

Ιστορία: "Η Περιπέτεια των Αριθμών στο Βασίλειο των Μαθηματικών"

Μια φορά κι έναν καιρό, υπήρχε ένα μαγικό βασίλειο, το **Βασίλειο των Μαθηματικών**, όπου οι αριθμοί ζούσαν αρμονικά και συνεργάζονταν για να λύσουν προβλήματα και να διατηρούν την τάξη. Στο βασίλειο αυτό, οι αριθμοί χωρίζονταν σε διαφορετικές ομάδες ή οικογένειες, καθεμία με τα δικά της χαρακτηριστικά και δυνάμεις.

1. Η Οικογένεια των Φυσικών Αριθμών

Στην πρώτη οικογένεια, την **Οικογένεια των Φυσικών Αριθμών**, ζούσαν οι πιο γνωστοί αριθμοί: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, και συνεχίζοντας μέχρι το άπειρο. Ήταν οι πρώτοι αριθμοί που έμαθε κάθε κάτοικος του βασιλείου. Ο αριθμός 1 ήταν ο αρχηγός αυτής της οικογένειας, ενώ το 0 είχε την ιδιαιτερότητα να μην προσθέτει ή αφαιρεί κάτι, αλλά να παίζει σημαντικό ρόλο στις πράξεις.

2. Η Οικογένεια των Ακεραίων Αριθμών

Λίγο πιο πέρα από τους φυσικούς αριθμούς, ζούσε η **Οικογένεια των Ακεραίων Αριθμών**. Εκεί κατοικούσαν όχι μόνο οι φυσικοί αριθμοί, αλλά και οι αρνητικοί τους φίλοι, όπως το -1, -2, -3. Ο Ακέραιος βασιλιάς είχε την ευθύνη να εξισορροπεί τις θετικές και αρνητικές ενέργειες. Ήξεραν ότι όταν δύο αντίθετοι αριθμοί, όπως το +5 και το -5, συναντιόνταν, η μαγική τους δύναμη τους έφερνε σε μια ισορροπία και έδιναν το μηδέν.

3. Η Οικογένεια των Ρητών Αριθμών

Μια μέρα, εμφανίστηκε μια νέα οικογένεια στο βασίλειο: η **Οικογένεια των Ρητών Αριθμών**. Αυτή η οικογένεια δεν περιελάμβανε μόνο τους φυσικούς και ακέραιους αριθμούς, αλλά και κλάσματα, όπως το $\frac{1}{2}$ και το $\frac{3}{4}$. Οι ρητοί αριθμοί είχαν τη δυνατότητα να εκφράζουν σχέσεις και να μοιράζουν πράγματα δίκαια. Το παράξενο με αυτούς ήταν ότι μπορούσαν να μετατραπούν σε κλάσματα και δεκαδικούς, διευρύνοντας την κατανόηση των αριθμών.

4. Η Οικογένεια των Άρρητων Αριθμών

Αλλά το βασίλειο έκρυβε ακόμη περισσότερα μυστικά. Μια μέρα, οι κάτοικοι ανακάλυψαν την **Οικογένεια των Άρρητων Αριθμών**. Αυτοί οι αριθμοί, όπως ο διάσημος $\sqrt{2}$ και το π , δεν μπορούσαν να εκφραστούν ως κλάσματα. Ήταν τόσο παράξενοι που δεν επαναλαμβάνονταν ποτέ, και τα δεκαδικά τους συνεχιζόταν για πάντα, χωρίς να ακολουθούν κάποιο μοτίβο. Οι ρητοί τους αποκαλούσαν "ανεξιχνίαστους", αλλά όλοι ήξεραν ότι ήταν πραγματικοί αριθμοί και είχαν θέση πάνω στον αριθμογραμμή.

5. Η Αριθμογραμμή

Όλοι οι αριθμοί του βασιλείου κατοικούσαν πάνω στην **Αριθμογραμμή**, ένα μακρύ μονοπάτι που ξεκινούσε από το αρνητικό άπειρο και έφτανε στο θετικό άπειρο. Κάθε αριθμός είχε το δικό του σημείο πάνω στην αριθμογραμμή και ήξεραν ακριβώς πόσο μακριά ήταν από το μηδέν, την αφετηρία τους. Αυτή η απόσταση λεγόταν **απόλυτη τιμή** και ήταν πάντα θετική. Ακόμα κι αν κάποιος ήταν -5 , η απόλυτη τιμή του ήταν 5 , γιατί η απόσταση δεν είχε αρνητική τιμή.

