Ανισώσεις α΄ βαθμού με έναν άγνωστο λέμε κάθε ανίσωση που περιέχει μία μεταβλητή και η οποία αληθεύει για ορισμένες τιμές της μεταβλητής.

Ιδιότητες ανισοτήτων

1) Αν και στα δύο μέλη μιας ανίσωσης προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την ίδια φορά.

Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha + \beta < \beta + \gamma$ και $\alpha - \beta < \beta - \gamma$

Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ και $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$

2) Αν και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την ίδια φορά.

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$

Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$.

3) Αν και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με αντίστροφη φορά.

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$.

Επίλυση ανίσωσης

Για να λύσουμε μια ανίσωση ακολουθούμε παρόμοιο τρόπο που ακολουθούμε στην επίλυση εξισώσεων. Δηλαδή:

- **Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών**
- **Κάνουμε τους σημειωμένους πολλαπλασιασμούς**
- **Χωρίζουμε γνωστούς απο αγνώστους**
- **Κάνουμε αναγωγές ομοίων όρων**
- **Φτάνουμε στη μορφή $\alpha \cdot x > \beta$ ή $\alpha \cdot x < \beta$**

Διερεύνηση της ανίσωσης $\alpha \cdot x > \beta$

Για την ανίσωση $\alpha \cdot x > \beta$ ισχύει:

1) Αν είναι $\alpha > 0$, τότε έχουμε $x > \frac{\beta}{\alpha}$

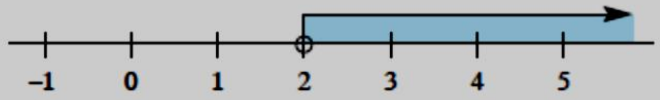
2) Αν είναι $\alpha < 0$, τότε έχουμε $x < \frac{\beta}{\alpha}$

3) Αν είναι $\alpha = 0$, τότε η ανίσωση γίνεται $0 \cdot x > \beta$, η οποία είναι αδύνατη όταν $\beta > 0$ ή αληθεύει για κάθε τιμή του αριθμού x, όταν $\beta < 0$
Ανάλογα συμπεράσματα μπορούμε να διατυπώσουμε για την ανίσωση $\alpha x < \beta$.

Παρατηρήσεις – Σχόλια

– Επειδή όταν λύνουμε μια ανίσωση, συνήθως δε βρίσκουμε μια μόνο λύση, αλλά άπειρες, γι' αυτό παριστάνουμε αυτές τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.
Δηλαδή στην ανίσωση $3x - x > 4$ έχουμε

$$2x > 4$$
$$x > \frac{4}{2}$$
$$x > 2$$



Το λευκό κυκλάκι πάνω ακριβώς απο το 2 δείχνει ότι ο αριθμός αυτός δεν είναι λύση της ανίσωσης.
Στην ανίσωση

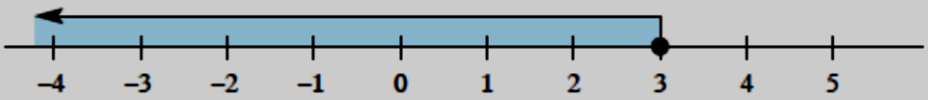
$5x \leq 9 + 2x$

$5x - 2x \leq 9$

$3x \leq 9$

$x \leq \frac{9}{3}$

$x \leq 3$



Το μαύρο κυκλάκι πάνω ακριβώς από το 3 δείχνει ότι ο αριθμός αυτός είναι λύση της ανίσωσης.

Βήματα λύσης μιας ανίσωσης α΄ βαθμού:

1. απαλοιφή παρονομαστών (πολ/ζουμε με το Ε.Κ.Π όλους τους όρους)
2. απλοποιούμε τα κλάσματα
3. κάνουμε τις πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα)
4. χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους (όποιος όρος μεταφέρεται από το α΄μελος στο β΄μελος ή από το β΄ μελος στο α΄ αλλάζει πρόσημο)
5. κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων - πράξεις
6. διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου

ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Αν ο συντελεστής του αγνώστου είναι αρνητικός ΑΛΛΑΖΟΥΜΕ την φορά της ανισότητας.

