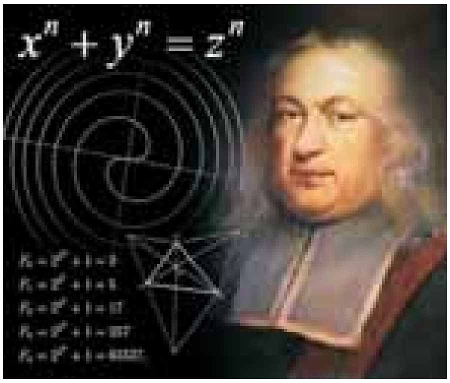
132

Μαθηματικό περιοδικό για το Γυμνάσιο

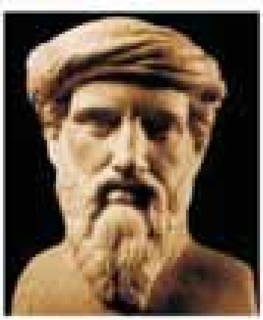
Ευκλείδης Α'

ΕΜΕ: ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ - ΜΑΪΟΣ - ΙΟΥΝΙΟΣ 2024 ευρώ 3,00



ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ (Κ +7) ΕΚΔΟΤΩΝ
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ
Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ.
Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.



Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
για το γυμνάσιο

Ευκλείδης α΄

Τεύχος 132
Απρίλιος - Μάϊος - Ιούνιος 2024
Τιμή Τεύχους 3,00 Ευρω
e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025
Εκδότης: Ανάργυρος Φελλούρης
Διευθυντής: Ιωάννης Τυρλής

Επιμέλεια Έκδοσης:
Μαραγκάκης Στυλιανός

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί μαθητές και μαθήτριες και συνάδελφοι,
Με το τελευταίο αυτό τεύχος της **φετινής σχολικής χρονιάς**, ολοκληρώνουμε έναν νέο κύκλο διαλόγου με τους μαθητές μας, τους εκπαιδευτικούς, αλλά και πολλούς φίλους. Ευχαριστούμε όλους **για τα καλά σας λόγια**, στην αλληλογραφία και τα μηνύματα που πήραμε, από όλη την Ελλάδα. Ευχαριστούμε όλους για τα άρθρα που μας στείλατε, είτε δημοσιεύτηκαν είτε όχι. Εκτός από τα άρθρα στα μαθηματικά των τάξεων, είχαμε και **πολλά γενικά θέματα** ιδιαίτερα για τον εορτασμό του **π**. Πολλά από τα άρθρα μας, δίνουν **αφορμή** στους λάτρεις των μαθηματικών, να ασχοληθούν με μαθηματικά προβλήματα και να μας **στέλνουν τις ιδέες** τους στο περιοδικό. Όμως η αγάπη μας στα Μαθηματικά, το πάθος μας για την **ανακάλυψη** και την **ερμηνεία** της φύσης, μέσα από τα Μαθηματικά, μπορεί να μας οδηγήσουν σε **υπερβολές**. Πιθανόν αυτό να έχει συμβεί και σε άρθρα που εμείς δημοσιεύσαμε στο περιοδικό. **Γράψτε** μας **και τολμήστε**, γιατί όπως έλεγε και ο Μένανδρος τον 4ο αιώνα π.Χ. : «Δεν κάνει λάθη, όποιος δεν τολμάει». Με **λανθασμένα βήματα** η ανθρωπότητα έκανε άλματα.

Σε λίγες μέρες για τους μαθητές μας αρχίζουν οι προαγωγικές εξετάσεις.
Η συντακτική επιτροπή, **εύχεται ολόψυχα καλή επιτυχία σε όλα τα παιδιά.**

ΚΑΛΕΣ ΔΙΑΚΟΠΕΣ, ΚΑΛΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ

Σας περιμένουμε όπως πάντα, με τις εργασίες σας τη νέα σχολική χρονιά.

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
printfair
Τηλ.: 2102469799 -2102401695
Υπεύθυνος Τυπογραφείου:
Α. Κρέτσης

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενδειξη «Για τον Ευκλείδη Α΄. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών.**

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Επιμέλεια: Παντελής Γρυπάρης–Ειρήνη Κοτσακιλάφη

Πρόβλημα 1

α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x-\frac{2x-1}{3}=\frac{x-4}{5}$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$y=(\sqrt{36}+\sqrt{9})\sqrt{10^2}-\sqrt{81}\cdot\sqrt{36+8^2}$$

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) που διέρχεται από το σημείο Α=(χ,y) ,όπου χ η λύση της εξίσωσης και y η τιμή της παράστασης και είναι παράλληλη στην ευθεία y= –3x+5

δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία του προηγούμενου ερωτήματος.

Λύση: α) Για να λύσουμε την εξίσωση πρώτα θα υπολογίσουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών ,δηλαδή ΕΚΠ(3,5)=15.Στη συνέχεια θα πολλαπλασιάσουμε όλα τα μέλη της εξίσωσης με το 15.

$$2x-\frac{2x-1}{3}=\frac{x-4}{5}$$
$$15\cdot 2x-15\frac{2x-1}{3}=15\frac{x-4}{5}$$
$$30x-5(2x-1)=3(x-4)$$
$$30x-10x+5=3x-12$$
$$30x-10x-3x=-12-5$$
$$17x=-17,\ \frac{17x}{17}=\frac{-17}{17},\ x=-1$$

β) $y=(\sqrt{36}+\sqrt{9})\sqrt{10^2}-\sqrt{81}\cdot\sqrt{36+8^2}$

$y=(6+3)10-9\cdot\sqrt{36+64}$

$y=9\cdot10-9\cdot\sqrt{100}$

y=90–9·10

y=90–90

y=0

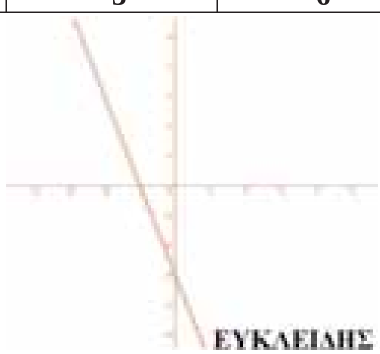
γ) Έστω (ζ) η y=αx+β. Το A(χ,y) είναι το A(–1,0) και για να είναι η ευθεία (ζ) παράλληλη στην ευθεία y=–3x+5 πρέπει να έχουν το ίδιο α. Άρα α=–3 και η (ζ) γράφεται y=–3x+β. Για να διέρχεται η (ζ) από το A (–1,0) σημαίνει ότι οι συντεταγμένες του σημείου την επαληθεύουν. Επομένως: 0= –3·(–1)+β και β=–3. Τελικά η (ζ) είναι y= –3x–3

δ) Για να σχεδιάσουμε μια ευθεία χρειαζόμαστε 2 σημεία της. Σχεδιάζουμε τον πίνακα τιμών της (ζ) : y= –3x–3

x	0	1
y	–3	–6

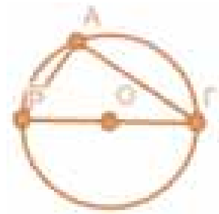
Για x=0 έχουμε y= –3·0–3= –3

Για x=1 έχουμε y= –3·1–3= –6



Πρόβλημα 2:

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A}=90°$), η πλευρά ΑΒ=8 cm και η ΑΓ είναι ίση με το διπλάσιο της ΑΒ μειωμένο κατά 1cm.



α) Να υπολογίσετε τις πλευρές ΑΓ και ΒΓ

β) Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου

γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (K,R).Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου και το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και τις πλευρές του τριγώνου.

Λύση: α) Πρώτα υπολογίζουμε την ΑΓ=2·ΑΒ–1= =2·8–1=15 cm. Στη συνέχεια για να βρούμε την πλευρά ΒΓ, η οποία είναι η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου αφού βρίσκεται απέναντι από τη γωνία Α, πρέπει να εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Άρα έχουμε : $Β Γ^2=ΑΒ^2+ΑΓ^2$

$$ΒΓ^2=8^2+15^2$$
$$ΒΓ^2=64+225$$
$$ΒΓ^2=289$$
$$ΒΓ=\sqrt{289}$$
$$ΒΓ=17cm$$

β) Η περίμετρος του τριγώνου ισούται με το άθροισμα των πλευρών του. Επομένως,

Π=ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ=8+15+17=40cm

Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το ημιγινόμενο των δυο κάθετων πλευρών του:

$$E=\frac{AB\cdot A\Gamma}{2}=\frac{15\cdot 8}{2}=15\cdot 4=60cm^2$$

γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (K,R) και η πλευρά ΒΓ είναι η διάμετρος του κύκλου αφού βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία. Η ακτίνα του κύκλου R=$\frac{Β Γ}{2}=\frac{17}{2}=8,5\ cm$

δ)Τα ο εμβαδόν του κύκλου δίνεται από τον τύπο E=$\pi R^2=\pi\left(\frac{17}{2}\right)^2=\frac{289\pi}{4}$ και το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και τις πλευρές του τριγώνου θα είναι Ε’=$\frac{289\pi}{4}-60cm^2$

Πρόβλημα 3:

Για την παρακολούθηση μιας ταινίας κάθε ενήλικας πληρώνει 9 € και κάθε παιδί 6€. Η τιμή του κάθε αναψυκτικού είναι 1,5€ και κάθε ποπ–κορν 2,5€.

