Ρητοί Αριθμοί

Τα σύμβολα «+» και «-» λέγονται πρόσημα. Γράφονται πριν από τους αριθμούς και τους χαρακτηρίζουν, αντίστοιχα, ως **θετικούς** ή **αρνητικούς**.

Το **μηδέν <u>δεν</u>** είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός.

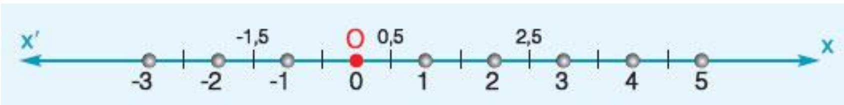
Ομόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο.

Ετερόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο

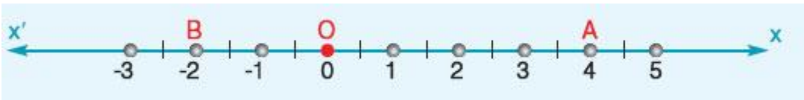
Ακέραιοι αριθμοί είναι οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς.

Ρητοί αριθμοί είναι όλοι οι γνωστοί μας έως τώρα αριθμοί: φυσικοί, κλάσματα και δεκαδικοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς.

- Αν θεωρήσουμε αριστερά της αρχής Ο του ημιάξονα Οx των αριθμών, τον αντικείμενο αυτού ημιάξονα Οx', μπορούμε να παραστήσουμε τους αρνητικούς αριθμούς σε συμμετρικά σημεία, ως προς Ο, των αντιστοίχων σημείων που παριστάνουν τους θετικούς αριθμούς. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε σημεία που να παριστάνουν κλασματικούς ή δεκαδικούς αριθμούς.



- **Ο άξονας x'Ox περιλαμβάνει όλους τους ρητούς αριθμούς (αρνητικούς, θετικούς και το μηδέν).**
- Η θέση ενός σημείου Α επάνω στην ευθεία ορίζεται με έναν αριθμό που ονομάζεται τετμημένη του σημείου.



Το σημείο **Α** έχει τετμημένη **4** και το σημείο **Β** έχει τετμημένη **-2**.

Απόλυτη Τιμή – Αντίθετος Αριθμός

Η απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού α εκφράζει την απόσταση του σημείου με τετμημένη α από την αρχή Ο του άξονα και συμβολίζεται με $|α|$.

Αντίθετοι ονομάζονται δύο αριθμοί που είναι ετερόσημοι και έχουν την ίδια απόλυτη τιμή

Ο αντίθετος του x είναι ο -x.

Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.

Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.

Η απόλυτη τιμή του μηδενός είναι το μηδέν.

Πρόσθεση ομόσημων αριθμών

- Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το πρόσημό τους.
- Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς, αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη τη μικρότερη απόλυτη τιμή και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του ρητού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Ιδιότητες της πρόσθεσης

- Αντιμεταθετική ιδιότητα (Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των δύο προσθετέων ενός αθροίσματος: $\alpha + \beta \ = \ \beta + \alpha$
- Προσεταιριστική ιδιότητα $\alpha + (\beta + \gamma) \ = \ (\alpha + \beta) + \gamma$
- Το άθροισμα ενός ρητού με το μηδέν ισούται με τον ίδιο τον ρητό. $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$
- Το άθροισμα δύο αντίθετων αριθμών είναι μηδέν. $\alpha + (-\alpha) \ = \ (-\alpha) + \alpha \ = \ 0$

Αφαίρεση Ρητών Αριθμών

Για να αφαιρέσουμε από τον αριθμό α τον αριθμό β, προσθέτουμε στον α τον αντίθετο του β.

$$\alpha - \beta \ = \ \alpha + (-\beta)$$

Στους ρητούς αριθμούς η αφαίρεση μετατρέπεται σε πρόσθεση και επομένως είναι πάντα δυνατή (δηλαδή, δεν απαιτείται να είναι ο μειωτέος πάντα μεγαλύτερος από τον αφαιρετέο, όπως ίσχυε μέχρι τώρα).

Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το + (ή δεν έχει πρόσημο), μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το + (αν έχει) και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με τα πρόσημά τους.

Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το -, μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το - και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με αντίθετα πρόσημα.

Πολλαπλασιασμός Ρητών Αριθμών

- Το γινόμενο δύο **θετικών** ρητών είναι **θετικός** ρητός
- Το γινόμενο ενός **θετικού** και ενός **αρνητικού** ρητού είναι **αρνητικός** ρητός
- Το γινόμενο δύο **αρνητικών** ακεραίων είναι **θετικός** ακέραιος

- Το γινόμενο δύο **αρνητικών** ρητών είναι **θετικός** ρητός.