Παραδείγματα:

1) Να λύσετε την ανίσωση $19 - (x + 9) \geq 8(x - 1)$

Λύση

Έχουμε

$19 - (x + 9) \geq 8(x - 1)$

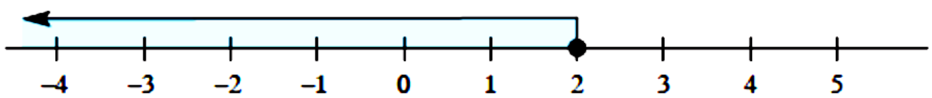
$19 - x - 9 \geq 8x - 8$

$-x - 8x \geq -8 - 19 + 9$

$-9x \geq -18$

$\dfrac{-9x}{-9} \leq \dfrac{-18}{-9}$ **(Όταν διαιρούμε με αρνητικό αριθμό αλλάζει η φορά της ανίσωσης)**

$x \leq 2$



2) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{3(x-4)}{10}-\frac{5x-1}{20}\geq\frac{x+5}{6}$

Λύση

΄Εχουμε: $\frac{3(x-4)}{10}-\frac{5x-1}{20}\geq\frac{x+5}{6}$

$\frac{3x-12}{10}-\frac{5x-1}{20}\geq\frac{x+5}{6}$ $\qquad$ **Ε.Κ.Π.(6,10,20) = 60**

$60\cdot\frac{3x-12}{10}-60\cdot\frac{5x-1}{20}\geq 60\cdot\frac{x+5}{6}$

$6\cdot(3x-12)-3(5x-1)\geq 10\cdot(x+5)$

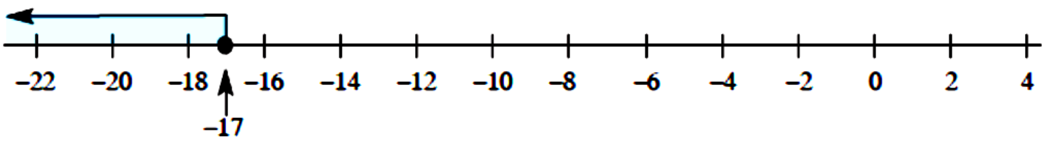
$18x-72-15x+3\geq 10x+50$

$18x-15x-10x\geq 50+72-3$

$-7x\geq 119$

$\frac{-7x}{-7}\leq\frac{119}{-7}$

$x\leq -17$



3.Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x-1}{2}+\frac{2x+3}{4}<\frac{x}{6}$

Λύση $\qquad 12\,\frac{x-1}{2}+12\,\frac{2x+3}{4}<12\,\frac{x}{6}$ $\qquad$ ΕΚΠ(2,3,6)=12

$6(x-1)+3(2x+3)<2x$

$6x-6+6x+9<2x$

$10x<-3$

$x<-\frac{3}{10}$

4.Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις

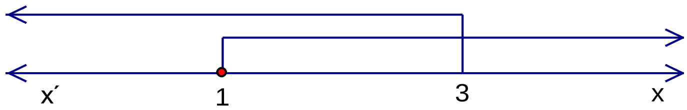
$$3x-1<x+5 \quad \text{και} \quad 2-\frac{x}{2}\leq x+\frac{1}{2}$$

Λύση

$3x-1<x+5 \iff 2x<6 \iff x<3$

$2-\frac{x}{2}\leq x+\frac{1}{2} \iff 4-x\leq 2x+1 \iff -3x\leq -3 \iff x\geq 1$

Συναλήθευση $\quad 1\leq x<3$



5.

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{2x-1}{3}-\frac{2x-5}{6}>\frac{x+2}{3}$

Λύση

Έχουμε:

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{2x-5}{6}>\frac{x+2}{3} \qquad \text{Ε.Κ.Π.}(3,6)=6$$

$$6\cdot\frac{2x-1}{3}-6\cdot\frac{2x-5}{6}>6\cdot\frac{x+2}{3}$$

$2\cdot(2x-1)-(2x-5)>2\cdot(x+2)$

$4x-2-2x+5>2x+4$

$4x-2x-2x>4+2-5$

$0\cdot x>1$

Η ανίσωση είναι αδύνατη

5) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

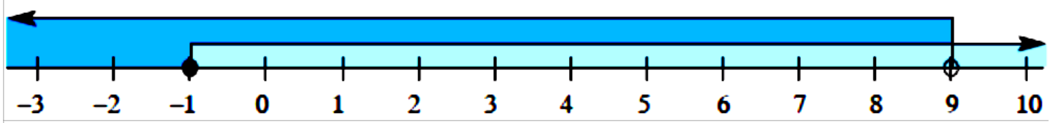
$2(x-1)-3(x+1)\geq -2(x+3)$ και $3(x-3)+6<2(x+3)$

Λύση

Λύνουμε χωριστά τις δύο ανισώσεις:

$2(x-1)-3(x+1)\geq -2(x+3)$	$3(x-3)+6<2(x+3)$
$2x-2-3x-3\geq -2x-6$	$3x-9+6<2x+6$
$2x-3x+2x\geq -6+2+3$	$3x-2x<6-6+9$
$x\geq -1$	$x<9$

Βρίσκουμε τις κοινές λύσεις με τη βοήθεια του άξονα:



Άρα οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι οι αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $-1\leq x<9$