34.00	0.52	0.50
BV6	: 39.00	0.60	0.49
BV7	: 51.00	0.78	0.41
BV8	: 33.00	0.51	0.50
BV9	: 36.00	0.55	0.50
AV1	: 53.00	0.82	0.39
AV2	: 47.00	0.72	0.45
AV3	: 36.00	0.55	0.50
AV4	: 30.00	0.46	0.50
AV5	: 25.00	0.38	0.49
AV6	: 46.00	0.71	0.45
AV7	: 50.00	0.77	0.42
AV8	: 43.00	0.66	0.47
AV9	: 38.00	0.58	0.49
CV1	: 56.00	0.86	0.35
CV2	: 59.00	0.91	0.29
CV3	: 50.00	0.77	0.42
CV4	: 51.00	0.78	0.41
CV5	: 42.00	0.65	0.48
CV6	: 46.00	0.71	0.45
CV7	: 51.00	0.78	0.41
CV8	: 45.00	0.69	0.46
CV9	: 54.00	0.83	0.37

Correlation indexes:

BV1 BV2 BV3 BV4 BV5 BV6 BV7 BV8 BV9 AV1 AV2 AV3 AV4 AV5 AV6 AV7 AV8 AV9 CV1 CV2 CV3 CV4 CV5 CV6 CV7 CV8 CV9

BV1 0.09 0.00 0.27 0.30 0.00 0.13 0.06 0.09 0.61 -0.180.09 0.15 0.23 -0.19-0.020.28 0.11 0.05 0.31 -0.160.27 0.15 -0.06-0.01-0.190.18
BV2 0.23 -0.36-0.290.30 0.28 0.11 0.24 0.08 0.49 0.24 -0.36-0.320.39 0.42 -0.060.28 0.17 -0.190.26 0.11 0.07 0.16 0.37 0.29 0.01
BV3 0.00 0.35 0.17 0.11 0.01 0.03 -0.150.13 0.72 -0.06-0.130.30 0.15 0.15 -0.050.13 0.07 0.30 0.03 0.12 0.30 0.26 0.27 -0.03
BV4 0.64 -0.13-0.12-0.01-0.040.20 -0.320.02 0.44 0.41 -0.29-0.300.21 -0.100.10 0.30 -0.230.11 0.17 -0.22-0.12-0.190.09
BV5 -0.03-0.050.05 0.07 0.18 -0.250.20 0.33 0.31 -0.14-0.160.29 -0.05-0.030.23 -0.010.10 0.07 0.06 0.02 -0.040.14
BV6 0.18 0.26 0.53 -0.060.20 0.03 -0.06-0.320.37 0.15 0.15 0.33 0.13 0.17 0.15 -0.12-0.010.37 0.18 0.34 0.05
BV7 0.01 0.36 0.14 0.09 0.06 0.03 0.11 -0.010.16 0.02 0.09 0.22 0.09 0.25 0.36 0.24 0.07 0.54 0.14 -0.04
BV8 0.23 0.01 0.08 -0.02-0.08-0.040.18 0.04 0.27 0.11 0.23 0.22 0.12 0.31 0.17 0.11 -0.140.28 0.13
BV9 0.13 0.27 0.00 -0.10-0.050.31 0.10 0.27 0.69 0.18 0.14 0.17 0.06 0.11 0.24 0.21 0.54 0.09
AV1 -0.120.05 0.20 0.38 -0.310.12 0.33 0.16 -0.080.12 -0.070.23 0.06 -0.130.04 -0.060.21
AV2 0.21 -0.67-0.430.58 0.48 -0.150.32 0.05 -0.080.31 -0.160.12 0.13 0.18 0.33 0.09
AV3 -0.04-0.120.31 0.39 0.01 0.12 0.18 0.03 0.24 -0.020.05 0.31 0.21 0.34 -0.07
AV4 0.66 -0.56-0.300.08 -0.22-0.080.08 -0.230.11 -0.15-0.22-0.12-0.32-0.16
AV5 -0.60-0.320.10 -0.17-0.140.03 -0.170.18 -0.01-0.40-0.12-0.36-0.06

AV6 0.29 0.11 0.42 0.13 0.03 0.29 -0.250.16
0.26 0.16 0.52 0.25
AV7 -0.160.35 0.10 -0.170.22 -0.11-
0.250.37 0.33 0.35 0.04
AV8 0.32 -0.000.22 -0.010.26 0.29 -
0.030.02 0.16 0.28
AV9 0.02 0.05 -0.02-0.06-0.040.14
0.09 0.45 0.12
CV1 0.03 0.31 0.22 0.17 0.23
0.22 0.41 -0.06
CV2 -0.170.22 0.21 -0.09-
0.170.13 0.28
CV3 0.16 0.36 0.21 0.42
0.27 -0.05
CV4 0.47 -0.010.09 -
0.11-0.04
CV5 -0.050.08 0.06
0.10
CV6 0.24 0.45
0.07
CV7 0.30 -
0.14
CV8 0.23
CV9

Similarity indexes:

BV1 BV2 BV3 BV4 BV5 BV6 BV7 BV8 BV9 AV1 AV2 AV3 AV4 AV5 AV6 AV7
AV8 AV9 CV1 CV2 CV3 CV4 CV5 CV6 CV7 CV8 CV9

BV1 1.00 0.54 0.50 0.67 0.68 0.50 0.55 0.54 0.55 0.72 0.42 0.55 0.60 0.66 0.41 0.49 0.64
0.56 0.52 0.58 0.43 0.61 0.58 0.47 0.50 0.41 0.56
BV2 0.54 1.00 0.72 0.14 0.21 0.78 0.71 0.63 0.75 0.55 0.86 0.75 0.14 0.15 0.81 0.80 0.45
0.77 0.60 0.41 0.69 0.59 0.57 0.64 0.76 0.74 0.51
BV3 0.50 0.72 1.00 0.50 0.89 0.70 0.60 0.52 0.53 0.37 0.63 0.99 0.41 0.30 0.80 0.64 0.67
0.43 0.60 0.54 0.77 0.53 0.64 0.80 0.73 0.78 0.47
BV4 0.67 0.14 0.50 1.00 1.00 0.32 0.38 0.48 0.44 0.70 0.16 0.54 0.97 0.97 0.18 0.20 0.76
0.36 0.59 0.70 0.26 0.62 0.72 0.24 0.38 0.27 0.59
BV5 0.68 0.21 0.89 1.00 1.00 0.46 0.45 0.57 0.61 0.67 0.23 0.77 0.91 0.91 0.34 0.34 0.83
0.42 0.48 0.65 0.49 0.60 0.59 0.58 0.52 0.46 0.63
BV6 0.50 0.78 0.70 0.32 0.46 1.00 0.67 0.83 0.96 0.44 0.70 0.53 0.41 0.10 0.85 0.64 0.67
0.86 0.60 0.61 0.64 0.39 0.48 0.85 0.67 0.83 0.54
BV7 0.55 0.71 0.60 0.38 0.45 0.67 1.00 0.51 0.81 0.59 0.57 0.56 0.54 0.62 0.49 0.61 0.52
0.59 0.62 0.54 0.67 0.74 0.70 0.56 0.83 0.61 0.48
BV8 0.54 0.63 0.52 0.48 0.57 0.83 0.51 1.00 0.81 0.51 0.59 0.47 0.38 0.42 0.71 0.55 0.81
0.65 0.69 0.65 0.63 0.79 0.72 0.63 0.35 0.81 0.62
BV9 0.55 0.75 0.53 0.44 0.61 0.96 0.81 0.81 1.00 0.62 0.78 0.51 0.35 0.41 0.81 0.60 0.80
0.99 0.64 0.59 0.67 0.56 0.64 0.76 0.70 0.95 0.58
AV1 0.72 0.55 0.37 0.70 0.67 0.44 0.59 0.51 0.62 1.00 0.42 0.55 0.70 0.85 0.28 0.58 0.75
0.64 0.46 0.55 0.45 0.65 0.55 0.40 0.53 0.45 0.62
AV2 0.42 0.86 0.63 0.16 0.23 0.70 0.57 0.59 0.78 0.42 1.00 0.72 0.02 0.08 0.91 0.83 0.35
0.81 0.53 0.46 0.74 0.38 0.62 0.62 0.64 0.78 0.56
AV3 0.55 0.75 0.99 0.54 0.77 0.53 0.56 0.47 0.51 0.55 0.72 1.00 0.44 0.31 0.81 0.84 0.52
0.66 0.64 0.52 0.74 0.48 0.56 0.81 0.70 0.85 0.43
AV4 0.60 0.14 0.41 0.97 0.91 0.41 0.54 0.38 0.35 0.70 0.02 0.44 1.00 1.00 0.04 0.20 0.60
0.20 0.43 0.56 0.26 0.62 0.29 0.24 0.38 0.15 0.35
AV5 0.66 0.15 0.30 0.97 0.91 0.10 0.62 0.42 0.41 0.85 0.08 0.31 1.00 1.00 0.02 0.17 0.64
0.25 0.37 0.53 0.31 0.70 0.48 0.09 0.36 0.10 0.43
AV6 0.41 0.81 0.80 0.18 0.34 0.85 0.49 0.71 0.81 0.28 0.91 0.81 0.04 0.02 1.00 0.73 0.61
0.88 0.59 0.52 0.73 0.30 0.66 0.73 0.62 0.90 0.67

AV7 0.49 0.80 0.64 0.20 0.34 0.64 0.61 0.55 0.60 0.58 0.83 0.84 0.20 0.17 0.73 1.00 0.36 0.81 0.56 0.42 0.66 0.42 0.28 0.78 0.73 0.77 0.53
AV8 0.64 0.45 0.67 0.76 0.83 0.67 0.52 0.81 0.80 0.75 0.35 0.52 0.60 0.64 0.61 0.36 1.00 0.83 0.50 0.62 0.49 0.71 0.79 0.47 0.52 0.66 0.71
AV9 0.56 0.77 0.43 0.36 0.42 0.86 0.59 0.65 0.99 0.64 0.81 0.66 0.20 0.25 0.88 0.81 0.83 1.00 0.52 0.53 0.48 0.44 0.46 0.66 0.59 0.90 0.60
CV1 0.52 0.60 0.60 0.59 0.48 0.60 0.62 0.69 0.64 0.46 0.53 0.64 0.43 0.37 0.59 0.56 0.50 0.52 1.00 0.51 0.67 0.62 0.62 0.65 0.62 0.75 0.47
CV2 0.58 0.41 0.54 0.70 0.65 0.61 0.54 0.65 0.59 0.55 0.46 0.52 0.56 0.53 0.52 0.42 0.62 0.53 0.51 1.00 0.42 0.60 0.62 0.45 0.42 0.57 0.61
CV3 0.43 0.69 0.77 0.26 0.49 0.64 0.67 0.63 0.67 0.45 0.74 0.74 0.26 0.31 0.73 0.66 0.49 0.48 0.67 0.42 1.00 0.61 0.80 0.67 0.78 0.72 0.47
CV4 0.61 0.59 0.53 0.62 0.60 0.39 0.74 0.79 0.56 0.65 0.38 0.48 0.62 0.70 0.30 0.42 0.71 0.44 0.62 0.60 0.61 1.00 0.85 0.49 0.56 0.41 0.48
CV5 0.58 0.57 0.64 0.72 0.59 0.48 0.70 0.72 0.64 0.55 0.62 0.56 0.29 0.48 0.66 0.28 0.79 0.46 0.62 0.62 0.80 0.85 1.00 0.45 0.57 0.57 0.57
CV6 0.47 0.64 0.80 0.24 0.58 0.85 0.56 0.63 0.76 0.40 0.62 0.81 0.24 0.09 0.73 0.78 0.47 0.66 0.65 0.45 0.67 0.49 0.45 1.00 0.69 0.86 0.55
CV7 0.50 0.76 0.73 0.38 0.52 0.67 0.83 0.35 0.70 0.53 0.64 0.70 0.38 0.36 0.62 0.73 0.52 0.59 0.62 0.42 0.78 0.56 0.57 0.69 1.00 0.73 0.42
CV8 0.41 0.74 0.78 0.27 0.46 0.83 0.61 0.81 0.95 0.45 0.78 0.85 0.15 0.10 0.90 0.77 0.66 0.90 0.75 0.57 0.72 0.41 0.57 0.86 0.73 1.00 0.67
CV9 0.56 0.51 0.47 0.59 0.63 0.54 0.48 0.62 0.58 0.62 0.56 0.43 0.35 0.43 0.67 0.53 0.71 0.60 0.47 0.61 0.47 0.48 0.57 0.55 0.42 0.67 1.00