6. Οι Πράξεις και οι Συμμαχίες

Οι αριθμοί δεν έκαναν μόνο βόλτες στην αριθμογραμμή· συνεργάζονταν για να επιλύσουν προβλήματα μέσα από τις **πράξεις**. Έπρεπε να γνωρίζουν τις ιδιότητες της **πρόσθεσης** και του **πολλαπλασιασμού**:

- Οι ομόσημοι αριθμοί, είτε θετικοί είτε αρνητικοί, έκαναν εύκολες συμμαχίες: απλά προσέθεταν τις δυνάμεις τους (τις απόλυτες τιμές τους).
- Οι ετερόσημοι, από την άλλη, είχαν μια ιδιαίτερη σχέση. Αφαιρούσαν τις δυνάμεις τους και κέρδιζε ο αριθμός με την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Όταν πολλαπλασιάζονταν, οι αριθμοί ακολουθούσαν συγκεκριμένους κανόνες:

- Δύο ομόσημοι αριθμοί έδιναν πάντα ένα θετικό αποτέλεσμα.
- Δύο ετερόσημοι, αντίθετα, δημιουργούσαν αρνητικό αποτέλεσμα.

7. Η Συμμαχία των Πραγματικών Αριθμών

Όλοι οι αριθμοί στο βασίλειο, οι ρητοί και οι άρρητοι, ενώθηκαν και σχημάτισαν την **Συμμαχία των Πραγματικών Αριθμών**. Αυτή η συμμαχία ήταν αδιάσπαστη και μαζί τους μπορούσαν να λύνουν οποιοδήποτε μαθηματικό πρόβλημα τους παρουσιαζόταν.

Και έτσι, στο Βασίλειο των Μαθηματικών, οι αριθμοί ζούσαν με τάξη και αρμονία, έτοιμοι να λύσουν κάθε γρίφο και να βοηθήσουν όλους όσους ήθελαν να καταλάβουν τον κόσμο των μαθηματικών.

Δείτε εδώ: [Εφαρμογή 1^η](#), [Εφαρμογή 2^η](#), [Εφαρμογή 3^η](#), [Εφαρμογή 4^η](#), [Εφαρμογή 5^η](#).

Τι πρέπει να ξέρω:

Σύνολα Αριθμών

Ποια σύνολα αριθμών πρέπει να γνωρίζουμε μέχρι σήμερα;

Φυσικοί αριθμοί: Είναι οι πρώτοι αριθμοί που ήρθαμε αντιμέτωποι, δηλαδή: 0, 1, 2, 3,

Ακέραιοι αριθμοί: Αποτελούνται από τους φυσικούς αριθμούς μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς. {...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...}

Ρητοί αριθμοί: Αποτελούνται από όλους τους γνωστούς μας αριθμούς μέχρι σήμερα: φυσικοί, κλάσματα, δεκαδικοί και τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς.

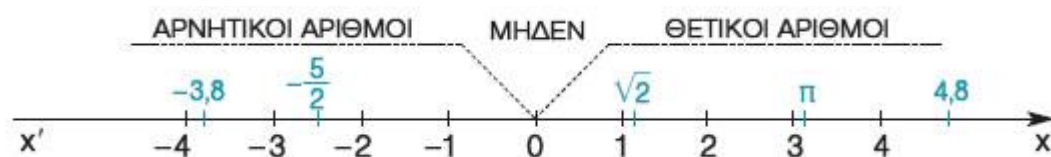
Ρητός λέγεται κάθε αριθμός που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή ενός κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι αριθμοί και $\nu \neq 0$.

Πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς.

Π.χ.

$\frac{3}{4}, -\frac{5}{2}, 7,34, \sqrt{2}, 3, \pi, \frac{\sqrt{5}}{3}, \sqrt{4}, -0,5, 1 + \sqrt{3}, 6,1010010001\dots$

Άρρητος λέγεται κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός.



Κάθε πραγματικός αριθμός παριστάνεται μ' ένα σημείο πάνω σ' έναν άξονα.

Απόλυτη τιμή

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού a συμβολίζεται με $|a|$ και είναι ίση με την απόσταση του σημείου, που παριστάνει τον αριθμό a , από την αρχή του άξονα.

Για παράδειγμα: $|-2| = 2, |2| = 2, |0| = 0,$

Οι πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς

Πρόσθεση

$$+7 + 5 = +12$$

$$-7 - 5 = -12$$

- Για να προσθέσουμε δύο **ομόσημους** αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμά αυτό βάζουμε ως πρόσημο το κοινό τους πρόσημο.

$$+5 - 7 = -2$$

$$-5 + 7 = +2$$

- Για να προσθέσουμε δύο **ετερόσημους** αριθμούς, αφαιρούμε την μικρότερη απόλυτη τιμή από τη μεγαλύτερη και στη διαφορά αυτή βάζουμε πρόσημο, το πρόσημο του αριθμού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Πολλαπλασιασμός

$$(+5) \cdot (+7) = +35$$

$$(-5) \cdot (-7) = +35$$

- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους, και στο γινόμενο αυτό βάζουμε πρόσημο **+**

$$(+5) \cdot (-7) = -35$$

$$(-5) \cdot (+7) = -35$$

- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους, και στο γινόμενο αυτό βάζουμε πρόσημο **-**

Οι ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού

Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν οι ιδιότητες:

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$a + b = b + a$	$ab = ba$
Προσεταιριστική	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a(bc) = (ab)c$
Ουδέτερο στοιχείο	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
	$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1, a \neq 0$
Επιμεριστική	$a(b + c) = ab + ac$	

Υπενθυμίζουμε ακόμη ότι:

- $\alpha \cdot 0 = 0$.
- Αν $\alpha\beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$.
- Δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα μηδέν, λέγονται **αντίθετοι**.
- Δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο τη μονάδα, λέγονται **αντίστροφοι**.

Αφαίρεση - Διαίρεση

Οι πράξεις της αφαίρεσης και της διαίρεσης γίνονται με τη βοήθεια της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντιστοίχως.

- Για να βρούμε τη διαφορά δύο αριθμών, προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου.

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

$$5 - 7 = 5 + (-7) = -2$$

$$5 - (-7) = 5 + (+7) = 12$$

- Για να βρούμε το πηλίκο δύο αριθμών ($\alpha : \beta$, ή με $\beta \neq 0$), πολλαπλασιάζουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$$

Ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους: Γράφω δίπλα από κάθε πρόταση το Σ αν είναι σωστή και το Λ αν είναι λανθασμένη.

1. Οι φυσικοί αριθμοί είναι οι αριθμοί που ξεκινούν από το 1 και συνεχίζουν μέχρι το άπειρο.
2. Οι ακέραιοι αριθμοί περιλαμβάνουν μόνο θετικούς αριθμούς.
3. Οι ρητοί αριθμοί μπορούν να γραφτούν ως κλάσματα της μορφής $\frac{\mu}{\nu}$, όπου $\nu \neq 0$.
4. Κάθε αριθμός που δεν μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα είναι άρρητος αριθμός.
5. Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι πάντα θετική.
6. Οι άρρητοι αριθμοί έχουν περιοδικά δεκαδικά ψηφία.
7. Όταν προσθέτουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, αφαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους.
8. Το γινόμενο δύο αρνητικών αριθμών είναι πάντα θετικό.
9. Ο αριθμός 0 ανήκει στους ακέραιους αλλά όχι στους φυσικούς αριθμούς.
10. Η απόλυτη τιμή του 0 είναι 0.

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής: Επιλέγω τη σωστή απάντηση.

11. Ποιο από τα παρακάτω είναι παράδειγμα ρητού αριθμού;
 - α. π
 - β. $1/2$
 - γ. $\sqrt{2}$
 - δ. 3.14159...
12. Ποια είναι η απόλυτη τιμή του αριθμού -5;
 - α. -5
 - β. 0
 - γ. 5
 - δ. -1
13. Ποια είναι η σωστή μορφή ενός ρητού αριθμού;
 - α. 0
 - β. $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν είναι ακέραιοι και $\nu = 0$
 - γ. $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν είναι ακέραιοι και $\nu \neq 0$
 - δ. $\mu + \nu$

14. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός ανάμεσα στους παρακάτω;
- α. -3
 - β. 0
 - γ. $\frac{1}{2}$
 - δ. -1
15. Όταν προσθέτουμε δύο ομόσημους αριθμούς, το αποτέλεσμα:
- α. Είναι πάντα θετικό
 - β. Είναι πάντα αρνητικό
 - γ. Είναι πάντα ίσο με το 0
 - δ. Προκύπτει από το άθροισμα των απόλυτων τιμών τους με το κοινό τους πρόσημο
16. Ποιος αριθμός είναι άρρητος;
- α. $\frac{3}{4}$
 - β. 0.75
 - γ. $\sqrt{2}$
 - δ. 5
17. Ποιο από τα παρακάτω είναι χαρακτηριστικό των πραγματικών αριθμών;
- α. Περιλαμβάνουν μόνο τους θετικούς αριθμούς
 - β. Περιλαμβάνουν μόνο τους ακέραιους
 - γ. Περιλαμβάνουν τους ρητούς και άρρητους αριθμούς
 - δ. Περιλαμβάνουν μόνο τους άρρητους αριθμούς

Ερωτήσεις Συμπλήρωσης Κενού

18. Οι αριθμοί π και $\sqrt{2}$ είναι παραδείγματα _____ αριθμών.
19. Οι ρητοί αριθμοί περιλαμβάνουν τους _____, τα _____ και τους _____ αριθμούς.
20. Η απόλυτη τιμή του αριθμού -8 είναι _____.
21. Οι ακέραιοι αριθμοί αποτελούνται από τους _____ και τους _____ αριθμούς.
22. Το αποτέλεσμα της πράξης $-3 + 7$ είναι _____.

Μάθημα 1^ο: Πράξεις με Πραγματικούς Αριθμούς

Απαντήσεις

1 – λ

2 – λ

3 – Σ

4 – Σ

5 – Σ

6 – λ

7 - Σ

8 – Σ

9 – λ

10 – Σ

11 – β

12 – γ

13 – γ

14 – γ

15 – δ

16 – γ

17 – γ

18 – άρρητων

19 – φυσικούς, κλάσματα, δεκαδικούς

20 – 8

21 – θετικούς, αρνητικούς

22 – 4