Η Περιπέτεια του Αριθμού Άλφα και των Δυνάμεων

Μια φορά και έναν καιρό, υπήρχε ένας φυσικός αριθμός που τον έλεγαν **Άλφα**. Ο Άλφα ήταν ένας αριθμός γεμάτος φιλοδοξίες. Ήθελε να γίνει πιο ισχυρός και να εξερευνήσει τα όριά του. Έτσι, μια μέρα αποφάσισε να ξεκινήσει ένα ταξίδι με τη βοήθεια του φίλου του, του **Εκθέτη**.

Ο Εκθέτης είχε ένα ιδιαίτερο ταλέντο. Όταν στεκόταν δίπλα στον Άλφα, μπορούσε να κάνει τον Άλφα να πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του, όσες φορές ήθελε. Ο Εκθέτης μπορούσε να πάρει οποιαδήποτε τιμή: 2, 3, 4 ή ακόμη και 0 και αρνητικούς αριθμούς.

Η Δύναμη του Εκθέτη

Στην πρώτη στάση του ταξιδιού, ο Εκθέτης είπε στον Άλφα:

- "Άλφα, είμαι ο Εκθέτης 2. Θέλεις να δεις τι μπορώ να κάνω; Πολλαπλασίασε τον εαυτό σου δύο φορές."

Ο Άλφα συμφώνησε και τότε έγινε το εξής:

- $\boldsymbol{\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha.}$

Ο Άλφα ήταν ενθουσιασμένος. Ένιωθε τη δύναμή του να αυξάνεται! Μετά ήρθε ο Εκθέτης 3 και είπε:

- "Γιατί να σταματήσεις εδώ; Δοκίμασε να πολλαπλασιαστείς τρεις φορές!"

Ο Άλφα το έκανε και έγινε ακόμη πιο δυνατός:

- $\boldsymbol{\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha.}$

Κάθε φορά που ο Άλφα επαναλάμβανε τον εαυτό του, αποκτούσε περισσότερη δύναμη. Έμαθε ότι αυτό το φαινόμενο λεγόταν **δύναμη με βάση α** και **εκθέτη ν**:

- $\boldsymbol{\alpha^\nu = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha \quad (\nu\ \varphi o\rho}\acute{\varepsilon}\boldsymbol{\varsigma).}$

Η Ειδική Περίπτωση του Εκθέτη 1 και 0

Καθώς συνέχιζαν το ταξίδι τους, ο Εκθέτης 1 εμφανίστηκε.

- "Άλφα," του είπε, "αν είμαι εγώ ο Εκθέτης, τότε εσύ παραμένεις ο ίδιος."
- Και έτσι, $\boldsymbol{\alpha^1 = \alpha}$.

Αργότερα, όμως, εμφανίστηκε και ο Εκθέτης 0. Όλοι αναρωτήθηκαν τι θα συνέβαινε. Ο Εκθέτης 0 τους καθησύχασε και είπε:

- "Μην ανησυχείτε! Όταν είμαι εγώ Εκθέτης, ο Άλφα γίνεται **1**, αρκεί ο Άλφα **να μην είναι** μηδέν."

Έτσι μάθαμε ότι:

- $\boldsymbol{\alpha^0 = 1}, \mu\varepsilon\ \boldsymbol{\alpha \neq 0}$.

Οι Αρνητικοί Εκθέτες και το Μυστήριο του Αντίστροφου

Καθώς προχωρούσαν στο ταξίδι τους, συνάντησαν τον **Αρνητικό Εκθέτη**. Αυτός είχε μια ιδιαιτερότητα. Αντί να αυξάνει τη δύναμη του Άλφα, την έκανε να αντιστρέφεται! Όταν ο εκθέτης ήταν $-\nu$, η δύναμη του Άλφα έγινε ένα κλάσμα:

- $\boldsymbol{\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}}, \mu\varepsilon\ \boldsymbol{\alpha \neq 0}$.

Ο Άλφα τώρα μπορούσε όχι μόνο να αυξήσει τη δύναμή του, αλλά και να τη μειώσει ανάλογα με τις οδηγίες του Εκθέτη.