Classification at level : 1 : (AV4 AV5) similarity : 0.998964

Classification at level : 2 : (BV4 BV5) similarity : 0.995367

Classification at level : 3 : (BV3 AV3) similarity : 0.992914

Classification at level : 4 : (BV9 AV9) similarity : 0.991523

Classification at level : 5 : (BV6 (BV9 AV9)) similarity : 0.930549

Classification at level : 6 : (AV2 AV6) similarity : 0.910167

Classification at level : 7 : ((BV4 BV5) (AV4 AV5)) similarity : 0.895305

Classification at level : 8 : (CV6 CV8) similarity : 0.862249

Classification at level : 9 : (CV4 CV5) similarity : 0.853884

Classification at level : 10 : (BV7 CV7) similarity : 0.827943

Classification at level : 11 : (BV8 AV8) similarity : 0.81389

Classification at level : 12 : (BV2 AV7) similarity : 0.798285

Classification at level : 13 : ((BV6 (BV9 AV9)) (CV6 CV8)) similarity : 0.721983

Classification at level : 14 : (BV1 AV1) similarity : 0.720011

Classification at level : 15 : (CV1 CV3) similarity : 0.671973

Classification at level : 16 : (CV2 CV9) similarity : 0.611592

Classification at level : 17 : ((BV2 AV7) (AV2 AV6)) similarity : 0.540055

Classification at level : 18 : ((BV3 AV3) ((BV4 BV5) (AV4 AV5))) similarity : 0.402544

Classification at level : 19 : ((CV1 CV3) (CV4 CV5)) similarity : 0.400391

Classification at level : 20 : ((BV1 AV1) (BV8 AV8)) similarity : 0.311405

Classification at level : 21 : ((BV7 CV7) ((CV1 CV3) (CV4 CV5))) similarity : 0.132582

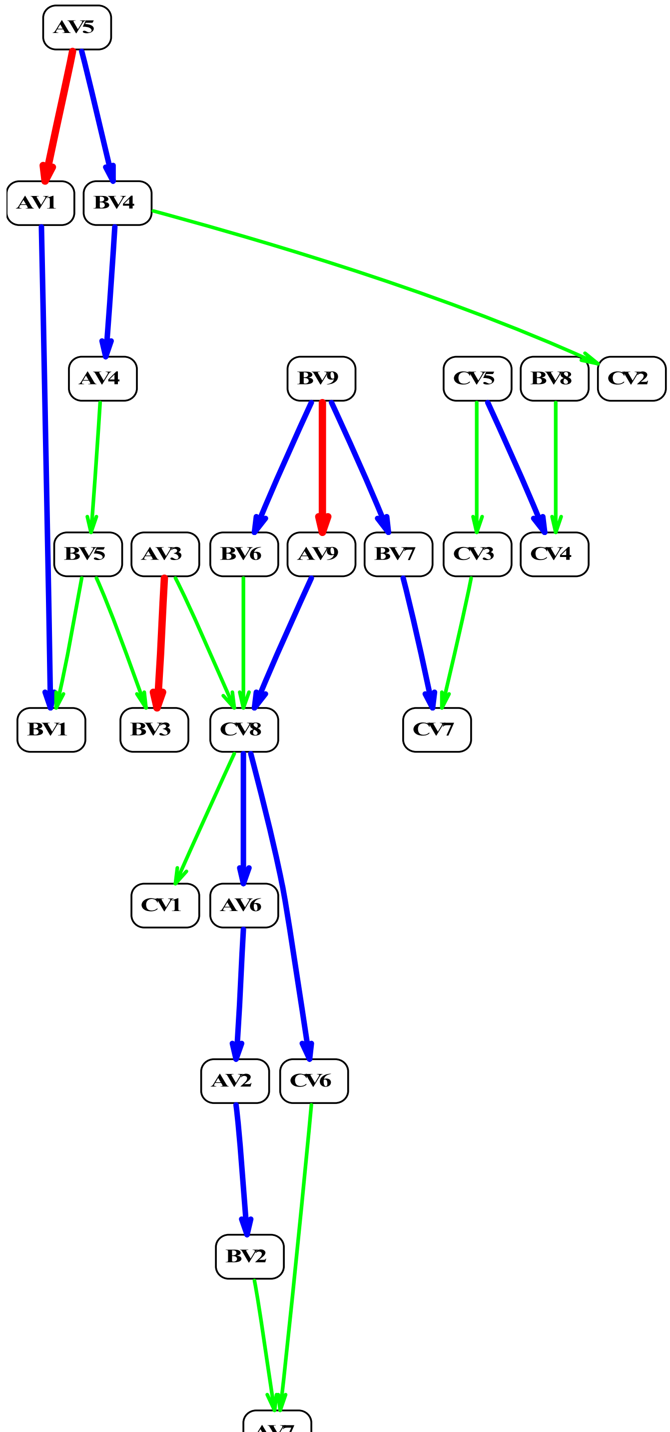
Classification at level : 22 : (((BV2 AV7) (AV2 AV6)) ((BV6 (BV9 AV9)) (CV6 CV8))) similarity : 0.115112

Classification at level : 23 : (((BV1 AV1) (BV8 AV8)) (CV2 CV9)) similarity : 0.0633098

The most significant node is at level : 22

Significant nodes
at level: 1
at level: 5
at level: 7
at level: 13
at level: 17
at level: 19
at level: 22

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ BAC



Graph : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΛΕΚΤΙΚ 99 95 90 85 ΕΙΣ BAC.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ BAC

nb col : 27, nb lig : 65

	Occurrence	Average	Standard deviations:
BV1	: 60.00	0.92	0.27
BV2	: 48.00	0.74	0.44
BV3	: 39.00	0.60	0.49
BV4	: 30.00	0.46	0.50
BV5	: 34.00	0.52	0.50
BV6	: 39.00	0.60	0.49
BV7	: 51.00	0.78	0.41
BV8	: 33.00	0.51	0.50
BV9	: 36.00	0.55	0.50
AV1	: 53.00	0.82	0.39
AV2	: 47.00	0.72	0.45
AV3	: 36.00	0.55	0.50
AV4	: 30.00	0.46	0.50
AV5	: 25.00	0.38	0.49
AV6	: 46.00	0.71	0.45
AV7	: 50.00	0.77	0.42
AV8	: 43.00	0.66	0.47
AV9	: 38.00	0.58	0.49
CV1	: 56.00	0.86	0.35
CV2	: 59.00	0.91	0.29
CV3	: 50.00	0.77	0.42
CV4	: 51.00	0.78	0.41
CV5	: 42.00	0.65	0.48
CV6	: 46.00	0.71	0.45
CV7	: 51.00	0.78	0.41
CV8	: 45.00	0.69	0.46
CV9	: 54.00	0.83	0.37

Correlation indexes:
BV1 BV2 BV3 BV4 BV5 BV6 BV7 BV8 BV9 AV1 AV2 AV3 AV4 AV5 AV6 AV7 AV8 AV9 CV1 CV2 CV3 CV4 CV5 CV6 CV7 CV8 CV9

BV1 0.09 0.00 0.27 0.30 0.00 0.13 0.06 0.09 0.61 -0.180.09 0.15 0.23 -0.19-0.020.28 0.11 0.05 0.31 -0.160.27 0.15 -0.06-0.01-0.190.18
BV2 0.23 -0.36-0.290.30 0.28 0.11 0.24 0.08 0.49 0.24 -0.36-0.320.39 0.42 -0.060.28 0.17 -0.190.26 0.11 0.07 0.16 0.37 0.29 0.01
BV3 0.00 0.35 0.17 0.11 0.01 0.03 -0.150.13 0.72 -0.06-0.130.30 0.15 0.15 -0.050.13 0.07 0.30 0.03 0.12 0.30 0.26 0.27 -0.03
BV4 0.64 -0.13-0.12-0.01-0.040.20 -0.320.02 0.44 0.41 -0.29-0.300.21 -0.100.10 0.30 -0.230.11 0.17 -0.22-0.12-0.190.09
BV5 -0.03-0.050.05 0.07 0.18 -0.250.20 0.33 0.31 -0.14-0.160.29 -0.05-0.030.23 -0.010.10 0.07 0.06 0.02 -0.040.14
BV6 0.18 0.26 0.53 -0.060.20 0.03 -0.06-0.320.37 0.15 0.15 0.33 0.13 0.17 0.15 -0.12-0.010.37 0.18 0.34 0.05
BV7 0.01 0.36 0.14 0.09 0.06 0.03 0.11 -0.010.16 0.02 0.09 0.22 0.09 0.25 0.36 0.24 0.07 0.54 0.14 -0.04
BV8 0.23 0.01 0.08 -0.02-0.08-0.040.18 0.04 0.27 0.11 0.23 0.22 0.12 0.31 0.17 0.11 -0.140.28 0.13
BV9 0.13 0.27 0.00 -0.10-0.050.31 0.10 0.27 0.69 0.18 0.14 0.17 0.06 0.11 0.24 0.21 0.54 0.09
AV1 -0.120.05 0.20 0.38 -0.310.12 0.33 0.16 -0.080.12 -0.070.23 0.06 -0.130.04 -0.060.21
AV2 0.21 -0.67-0.430.58 0.48 -0.150.32 0.05 -0.080.31 -0.160.12 0.13 0.18 0.33 0.09

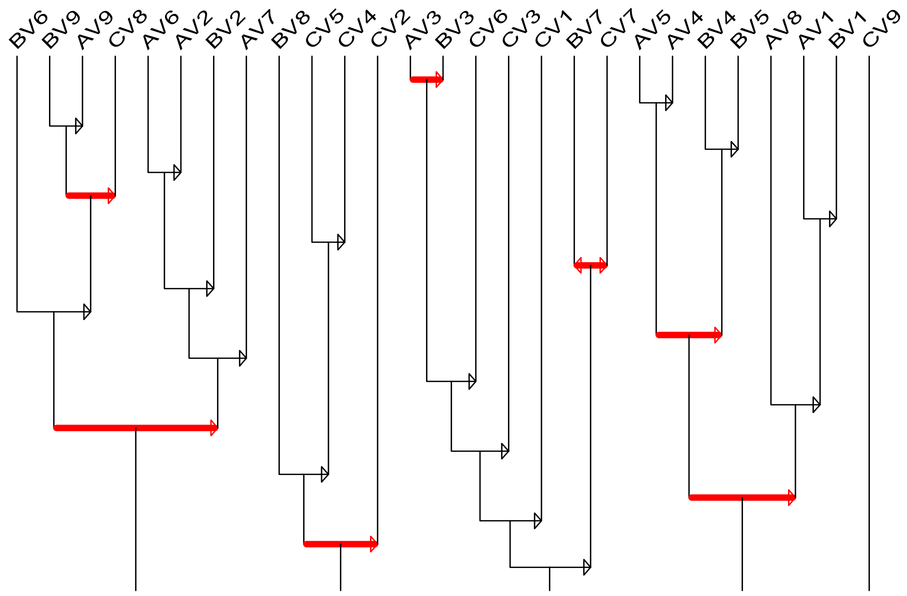
AV3 -0.04-0.120.31 0.39 0.01 0.12 0.18 0.03 0.24 -
0.020.05 0.31 0.21 0.34 -0.07
AV4 0.66 -0.56-0.300.08 -0.22-0.080.08 -0.230.11 -
0.15-0.22-0.12-0.32-0.16
AV5 -0.60-0.320.10 -0.17-0.140.03 -0.170.18 -
0.01-0.40-0.12-0.36-0.06
AV6 0.29 0.11 0.42 0.13 0.03 0.29 -0.250.16
0.26 0.16 0.52 0.25
AV7 -0.160.35 0.10 -0.170.22 -0.11-
0.250.37 0.33 0.35 0.04
AV8 0.32 -0.000.22 -0.010.26 0.29 -
0.030.02 0.16 0.28
AV9 0.02 0.05 -0.02-0.06-0.040.14
0.09 0.45 0.12
CV1 0.03 0.31 0.22 0.17 0.23
0.22 0.41 -0.06
CV2 -0.170.22 0.21 -0.09-
0.170.13 0.28
CV3 0.16 0.36 0.21 0.42
0.27 -0.05
CV4 0.47 -0.010.09 -
0.11-0.04
CV5 -0.050.08 0.06
0.10
CV6 0.24 0.45
0.07
CV7 0.30 -
0.14
CV8 0.23
CV9