α) Αν την παράσταση παρακολούθησαν x ενήλικες και y παιδιά ,να γράψετε τη σχέση Π η οποία δίνει το ποσό που πληρώνει η κάθε παρέα αν κάθε άτομο αγοράζει 1 αναψυκτικό και 1 ποπ κορν κατά την παρακολούθηση της ταινίας.
β) Αν η παρέα μας αποτελείται από 3 ενήλικες και 4 παιδιά πόσα χρήματα θα πληρώσουμε;

Λύση: α) Οι x ενήλικες πληρώνουν για το εισιτήριό τους 9χ € και τα y παιδιά πληρώνουν 6y €. Οι x ενήλικες πληρώνουν για το αναψυκτικό τους 1,5x € και για το ποπ κορν τους 2,5x €. Τα y παιδιά πληρώνουν για το αναψυκτικό τους 1,5y € και για το ποπ κορν τους 2,5y €. Η σχέση:

Π=9x+6y+1,5x+2,5x+1,5y+2,5y=13x+10y

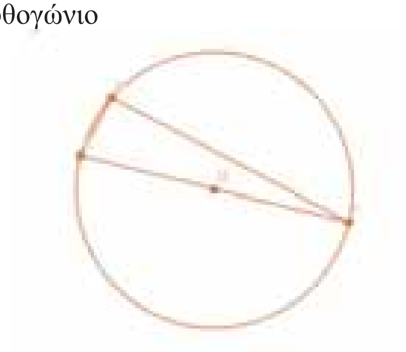
β) Θα πληρώσουμε συνολικά

Π=13·3+10·4=39+40=79€

Πρόβλημα 4:

Σε κύκλο (Ο,ρ) να πάρετε δυο διαδοχικά τόξα ΕΔ=30°και ΔΓ=150°.
α)Να δείξετε ότι το ΔΕΓ τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
β)Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.
γ)Αν η ακτίνα ρ=10cm να βρείτε τις πλευρές του τριγώνου.

Λύση: α) Η γωνία ΕΟΔ είναι επίκεντρη, άρα είναι ίση με το τόξο στο οποίο βαίνει. Επομένως, $\widehat{ΕΟΔ} = 30°$.Το ίδιο ισχύει και για την επίκεντρη γωνία $\widehat{ΓΟΔ} = 150°$.Άρα η $\widehat{ΕΟΓ} = 180°$ και η ΕΓ είναι η διάμετρος του κύκλου. Όμως η $\widehat{ΕΔΓ} = 90°$ γιατί βαίνει στη διάμετρο ΕΓ και το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ορθογώνιο



β) Η γωνία Ε του τριγώνου είναι εγγεγραμμένη στο τόξο ΔΓ=150°, άρα είναι Ε=$\frac{150°}{2} = 75°$. Αντίστοιχα ,η γωνία Γ του τριγώνου είναι εγγεγραμμένη στο τόξο ΔΕ, άρα είναι Γ=$\frac{30°}{2} = 15°$.

γ) Η διάμετρος είναι δ=ΕΓ=2ρ=2·10=20 cm.Χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των οξειών γωνιών έχουμε:

ημΓ=$\frac{ΔΕ}{ΕΓ}$

ημ15° $= \frac{ΔΕ}{20}$

0,2588=$\frac{ΔΕ}{20}$

ΔΕ=0,2588·20

ΔΕ=5,176 cm

Αντίστοιχα για την ΔΓ : συνΓ=$\frac{ΔΓ}{ΕΓ}$

συν15° $= \frac{ΔΓ}{20}$

0,9659=$\frac{ΔΓ}{20}$

ΔΓ=0,9659·20

ΔΕ=19,318 cm

Πρόβλημα 5:

Αν Α=$\left(-\frac{3}{5} - \frac{-3}{10}\right) : \frac{(-3)^2}{10} + \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}$ να βρείτε
α) τη λύση της εξίσωσης $\frac{x}{9} - x = A$
β) τη λύση της εξίσωσης $x - \frac{x}{3} = 3 \cdot A + \frac{4x-1}{6}$

Λύση: α) Υπολογίζουμε πρώτα την τιμή της παράστασης Α.

