

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(τριγωνομετρικές ταυτότητες – αναγωγή στο 1° τεταρτημόριο – τριγωνομετρικές συναρτήσεις-τριγωνομετρικές εξισώσεις)

1. Αν $9\eta\mu^2 x + 3\eta\mu x - 2 = 0$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

i) Να βρείτε το $\eta\mu x$

ii) Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad

iii) Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης $A = \frac{\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{5}\eta\mu x}{\sigma\phi x - 5\varepsilon\phi x}$

2. Αν $9\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 0$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{9\sigma\upsilon\nu^2(x - \pi) - 3\sqrt{2}\eta\mu(\pi + x)}{4\sigma\phi(\pi + x) - \varepsilon\phi x}$$

3. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu 15^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 75^\circ + \sigma\upsilon\nu 15^\circ \cdot \eta\mu 75^\circ = 1$

ii) $\eta\mu 15^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 75^\circ - \sigma\upsilon\nu 15^\circ \cdot \eta\mu 75^\circ = 0$

iii) $\eta\mu \frac{\pi}{8} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{8} + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{8} \cdot \eta\mu \frac{3\pi}{8} = 1$

iv) $\eta\mu \frac{\pi}{8} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{8} - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{8} \cdot \eta\mu \frac{3\pi}{8} = 0$

4. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu 5^\circ + \eta\mu 10^\circ + \eta\mu 185^\circ + \eta\mu 190^\circ = 0$

ii) $\sigma\upsilon\nu 15^\circ + \sigma\upsilon\nu 20^\circ + \sigma\upsilon\nu 200^\circ + \sigma\upsilon\nu 165^\circ = 0$

iii) $\eta\mu \frac{\pi}{12} + \eta\mu \frac{\pi}{7} + \eta\mu \frac{13\pi}{12} + \eta\mu \frac{8\pi}{7} = 0$

iv) $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{24} + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{5} + \sigma\upsilon\nu \frac{6\pi}{5} + \sigma\upsilon\nu \frac{23\pi}{24} = 0$

5. Να αποδείξετε ότι:

i) $\varepsilon\phi 5^\circ \cdot \varepsilon\phi 35^\circ \cdot \varepsilon\phi 85^\circ \cdot \varepsilon\phi 55^\circ = 1$

ii) $\varepsilon\phi \frac{\pi}{8} \cdot \varepsilon\phi \frac{5\pi}{12} \cdot \varepsilon\phi \frac{3\pi}{8} = 1$

iii) $\frac{\sigma\upsilon\nu 20^\circ \cdot \eta\mu 10^\circ \cdot \varepsilon\phi 15^\circ}{\sigma\phi 75^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 80^\circ \cdot \eta\mu 70^\circ} = 1$

iv) $\frac{\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{8} \cdot \eta\mu \frac{7\pi}{12} \cdot \varepsilon\phi \frac{\pi}{12}}{\sigma\phi \frac{5\pi}{12} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{8} \cdot \eta\mu \frac{19\pi}{12}} = 1$

v) $\frac{\sigma\upsilon\nu 70^\circ - \eta\mu 200^\circ}{\sigma\phi 20^\circ \cdot \sigma\phi 70^\circ + \eta\mu 160^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 70^\circ} = \frac{2\eta\mu 20^\circ}{1 + \eta\mu^2 20^\circ}$

6. Να αποδείξετε ότι είναι ανεξάρτητη της γωνίας x rad η τιμή της παράστασης

$$A = \sigma\upsilon\nu(\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu(x - \pi) + \eta\mu(-x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2\eta\mu^2(x + \pi) + \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$$

7. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{\eta\mu(13\pi - x) \cdot \sigma\phi(3\pi - x) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)}{\varepsilon\phi\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \eta\mu(21\pi + x)}$ και $B = \frac{\sigma\phi\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu^2(8\pi - x)}{\varepsilon\phi\left(\frac{11\pi}{2} + x\right) \cdot \eta\mu(x - \pi)}$

Να αποδείξετε ότι:

i) $A = \sigma\upsilon\nu x$ και $B = \eta\mu x$ ii) $\frac{A^4 - A^2}{B^4 - B^2} = 1$ iii) $\frac{A}{B} + \frac{B}{1 + A} = \frac{1}{B}$

8. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \eta\mu^2 25^\circ + \eta\mu^2 65^\circ + \varepsilon\varphi 25^\circ \cdot \varepsilon\varphi 65^\circ \text{ και } B = \frac{\eta\mu(-x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \eta\mu(\pi + x)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \eta\mu^2(\pi - x)}$$

i) Να αποδείξετε ότι: $A = 2$ και $B = \frac{1}{\eta\mu x}$ ii) Να αποδείξετε ότι: $A \cdot \frac{\sigma\varphi^2 x}{2} - B^2 = -1$

iii) Αν $5A = B^2$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad

9. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \eta\mu 50^\circ + \sigma\upsilon\nu 220^\circ + \eta\mu 15^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 75^\circ - \sigma\upsilon\nu 165^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 15^\circ \text{ και}$$

$$B = \frac{\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(3\pi - x) \cdot \eta\mu(2\pi - x)}{\eta\mu(5\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu^2(-4\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

i) Να αποδείξετε ότι: $A = 1$ και $B = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$ ii) Να αποδείξετε ότι: $A - B = -\sigma\varphi^2 x$

iii) Αν $\frac{B}{(B - A)} - 10 = 0$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad

10. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha \eta\mu \omega x + \kappa$, με $\alpha, \omega, \kappa \in \mathbb{R}$ και περίοδο $T = 8\pi$.

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από τα σημεία $A(2\pi, -3)$ και $B(4\pi, -1)$

i) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, κ και ω

ii) Να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης f

iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 16\pi]$

11. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha \sigma\upsilon\nu \omega x + \kappa$, με $\alpha, \omega, \kappa \in \mathbb{R}$ και περίοδο $T = 4\pi$.

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(2\pi, -3)$ και $B(3\pi, 1)$

i) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί ω, κ και α

ii) Να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης f

iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 4\pi]$

12. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha \eta\mu \omega x + \kappa$, με $\alpha, \omega, \kappa \in \mathbb{R}$ και περίοδο $T = 8\pi$.

Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει στη θέση $x_0 = 6\pi$ μέγιστο τον αριθμό 2 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(4\pi, 1)$

i) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί ω, κ και α ii) Να βρεθεί το ελάχιστο της συνάρτησης f

iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 16\pi]$

13. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha \sigma\upsilon\nu \omega x + \kappa$, με $\alpha, \omega, \kappa \in \mathbb{R}$ και περίοδο $T = 8\pi$.

Αν $\max f(x) = 5$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(4\pi, -1)$

i) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί ω, κ και α

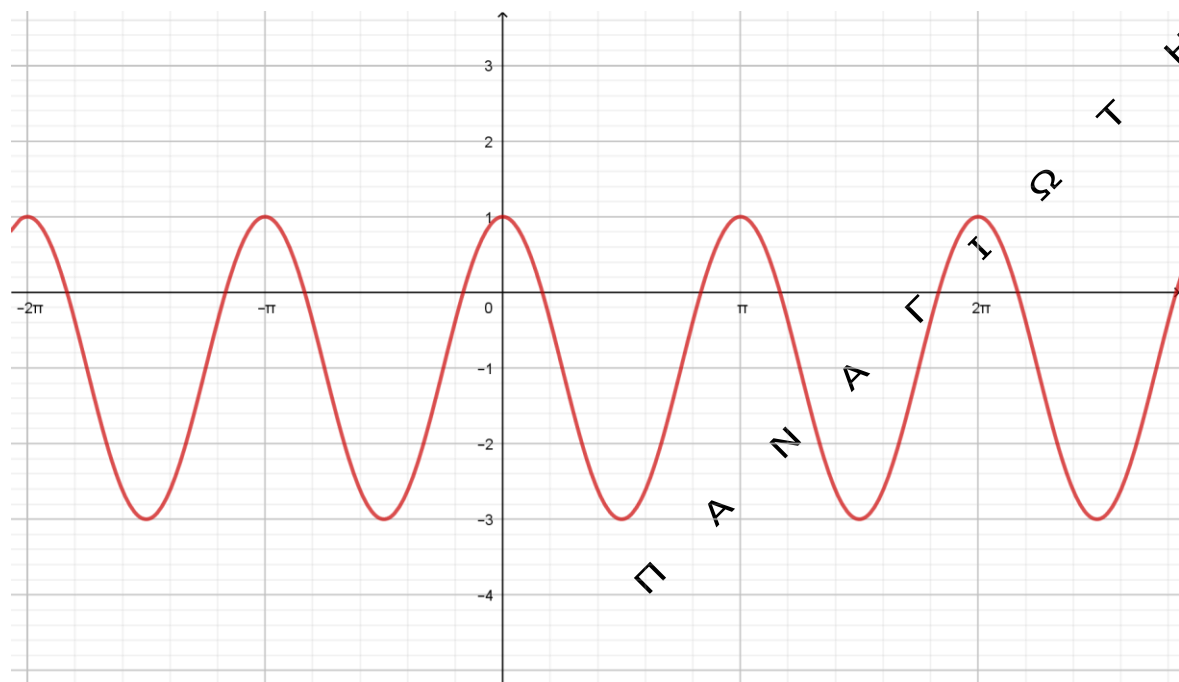
ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 4\pi]$

14. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \alpha \sin \omega x + \kappa$, όπου α , κ και ω πραγματικοί αριθμοί με $\omega > 0$

i) Να βρείτε το ολικό μέγιστο, το ολικό ελάχιστο και την περίοδο T της συνάρτησης f

ii) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , κ και ω

iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = -2$ στο διάστημα $[0, T]$

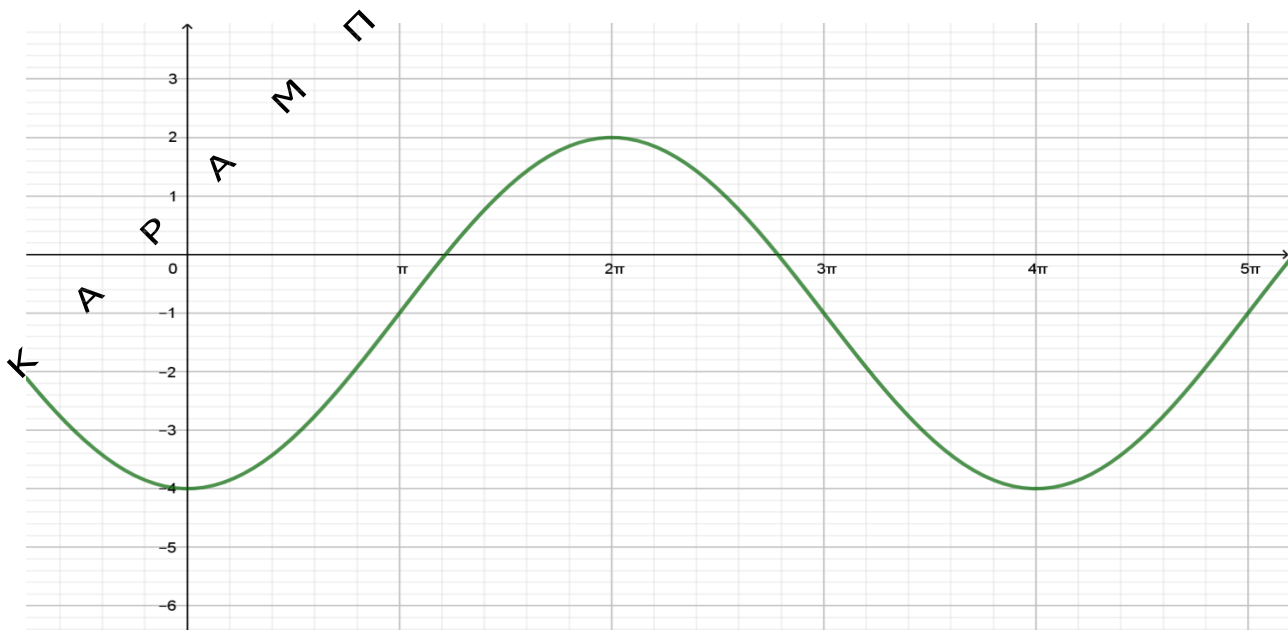


15. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \alpha \sin \omega x + \kappa$, όπου α , κ και ω πραγματικοί αριθμοί με $\omega > 0$

i) Να βρείτε το ολικό μέγιστο, το ολικό ελάχιστο και την περίοδο T της συνάρτησης f

ii) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , κ και ω

iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = -3$ στο διάστημα $[0, T]$

