Μετρήσεις-Σφάλματα

Εισαγωγή

Πολλές φορές θα έχει τύχει να ακούσουμε τη λέξη πείραμα, είτε στο μάθημα είτε σε κάποια είδηση που αφορά τη Φυσική, τη Χημεία ή τη Βιολογία. Είναι όμως γενικώς παραδεκτό ότι το πείραμα δεν έχει λάβει, μέχρι στιγμής, τη θέση που του αρμόζει στην εκπαίδευση και τη διδασκαλία των φυσικών επιστημών.
Γιατί όμως το πείραμα είναι τόσο σημαντικό; Στην πραγματικότητα, η μοναδική πηγή γνώσης στις θετικές επιστήμες και ειδικά στη Φυσική είναι το πείραμα. Ας δούμε λίγο την εξέλιξη της σκέψης του ανθρώπινου νου, καθώς παρατηρεί το περιβάλλον του.

1. Όλα ξεκινούν με το πείραμα (**παρατήρηση**), όπου διαπιστώνουμε ότι συμβαίνουν κάποια πράγματα τα οποία υπερβαίνουν τα όρια των μέχρι τώρα γνώσεων μας.
2. Αμέσως **διαμορφώνουμε μια νέα θεωρία** που να μπορεί να εξηγεί τα καινούρια φαινόμενα, καθώς επίσης και τα φαινόμενα που έχουμε ήδη εξηγήσει με παλαιότερες θεωρίες.
3. Με βάση τη νέα θεωρία, **προβλέπουμε** νέα φαινόμενα που είναι δυνατόν να παρατηρηθούν πειραματικά.
4. Πραγματοποιούμε **νέα πειράματα** και αν επιβεβαιωθούν οι προβλέψεις μας, τότε επιβεβαιώνεται και η θεωρία. Αν υπάρξουν αποκλίσεις από τις προβλέψεις, τότε **βελτιώνουμε τη θεωρία**. Σε κάθε περίπτωση πρέπει να **προσδιορίσουμε τα όρια ισχύος της θεωρίας**.
5. Πραγματοποιούμε να πειράματα που ξεπερνούν τα όρια της θεωρίας μας κ.ο.κ.

Όπως γίνεται κατανοητό, δεν μπορεί ποτέ κάποιος να ισχυριστεί ότι γνωρίζει πλήρως κάποιο τομέα της Φυσικής. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει απόλυτη γνώση. Μπορούμε όμως πάντα να ελέγχουμε τη γνώση μας ως προς την ορθότητά της και εδώ είναι η συμβολή του πειράματος. **Το πείραμα λοιπόν αποτελεί κριτήριο ορθότητας της γνώσης μας.**

Στόχοι του εργαστηρίου στα πλαίσια του σχολείου

1. Να διαπιστώσουν οι μαθητές, στην πράξη, την ισχύ των νόμων της φυσικής που διδάσκονται στη θεωρία.
2. Να εξοικειωθούν με τα όργανα του εργαστηρίου (τρόπος λειτουργίας, χρήση, ασφάλεια).
3. Να αποκτήσουν πείρα στη διεξαγωγή πειραμάτων (διαδικασία σε βήματα, προτεραιότητες).
4. Να αποκτήσουν πείρα στην επεξεργασία των αποτελεσμάτων ενός πειράματος.
5. Να κατανοήσουν τις δυσκολίες με τις οποίες έρχεται αντιμέτωπος ο ερευνητής στην προσπάθειά του να μετρήσει τα μεγέθη που τον ενδιαφέρουν.

Μια από τις σημαντικότερες δυσκολίες που συναντά ο φυσικός στη διάρκεια ενός πειράματος, είναι τα **σφάλματα**.

Ανάλυση σφαλμάτων

Όπως είπαμε, τα σφάλματα είναι μια σημαντική δυσκολία στην προσπάθεια του ερευνητή να κάνει μετρήσεις. Ας τα πάρουμε όμως από την αρχή.

Μέτρηση

Μέτρηση ονομάζουμε τη σύγκριση ενός μεγέθους που μας ενδιαφέρει, με κάποιο άλλο ομοειδές που βρίσκεται στη συσκευή μας και το ονομάζουμε μονάδα μέτρησης. Έτσι για να μετρήσουμε το μήκος ενός μολυβιού, συγκρίνουμε το μολύβι με τη μονάδα μέτρησης "εκατοστό" που βρίσκεται στο χάρακά μας (συσκευή).

$\boldsymbol{\Sigma\varphi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\tau\alpha}$

Σφάλμα ονομάζεται η αβεβαιότητα στη μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους. Προσοχή, η έννοια του σφάλματος δεν αναφέρεται σε πειραματικό λάθος, αλλά στην αβεβαιότητα σχετικά με την ακρίβεια της μέτρησης που μπορεί να οφείλεται:

- στα όργανα μέτρησης
- στην πειραματική διαδικασία
- στις συνθήκες του πειράματος

Με τον υπολογισμό του σφάλματος, η μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους θα αναγράφεται ως: $\boldsymbol{T\iota\mu}$ή $\pm$ $\boldsymbol{\sigma\varphi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha}$.
Ο υπολογισμός των σφαλμάτων είναι απαραίτητος, γιατί διαφορετικά μπορεί να οδηγηθούμε σε εσφαλμένα συμπεράσματα. Για παράδειγμα, έστω ότι μετράμε την αντίσταση ενός αντιστάτη σε δυο διαφορετικές θερμοκρασίες και βρίσκουμε R_1=31,77kΩ σε θερμοκρασία T_1=300K και R_2=32,27kΩ σε θερμοκρασία T_2=360K. Αν δεν υπολογίσουμε το σφάλμα δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η αντίσταση μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία. Κι αυτό διότι αν το σφάλμα ήταν $\pm 0{,}5k\Omega$, οι τιμές της αντίστασης θα γράφονταν $R_1 = 31{,}77 \pm 0{,}5k\Omega$ και $R_2 = 3{,}27 \pm 0{,}5k\Omega$, που σημαίνει ότι δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα.

Τύποι σφαλμάτων

Συστηματικά σφάλματα: είναι αυτά που οφείλονται:

- στα όργανα (π.χ. κακή βαθμονόμηση ή λανθασμένη χρήση)
- σε εξωτερικούς παράγοντες (π.χ. μεταβολές της θερμοκρασίας ή της υγρασίας κατά τη διάρκεια του πειράματος, που μπορεί να είναι μικρές αλλά επιδρούν στα αποτελέσματα)
- στη μέθοδο που χρησιμοποιούμε για να εκτελέσουμε το πείραμα

Τα συστηματικά σφάλματα συνήθως μετατοπίζουν όλες τις μετρήσεις με συστηματικό τρόπο, με αποτέλεσμα η μέση τιμή να μετατοπίζεται προς ορισμένη κατεύθυνση. Για παράδειγμα αν το χρονόμετρο που χρησιμοποιούμε για να μετρήσουμε το χρόνο, πηγαίνει λίγο πιο αργά τότε όλα τα χρονικά διαστήματα που θα μετρήσουμε θα είναι μικρότερα από τα πραγματικά.

Τυχαία σφάλματα: είναι αυτά που οφείλονται:

- στην ευαισθησία του οργάνου (π.χ. ο χάρακας είναι διαιρεμένος σε χιλιοστά, άρα δεν μπορούμε να ξέρουμε αν ένα μολύβι έχει μήκος 92mm ή 92,3mm. Έτσι είναι καλύτερα να γράψουμε ότι το μήκος του μολυβιού είναι $92{,}0 \pm 0{,}5mm$)
- στον παρατηρητή
- σε εξωτερικές επιδράσεις (π.χ. η μέτρηση της ταχύτητα ενός κινητού στο εργαστήριο επηρεάζεται από την κίνηση του αέρα στο χώρο ή τη σκόνη)

Τα τυχαία σφάλματα δείχνουν τις διακυμάνσεις των μετρήσεων και οδηγούν στην κατανομή των αποτελεσμάτων γύρω από μια μέση τιμή.