Α=$\left(-\frac{3}{5} - \frac{-3}{10}\right) : \frac{(-3)^2}{10} + \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}$

Α=$\left(-\frac{3}{5} + \frac{3}{10}\right) : \frac{9}{10} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2}$

Α=$\left(-\frac{6}{10} + \frac{3}{10}\right) : \frac{9}{10} + \frac{4}{9}$

Α=$\left(-\frac{3}{10}\right) : \frac{9}{10} + \frac{4}{9}$

Α=$\left(-\frac{3}{10}\right) \cdot \frac{10}{9} + \frac{4}{9}$

Α=$-\frac{3}{9} + \frac{4}{9}$

Α=$\frac{1}{9}$

Κάνουμε αντικατάσταση στην εξίσωση την τιμή του Α: $\frac{x}{9} - x = \frac{1}{9}$

$$9\frac{x}{9} - 9x = 9\frac{1}{9}$$
$$x - 9x = 1$$
$$-8x = 1$$
$$\frac{-8x}{-8} = \frac{1}{-8}$$
$$x = -\frac{1}{8}$$

β) $x - \frac{x}{3} = 3 \cdot \frac{1}{9} + \frac{4x-1}{6}$

$$6x - 6\frac{x}{3} = 18 \cdot \frac{1}{9} + 6\frac{4x-1}{6}$$
$$6x - 2x = 2 + 4x - 1$$
$$6x - 2x - 4x = 1$$
$$0x = 1$$

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

Πρόβλημα 6:

Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΚ ύψος του τραπεζίου και το ημικύκλιο (Μ, 4) όπου Μ το μέσο του τμήματος ΑΚ.
α)Να υπολογίσετε την μικρή βάση ΑΒ, αν

ΑΒ=$\sqrt{31 - \sqrt{42 - 2\sqrt{9}}} + \sqrt{\frac{-16}{-9}} - \sqrt{2024^{\circ}} - \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$.

β) Αν x είναι η λύση της εξίσωσης:
$3\frac{x-1}{2} - \frac{5x-3}{4} = \frac{x}{2} - 1$ να βρείτε την μεγάλη βάση ΔΓ του τραπεζίου η οποία δίνεται από την

σχέση ΔΓ=4·ΑΒ–3x.

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

δ) Να γίνει κατάλληλο σχήμα και να υπολογίσετε το εμβαδόν του τμήματος ολόκληρο του τραπεζίου που δεν περιέχει το ημικύκλιο.

Λύση: **α)** $AB=\sqrt{31-\sqrt{42-\sqrt{9}}}+$

$$+\sqrt{\frac{-16}{-9}}-\sqrt{2024^{\circ}}-\sqrt{(\frac{1}{3})^2}$$

$AB=\sqrt{31-\sqrt{42-2\cdot 3}}+\sqrt{\frac{16}{9}}-\sqrt{1}-(\frac{1}{3})$

$AB=\sqrt{31-\sqrt{42-6}}+\frac{4}{3}-1-\frac{1}{3}$

$AB=\sqrt{31-\sqrt{36}}+\frac{4}{3}-\frac{3}{3}-\frac{1}{3}$

$AB=\sqrt{31-6}+0$

$AB=\sqrt{25}$

AB=5

β) $3\frac{x-1}{2}-\frac{5x-3}{4}=\frac{x}{2}-1$

$$4\cdot 3\frac{x-1}{2}-4\frac{5x-3}{4}=4\frac{x}{2}-4\cdot 1$$
$$2\cdot 3(x-1)-(5x-3)=2x-4$$
$$6(x-1)-5x+3=2x-4$$
$$6x-6-5x+3=2x-4$$
$$6x-5x-2x=-4+6-3$$
$$-x=-1$$
$$x=1$$