Η Συνάντηση των Δυνάμεων με την Πρόσθεση Εκθετών ($\boldsymbol{\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}}$)

Μια μέρα, ο Εκθέτης μ και ο Εκθέτης ν συναντήθηκαν στον δρόμο. Και οι δύο είχαν την ίδια βάση, τον αριθμό α. Όταν αποφάσισαν να συνδυάσουν τις δυνάμεις τους (να πολλαπλασιαστούν), δεν ήθελαν να ταλαιπωρηθούν υπολογίζοντας τα πάντα από την αρχή. Έτσι, είπαν:

- **"Εμείς, με βάση τον α, θα ενώσουμε τις δυνάμεις μας προσθέτοντας τους εκθέτες μας!"**

Και αμέσως οι δυνάμεις τους έγιναν $\boldsymbol{\alpha^{\mu+\nu}}$.

Παράδειγμα: Αν ο μ ήταν 2 και ο ν ήταν 3, τότε:

- $\boldsymbol{\alpha}^2 \cdot \boldsymbol{\alpha}^3 = \boldsymbol{\alpha^{2+3}} = \boldsymbol{\alpha}^5$

Η Διάσπαση με την Αφαίρεση Εκθετών ($\boldsymbol{\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}}$)

Όμως, άλλη μια μέρα, ο μ και ο ν μάλωσαν. Ήθελαν να χωρίσουν τις δυνάμεις τους (να διαιρεθούν), αλλά χωρίς να χάσουν τη δύναμή τους. Ο μ είπε:

- **"Θα αφαιρέσουμε τους εκθέτες μας για να βρούμε πόση δύναμη θα μας μείνει!"**

Και έτσι:

- $\boldsymbol{\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}}$

Παράδειγμα: Αν ο μ ήταν 5 και ο ν ήταν 2:

- $\boldsymbol{\alpha^5 : \alpha^2 = \alpha^{5-2} = \alpha}^3$

Η Δύναμη του Πολλαπλασιασμού Βάσεων $\boldsymbol{(\alpha \cdot \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}}$

Σε μια άλλη περιπέτεια, οι αριθμοί α και β αποφάσισαν να δουλέψουν μαζί. Όμως, όταν τους συνάντησε ο Εκθέτης ν, του ζήτησαν να τους δυναμώσει και τους δύο. Ο ν είπε:

- **"Μπορώ να πολλαπλασιάσω τις δυνάμεις σας, αλλά θα πρέπει να πάρετε την ίδια δύναμη, δηλαδή τον εκθέτη μου."**

Έτσι:

- $\boldsymbol{(\alpha \cdot \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}}$

Παράδειγμα: Αν α ήταν 2, β ήταν 3 και Ν ήταν 2, τότε:

- $\boldsymbol{(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36}$

Οι Ανατροπές με Αρνητικούς Εκθέτες $\boldsymbol{\left(\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}\right)}$

Κάποια στιγμή, ο μ και ο ν ανακάλυψαν ότι υπάρχει και μία άλλη περίεργη δύναμη, η οποία έρχεται με έναν αρνητικό εκθέτη. Ο ν είπε:

- **"Αν ένας εκθέτης είναι αρνητικός, τότε αντί να πολλαπλασιαστεί, θα αντιστραφεί!"**

Και κάπως έτσι οι αριθμοί ανατράπηκαν:

- $\boldsymbol{\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}}$

Παράδειγμα: Αν α ήταν 2 και ν ήταν -3, τότε:

- $\boldsymbol{2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}}$

Η Δύναμη της Επιμεριστικής Ιδιότητας $((\boldsymbol{\alpha^{\mu}})^{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\alpha^{\mu\cdot\nu}})$

Τέλος, μια μέρα ο ν αποφάσισε να πολλαπλασιάσει τη δύναμή του όχι μία, αλλά δύο φορές! Για να μη χαθεί όμως στον υπολογισμό, ο ν είπε:

- **"Αν πολλαπλασιάσω τον εκθέτη μου με άλλον εκθέτη, απλά θα υπολογίσω το γινόμενο των δύο εκθετών!"**

Και έτσι, οι δυνάμεις τους έγιναν:

- $(\boldsymbol{\alpha^{\mu}})^{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\alpha^{\mu\cdot\nu}}$

Παράδειγμα: Αν α ήταν 2, μ ήταν 3 και ν ήταν 2, τότε:

- $\boldsymbol{(2^3)^2 = 2^{3\cdot2} = 2^6 = 64}$

Το Τέλος του Ταξιδιού

Στο τέλος του ταξιδιού, ο Άλφα είχε μάθει πολλά για τον εαυτό του. Τώρα μπορούσε να χειριστεί κάθε εκθέτη, είτε ήταν θετικός, αρνητικός ή μηδενικός. Έτσι, ο Άλφα συνέχισε να ζει στο χωριό των μαθηματικών, δείχνοντας σε όλους τις απεριόριστες δυνατότητες που του δίνουν οι δυνάμεις και οι εκθέτες του!