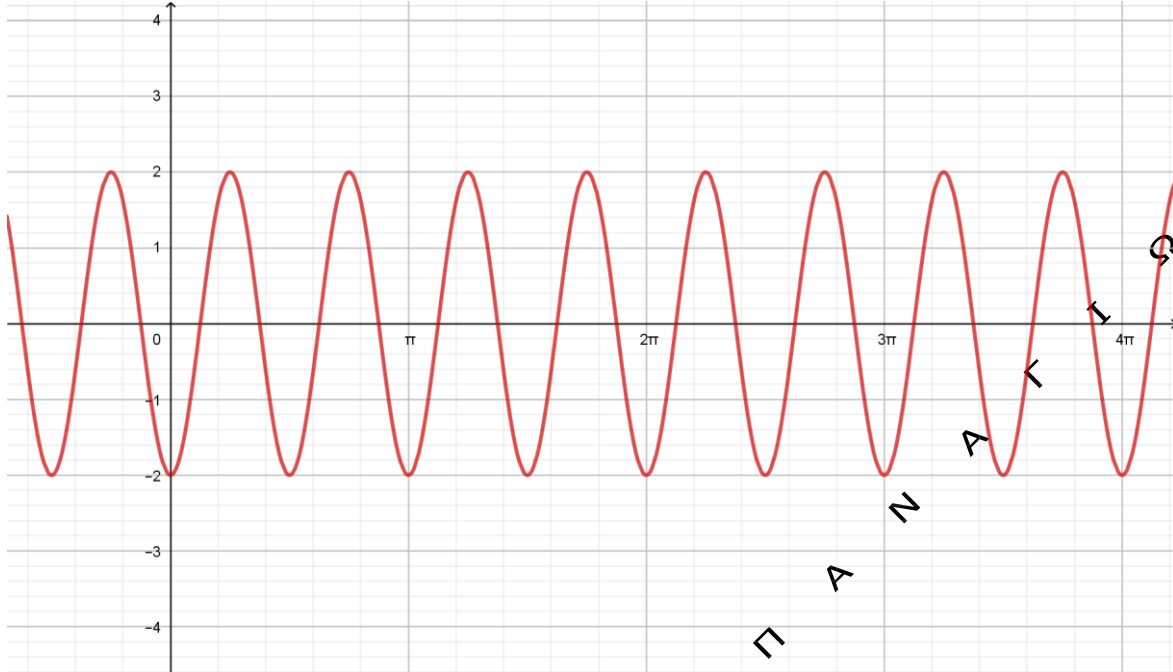


16. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \alpha \sin \omega x + \kappa$, όπου α , κ και ω πραγματικοί αριθμοί με $\omega > 0$

i) Να βρείτε το ολικό μέγιστο, το ολικό ελάχιστο και την περίοδο της συνάρτησης f

ii) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , κ και ω

iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 1$ στο διάστημα $[0, \pi]$



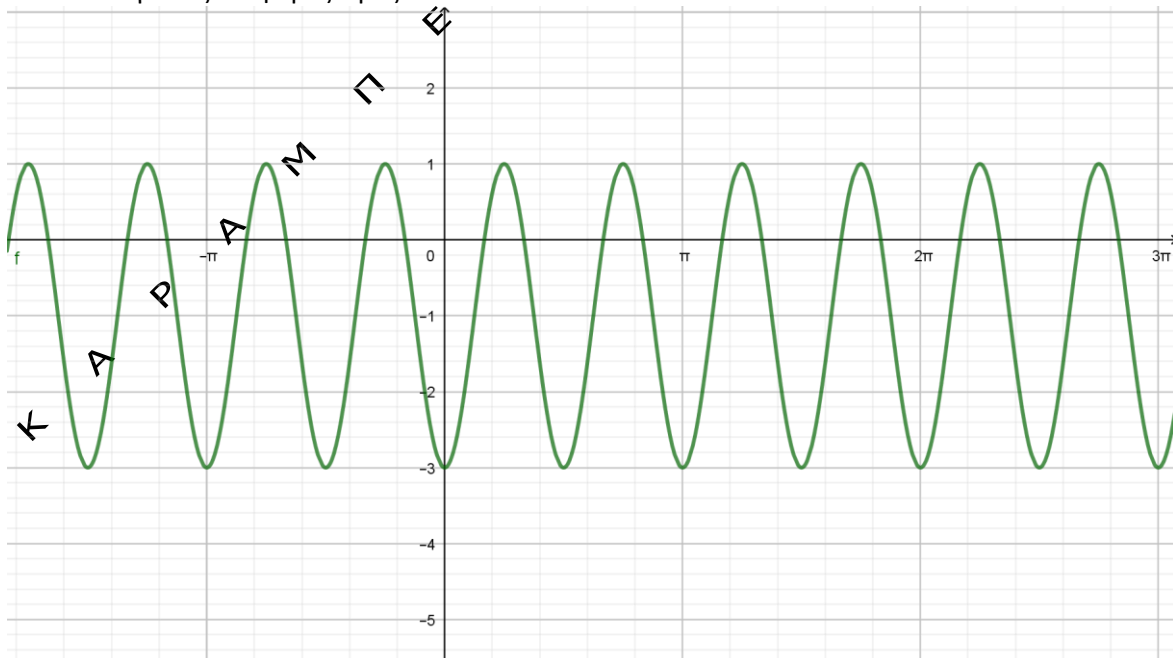
17. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \alpha \sin \omega x + \kappa$, όπου α , κ και ω πραγματικοί αριθμοί με $\omega > 0$