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «+».

$$Δηλαδή:\ \ + \cdot + = +\ \ και\ - \cdot - = +$$

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «-».

$$Δηλαδή:\ \ + \cdot - = -\ \ και\ \ - \cdot + = -$$

Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού

Αντιμεταθετική ιδιότητα (Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά δύο παραγόντων ενός γινομένου)

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

Προσεταιριστική ιδιότητα

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$$

Το γινόμενο ενός ρητού αριθμού με τη μονάδα ισούται με τον ίδιο τον αριθμό.

$$1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$$

Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma\ \ και\ \ \alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$$

Οι ρητοί αριθμοί α και β λέγονται αντίστροφοι, όταν είναι διάφοροι του μηδενός και το γινόμενό τους είναι ίσο με τη μονάδα:

$$\alpha \cdot \beta = 1$$

Ο καθένας από τους α και β είναι αντίστροφος του άλλου.

Το γινόμενο ενός ρητού αριθμού επί το μηδέν ισούται με το μηδέν.

$$0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0$$

Γινόμενο πολλών παραγόντων +

Πώς εργαζόμαστε όταν έχουμε να υπολογίσουμε ένα γινόμενο με περισσότερους από δύο παράγοντες; Γνωρίζουμε ότι το γινόμενο θετικών ρητών είναι πάντα θετικό. Αν υπάρχει ένας παράγοντας που είναι αρνητικός μετατρέπει το γινόμενο σε αρνητικό. Στην περίπτωση που υπάρχει και δεύτερος αρνητικός παράγοντας ξαναμετατρέπει το γινόμενο σε θετικό κ.ο.κ.

Άρα: Για να υπολογίσουμε ένα γινόμενο πολλών παραγόντων (που κανένας δεν είναι μηδέν), πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε:

- Το πρόσημο +, αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι άρτιο (ζυγό).
- Το πρόσημο -, αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι περιττό (μονό). Αν τουλάχιστον ένας παράγοντας είναι μηδέν, τότε και το γινόμενο είναι ίσο με μηδέν Το

σημείο του πολλαπλασιασμού «.» μεταξύ των γραμμάτων και των παρενθέσεων παραλείπεται.

Διαίρεση Ρητών Αριθμών

Για να διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε:

το πρόσημο +, αν είναι ομόσημοι. Δηλαδή: + : + = + και - : - = +

το πρόσημο -, αν είναι ετερόσημοι. Δηλαδή: + : - = - και - : + = -

Το πηλίκο της διαίρεσης α:β ή $\frac{\alpha}{\beta}$ λέγεται λόγος του α προς το β και ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης β · x = α.

Η διαίρεση μπορεί να γραφτεί $\alpha \cdot \frac{1}{\beta}$, επομένως για να διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

Διαίρεση με διαιρέτη το μηδέν δεν ορίζεται.

Δυνάμεις Ρητών Αριθμών

Το γινόμενο $\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha$ (είτε ο α είναι θετικός είτε αρνητικός ρητός), συμβολίζεται με το α^ν και λέγεται δύναμη με βάση το α και εκθέτη το φυσικό $\nu > 1$.

- Για **ν = 1**, γράφουμε **$\alpha^1 = \alpha$**
- Η **δύναμη α^ν** διαβάζεται και **νιοστή δύναμη του α**.
- Η **δύναμη α^2** λέγεται και **τετράγωνο του α** ή **α στο τετράγωνο**.
- Η **δύναμη α^3** λέγεται **κύβος του α** ή **α στον κύβο**.

Η δύναμη κάθε αριθμού, διάφορου του μηδενός με εκθέτη το μηδέν είναι ίση με μονάδα. $\alpha^0 = 1, \alpha \neq 0$

Πρόσημο δύναμης

Δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι θετικός αριθμός.

Αν $\alpha > 0$, τότε $\alpha^\nu > 0$

Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη άρτιο είναι θετικός αριθμός.

Αν $\alpha < 0$ και ν άρτιος, τότε $\alpha^\nu > 0$

Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός.

Αν $\alpha < 0$ και ν περιττός, τότε $\alpha^\nu < 0$

Ιδιότητες δυνάμεων ρητών με εκθέτη φυσικό

Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη το άθροισμα των εκθετών.

$$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$$

Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη τη διαφορά του εκθέτη του διαιρέτη από τον εκθέτη του διαιρετέου.

$$\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$$

Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε εκθέτη, υψώνουμε κάθε παράγοντα του γινομένου στον εκθέτη αυτό.

$$(\alpha \cdot \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$$

Για να υψώσουμε ένα πηλίκο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε καθένα από τους όρους του πηλίκου στον εκθέτη αυτό.

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$$

Για να υψώσουμε μία δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο γινόμενο των εκθετών.

$$(\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\nu \cdot \mu}$$

Η δύναμη κάθε αριθμού, διάφορου του μηδενός, με εκθέτη αρνητικό είναι ίση με κλάσμα που έχει αριθμητή τη μονάδα και παρονομαστή τη δύναμη του αριθμού αυτού με αντίθετο εκθέτη.

$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\nu}$$

Επειδή τα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\beta}{\alpha}$ είναι αντίστροφοι αριθμοί, όπως και τα α και $\frac{1}{\alpha}$ στην προηγούμενη σχέση, εξάγουμε το συμπέρασμα ότι ισχύει:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$$

• Οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη φυσικό, που μάθαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ισχύουν και για τις δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο.