

• Παράγοντες/Διαιρέτες και Πολλαπλάσια

Παράδειγμα:

Το 4 και το 5 είναι παράγοντες (ή διαιρέτες) του 20, γιατί διαιρούν ακριβώς το 20.

Το 20 είναι πολλαπλάσιο του 4 και του 5.

- Το 0 είναι πολλαπλάσιο κάθε ακεραίου αριθμού. Κάθε ακεραίος αριθμός είναι πολλαπλάσιο και παράγοντας του εαυτού του.

$$4 \times 5 = 20$$

$$5 \times 4 = 20$$

$$20 \div 4 = 5$$

$$20 \div 5 = 4$$

## Παραδείγματα

1. Να βρεις τους παράγοντες (ή διαιρέτες) του 24.

Λύση:

24

$$1 \times 24 = 24$$

$$2 \times 12 = 24$$

$$3 \times 8 = 24$$

$$4 \times 6 = 24$$

Παράγοντες (ή Διαιρέτες) του 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

2. Ποιοι από τους πιο κάτω αριθμούς είναι κοινοί διαιρέτες του 15 και του 40;

2    10    5    4

Λύση:

Διαιρέτες του 15: 1, 3, 5, 15

Διαιρέτες του 40: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40

Κοινός διαιρέτης του 15 και του 40 είναι μόνο το 5.

- **Κριτήριο Διαιρετότητας με το 2**

Ένας αριθμός διαιρείται με το 2, αν και μόνο αν το ψηφίο των μονάδων του είναι 0, 2, 4, 6 ή 8.

Παράδειγμα:

Ο αριθμός 456 διαιρείται με το 2, γιατί το ψηφίο των μονάδων του είναι 6.

- **Κριτήριο Διαιρετότητας με το 5**

Ένας αριθμός διαιρείται με το 5, αν και μόνο αν το ψηφίο των μονάδων του είναι 0 ή 5.

Παράδειγμα:

Ο αριθμός 345 διαιρείται με το 5, γιατί το ψηφίο των μονάδων του είναι 5.

- **Κριτήριο Διαιρετότητας με το 10**

Ένας αριθμός διαιρείται με το 10, αν και μόνο αν το ψηφίο των μονάδων του είναι 0.

Παράδειγμα:

Ο αριθμός 240 διαιρείται με το 10, γιατί το ψηφίο των μονάδων του είναι 0.

- **Κριτήριο Διαιρετότητας με το 4**

Ένας αριθμός διαιρείται με το 4, αν και μόνο αν ο αριθμός που σχηματίζεται από τα δύο τελευταία ψηφία του είναι πολλαπλάσιο του 4.

Παράδειγμα:

Ο αριθμός 324 διαιρείται με το 4, γιατί ο αριθμός 24 που σχηματίζεται από τα δύο τελευταία ψηφία του διαιρείται με το 4.

Να βρεις τον αριθμό, με βάση τις πληροφορίες.



Αθηνά

Ο αριθμός του σπιτιού μου:

- Είναι ανάμεσα στο 35 και το 55.
- Είναι πολλαπλάσιο του 8.
- Διαιρείται με το 6.

Ο αριθμός των μελών ενός θιάσου:

- Είναι διψήφιος. Είναι πολλαπλάσιο του 7.
- Δεν έχει ως παράγοντα το 4.
- Έχει άθροισμα ψηφίων 10.



Απόλλωνας

(α) Να γράψεις τα επόμενα δέκα πολλαπλάσια κάθε αριθμού.

Πολλαπλάσια του 2: 2

Πολλαπλάσια του 5: 5

Πολλαπλάσια του 10: 10

(β)

Κριτήρια διαιρετότητας είναι οι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να διακρίνουμε κατά πόσο ένας αριθμός διαιρείται ακριβώς από κάποιον άλλο αριθμό.

Να παρατηρήσεις τους αριθμούς που έγραψες στο ερώτημα (α) και να διατυπώσεις το κριτήριο διαιρετότητας:

(i) του 2:

---

---

(ii) του 5:

---

---

(iii) του 10:

---

(γ) Να σημειώσεις ✓ στην κατάλληλη στήλη του πίνακα, όπως στο παράδειγμα.

Αριθμός	Διαιρείται με το 2	Διαιρείται με το 5	Διαιρείται με το 10
25		✓	
42			
75			
300			
111			
1071			
882			
1230			
285			
2784			

(δ) (i) Αν ένας αριθμός διαιρείται με το 10, διαιρείται πάντα και με το 5; Να εξηγήσεις.

(ii) Αν ένας αριθμός διαιρείται και με το 2 και με το 5, διαιρείται πάντα και με το 10; Να εξηγήσεις.

# Δραστηριότητες

1. Να βάλεις σε κύκλο τους αριθμούς που:

Διαιρούνται με το 2:	12	134	789	1000	475	13 456
Διαιρούνται με το 5:	156	3000	155	25	187 980	507
Διαιρούνται με το 10:	30	55	1348	500	610	8000

2. (α) Να γράψεις τρεις αριθμούς που διαιρούνται ταυτόχρονα με το 2 και με το 5.

(β) Να γράψεις τρεις τριψήφιους αριθμούς που διαιρούνται με το 2, αλλά δεν διαιρούνται με το 5.

3. (α) Να γράψεις τον μεγαλύτερο τριψήφιο αριθμό που διαιρείται με το 2.

--	--	--

(β) Να γράψεις τον μικρότερο τριψήφιο αριθμό που διαιρείται με το 5.

--	--	--

Ο Θανάσης ξέχασε τα 3 τελευταία ψηφία του κωδικού του ηλεκτρονικού του υπολογιστή. Θυμάται ότι το ψηφίο των δεκάδων είναι τριπλάσιο από το ψηφίο των εκατοντάδων και ότι ο αριθμός του κωδικού διαιρείται ακριβώς με το 2 και το 5.

Ποιος μπορεί να είναι ο κωδικός; Να βρεις όλες τις λύσεις.

5			
5			
5			



## Δραστηριότητες

1. Να βάλεις σε κύκλο τους αριθμούς που διαιρούνται με το 4.

12	23	24	65	120	432	996
64	57	3426	7813	39 840	45 714	649

2. Να συμπληρώσεις το ψηφίο που λείπει, ώστε ο αριθμός να διαιρείται με το 4.

(α)  $533\boxed{\phantom{0}}$

(β)  $4715\boxed{\phantom{0}}8$

(γ)  $9\boxed{\phantom{0}}$

(δ)  $13601\boxed{\phantom{0}}$

3. Να συμπληρώσεις το ψηφίο που λείπει ώστε ο αριθμός:

(α)  $4254\boxed{\phantom{0}}8$  να διαιρείται με το 2 και το 4

(β)  $6\boxed{\phantom{0}}$  να διαιρείται με το 4 και το 5

(γ)  $355\boxed{\phantom{0}}$  να διαιρείται με το 2, το 5 και το 10

(δ)  $47\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}$  να διαιρείται με το 4, με το 5 και το 10

(ε)  $25202\boxed{\phantom{0}}$  να μην διαιρείται με το 4

(στ)  $724\boxed{\phantom{0}}$  να διαιρείται με το 2, αλλά να μην διαιρείται με το 5 και το 10



- **Πρώτος αριθμός** είναι κάθε αριθμός μεγαλύτερος από το 1 που έχει μόνο δύο διαιρέτες, τον εαυτό του και το 1.

Παράδειγμα:

Ο αριθμός 19 διαιρείται μόνο με το 1 και με τον εαυτό του.

- **Σύνθετος αριθμός** είναι κάθε αριθμός μεγαλύτερος από το 1 που έχει περισσότερους από δύο διαιρέτες.

Παράδειγμα:

Ο αριθμός 21, εκτός από τον εαυτό του και το 1, διαιρείται με το 3 και το 7. Άρα, ο αριθμός 21 είναι σύνθετος.

- Ο αριθμός 1 δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος αριθμός. Διαιρείται μόνο με τον εαυτό του.

1. (α) Να βρεις τους διαιρέτες των πιο κάτω αριθμών, όπως στο παράδειγμα.

<b>Αριθμός</b>	<b>Διαιρέτες</b>
<u>Παράδειγμα:</u> 24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
23	
28	
11	
30	
31	

(β) Ποιοι από τους πιο πάνω αριθμούς είναι σύνθετοι; \_\_\_\_\_

(γ) Ποιοι από τους πιο πάνω αριθμούς είναι πρώτοι; \_\_\_\_\_

Να βάλεις σε κύκλο τον αριθμό που σκέφτεται κάθε παιδί.

(α)



Είναι περιττός και σύνθετος αριθμός.

(i) 71    (ii) 56    (iii) 81    (iv) 37

(β)

Είναι άρτιος και πρώτος αριθμός.

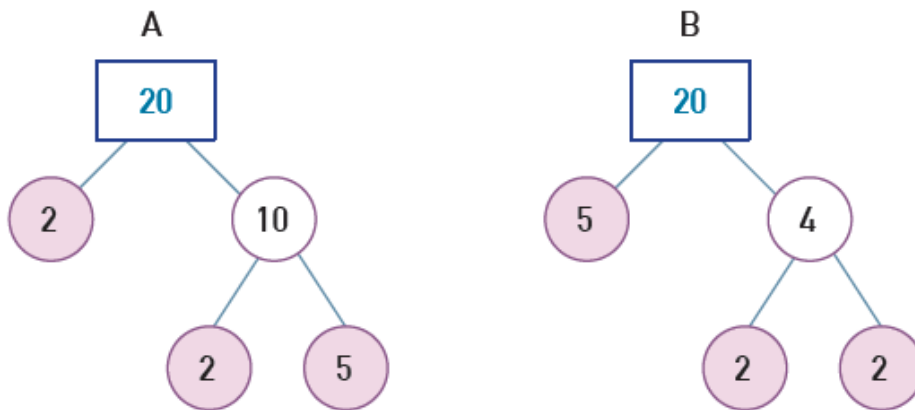
(i) 12    (ii) 3    (iii) 6    (iv) 2



- Κάθε σύνθετος αριθμός μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων παραγόντων, αν δεν λάβουμε υπόψη τη σειρά των παραγόντων στο γινόμενο.

Παράδειγμα:

Το 20 μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, χρησιμοποιώντας δένδροδιάγραμμα, όπως πιο κάτω:



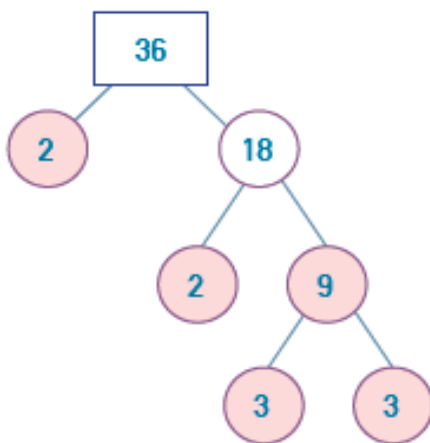
Ο μοναδικός τρόπος γραφής του αριθμού 20 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι:  
 $20 = 2 \times 2 \times 5$

# Παράδειγμα

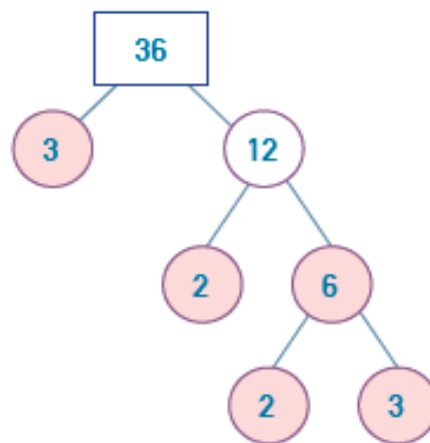
1. Να αναλύσεις τον αριθμό 36 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, ξεκινώντας από διαφορετικούς παράγοντες κάθε φορά.

**Λύση:**

Ο αριθμός 36 αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, όπως φαίνεται πιο κάτω:



$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$



$$36 = 3 \times 2 \times 2 \times 3$$

(α) Η Ζωή και ο Χάρης αναλύουν τον αριθμό 30 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων. Να συνεχίσεις την εργασία της Ζωής και του Χάρη.

A factor tree for the number 30. The root node is 30 in a box. It branches into 2 (circle) and 15 (circle). 15 branches into two empty circles. To the right is an illustration of a woman with the name Ζωή.

30 = \_\_\_\_\_

A factor tree for the number 30. The root node is 30 in a box. It branches into 5 (circle) and 6 (circle). 6 branches into two empty circles. To the right is an illustration of a man with the name Χάρης.

30 = \_\_\_\_\_

- **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)** δύο ή περισσότερων αριθμών ονομάζεται ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης των αριθμών αυτών.
- Για να υπολογίσουμε τον ΜΚΔ δύο ή περισσότερων αριθμών, καταγράφουμε όλους τους διαιρέτες κάθε αριθμού. Στη συνέχεια, βρίσκουμε τον μεγαλύτερο διαιρέτη που είναι κοινός σε όλους τους αριθμούς.

Παράδειγμα:

Ποιος είναι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ) του 20 και του 24;

Διαιρέτες του 20: 1, 2, 4, 5, 10, 20

Διαιρέτες του 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης του 20 και του 24 είναι το 4.

$$\text{ΜΚΔ}(20, 24) = 4$$

## Παραδείγματα

1. Να υπολογίσεις τον ΜΚΔ του 30 και του 36.

**Λύση:**

Διαιρέτες του 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

Διαιρέτες του 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

$$\text{ΜΚΔ}(30, 36) = 6$$

Καταγράφω όλους τους διαιρέτες του 30 και του 36. Στη συνέχεια, υπολογίζω τον ΜΚΔ.

2. Η κυρία Ευγενία θα ετοιμάσει ίδια πακέτα που περιέχουν χυμό πορτοκάλι και χυμό ροδάκινο. Έχει στη διάθεσή της 48 χυμούς πορτοκάλι και 36 χυμούς ροδάκινο.

(α) Ποιος είναι ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός ίδιων πακέτων που μπορεί να ετοιμάσει η κυρία Ευγενία;

(β) Πόσους χυμούς πορτοκάλι και πόσους χυμούς ροδάκινο θα περιέχει κάθε πακέτο;

**Λύση:**

(α) Διαιρέτες του 48: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

Διαιρέτες του 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

$\text{ΜΚΔ}(48, 36) = 12$

Υπολογίζω τον ΜΚΔ του 48 και του 36, για να βρω τον μεγαλύτερο δυνατό αριθμό πακέτων.

Ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός ίδιων πακέτων που μπορεί να ετοιμάσει είναι 12.

(β) Χυμοί πορτοκάλι:  $48 \div 12 = 4$

Χυμοί ροδάκινο:  $36 \div 12 = 3$

Κάθε πακέτο θα περιέχει 4 χυμούς πορτοκάλι και 3 χυμούς ροδάκινο.









Ο κύριος Βασίλης έχει στη διάθεσή του 16 τουλίπες και 24 μαργαρίτες. Θα χρησιμοποιήσει όλα τα λουλούδια, για να φτιάξει ίδιες ανθοδέσμες.

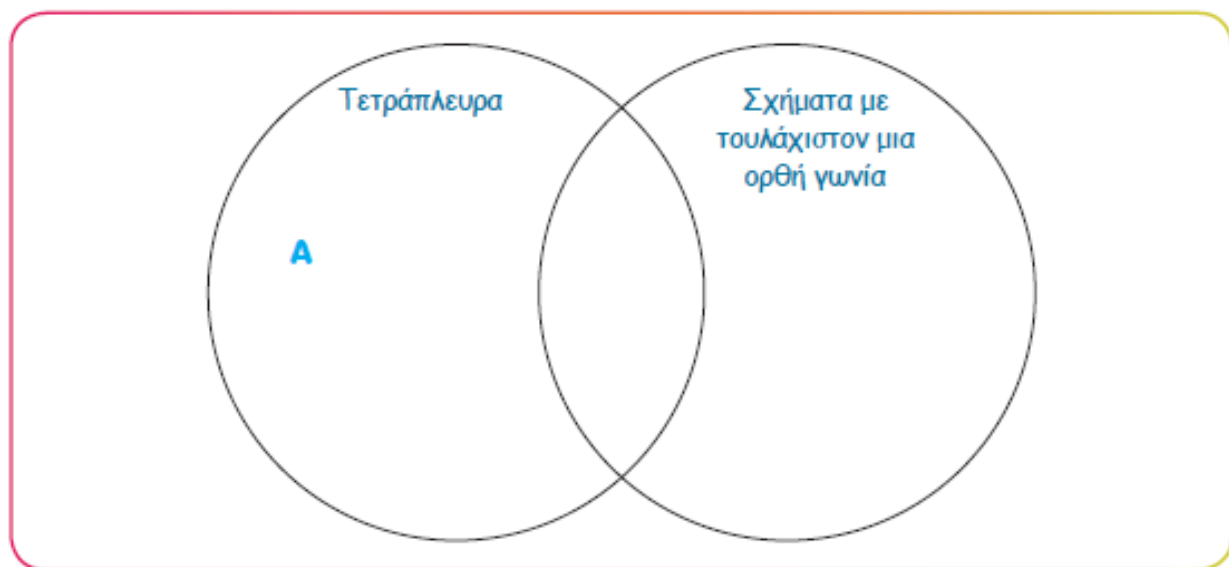
(α) Πόσες ίδιες ανθοδέσμες μπορεί να φτιάξει ο κύριος Βασίλης; Να βρεις όλες τις περιπτώσεις.

(β) (i) Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός ίδιων ανθοδεσμών που είναι δυνατόν να φτιάξει ο κύριος Βασίλης; Να εξηγήσεις.

(ii) Πόσες τουλίπες και πόσες μαργαρίτες θα έχει κάθε ανθοδέσμη;

Να τοποθετήσεις τα σχήματα στην κατάλληλη θέση στο βέννειο διάγραμμα,

							
A	B	Γ	Δ	Ε	ΣΤ	Z	H





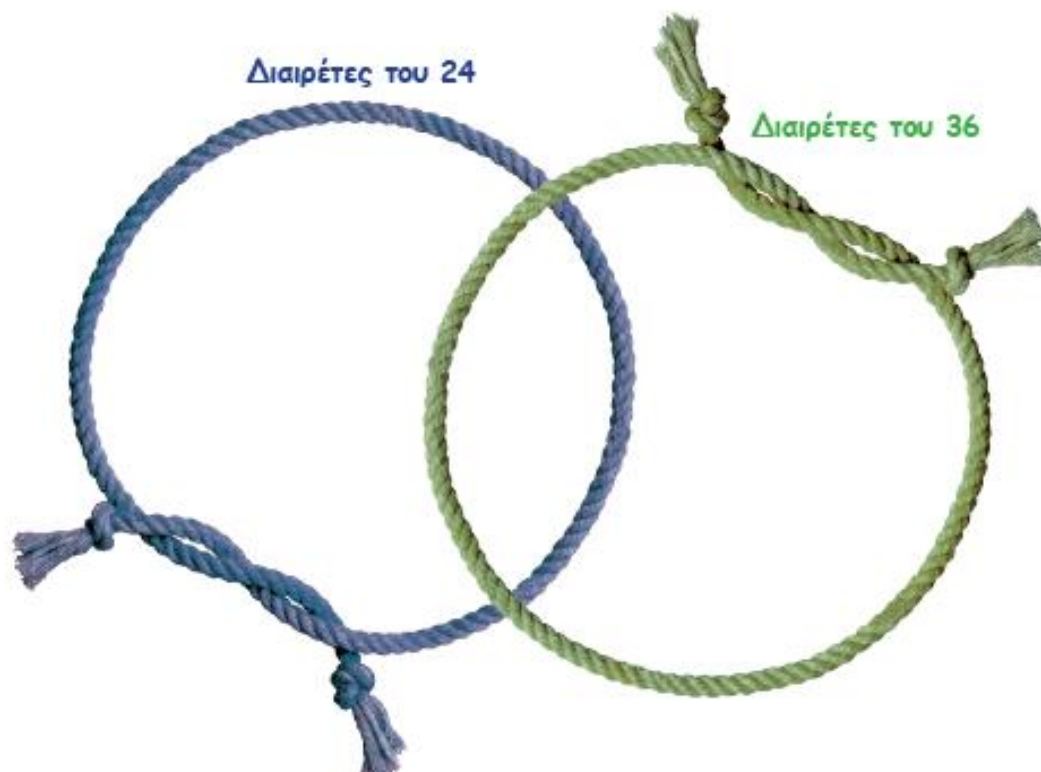
(α) Να γράψεις τους διαιρέτες του 24 και του 36.

Διαιρέτες του 24: \_\_\_\_\_

Διαιρέτες του 36: \_\_\_\_\_

Κοινοί διαιρέτες του 24 και του 36: \_\_\_\_\_

(β) Να σημειώσεις τους διαιρέτες του 24 και του 36 στην κατάλληλη θέση στο πιο κάτω βέννιο διάγραμμα. Να εξηγήσεις.



(γ) Ποιος είναι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ) του 24 και του 36;

---

---

(δ) Με ποιο τρόπο είναι δυνατόν να υπολογίσεις τον ΜΚΔ δύο αριθμών;

- **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΤ)** δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών ονομάζεται το μικρότερο, μη μηδενικό, κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών αυτών.
- Για να υπολογίσουμε το ΕΚΤ δύο ή περισσότερων αριθμών, καταγράφουμε τα πολλαπλάσια κάθε αριθμού. Στη συνέχεια, βρίσκουμε το ελάχιστο πολλαπλάσιο που είναι κοινό σε όλους τους αριθμούς.

Παράδειγμα:

Ποιο είναι το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΤ) του 6 και του 8;

Πολλαπλάσια του 6: 6, 12, 18, **24**, 30, 36, 42, **48**, 54, 60, 66, **72**, ...

Πολλαπλάσια του 8: 8, 16, **24**, 32, 40, **48**, 56, 64, **72**, 80, 88, 96, ...

Το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο του 6 και του 8 είναι το 24.

$$\text{ΕΚΤ} [6, 8] = 24$$

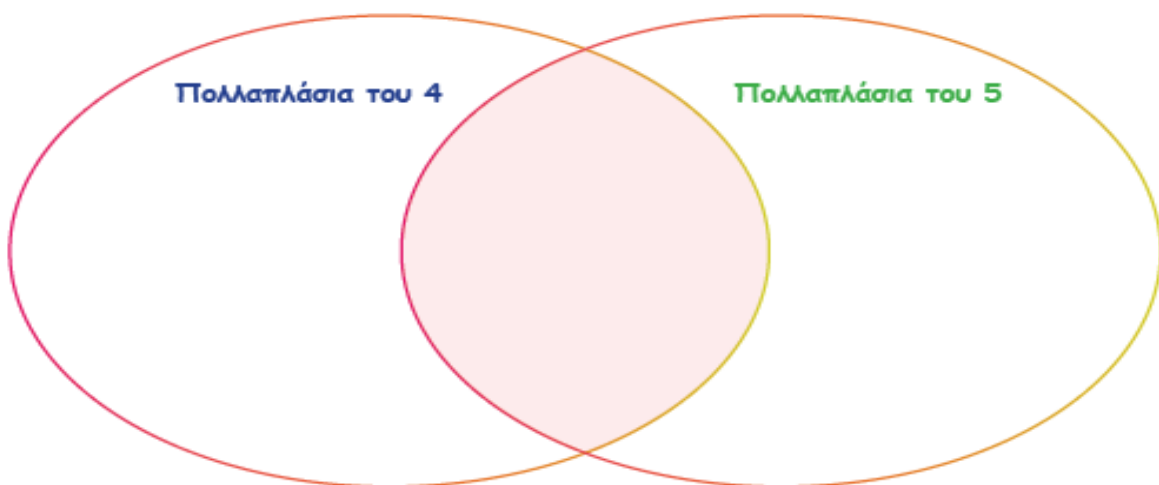
(α) Να γράψεις τα πολλαπλάσια του 4 και του 5 από το 1 μέχρι το 40.

Πολλαπλάσια του 4: \_\_\_\_\_

Πολλαπλάσια του 5: \_\_\_\_\_

Κοινά πολλαπλάσια του 4 και του 5 μέχρι το 40: \_\_\_\_\_

(β) Να σημειώσεις τα πολλαπλάσια του 4 και του 5 (μέχρι το 40) στην κατάλληλη θέση στο πιο κάτω βέννιο διάγραμμα. Να εξηγήσεις.



(γ) Ποιο είναι το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) του 4 και του 5;

---

---

(δ) Με ποιο τρόπο είναι δυνατόν να υπολογίσεις το ΕΚΠ δύο αριθμών;

2. Σε ένα σιντριβάνι υπάρχουν δύο μηχανισμοί που εκτοξεύουν νερό. Ο πρώτος εκτοξεύει νερό κάθε 8 δευτερόλεπτα. Ο δεύτερος εκτοξεύει νερό κάθε 12 δευτερόλεπτα. Μετά από πόσα δευτερόλεπτα από τη στιγμή που θα τεθούν σε λειτουργία και οι δύο μηχανισμοί, θα εκτοξεύσουν ξανά ταυτόχρονα νερό;

**Λύση:**

Πολλαπλάσια του 8: 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, ...

Πολλαπλάσια του 12: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, ...

ΕΚΠ [8, 12] = 24

Υπολογίζω το ΕΚΠ του 8 και του 12, για να βρω πότε θα εκτοξεύσουν νερό και οι δύο μηχανισμοί ξανά ταυτόχρονα.

Οι δύο μηχανισμοί θα εκτοξεύσουν ξανά ταυτόχρονα νερό μετά από 24 δευτερόλεπτα από τη στιγμή που θα τεθούν σε λειτουργία.

## ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Να επιλύσεις τα προβλήματα.

- (α) Ο Μάξιμος παίζει καλαθόσφαιρα κάθε 7 μέρες και κάνει κολύμπι κάθε 6 μέρες. Αν σήμερα έκανε και τα δύο αθλήματα, μετά από πόσες μέρες θα κάνει ξανά και τα δύο αθλήματα την ίδια μέρα;



2. Δύο γραμμές λεωφορείων που ακολουθούν διαφορετική διαδρομή ξεκινούν τις διαδρομές τους από την ίδια αφετηρία στις 9:00 π.μ. Η γραμμή Α ξαναπερνά από το σημείο της αφετηρίας κάθε 10 λεπτά, ενώ η γραμμή Β κάθε 15 λεπτά. Ύστερα από πόσα λεπτά θα συναντηθούν ξανά μαζί στην αφετηρία τα δύο λεωφορεία; Να επεξηγήσεις.



Να επιλύσεις τα προβλήματα.