Implicative indexes: (according to the classic theory)
Computation with poisson law
BV1 BV2 BV3 BV4 BV5 BV6 BV7 BV8 BV9 AV1 AV2 AV3 AV4 AV5 AV6 AV7
AV8 AV9 CV1 CV2 CV3 CV4 CV5 CV6 CV7 CV8 CV9

BV1 0 50 45 62 64 45 53 49 51 86 31 51 55 58 31 41 64 52 45 65
32 64 55 40 42 31 56
BV2 50 0 72 13 17 80 81 58 73 53 95 73 13 18 89 92 36 77 65 16
77 58 53 64 89 80 43
BV3 35 80 0 44 88 69 60 46 47 19 64 100 36 30 88 68 67 36 63 49
88 46 62 88 84 85 34
BV4 90 3 42 0 100 23 20 41 37 80 4 47 96 92 6 5 79 27 60 94 9
63 73 11 20 14 57
BV5 93 7 93 99 0 39 31 51 55 75 10 75 87 83 20 17 89 34 33 82
39 60 54 53 45 36 68
BV6 35 88 69 28 40 0 73 80 98 30 75 47 36 13 94 68 67 88 63 70
68 23 41 94 73 91 49
BV7 55 78 56 34 39 65 0 46 81 60 55 51 48 55 42 63 46 55 71 51
74 86 72 52 96 60 36
BV8 47 63 45 42 51 85 42 0 80 41 56 40 33 38 75 49 87 61 83 81
64 92 73 63 18 88 66
BV9 52 83 47 39 55 99 95 77 0 65 87 44 31 38 90 59 86 100 73 64
72 51 62 82 79 100 57
AV1 98 52 30 64 63 38 59 46 58 0 31 50 64 76 15 56 79 61 32 54
34 70 51 29 47 37 67
AV2 16 96 60 15 19 69 56 54 77 26 0 70 3 11 98 96 25 82 47 27
85 22 59 62 68 85 54
AV3 52 83 100 47 73 47 51 41 44 50 78 0 39 30 90 97 44 63 73 43
83 37 51 90 79 92 27

AV4 67 3 32 96 90 32 47 31 27 80 0 37 0 100 0 5 56 13 24 52 9 63 18 11 20 5 14
AV5 85 4 21 96 91 5 62 35 33 99 1 23 100 0 0 3 61 17 14 41 13 79 39 2 18 3 25
AV6 15 91 82 17 28 88 41 66 81 9 99 81 5 5 0 83 59 91 61 42 83 13 66 79 66 97 79
AV7 34 90 62 19 28 62 63 50 55 57 93 85 19 19 79 0 26 82 54 18 71 29 18 86 84 84 47
AV8 84 34 65 70 81 65 45 78 80 90 22 46 54 56 60 20 0 85 39 76 41 82 83 38 45 67 85
AV9 56 87 35 32 36 89 57 60 100 70 90 62 18 25 96 94 89 0 43 47 38 31 37 67 57 98 62
CV1 43 60 56 54 43 56 66 64 61 34 48 61 39 35 57 53 44 47 0 41 74 66 60 67 66 81 35
CV2 66 29 49 65 61 58 50 60 55 53 37 47 51 48 46 29 62 49 43 0 29 62 61 37 29 55 67
CV3 19 75 78 24 43 62 75 58 64 32 81 72 24 30 79 71 43 42 82 18 0 63 84 70 91 76 34
CV4 75 57 48 56 55 31 86 76 51 72 25 42 56 62 17 29 74 38 71 69 63 0 91 42 54 31 36
CV5 63 54 61 66 53 42 80 67 60 51 61 51 26 44 68 11 84 39 69 74 92 98 0 35 55 53 57
CV6 28 66 82 22 52 88 53 58 74 24 62 81 22 12 79 90 39 63 76 25 73 41 37 0 77 94 52
CV7 36 86 73 34 47 65 96 31 67 47 65 67 34 34 63 83 46 55 71 20 90 54 54 73 0 79 25
CV8 14 83 79 25 40 86 63 78 96 32 87 85 14 14 98 89 66 93 95 60 81 27 53 95 85 0 77
CV9 60 44 41 53 58 49 38 57 54 66 53 38 32 40 71 48 74 56 34 73 37 38 54 51 28 69 0

ΙΕΡΑΡΧΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ BAC



Herarchical tree : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\Pantsidis-analysis\ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ BAC.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΙΕΡΑΡΧΙΚΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ BAC

nb col : 27, nb lig : 65

	Occurrence	Average	Standard deviations:
BV1	: 60.00	0.92	0.27
BV2	: 48.00	0.74	0.44
BV3	: 39.00	0.60	0.49
BV4	: 30.00	0.46	0.50
BV5	: 34.00	0.52	0.50
BV6	: 39.00	0.60	0.49
BV7	: 51.00	0.78	0.41
BV8	: 33.00	0.51	0.50
BV9	: 36.00	0.55	0.50
AV1	: 53.00	0.82	0.39
AV2	: 47.00	0.72	0.45
AV3	: 36.00	0.55	0.50
AV4	: 30.00	0.46	0.50
AV5	: 25.00	0.38	0.49
AV6	: 46.00	0.71	0.45
AV7	: 50.00	0.77	0.42
AV8	: 43.00	0.66	0.47
AV9	: 38.00	0.58	0.49
CV1	: 56.00	0.86	0.35
CV2	: 59.00	0.91	0.29
CV3	: 50.00	0.77	0.42
CV4	: 51.00	0.78	0.41
CV5	: 42.00	0.65	0.48
CV6	: 46.00	0.71	0.45
CV7	: 51.00	0.78	0.41
CV8	: 45.00	0.69	0.46
CV9	: 54.00	0.83	0.37

Correlation indexes:

BV1 BV2 BV3 BV4 BV5 BV6 BV7 BV8 BV9 AV1 AV2 AV3 AV4 AV5 AV6 AV7 AV8 AV9 CV1 CV2 CV3 CV4 CV5 CV6 CV7 CV8 CV9

BV1 0.09 0.00 0.27 0.30 0.00 0.13 0.06 0.09 0.61 -0.180.09 0.15 0.23 -0.19-0.020.28 0.11 0.05 0.31 -0.160.27 0.15 -0.06-0.01-0.190.18

BV2 0.23 -0.36-0.290.30 0.28 0.11 0.24 0.08 0.49 0.24 -0.36-0.320.39 0.42 -0.060.28 0.17 -0.190.26 0.11 0.07 0.16 0.37 0.29 0.01

BV3 0.00 0.35 0.17 0.11 0.01 0.03 -0.150.13 0.72 -0.06-0.130.30 0.15 0.15 -0.050.13 0.07 0.30 0.03 0.12 0.30 0.26 0.27 -0.03

BV4 0.64 -0.13-0.12-0.01-0.040.20 -0.320.02 0.44 0.41 -0.29-0.300.21 -0.100.10 0.30 -0.230.11 0.17 -0.22-0.12-0.190.09

BV5 -0.03-0.050.05 0.07 0.18 -0.250.20 0.33 0.31 -0.14-0.160.29 -0.05-0.030.23 -0.010.10 0.07 0.06 0.02 -0.040.14

BV6 0.18 0.26 0.53 -0.060.20 0.03 -0.06-0.320.37 0.15 0.15 0.33 0.13 0.17 0.15 -0.12-0.010.37 0.18 0.34 0.05

BV7 0.01 0.36 0.14 0.09 0.06 0.03 0.11 -0.010.16 0.02 0.09 0.22 0.09 0.25 0.36 0.24 0.07 0.54 0.14 -0.04

BV8 0.23 0.01 0.08 -0.02-0.08-0.040.18 0.04 0.27 0.11 0.23 0.22 0.12 0.31 0.17 0.11 -0.140.28 0.13

BV9 0.13 0.27 0.00 -0.10-0.050.31 0.10 0.27 0.69 0.18 0.14 0.17 0.06 0.11 0.24 0.21 0.54 0.09

AV1 -0.120.05 0.20 0.38 -0.310.12 0.33 0.16 -0.080.12 -
0.070.23 0.06 -0.130.04 -0.060.21
AV2 0.21 -0.67-0.430.58 0.48 -0.150.32 0.05 -0.080.31 -
0.160.12 0.13 0.18 0.33 0.09
AV3 -0.04-0.120.31 0.39 0.01 0.12 0.18 0.03 0.24 -
0.020.05 0.31 0.21 0.34 -0.07
AV4 0.66 -0.56-0.300.08 -0.22-0.080.08 -0.230.11 -
0.15-0.22-0.12-0.32-0.16
AV5 -0.60-0.320.10 -0.17-0.140.03 -0.170.18 -
0.01-0.40-0.12-0.36-0.06
AV6 0.29 0.11 0.42 0.13 0.03 0.29 -0.250.16
0.26 0.16 0.52 0.25
AV7 -0.160.35 0.10 -0.170.22 -0.11-
0.250.37 0.33 0.35 0.04
AV8 0.32 -0.000.22 -0.010.26 0.29 -
0.030.02 0.16 0.28
AV9 0.02 0.05 -0.02-0.06-0.040.14
0.09 0.45 0.12
CV1 0.03 0.31 0.22 0.17 0.23
0.22 0.41 -0.06
CV2 -0.170.22 0.21 -0.09-
0.170.13 0.28
CV3 0.16 0.36 0.21 0.42
0.27 -0.05
CV4 0.47 -0.010.09 -
0.11-0.04
CV5 -0.050.08 0.06
0.10
CV6 0.24 0.45
0.07
CV7 0.30 -
0.14
CV8 0.23
CV9

Cohesitive indexes: (according to the classic theory)
Computation with poisson law

BV1 BV2 BV3 BV4 BV5 BV6 BV7 BV8 BV9 AV1 AV2 AV3 AV4 AV5 AV6 AV7
AV8 AV9 CV1 CV2 CV3 CV4 CV5 CV6 CV7 CV8 CV9

BV1 0 0.01 0 0.27 0.34 0 0.07 0 0.02 0.81 0 0.02 0.11 0.20 0 0 0.34 0.05 0
0.35 0 0.33 0.12 0 0 0 0.15
BV2 0.01 0 0.53 0 0 0.69 0.71 0.19 0.54 0.06 0.96 0.54 0 0 0.87 0.92 0 0.64 0.36
0 0.64 0.20 0.07 0.34 0.87 0.69 0
BV3 0 0.69 0 0 0.86 0.45 0.24 0 0 0 0.33 1.00 0 0 0.85 0.42 0.40 0 0.30 0
0.86 0 0.29 0.85 0.78 0.78 0
BV4 0.88 0 0 0 1.00 0 0 0 0 0.70 0 0 0.97 0.92 0 0 0.68 0 0.23 0.94 0
0.30 0.54 0 0 0 0.17
BV5 0.93 0 0.92 1.00 0 0 0 0.02 0.12 0.59 0 0.58 0.83 0.76 0 0 0.86 0 0
0.73 0 0.23 0.10 0.08 0 0 0.43
BV6 0 0.85 0.45 0 0 0 0.55 0.69 0.99 0 0.58 0 0 0 0.94 0.42 0.40 0.85 0.30
0.47 0.42 0 0 0.94 0.55 0.90 0
BV7 0.12 0.64 0.16 0 0 0.36 0 0 0.72 0.23 0.12 0.02 0 0.12 0 0.31 0 0.11 0.49
0.02 0.56 0.80 0.51 0.06 0.97 0.25 0
BV8 0 0.31 0 0 0.02 0.79 0 0 0.68 0 0.15 0 0 0 0.58 0 0.83 0.27 0.76 0.71
0.33 0.92 0.54 0.30 0 0.85 0.37
BV9 0.06 0.75 0 0 0.12 1.00 0.96 0.64 0 0.36 0.83 0 0 0 0.88 0.21 0.81 1.00 0.55
0.35 0.52 0.03 0.29 0.74 0.66 1.00 0.17

AV1 0.99 0.05 0 0.33 0.30 0 0.21 0 0.19 0 0 0 0.33 0.61 0 0.15 0.67 0.27 0
0.10 0 0.48 0.02 0 0 0 0.41
AV2 0 0.97 0.25 0 0 0.45 0.14 0.09 0.63 0 0 0.46 0 0 0.99 0.97 0 0.73 0 0
0.79 0 0.23 0.28 0.43 0.80 0.10
AV3 0.06 0.75 1.00 0 0.55 0 0.03 0 0 0 0.64 0 0 0 0.88 0.98 0 0.32 0.55 0
0.76 0 0.02 0.88 0.66 0.92 0
AV4 0.41 0 0 0.97 0.89 0 0 0 0 0.70 0 0 0 1.00 0 0 0.15 0 0 0.06 0
0.30 0 0 0 0 0
AV5 0.80 0 0 0.97 0.89 0 0.30 0 0 1.00 0 0 1.00 0 0 0 0.26 0 0 0 0
0.66 0 0 0 0 0
AV6 0 0.90 0.73 0 0 0.84 0 0.39 0.71 0 1.00 0.71 0 0 0 0.75 0.22 0.89 0.27 0
0.75 0 0.38 0.66 0.37 0.98 0.67
AV7 0 0.89 0.28 0 0 0.28 0.32 0 0.13 0.18 0.94 0.79 0 0 0.67 0 0 0.74 0.09 0
0.51 0 0 0.81 0.78 0.77 0
AV8 0.78 0 0.35 0.47 0.71 0.35 0 0.66 0.69 0.88 0 0 0.10 0.15 0.24 0 0 0.79 0
0.60 0 0.73 0.75 0 0 0.40 0.79
AV9 0.14 0.82 0 0 0 0.87 0.17 0.23 1.00 0.48 0.88 0.30 0 0 0.98 0.94 0.87 0 0 0
0 0 0 0.41 0.17 0.99 0.29
CV1 0 0.24 0.15 0.09 0 0.15 0.38 0.34 0.25 0 0 0.25 0 0 0.17 0.07 0 0 0 0
0.57 0.38 0.25 0.39 0.38 0.72 0
CV2 0.39 0 0 0.35 0.26 0.18 0.01 0.24 0.12 0.07 0 0 0.02 0 0 0 0.28 0 0 0
0 0.28 0.25 0 0 0.11 0.39
CV3 0 0.60 0.65 0 0 0.28 0.58 0.18 0.33 0 0.72 0.51 0 0 0.67 0.51 0 0 0.73 0
0 0.32 0.78 0.47 0.90 0.61 0
CV4 0.59 0.18 0 0.15 0.13 0 0.80 0.61 0.02 0.52 0 0 0.15 0.29 0 0 0.56 0 0.49
0.45 0.31 0 0.90 0 0.09 0 0
CV5 0.30 0.09 0.26 0.38 0.08 0 0.69 0.41 0.24 0.03 0.27 0.02 0 0 0.43 0 0.77 0
0.45 0.57 0.92 0.99 0 0 0.12 0.07 0.16
CV6 0 0.37 0.73 0 0.06 0.84 0.07 0.20 0.57 0 0.29 0.71 0 0 0.66 0.89 0 0.31 0.61
0 0.54 0 0 0 0.63 0.95 0.04
CV7 0 0.80 0.55 0 0 0.36 0.97 0 0.41 0 0.37 0.41 0 0 0.31 0.75 0 0.11 0.49 0
0.88 0.09 0.09 0.53 0 0.66 0
CV8 0 0.75 0.68 0 0 0.81 0.31 0.64 0.97 0 0.84 0.79 0 0 0.99 0.87 0.38 0.93 0.95
0.23 0.72 0 0.06 0.96 0.79 0 0.63
CV9 0.23 0 0 0.07 0.20 0 0 0.17 0.08 0.39 0.07 0 0 0 0.49 0 0.55 0.15 0
0.55 0 0 0.10 0.03 0 0.44 0

Classification at level : 1 : (AV3 BV3) cohesion : 1

Classification at level : 2 : (AV5 AV4) cohesion : 1

Classification at level : 3 : (BV9 AV9) cohesion : 1

Classification at level : 4 : (BV4 BV5) cohesion : 1

Classification at level : 5 : (AV6 AV2) cohesion : 0.995

Classification at level : 6 : ((BV9 AV9) CV8) cohesion : 0.995

Classification at level : 7 : (AV1 BV1) cohesion : 0.992

Classification at level : 8 : (CV5 CV4) cohesion : 0.99

Classification at level : 9 : (BV7 CV7) cohesion : 0.973

Classification at level : 10 : ((AV6 AV2) BV2) cohesion : 0.956

Classification at level : 11 : (BV6 ((BV9 AV9) CV8)) cohesion : 0.953

Classification at level : 12 : ((AV5 AV4) (BV4 BV5)) cohesion : 0.953

Classification at level : 13 : (((AV6 AV2) BV2) AV7) cohesion : 0.915

Classification at level : 14 : ((AV3 BV3) CV6) cohesion : 0.909

Classification at level : 15 : (AV8 (AV1 BV1)) cohesion : 0.878

Classification at level : 16 : ((BV6 ((BV9 AV9) CV8)) (((AV6 AV2) BV2) AV7)) cohesion : 0.818

Classification at level : 17 : (((AV3 BV3) CV6) CV3) cohesion : 0.803

Classification at level : 18 : (BV8 (CV5 CV4)) cohesion : 0.788

Classification at level : 19 : (((AV5 AV4) (BV4 BV5)) (AV8 (AV1 BV1))) cohesion : 0.714

Classification at level : 20 : ((((AV3 BV3) CV6) CV3) CV1) cohesion : 0.675

Classification at level : 21 : ((BV8 (CV5 CV4)) CV2) cohesion : 0.669

Classification at level : 22 : (((((AV3 BV3) CV6) CV3) CV1) (BV7 CV7)) cohesion : 0.484

The most significant node is at level : 1

Significant nodes
at level: 1
at level: 6
at level: 9
at level: 12
at level: 16
at level: 19
at level: 21

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Όνομα: ____ **Τάξη: _______**

Ημερομηνία Γέννησης:________________

Συγκρίνετε τα παρακάτω κλάσματα χρησιμοποιώντας το κατάλληλο σύμβολο (<, =, >) και βάζοντας κάθε φορά το μεγαλύτερο κλάσμα σε κύκλο ή και τα δύο σε κύκλο αν είναι ίσα.
Για παράδειγμα το 4 είναι μεγαλύτερο του 3 άρα 4 > 3 ,
το 5 είναι μικρότερο του 7 άρα 5 < 7 ,
το 6 είναι ίσο με το 6 άρα 6 = 6 .

1.) $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$

2.) $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{3}$

3.) $\frac{4}{5}$ $\frac{8}{10}$

4.) $\frac{2}{3}$ $\frac{7}{9}$

5.) $\frac{4}{7}$ $\frac{2}{5}$

6.) $\frac{3}{2}$ $\frac{8}{10}$

7.) $\frac{6}{7}$ 1

8.) $\frac{5}{4}$ 1

9.) $\frac{7}{4}$ $1\frac{3}{4}$

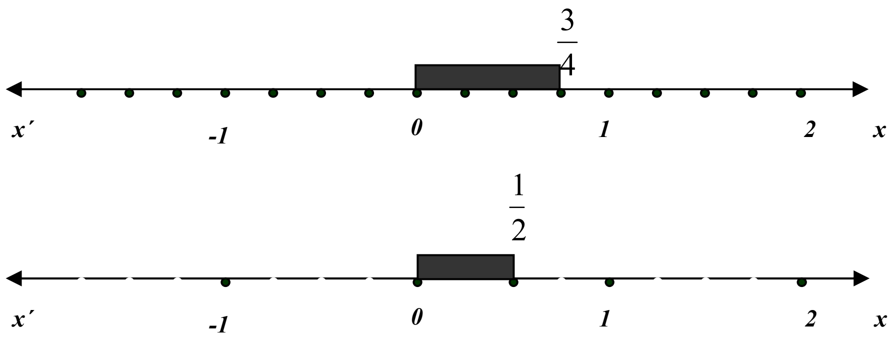
Όνομα: ____ **Τάξη:** _______

Ημερομηνία Γέννησης:________________

Εξηγείστε τις συγκρίσεις που κάνατε προηγουμένως με την βοήθεια αριθμητικών γραμμών όπως παρακάτω:

<u>Παράδειγμα</u>:

$\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$



<u>Συγκρίσεις</u> **<u>Εξηγήσεις</u>**

1.) $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$

2.) $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{3}$

3.) $\frac{4}{5}$ $\frac{8}{10}$

4.) $\frac{2}{3}$ $\frac{7}{9}$

5.) $\frac{4}{7}$ $\frac{2}{5}$

6.) $\frac{3}{2}$ $\frac{8}{10}$

7.) $\frac{6}{7}$ 1

8.) $\frac{5}{4}$ 1

9.) $\frac{7}{4}$ $1\frac{3}{4}$

Όνομα: ____ **Τάξη: _______**

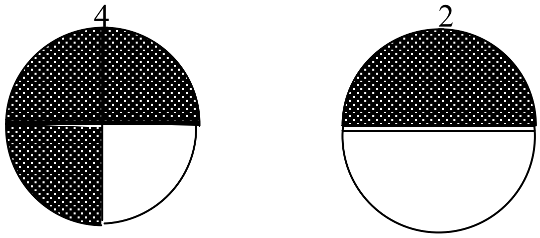
Ημερομηνία Γέννησης:_______________

Εξηγείστε τις συγκρίσεις που κάνατε προηγουμένως με την βοήθεια παραστάσεων με κύκλους όπως παρακάτω:

Παράδειγμα:

$\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$

$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$



Συγκρίσεις **Εξηγήσεις**

1.) $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$

2.) $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{3}$

3.) $\frac{4}{5}$ $\frac{8}{10}$

4.) $\frac{2}{3}$ $\frac{7}{9}$

5.) $\frac{4}{7}$ $\frac{2}{5}$

6.) $\frac{3}{2}$ $\frac{8}{10}$

7.) $\frac{6}{7}$ 1

8.) $\frac{5}{4}$ 1

9.) $\frac{7}{4}$ $1\frac{3}{4}$

Όνομα: ____ **Τάξη: _______**

Ημερομηνία Γέννησης:________________

Εξηγείστε τις συγκρίσεις που κάνατε προηγουμένως.

Συγκρίσεις **Εξηγήσεις**

1.) $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$ …………………………………………………………………….

……..……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

2.) $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{3}$ …………………………………………………………………….

……………………………………………………………………...

3.) $\frac{4}{5}$ $\frac{8}{10}$ ………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………..

4.) $\frac{2}{3}$ $\frac{7}{9}$ ……………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………..

5.) $\frac{4}{7}$ $\frac{2}{5}$ ………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

6.) $\frac{3}{2}$ $\frac{8}{10}$ ……………………………………………………………………...

……………………………………………………………………..

7.) $\frac{6}{7}$ 1 ……………………………………………………………………..

………………………………………………………………………

8.) $\frac{5}{4}$ 1 ……………………………………………………………………..

……………………………………………………………………...

9.) $\frac{7}{4}$ $1\frac{3}{4}$ ……………………………………………………………………...

……………………………………………………………………...

Όνομα: ______________________________________ **Τάξη:** _______

Ημερομηνία Γέννησης:_______________

Συγκρίνετε τα παρακάτω κλάσματα χρησιμοποιώντας το κατάλληλο σύμβολο (<, =, >) και βάζοντας κάθε φορά το μεγαλύτερο κλάσμα σε κύκλο ή και τα δύο σε κύκλο αν είναι ίσα.
Για παράδειγμα το 4 είναι μεγαλύτερο του 3 άρα 4 > 3 ,
το 5 είναι μικρότερο του 7 άρα 5 < 7 ,
το 6 είναι ίσο με το 6 άρα 6 = 6 .

1.) $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{9}$

2.) $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{5}$

3.) $\frac{6}{8}$ $\frac{3}{4}$

4.) $\frac{3}{5}$ $\frac{7}{10}$

5.) $\frac{5}{9}$ $\frac{3}{7}$

6.) $\frac{9}{10}$ $\frac{3}{2}$

7.) 1 $\frac{7}{8}$

8.) $1\frac{3}{5}$ $\frac{8}{5}$

9.) $\frac{4}{3}$ 1