i) Να βρείτε το ολικό μέγιστο, το ολικό ελάχιστο και την περίοδο της συνάρτησης f

ii) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , κ και ω

iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$ στο διάστημα $[0, T]$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

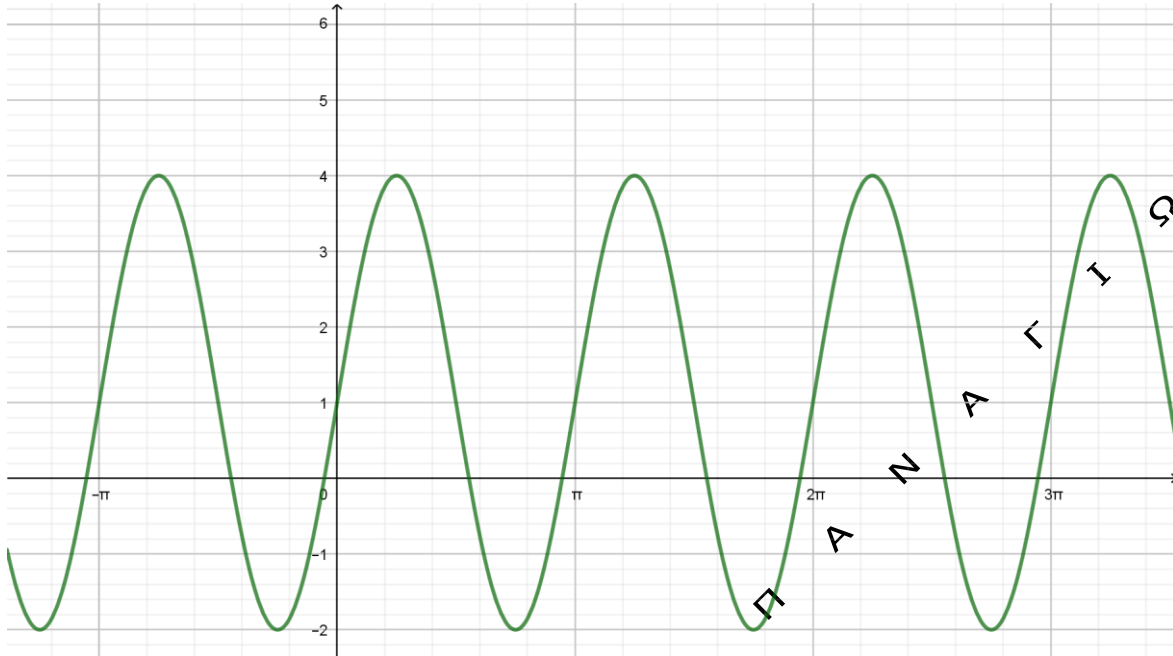


18. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \alpha \eta \mu \omega x + \kappa$, όπου α , κ και ω πραγματικοί αριθμοί με $\omega > 0$

i) Να βρείτε το ολικό μέγιστο, το ολικό ελάχιστο και την περίοδο της συνάρτησης f

ii) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , κ και ω

iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = -1$ στο διάστημα $[0, 2T]$

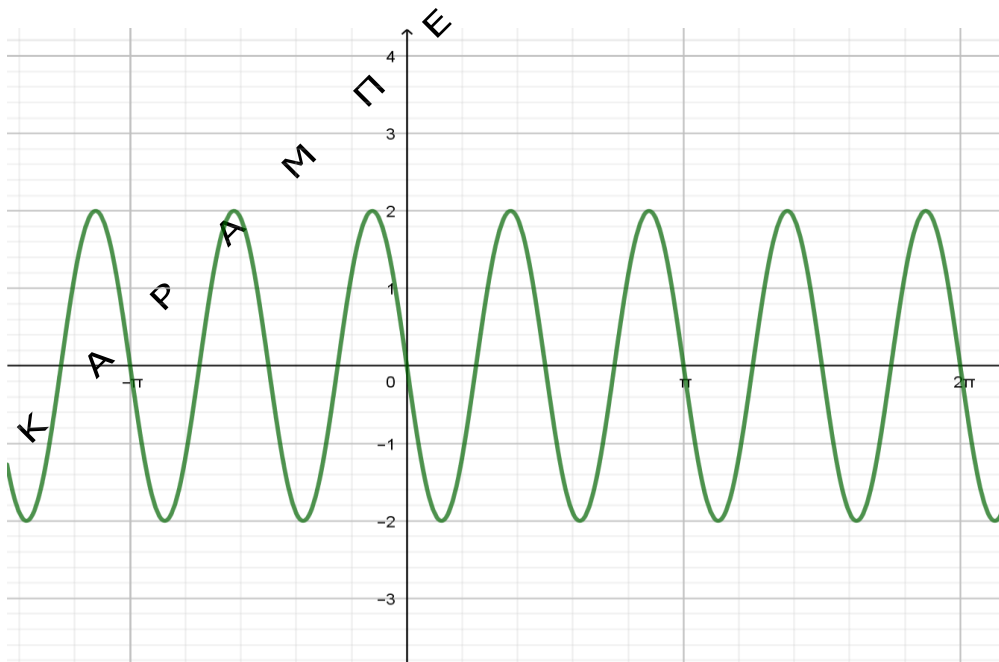


19. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \alpha \eta \mu \omega x + \kappa$, όπου α , κ και ω πραγματικοί αριθμοί με $\omega > 0$

i) Να βρείτε το ολικό μέγιστο, το ολικό ελάχιστο και την περίοδο της συνάρτησης f

ii) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , κ και ω

iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = -1$ στο διάστημα $[0, 2T]$

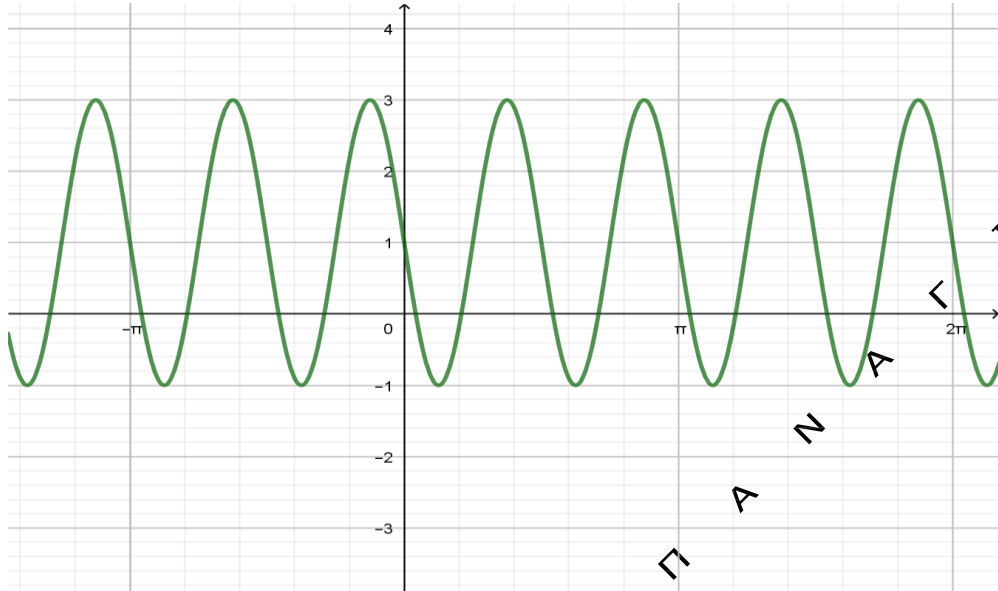


20. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \alpha \eta \mu \omega x + \kappa$, όπου α , κ και ω πραγματικοί αριθμοί με $\omega > 0$

i) Να βρείτε το ολικό μέγιστο, το ολικό ελάχιστο και την περίοδο της συνάρτησης f

ii) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , κ και ω

iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 2$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