- (α) Η Ισμήνη έχει 45 κόκκινες και 30 ροζ χάντρες. Θέλει να τις χρησιμοποιήσει όλες και να φτιάξει με αυτές όσο το δυνατόν περισσότερα ίδια βραχιόλια.
- i. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός ίδιων βραχιολιών που μπορεί να φτιάξει η Ισμήνη;
  - ii. Πόσες χάντρες από το κάθε χρώμα θα έχει το κάθε βραχιόλι;

Δύο μηχανές συσκευάζουν ένα προϊόν. Η μηχανή Α χρειάζεται 20 δευτερόλεπτα για να συσκευάσει το προϊόν και η μηχανή Β 15 δευτερόλεπτα. Αν ξεκινήσουν και οι δύο μηχανές ταυτόχρονα να συσκευάζουν το προϊόν, μετά από πόσα λεπτά θα ξεκινήσουν ξανά ταυτόχρονα να συσκευάζουν το προϊόν;

Ο μαθηματικός Christian Goldbach υποστήριξε ότι οποιοσδήποτε άρτιος αριθμός, εκτός από το 2, μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών. Για παράδειγμα:



$$10 = 3 + 7$$

$$16 = 3 + 13$$

$$24 = 7 + 17$$

Να γράψεις τους πιο κάτω άρτιους αριθμούς ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών.

$$12 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$36 = \underline{\hspace{2cm}}$$

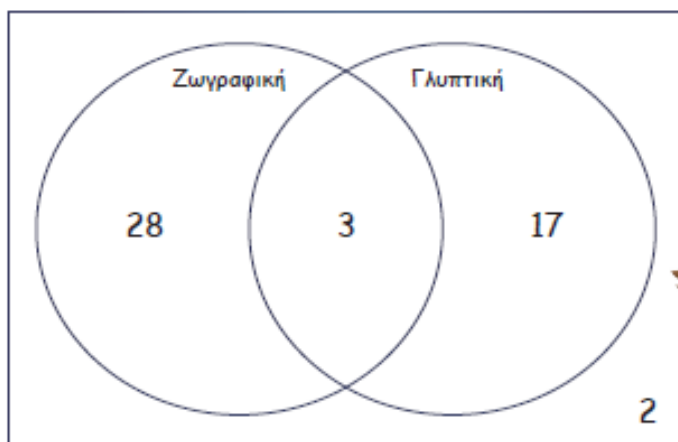
$$18 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$40 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$28 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$50 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Το πιο κάτω βέννειο διάγραμμα παρουσιάζει τις δηλώσεις όλων των παιδιών ενός ομίλου σε μια ημερίδα γνωριμίας με τέχνες.



(α) Πόσα παιδιά θα ασχοληθούν μόνο με τη γλυπτική;

(β) Πόσα παιδιά θα ασχοληθούν και με τις δύο τέχνες;

(γ) Πόσα παιδιά θα ασχοληθούν με τη ζωγραφική;

(δ) Πόσα παιδιά δεν θα ασχοληθούν ούτε με τη ζωγραφική ούτε με τη γλυπτική;

(ε) Πόσα παιδιά συμμετέχουν στον όμιλο;

Στο πλακόστρωτο ενός σχολείου θα τοποθετηθούν τετράγωνες τσιμεντένιες πλάκες ίδιου μεγέθους. Το πλακόστρωτο έχει μήκος 18 m και πλάτος 10 m. Ποιο είναι το μεγαλύτερο μήκος πλευράς που μπορεί να έχουν οι πλάκες που θα τοποθετηθούν στο πλακόστρωτο; Να επεξηγήσεις.

Δύο τηλεκατευθυνόμενα αυτοκινητάκια που κινούνται με τον ίδιο ρυθμό, ξεκινούν από το σημείο A, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Το ένα αυτοκινητάκι κινείται γύρω από ένα ορθογώνιο με μήκος 5 m και πλάτος 3 m και το άλλο αυτοκινητάκι κινείται γύρω από ένα τετράγωνο με μήκος πλευράς 5 m. Ποια είναι η μικρότερη απόσταση που πρέπει να διανύσει το κάθε αυτοκινητάκι, ώστε να ξανασυναντηθούν στο σημείο A για πρώτη φορά; Να εξηγήσεις.

