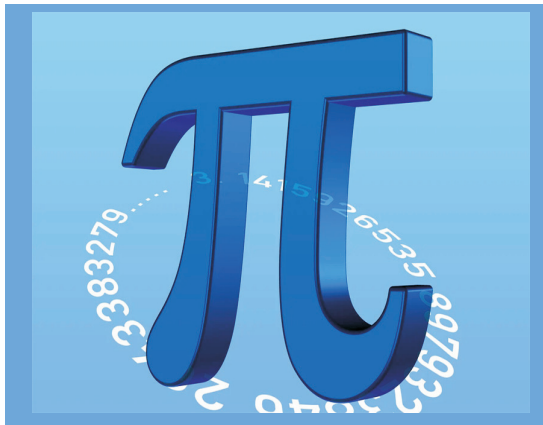


131



Μαθηματικό περιοδικό για το ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ ΕΓυμνάσιο Αΰκλειδης

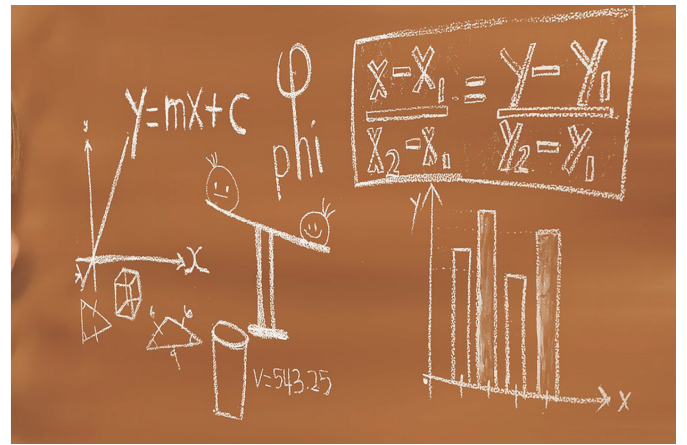
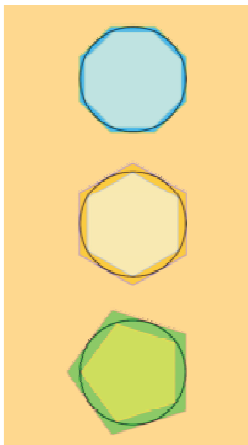
ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ - ΜΑΡΤΙΟΣ 2024 ευρώ 3,00

ΕΛΤΑ
Hellenic Post

ΕΦΗΜΕΡΙΔΑ
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ
ΒΙΒΛΙΟΤΗΚΗΣ
(Ε.Ε.Β.)

ΓΝΗΡΙΜΕΝΟ
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ
ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟ
ΚΕΜΠ,ΛΑΘ.
Αριθμός Άδειας
4198

ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1089/08 ΚΕΜΠ,ΛΑΘ.



Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία



ΠΕΡΕΧΟΜΕΝΑ

✓ Γενικά άρθρα

Τι εορτάζουν οι μαθηματικοί στις 14 Μάρτη;

Παναγιώτης Χριστόπουλος 1

Όγκος των Στερεών

και το «γνωσιόμετρο» Pierre van Hiele

Γιάννης Νικολόπουλος 5

✓ Τα Μαθηματικά στο Σχολείο

• Α' Τάξη

Ασκήσεις στους Ρητούς αριθμούς

Παντελής Γρυπάρης 11

1ο Πειραματικό Γυμνάσιο Αμαρουσίου

Μαθηματικές δράσεις του σχολικού έτους 2022-23

Κουτσώνα Αφροδίτη, Μαγουλάς Αντώνιος, Ρουμπή Κατερίνα

Τα τρίγωνα

Μαρία Παππά 13

• Β' Τάξη

Παραστάσεις με ...νόημα και σχέσεις με...ουσία!

Βαρβάρα Καμπουρίδη 18

Ασκήσεις στη Στατιστική

Ειρήνη Κοτσακιάφη 22

✓ Τα Μαθηματικά στο Σχολείο

• Β' Τάξη

Κύκλος

Θέμις Καφή 25

• Γ' Τάξη

Πιθανότητες

Θανάσης Χριστόπουλος 28

Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων

με δύο αγνώστους

Δημήτρης Διαμαντίδης 35

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΡΙΑ Νόμος ημιτόνων Νόμος

Συνημιτόνων

Γεώργιος Λυμπερόπουλος - Ιάκωβος Μαυρέλης 37

✓ Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Επιμέλεια: Επιτροπή Διαγωνισμών 40

✓ Διάφορα ΟΧΙ Αδιάφορα

Τα Δίσεκτα Έτη και η 29η Φεβρουαρίου

Παναγιώτης Χριστόπουλος, Παντελής Γρυπάρης 47

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34

Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532

Fax: 210 3641025

Εκδότης: Ανάργυρος Φελλούρης

Διευθυντής: Ιωάννης Τυρλής

Επιμέλεια Έκδοσης:

Μαραγκάκης Στυλιανός

Συντακτική Επιτροπή

Συντονιστές:

Δρούτσας Παναγιώτης

Χριστόπουλος Παναγιώτης

Κουτσούρης Λέων

Μέλη:

Αρδαβάνη Καλλιόπη

Βαρβεράκης Ανδρέας

Γεωργιάδου - Καμπουρίδη Βαρβάρα

Γκιουλέκα Αλεξάνδρα

Γρυπάρης Παντελής

Διαμαντίδης Δημήτριος

Ζιώγας Χρήστος

Καλαμπόκα Αθηνά

Καλή Φωτεινή

Καραμπάτσας Κωνσταντίνος

Καφή Θέμις

Κεϊσογλου Στέφανος

Κουστέρης Χρίστος

Κόσσυβας Γεώργιος

Κοτσακιάφη Ειρήνη

Κυριακοπούλου Αθανασία

Κωστοπούλου Καλλιόπη

Λυμπερόπουλος Γεώργιος

Μαγουλάς Αντώνιος

Μάλλιαρης Χρήστος

Μπαλτσάβιας Βενέδικτος

Μπερδούσης Γεώργιος

Νικολόπουλος Ιωάννης

Ντόρβας Νικόλαος

Παπαϊωάννου Δημήτριος

Παππά Μαρία

Πούλιου Χριστίνα

Ρίζος Ιωάννης

Ρουσούλη Μαρία

Σιούλας Ιωάννης

Σίσκου Μαρία

Σταθιάς Γεώργιος

Τουρναβίτης Στέργιος

Τριανταφύλλου Ανδρέας

Τσαπακίδης Γεώργιος

Τσιφάκης Χρήστος

Φερεντίνος Σπύρος

Χριστόπουλος Θανάσης

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί μαθητές και μαθήτριες και συνάδελφοι,

Είμαστε και πάλι μαζί σας με νέες ιδέες και άρθρα από καθηγητές με όρεξη και μεράκι για τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Για το Πάσχα που πλησιάζει να έχετε καλές και ευχάριστες διακοπές.

ΚΑΛΟ ΠΑΣΧΑ

Από τους Συντονιστές της συντακτικής ομάδας του περιοδικού

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών



Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054

ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενδειξη «Για τον Ευκλείδη Α'». Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών.

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)

Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλλονται στέλνεται:

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:

printfair

Τηλ.: 2102469799 - 2102401695

Υπεύθυνος Τυπογραφείου:

A. Κρέτσης

Τα Δίσεκτα Έτη και η 29^η Φεβρουαρίου



Παναγιώτης Χριστόπουλος, Παντελής Γρυπάρης

Ο χρόνος, στη μαθηματική του διάσταση, είναι μια ευθεία γραμμή που εκτείνεται προς το παρελθόν και προς το μέλλον. Βέβαια οι άνθρωποι με διάφορες κοσμοθεωρίες προσπάθησαν να βάλουν αρχή και τέλος στην ευθεία. Εμείς ξεκινάμε από κάποιο σημείο αυτής της ευθείας και πηγαίνουμε μόνο προς το μέλλον, προς τα πίσω δεν μπορούμε να κάνουμε ούτε βήμα. Ο χρόνος πάντα κυλάει μπροστά, και λέγεται ότι είναι η μέτρηση της φθοράς. Ο άνθρωπος από τα πολύ παλιά χρόνια προσπάθησε να «μετρήσει τον χρόνο», δηλαδή προσπάθησε να μετρήσει:

- α) το διάστημα από μια ανατολή του Ήλιου μέχρι την άλλη.
- β) το διάστημα από τη μια Νέα Σελήνη μέχρι την άλλη.
- γ) το διάστημα από τη μια Άνοιξη μέχρι την άλλη.

Το πρώτο διάστημα είναι μια πλήρης περιστροφή της Γης γύρω από τον άξονά της και ονομάστηκε **ημέρα** (ημερόνυκτο) και χωρίστηκε μάλλον από τους Βαβυλώνιους σε 24 ώρες.

Το δεύτερο διάστημα είναι μια περιφορά της Σελήνης γύρω από τη Γη και ονομάστηκε **μήνας**.

Το τρίτο διάστημα είναι μια περιφορά της Γης γύρω από τον Ήλιο και ονομάστηκε **έτος**.

Τα δύο πρώτα σχεδόν εύκολα τα μέτρησαν, όμως το έτος; Αυτό ήταν ένα πολύ δύσκολο θέμα, γι' αυτό Μαθηματικοί και Αστρονόμοι έκαναν μεγάλες προσπάθειες μέχρις ότου δώσουν τις ακριβείς μετρήσεις. Ακόμα περισσότερα χρόνια πέρασαν μέχρι να γίνουν αξιόπιστα ημερολόγια και αποδεκτά από όλες σχεδόν τις χώρες.

Πρώτα δημιούργησαν διάφορα όργανα μέτρησης όπως το ηλιακό ρολόι, τον αστρολάβο του Ιππάρχου, το μηχανισμό των Αντικηθύρων, μέχρι να φτάσουμε στα σημερινά ωρολόγια και τα ατομικά ωρολόγια που μετρούν εκατομμυριοστά του δευτερολέπτου.

Η εβδομάδα είναι μονάδα του χρόνου ίση με συνεχόμενα επτά ημερόνυκτα. Ο αριθμός 7 ήταν ιερός για πολλούς λαούς, άγνωστο γιατί, επτά θαύματα, επτά επί Θήβας, επτά μυστήρια, κλπ. Δεν έχει καμία σχέση με τα ημερολόγια ούτε με κάποια αστρονομική περίοδο. Καθιερώθηκε άγνωστο πότε, υπήρχε από παλιά σε όλους τους λαούς και είχε να κάνει με την εργασία και την ανάπαυση (Γένεσις) «ο θεός δημιούργησε σε 6 ημέρες τον κόσμο και την έβδομη αναπαύτηκε». Στο Εβραϊκό ημερολόγιο αργία ήταν το Σάββατο και αργότερα οι Χριστιανοί όρισαν την Κυριακή (πρώτη μέρα του Κυρίου). Οι άλλες μέρες ήταν 2η, 3η, 4η, 5η, και η Παρασκευή ονομάστηκε έτσι από τους Εβραίους ως προετοιμασία για το Σάββατο. Οι Αιγύπτιοι έδιναν στις ημέρες πλανητικές ονομασίες που δεν τις κράτησαν στο Βυζάντιο, αλλά υπάρχουν και σήμερα σε χώρες της Δύσης, Saturday (ημέρα του Κρόνου), Sunday (ημέρα του Ήλιου).

Αρχικά οι άνθρωποι πίστευαν ότι οι τροχιές των ουρανίων σωμάτων ήταν κυκλικές, γι' αυτό οι Βαβυλώνιοι υπέθεσαν ότι ο Ήλιος κάθε μέρα προχωρά κατά μια μοίρα δηλαδή ότι το έτος έχει 360 μέρες. Αφού πέρασαν κάποια χρόνια, διαπίστωσαν ότι ενώ ήταν Άνοιξη το ημερολόγιό τους έδειχνε

ακόμα Χειμώνα. Οι Αρχαίοι Έλληνες και οι Αιγύπτιοι υπολόγισαν το έτος σε 365 μέρες και 6 ώρες. Βέβαια τα πρώτα ημερολόγια δεν ήταν ηλιακά αλλά σεληνιακά. Χώριζαν το χρόνο σε 12 μήνες των 29 και 30 ημερών όσο είναι ο χρόνος από τη μια Νέα Σελήνη μέχρι την άλλη(29,5 μέρες).

Όλα άλλαξαν όταν ο **Κοπέρνικος** μίλησε για το ηλιοκεντρικό σύστημα, ο **Κέπλερ** για τις ελλειπτικές τροχιές των πλανητών, ο **Νεύτωνας** για την βαρύτητα και ο **Γαλιλαίος** για το τηλεσκόπιο.

Πολλά ημερολόγια χρησιμοποίησαν και χρησιμοποιούν οι λαοί μέχρι σήμερα. Στην αρχαία Ελλάδα δεν υπήρχε ένα ενιαίο κράτος αλλά πολλά κράτη (πόλεις ή βασιλεία) και κάθε κράτος είχε το δικό του ημερολόγιο προσαρμοσμένο στις δικές του ιδιαίτερες παραδόσεις και βέβαια ήταν Σεληνιακά. Περίπου όλα ήταν παρόμοια με το **Αττικό ημερολόγιο** που είχαν οι Αθηναίοι. Είχε 12 μήνες όπως έχουμε και εμείς σήμερα, αλλά η χρονολόγηση των ετών πριν από τον 4^ο π.Χ. αιώνα γινόταν με βάση τις Ολυμπιάδες. Οι Ολυμπιακοί αγώνες διεξάγονταν μετά το θερινό ηλιοστάσιο, κάθε τέσσερα χρόνια και συμμετείχαν όλα τα κράτη μέλη. Η τετραετία αυτή ονομαζόταν «πενθετηρίς».



Οι πενθετηρίες ονομαζόνταν με τον αύξοντα αριθμό της κάθε Ολυμπιάδας και τις χρησιμοποιούσαν ως χρονική αναφορά. Η πρώτη αναφερόμενη πενθετηρία ήταν το 776 π.Χ., δηλαδή ξεκινάει το καλοκαίρι του 775 π.Χ.,

σύμφωνα με το σημερινό ημερολόγιο.

Η αρχή του έτους ήταν μεταξύ χειμώνα και Άνοιξης, την 1η Μαρτίου.

Κάθε μήνας ήταν αφιερωμένος σε έναν ή δύο θεούς του Ολύμπου και άρχιζε με την εμφάνιση της Νέας Σελήνης. Κάθε τρία χρόνια πρόσθεταν και ένα μήνα ακόμα για να συμβαδίζουν με τις εποχές και ήταν αφιερωμένος στον Ποσειδώνα. Ο πλέον τιμημένος θεός ήταν ο Απόλλωνας στο όνομά του είχαν 5 μήνες αφιερωμένους, 3 στην Άρτεμη, 2 στο Δία και από έναν στην Ήρα, Αθηνά Διόνυσο, Ποσειδώνα.

Η ημέρα για τους αρχαίους Έλληνες αρχίζει κατά την δύση του ηλίου κι όχι όπως σήμερα τα μεσάνυχτα. Αυτό ακολούθησαν οι Βυζαντινοί και σήμερα το εφαρμόζουν στο Άγιο Όρος.

Το Αττικό ημερολόγιο πήρε την τελική του μορφή το 432 π.Χ. από το Μέτωνα, το οποίο αργότερα διόρθωσε ο Κάλλιππος και ο Ίππαρχος.

Είχαν τότε δύο ημερολόγια το κρατικό και το θρησκευτικό. Το θρησκευτικό ακολουθεί τις φάσεις της Σελήνης και έχει διάρκεια 354 ημέρες(29,5x12) ενώ το ηλιακό έχει 365 περίπου. Με την προσθήκη ενός μήνα κάθε 3 χρόνια στο θρησκευτικό γινόταν ο συγχρονισμός σε ένα ηλιοσεληνιακό έτος. Οι Αθηναίοι ένωσαν αυτά τα δύο ημερολόγια τον 5ου αιώνα π.Χ. .

Ο **Μηχανισμός των Αντικυθήρων**, είναι ένα πολύπλοκο αστρονομικό όργανο-υπολογιστής, του 2^{ου} αιώνα π.Χ.. Ήταν προγραμματισμένος να βρίσκει ηλιακά και σεληνιακά έτη, να βρίσκει τα έτη των



Ολυμπιάδων, τις χρονικές περιόδους διάρκειας 19 ετών, 76 ετών, 18 ετών και 54 ετών, κύκλοι Μέτωνα και Κάλλιπου. Ο Μέτωνας πρώτος μέτρησε ότι σε 19 έτη ή 235 μήνες ή 6940 μέρες επαναλαμβάνονται τα φαινόμενα Σελήνης και Ηλίου(ηλιακές και σεληνιακές εκλείψεις, κλπ). Ο Κάλλιπος συνέχισε το έργο του Μέτωνα, και 4πλασίασε τον κύκλο σε 76 έτη, με μία λιγότερη ημέρα.(ο Μετωνικός κύκλος υπερεκτιμά το έτος κατά 5 λεπτά, ο κύκλος του Καλλίπου το υποεκτιμά κατά 11 λεπτά). Ο Μέτωνας εγκατέστησε στην Πνύκα ηλιοτρόπιο, τα θεμέλια

του οποίου είναι ακόμα ορατά, με το οποίο προσδιόριζε τις ημερομηνίες των ισημεριών και τα ηλιοστάσια. Η ετήσια φαινομενική μετακίνηση του ήλιου στον ορίζοντα είναι τόξο 60°, το μέσο του τόξου με το ηλιοτρόπιο είναι στην ευθεία που διέρχεται από την Ακρόπολη. Την περίοδο αυτή του Μέτωνα την ονομάζουμε **κύκλο της Σελήνης**. Το ημερολόγιο αυτό των αρχαίων Ελλήνων ίσχυε μέχρι το 45 π.Χ. που έγινε το Ιουλιανό ημερολόγιο.

Το Ιουλιανό ημερολόγιο

Με εντολή του Ρωμαίου αυτοκράτορα **Ιουλίου καίσαρα** το 45 π.Χ. (το 709 από κτίσεως Ρώμης), καθιερώθηκε το λεγόμενο «**Ιουλιανό Ημερολόγιο**». Το ημερολόγιο αυτό έφτιαξε ο Έλληνας αστρονόμος **Σωσιγένης της Αλεξάνδρειας**. Ο Σωσιγένης πρόσθεσε στο ημερολόγιο μια μέρα (6 ώρες x 4 =1 μέρα)