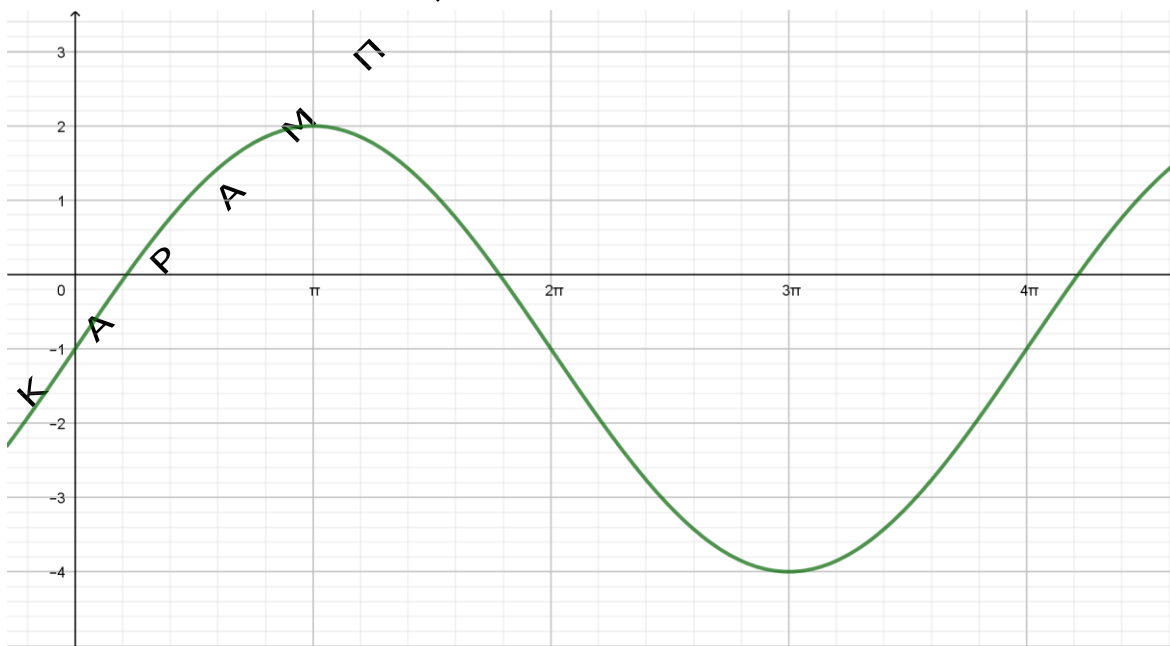


21. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \alpha \eta \mu \omega x + \kappa$, όπου α , κ και ω πραγματικοί αριθμοί με $\omega > 0$

i) Να βρείτε το ολικό μέγιστο, το ολικό ελάχιστο και την περίοδο της συνάρτησης f

ii) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , κ και ω

iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$ στο διάστημα $[0, \tau]$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$



22. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

i) $2\eta\mu x = 1$ ii) $2\eta\mu x = -\sqrt{3}$ iii) $2\eta\mu^2 x = 1$ iv) $2\eta\mu^2 x + \eta\mu x = 1$ v) $2\eta\mu^2 x + 5\eta\mu x + 2 = 0$

23. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

i) $2\sigma\upsilon\nu x = 1$ ii) $2\sigma\upsilon\nu x = -\sqrt{3}$ iii) $4\sigma\upsilon\nu^2 x = 3$ iv) $2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$

24. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

i) $3\varepsilon\varphi x = -\sqrt{3}$ ii) $\sigma\varphi x = -\sqrt{3}$ iii) $\varepsilon\varphi^2 x = 1$ iv) $3\sigma\varphi^2 x = 1$ v) $3\varepsilon\varphi^2 x = 9$

25. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

i) $\sigma\upsilon\nu 2x = 1$ ii) $\eta\mu 4x = -1$ iii) $\eta\mu \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) = -1$ iv) $\varepsilon\varphi 4x = -1$ v) $2\sigma\upsilon\nu \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) = -\sqrt{3}$

26. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

i) $2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0$ ii) $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = 0$ iii) $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 1 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0$
iv) $\eta\mu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x = 0$ v) $(\varepsilon\varphi x + 1)(\sigma\varphi x - 1) = 0$

27. Να λυθούν στο διάστημα $[0, 3\pi]$ οι παρακάτω εξισώσεις

i) $3\eta\mu^2 x = 3$ ii) $2\sigma\upsilon\nu^2 x = 2$ iii) $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0$ iv) $\varepsilon\varphi^2 x = 3$

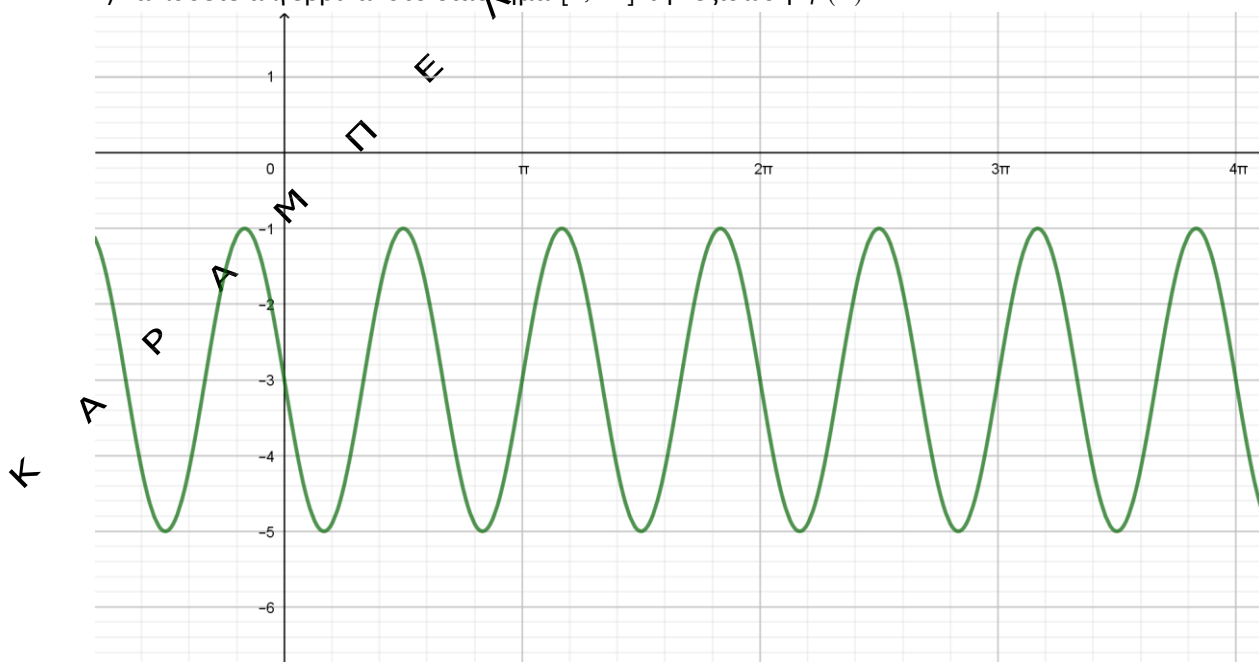
28. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \alpha\eta\mu\omega x + \kappa$, όπου α , κ και ω πραγματικοί αριθμοί με $\omega > 0$

i) Να βρείτε το ολικό μέγιστο, το ολικό ελάχιστο και την περίοδο της συνάρτησης f

ii) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , κ και ω

iii) Να λύσετε γραφικά στο διάστημα $[0, 3\pi]$ την εξίσωση $f(x) = -1$

iv) Να λύσετε αλγεβρικά στο διάστημα $[0, 3\pi]$ την εξίσωση $f(x) = -5$



Κ

Α

Ρ

Α

Μ

Π

Ε

Λ

Α

Σ

Π

Α

Ν

Α

Γ

Ι

Ω

Τ

Η

Σ

Κ

Α

Ρ

Α

Μ

Π

Ε

Λ

Α

Σ

Π

Α

Ν

Α

Γ

Ι

Ω

Τ

Η

Σ

Κ

Α

Ρ

Α

Μ

Π

Ε

Λ

Α

Σ

Π

Α

Ν

Α

Γ

Ι

Ω

Τ

Η

Σ

K A P A M Π E Λ A Σ
 Π A N A Γ I Ω T H Σ