Μέση τιμή

Πολλές φορές είναι αδύνατον να εκτιμήσουμε το σφάλμα με βάση την ένδειξη του οργάνου. Σε αυτή την περίπτωση κάνουμε επαναλαμβανόμενες μετρήσεις. Έστω ότι μετράμε κάποιο μέγεθος x, N φορές και οι τιμές είναι $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Η τιμή που βρίσκεται πιο κοντά στην πραγματική είναι η μέση τιμή, που υπολογίζεται από το τύπο:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} \Rightarrow \overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad (1)$$

Το απόλυτο σφάλμα της μέσης τιμής ή αλλιώς τυπική απόκλιση θα δίνεται από τον τύπο:

$$\delta\overline{x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N \cdot (N-1)}}$$

Αν η τιμή ενός μεγέθους είναι $5{,}2 \pm 0{,}2$ και ενός άλλου μεγέθους είναι $6321{,}5 \pm 0{,}2$ τότε έχουμε το ίδιο απόλυτο σφάλμα, όμως στην πραγματικότητα η απόκλιση είναι εντελώς διαφορετική. Γι' αυτό πρέπει να υπολογίζουμε και **το σχετικό σφάλμα:**

$$\sigma\% = \frac{\delta\overline{x}}{\overline{x}} \cdot 100$$

Παράδειγμα

Έστω ότι μετρήσαμε το μήκος μιας αφίσας και βρήκαμε τις παρακάτω τιμές σε cm:

30,32 30,35 30,31 30,37 30,30 30,29 30,34 30,33 30,35 30,32

Με τις τιμές αυτές φτιάχνουμε τον παρακάτω πίνακα:

L_i(cm)	$L_i - \overline{L}$ (cm)	$\left(L_i - \overline{L}\right)^2 cm^2 \cdot 10^{-5}$
30,32	-0,008	6,4
30,35	0,022	48,4
30,31	-0,018	32,4
30,37	0,042	176,4
30,30	-0,028	78,4
30,29	-0,038	144,4
30,34	0,012	14,4
30,33	0,002	0,4
30,35	0,022	48,4
30,32	-0,008	6,4
$\sum_{\iota=1}^{10} L_i = 303{,}28cm$	$\sum_{i=1}^{10}\left(L_i - \overline{L}\right) = 0$	$\sum_{i=1}^{10}\left(L_i - \overline{L}\right)^2 = 5{,}56 \cdot 10^{-3} cm^2$

Με τις τιμές της πρώτης στήλης υπολογίζουμε τη μέση τιμή:

$$\overline{L} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} L_i = \frac{1}{10} \cdot 303{,}28 = 30{,}328cm.$$

Μετά υπολογίζουμε τις διαφορές της δεύτερης στήλης και στη συνέχεια τις υψώνουμε στο τετράγωνο και συμπληρώνουμε την τρίτη στήλη. Αθροίζουμε και με το αποτέλεσμα υπολογίζουμε το απόλυτο σφάλμα:

$$\delta\overline{L} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(L_i - \overline{L}\right)^2}{N \cdot (N-1)}} = \sqrt{\frac{5{,}56 \cdot 10^{-3} cm^2}{10 \cdot 9}} = 0{,}007859884\text{cm}$$

Τελικά γράφουμε για το μήκος της αφίσας:

$$L = (30{,}328 \pm 0{,}008)cm$$

Αυτό σημαίνει ότι η τιμή του μήκους βρίσκεται ανάμεσα στις τιμές 30,320cm και 30,336cm με πιθανότητα 68%.

Το σχετικό σφάλμα θα είναι:

$$\sigma\% = \frac{\delta\overline{L}}{\overline{L}} \cdot 100 = \frac{0{,}008}{30{,}328} \cdot 100 = 0{,}03\%$$

Σημαντικά ψηφία

Σημαντικά ονομάζονται τα ψηφία για τα οποία είμαστε απόλυτα βέβαιοι ότι είναι ακριβή, εκτός από τα μηδενικά που δείχνουν το δεκαδικό. Οι κανόνες για την επιλογή των σημαντικών ψηφίων είναι:

- Ως πρώτο σημαντικό ψηφίο λαμβάνουμε το αριστερότερα μη μηδενικό
- Αν υπάρχει υποδιαστολή, ως τελευταίο σημαντικό ψηφίο λαμβάνουμε το τελευταίο δεξιά, ακόμη κι αν είναι το μηδέν.
- Αν δεν υπάρχει υποδιαστολή, ως τελευταίο σημαντικό ψηφίο λαμβάνουμε το δεξιότερο μη μηδενικό.

Παραδείγματα:

Αριθμός	Σημαντικά ψηφία
0,00023	2
4,00	3
0,0030	2
2356	4
3205	4
3000	1
360	2

Τα σημαντικά ψηφία στις πράξεις

Κατ' αρχήν θα κρατήσουμε την ακρίβεια του αριθμού που έχει τη μικρότερη ακρίβεια.

- Στο αποτέλεσμα της **πρόσθεσης** και της **αφαίρεσης**, το πλήθος των **δεκαδικών** ψηφίων καθορίζεται από τον αριθμό με το μικρότερο πλήθος δεκαδικών ψηφίων π.χ. $52{,}324 + 2{,}3 = 54{,}624 \sim 54{,}6$
- Στο αποτέλεσμα των **πολλαπλασιασμών** και των **διαιρέσεων**, το πλήθος των σημαντικών ψηφίων καθορίζεται από τον αριθμό με το μικρότερο πλήθος σημαντικών ψηφίων π.χ. $3{,}10 \cdot 5{,}013 = 15{,}5403 \sim 15{,}5$

Στρογγυλοποιήσεις

Η στρογγυλοποίηση είναι η απόρριψη των μη σημαντικών ψηφίων. Οι κανόνες στρογγυλοποίησης είναι οι εξής:

- Αρχίζουμε τη στρογγυλοποίηση από το σφάλμα. Κατά τη στρογγυλοποίηση του σφάλματος κρατάμε **ένα σημαντικό ψηφίο** για λιγότερες από 20 μετρήσεις, εκτός αν πρόκειται για το 1 ή το 2, οπότε κρατάμε δύο σημαντικά. Για να το κάνουμε αυτό ακολουθούμε τα εξής βήματα:
    - Βρίσκουμε το σημαντικό ψηφίο που μας ενδιαφέρει.
    - εξετάζουμε το αμέσως επόμενο και
        - αν είναι μεγαλύτερο του 5 αυξάνουμε το σημαντικό κατά 1 και απορρίπτουμε τα υπόλοιπα ψηφία.
        - αν είναι μικρότερο του 5 αφήνουμε το σημαντικό ως έχει και απορρίπτουμε τα υπόλοιπα ψηφία.
        - αν είναι ίσο με 5 εξετάζουμε τι υπάρχει μετά και αν υπάρχει έστω και ένα ψηφίο διάφορο του 0, αυξάνουμε το σημαντικό κατά 1 και απορρίπτουμε τα υπόλοιπα ψηφία.
- Στρογγυλοποιούμε τη μέση τιμή κρατώντας τόσα **δεκαδικά**, όσα είναι τα **δεκαδικά** του στρογγυλοποιημένου σφάλματος.

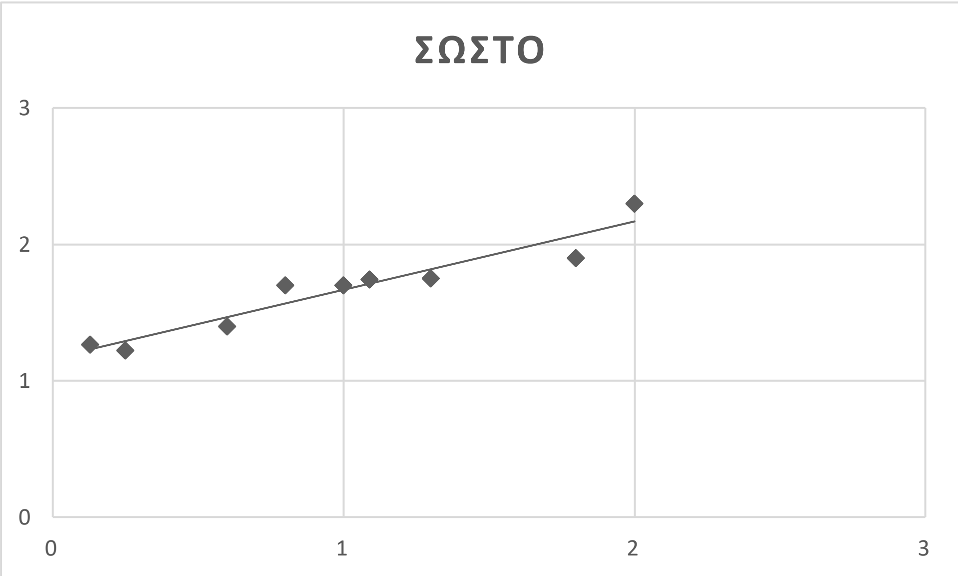
Παραδείγματα

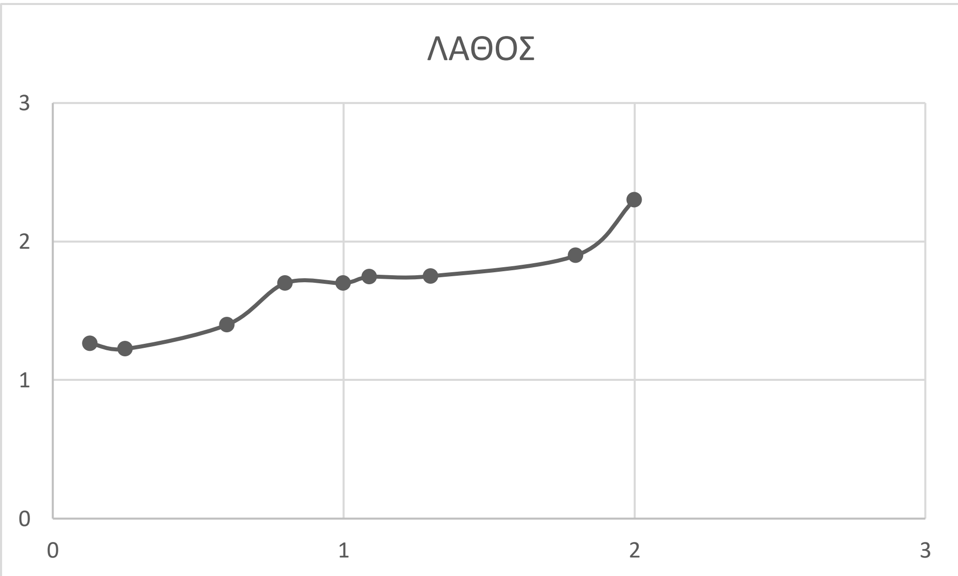
Αρχικά αποτελέσματα		Αποτελέσματα μετά τη στρογγυλοποίηση		Τελική τιμή
$\overline{x}$	$\delta\overline{x}$	$\delta\overline{x}$	$\overline{x}$	x
237,187	0,827	0,8	237,2	$237{,}2 \pm 0{,}8$
2763	23,73	20	2760	2760 ± 20
4857,46	48,342	50	4860	4860 ± 50
0.026475	0.000475	0.0005	0.0265	0.0265 ± 0.0005
3227672,3	3677,289	3700	3227700	3227700 ± 3700
225067	1679	1700	225100	225100 ± 1700

Γραφική παράσταση

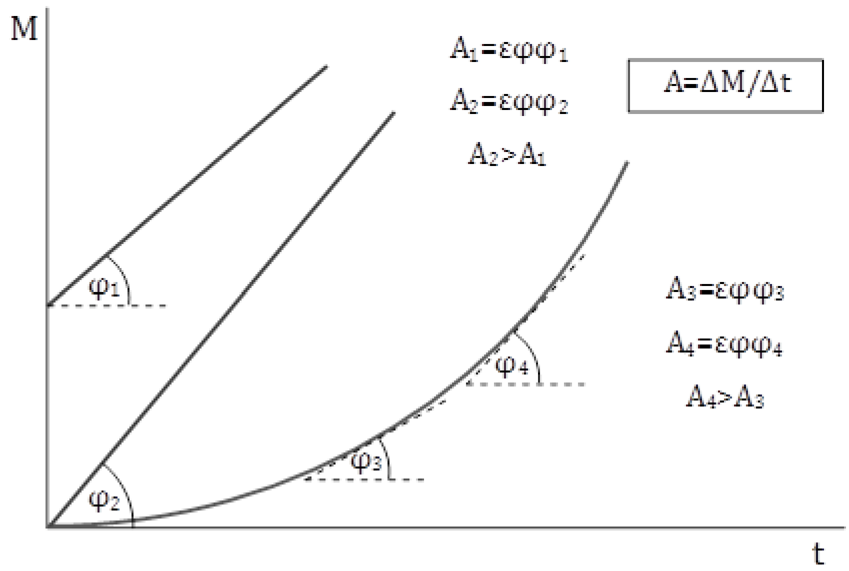
Για να φτιάξουμε μια γραφική παράσταση με τις μετρήσεις που πήραμε από κάποιο πείραμα, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Σε χιλιοστομετρικό (μιλιμετρέ) χαρτί χαράζουμε δυο κάθετους άξονες και στον οριζόντιο άξονα τοποθετούμε την ανεξάρτητη μεταβλητή (π.χ. χρόνος), ενώ στον κατακόρυφο τοποθετούμε την εξαρτημένη (π.χ. θέση). Αυτό γίνεται γράφοντας τα σύμβολα των μεγεθών, καθώς και τις μανάδες μέτρησής τους σε παρένθεση.
2. Βαθμονομούμε τους δυο άξονες. Βάζουμε το μηδέν του κάθε άξονα στο σημείο τομής τους και στη συνέχεια χωρίζουμε τον κάθε άξονα σε ίσα τμήματα. Επιλέγω την κλίμακα ξεχωριστά σε κάθε άξονα, έτσι ώστε τα πειραματικά σημεία να καλύπτουν το δυνατόν μεγαλύτερο μέρος από το χαρτί σχεδίασης. Η κάθε υποδιαίρεση στους άξονες πρέπει να είναι ίση ή ακέραιο πολλαπλάσιο των αριθμών 1,2,5,10.
3. Μετά τη βαθμονόμηση σημειώνουμε στο επίπεδο τα πειραματικά σημεία. Σε κάθε ζεύγος τιμών, αντιστοιχεί ένα πειραματικό σημείο. **Προσοχή!!! Δεν σημειώνουμε ποτέ τις μετρήσεις μας στους άξονες.**
4. Χαράζουμε τη γραμμή έτσι ώστε αυτή να είναι αφενός ομαλή (όχι τεθλασμένη) και αφετέρου να διέρχεται δια μέσου των σημείων, όσο το δυνατόν πλησιέστερα σε αυτά ή περνώντας από αυτά.





Η γραφική παράσταση είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο καθώς μπορούμε να υπολογίζουμε και άλλα μεγέθη, εκτός από τα αναγραφόμενα, μέσω της κλίσης της γραμμής ή του εμβαδού του σχήματος που προσδιορίζεται από τη γραμμή και τον οριζόντιο άξονα. Έτσι από την κλίση μιας γραφικής παράστασης με ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο, μπορούμε να υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής της εξαρτημένης μεταβλητής.



Αναφορές

1. J.R. Taylor: An introduction to error analysis. A series of books in Physics Eugene D. Commins, Editor University Science Books, Mill Valley, California.
2. http://www.lis.upatras.gr