Άρα η ΔΓ=4·5–3·1=20–3=17

γ) Για να υπολογίσω την περίμετρο του τραπεζίου ΑΒΓΔ πρέπει να βρω την πλευρά ΑΔ. Αρχικά το ύψος ΑΚ είναι η διάμετρος του κύκλου ,άρα ΑΚ=2·4=8. Επίσης, η ΔΚ=$\frac{ΔΓ-5}{2}=\frac{17-5}{2}=\frac{12}{2}=$ 6. Όμως το τρίγωνο ΑΚΔ είναι ορθογώνιο γιατί το ΑΚ είναι ύψος ,επομένως εφαρμόζω Πυθαγόρειο Θεώρημα και έχω : $AΔ^2=AK^2+ΔK^2$

$$AΔ^2=8^2+6^2$$
$$AΔ^2=64+36$$
$$AΔ^2=100$$
$$AΔ=\sqrt{100}$$
$$AΔ=10$$

Το τραπέζιο είναι ισοσκελές οπότε ΑΔ+ΒΓ=10.Η περίμετρος λοιπόν του ΑΒΓΔ είναι

Π=ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ=5+10+17+10=42

δ) Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου σχήματος.

Πρόβλημα 7:

Η μάζα 10 μαθητών σε κιλά είναι:

52, 50, 60, 49, 60, 50, 51, 52, 58, 49

Να υπολογίσετε:

α) την μέση τιμή

β) την διάμεσο

γ) ποια είναι η διαφορά μεταξύ μέσης τιμής και διάμεσου σε αυτό το σύνολο δεδομένων;

Λύση:

α) μέση τιμή=

$\frac{52+50+60+49+60+50+51+52+58+49}{10}=\frac{531}{10}=53{,}1$ κιλά

β) Βάζω τους αριθμούς σε αύξουσα σειρά

Σειρά που δίνεται:

52, 50, 60, 49, 60, 50, 51, 52, 58, 49

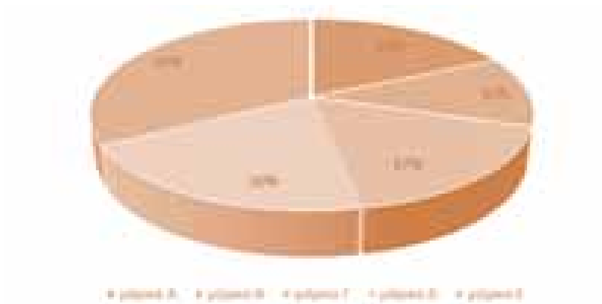
Σε αύξουσα σειρά:

49, 49, 50, 50, 51, 52, 52, 58, 60, 60

Επειδή είναι άρτιο το πλήθος των αριθμών, αρκεί να βρω το ημιάθροισμα των μεσαίων δηλαδή $\frac{51+52}{2}=\frac{103}{2}=51{,}5$ κιλά

γ) Η μέση τιμή είναι ο μέσος όρος όλων των τιμών του συνόλου δεδομένων, ενώ η διάμεσος είναι η τιμή που βρίσκεται στο κέντρο του συνόλου όταν ταξινομούνται οι τιμές κατά αύξουσα σειρά. Η μέση τιμή είναι ευαίσθητη σε ακραίες τιμές, ενώ η διάμεσος όχι, καθιστώντας την κατάλληλη για σύνολα δεδομένων με έντονες ακραίες τιμές. Στην περίπτωση μας δεν έχουμε έντονα ακραίες τιμές για αυτό και η μέση τιμή και η διάμεσος είναι δεν είναι ίσες, αλλά ούτε και διαφέρουν κατά πολύ.

Πρόβλημα 8: Να βρείτε τις γωνίες που αντιστοιχούν σε κάθε κομμάτι πίτας και να κατασκευάσετε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα, αν γνωρίζετε πως πουλήθηκαν συνολικά 300 αυτοκίνητα.



Υπόδειξη για τη λύση:

Για την εύρεση των γωνιών πολλαπλασιάζουμε κάθε ποσοστό με τις 360°

Πρόβλημα 9: Μια εταιρεία κατασκευής βιντεοπαιχνιδιών δημιουργεί 4 τύπους βιντοπαιχνιδιών Α (Adventures), Β (Role Playing Games), Γ (Open World) και Δ(Real Time Strategy). Τα ποσοστά για τους τύπους βιντεοπαιχνιδιών είναι αντίστοιχα 20%, 30%, 10% και 40%. Αν συνολικά η επιχείρηση παρήγαγε 2.400.000 βιντεοπαιχνίδια, να βρείτε:

α. Πόσα βιντεοπαιχνίδια από κάθε τύπο παρήγαγε;

β. Να παραστήσετε τα δεδομένα με ένα ραβδόγραμμα.