Τι πρέπει να μάθω;

Η **δύναμη** με βάση έναν πραγματικό αριθμό α και εκθέτη ένα φυσικό αριθμό ν ≥ 2 συμβολίζεται με α^ν και είναι το γινόμενο ν παραγόντων ίσων με τον αριθμό α.

Δηλαδή, $\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\text{ν παράγοντες}}$

Παράδειγμα:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \qquad (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$

Ορίζουμε ακόμη:

$$\alpha^1 = \alpha$$

$$\alpha^0 = 1, \mu\varepsilon\ \alpha \neq 0$$

$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}, \mu\varepsilon\ \alpha \neq 0$$

Για τις δυνάμεις με εκθέτες ακέραιους αριθμούς και εφόσον αυτές ορίζονται, ισχύουν οι ιδιότητες:

Ιδιότητες;	Παραδείγματα
$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$
$\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$	$3^5 : 3^2 = 3^{5-2} = 3^3$
$(\alpha \cdot \beta)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$	$(2 \cdot x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$
$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$
$(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu \cdot \nu}$	$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$
$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$

Ερωτήσεις Κλειστού Τύπου για τις Δυνάμεις και τις Ιδιότητές τους

1. **Ποιο είναι το αποτέλεσμα της δύναμης 3^2;**
    α. 6
    β. 9
    γ. 12
    δ. 8
2. **Ποια ιδιότητα εκφράζει η εξίσωση $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$;**
    α. Ιδιότητα πολλαπλασιασμού βάσεων
    β. Ιδιότητα διαίρεσης εκθετών
    γ. Ιδιότητα πρόσθεσης εκθετών
    δ. Ιδιότητα αντιστροφής εκθετών
3. **Ποιο είναι το αποτέλεσμα του $(-2)^3$;**
    α. -8
    β. 8
    γ. -6
    δ. -4
4. **Ποια είναι η τιμή του α^0, όταν $\alpha \neq 0$;**
    α. 0
    β. 1
    γ. α
    δ. Δεν ορίζεται
5. **Ποιο είναι το αποτέλεσμα της δύναμης $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}$;**
    α. $\frac{\alpha^{\nu}}{\beta}$
    β. $\frac{\alpha}{\beta^{\nu}}$
    γ. $\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$
    δ. $\alpha \cdot \beta^{\nu}$
6. **Ποιο είναι το αποτέλεσμα της δύναμης 2^{-3};**
    α. $\frac{1}{8}$
    β. $\frac{1}{6}$
    γ. -8
    δ. $-\frac{1}{8}$
7. **Ποια είναι η ιδιότητα που εφαρμόζεται στην εξίσωση $(\alpha \cdot \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$;**
    α. Προσεταιριστική
    β. Επιμεριστική
    γ. Ιδιότητα διαίρεσης εκθετών
    δ. Ιδιότητα πολλαπλασιασμού βάσεων

8. **Ποιο είναι το αποτέλεσμα της εξίσωσης $\left(2^3\right)^2$;**

    α. 2^5
    β. 2^6
    γ. 2^9
    δ. 2^3

9. **Ποιο είναι το αποτέλεσμα της διαίρεσης $4^5 : 4^2$;**

    α. 4^7
    β. 4^3
    γ. 4^2
    δ. 4

10. **Ποια είναι η ιδιότητα που εκφράζει η εξίσωση $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu \cdot \nu}$;**

    α. Ιδιότητα πολλαπλασιασμού εκθετών
    β. Ιδιότητα πρόσθεσης εκθετών
    γ. Επιμεριστική ιδιότητα
    δ. Ιδιότητα διαίρεσης εκθετών

Μάθημα 2ο: Δυνάμεις Πραγματικών Αριθμών

Απαντήσεις

1 – β	6 – α
2 – γ	7 – δ
3 – α	8 – β
4 – β	9 – β
5 – γ	10 – α