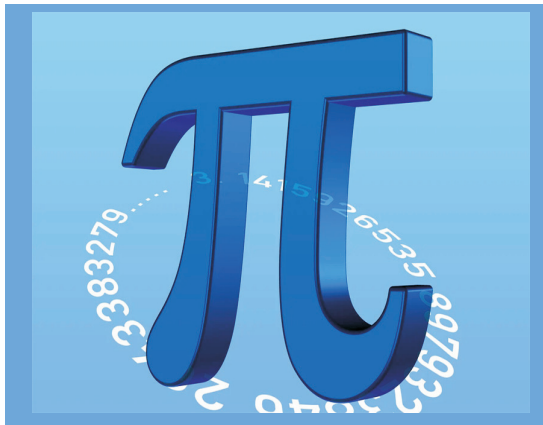


131



Μαθηματικό περιοδικό για το ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ ΕΓυμνάσιο Αΰκλειδης

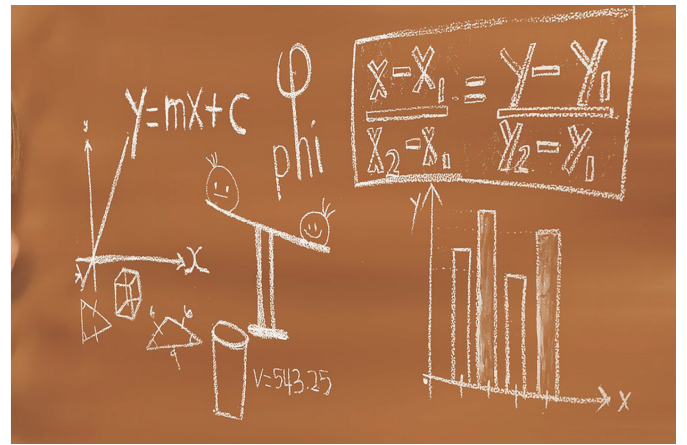
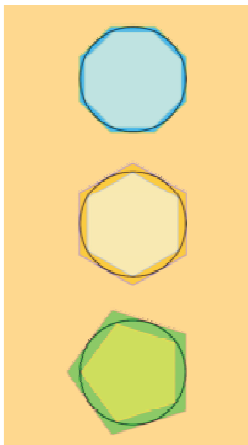
ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ - ΜΑΡΤΙΟΣ 2024 ευρώ 3,00

ΕΛΤΑ
Hellenic Post

ΕΦΗΜΕΡΙΔΑ
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ
ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑΣ
(τ. 7)

ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1089/08 ΚΕΜΠ/ΑΘ.

ΓΥΜΝΑΣΙΟ
ΕΛΤΑ
ΚΕΜΠ/ΑΘ.
Αριθμός Άδειας
4198



Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία



ΠΕΡΕΧΟΜΕΝΑ

✓ Γενικά άρθρα

Τι εορτάζουν οι μαθηματικοί στις 14 Μάρτη;

Παναγιώτης Χριστόπουλος 1

Όγκος των Στερεών

και το «γνωσιόμετρο» Pierre van Hiele

Γιάννης Νικολόπουλος 5

✓ Τα Μαθηματικά στο Σχολείο

• Α' Τάξη

Ασκήσεις στους Ρητούς αριθμούς

Παντελής Γρυπάρης 11

1ο Πειραματικό Γυμνάσιο Αμαρουσίου
Μαθηματικές δράσεις του σχολικού έτους 2022-23

Κουτσώνα Αφροδίτη, Μαγουλάς Αντώνιος, Ρουμπή Κατερίνα

Τα τρίγωνα

Μαρία Παππά 13

• Β' Τάξη

Παραστάσεις με ...νόημα και σχέσεις με...ουσία!

Βαρβάρα Καμπουρίδη 18

Ασκήσεις στη Στατιστική

Ειρήνη Κοτσακιάφη 22

✓ Τα Μαθηματικά στο Σχολείο

• Β' Τάξη

Κύκλος

Θέμις Καφή 25

• Γ' Τάξη

Πιθανότητες

Θανάσης Χριστόπουλος 28

Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων

με δύο αγνώστους

Δημήτρης Διαμαντίδης 35

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΡΙΑ Νόμος ημιτόνων Νόμος

Συνημιτόνων

Γεώργιος Λυμπερόπουλος - Ιάκωβος Μαυρέλης 37

✓ Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Επιμέλεια: Επιτροπή Διαγωνισμών 40

✓ Διάφορα ΟΧΙ Αδιάφορα

Τα Δίσεκτα Έτη και η 29η Φεβρουαρίου

Παναγιώτης Χριστόπουλος, Παντελής Γρυπάρης 47

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34

Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532

Fax: 210 3641025

Εκδότης: Ανάργυρος Φελλούρης

Διευθυντής: Ιωάννης Τυρλής

Επιμέλεια Έκδοσης:

Μαραγκάκης Στυλιανός

Συντακτική Επιτροπή

Συντονιστές:

Δρούτσας Παναγιώτης
Χριστόπουλος Παναγιώτης
Κουτσούρης Λέων

Μέλη:

Αρδαβάνη Καλλιόπη
Βαρβεράκης Ανδρέας
Γεωργιάδου - Καμπουρίδη Βαρβάρα
Γκιουλέκα Αλεξάνδρα
Γρυπάρης Παντελής
Διαμαντίδης Δημήτριος
Ζιώγας Χρήστος
Καλαμπόκα Αθηνά
Καλδή Φωτεινή
Καραμπάτσας Κωνσταντίνος
Καφή Θέμις
Κεϊσογλου Στέφανος
Κουστέρης Χρίστος
Κόσσυβας Γεώργιος
Κοτσακιάφη Ειρήνη
Κυριακοπούλου Αθανασία
Κωστοπούλου Καλλιόπη

Λυμπερόπουλος Γεώργιος
Μαγουλάς Αντώνιος
Μάλλιαρης Χρήστος
Μπαλτσαβιάς Βενέδικτος
Μπερδούσης Γεώργιος
Νικολόπουλος Ιωάννης
Ντόρβας Νικόλαος
Παπαϊωάννου Δημήτριος
Παππά Μαρία
Πούλιου Χριστίνα
Ρίζος Ιωάννης
Ρουσούλη Μαρία
Σιούλας Ιωάννης
Σίσκου Μαρία
Σταθιάς Γεώργιος
Τουρναβίτης Στέργιος
Τριανταφύλλου Ανδρέας
Τσαπακίδης Γεώργιος
Τσιφάκης Χρήστος
Φερεντίνος Σπύρος
Χριστόπουλος Θανάσης

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί μαθητές και μαθήτριες και συνάδελφοι,

Είμαστε και πάλι μαζί σας με νέες ιδέες και άρθρα από καθηγητές με όρεξη και μεράκι για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Για το Πάσχα που πλησιάζει να έχετε καλές και ευχάριστες διακοπές.

ΚΑΛΟ ΠΑΣΧΑ

Από τους Συντονιστές της συντακτικής ομάδας του περιοδικού

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών



Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054

ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενδειξη «Για τον Ευκλείδη Α'». Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών.

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)

Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλλονται στέλνεται:

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:

printfair

Τηλ.: 2102469799 - 2102401695

Υπεύθυνος Τυπογραφείου:

A. Κρέτσης



Α' Τάξη

Ασκήσεις στους Ρητούς αριθμούς

Παντελής Γρουπάρης

Οι ρητοί αριθμοί αποτελούν θεμελιώδες κομμάτι των μαθηματικών και διαδραματίζουν καίριο ρόλο σε πλήθος επιστημονικών κλάδων. Η μελέτη τους στο γυμνάσιο προσφέρει στους μαθητές μια σειρά από οφέλη:

Κατανόηση του αριθμητικού συστήματος:

Οι ρητοί αριθμοί, όντας αριθμοί που μπορούν να εκφραστούν ως κλάσματα, αποτελούν δομικό στοιχείο του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης. Η μελέτη τους βοηθά τους μαθητές να εμβαθύνουν στην έννοια των δεκαδικών αριθμών, των ακεραίων, και των κλασμάτων, χτίζοντας μια στέρεα βάση για μελλοντική μαθηματική εξέλιξη.

Ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων:

Η εργασία με ρητούς αριθμούς καλλιεργεί βασικές μαθηματικές δεξιότητες, όπως η πρόσθεση, η αφαίρεση, ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση. Μέσα από ασκήσεις και προβλήματα, οι μαθητές εξοικειώνονται με αλγορίθμους και τεχνικές, ενώ παράλληλα οξύνουν την κριτική και λογική τους σκέψη.

Εφαρμογές σε ποικίλους τομείς:

Οι ρητοί αριθμοί βρίσκουν εφαρμογή σε πλήθος πεδίων, από την καθημερινή ζωή έως την επιστήμη και την τεχνολογία. Μελετώντας ρητούς αριθμούς, οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη χρησιμότητά τους σε μετρήσεις, υπολογισμούς, γεωμετρία, φυσική, χημεία, οικονομικά και πολλά άλλα.

Ιστορική και πολιτισμική σημασία:

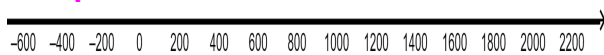
Η έννοια των ρητών αριθμών έχει μακρά ιστορία, χρονολογώντας από την αρχαιότητα. Η μελέτη της εξέλιξης και χρήσης ρητών αριθμών σε διάφορες πολιτισμικές ομάδες προσφέρει σε όλους μια πλούσια μαθηματική κληρονομιά, ενισχύοντας παράλληλα το ενδιαφέρον τους για το αντικείμενο.

Συνοψίζοντας, η μελέτη ρητών αριθμών στο γυμνάσιο αποτελεί θεμελιώδες βήμα για την ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων, την κατανόηση του αριθμητικού συστήματος, και την εξοικείωση με πλήθος εφαρμογών σε διάφορους επιστημονικούς και καθημερινούς τομείς.

Πρόβλημα 1: Ας θέσουμε τις χρονολογίες γέννησης 4 σπουδαίων Ελλήνων μαθηματικών σε μια αριθμογραμμή

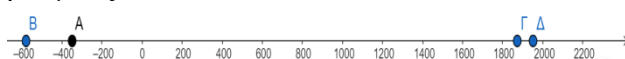
Ο Ευκλείδης γεννήθηκε περίπου το 350πΧ (θέση Α), ο Πυθαγόρας περίπου το 580πΧ (θέση Β), ο Καραθεοδωρής το 1874μΧ (θέση Γ) και τέλος ο Φωκός το 1952μΧ (θέση Δ).

Λύση:



Πρόβλημα 2: Η θερμοκρασία σε μία περιοχή ξεκινάει από -5 βαθμούς Κελσίου. Κάθε ώρα μειώνεται κατά 3 βαθμούς. Ποια θα είναι η θερμοκρασία σε 2 ώρες;

Λύση: Μετά από 1 ώρα κατεβαίνει και άλλους 3 βαθμούς άρα η θερμοκρασία θα είναι -8 βαθμούς.



Μετά από ακόμη 1 ώρα κατεβαίνει και άλλους 3 βαθμούς άρα η θερμοκρασία θα είναι -11 βαθμούς.

Πρόβλημα 3: Κάθε Δευτέρα έχετε 15€ ως χαρτζιλίκι τη βδομάδα και κάθε μέρα χαλά-

τε 3€. Θα σας φτάσουν τα χρήματα μέχρι το Σάββατο;

Λύση: Δευτέρα $15€ - 3€ = 12€$

Τρίτη $12€ - 3€ = 9€$

Τετάρτη $9€ - 3€ = 6€$

Πέμπτη $6€ - 3€ = 3€$

Παρασκευή $3€ - 3€ = 0€$ άρα δεν έχετε άλλα χρήματα και δεν φτάνουν για την επόμενη ημέρα, η οποία είναι το Σάββατο

Πρόβλημα 4: Να γίνουν οι πράξεις:

i. $|-4| + |-10| - |-7|$

ii. $|-6| \cdot |-9| - \frac{|-4| \cdot |-5|}{|-2|}$

Λύση:

i. Βρίσκουμε πρώτα στο μυαλό ή γράφουμε αναλυτικά ότι

$$|-4| = 4, \quad |-10| = 10, \quad |-7| = 7$$

τότε έχουμε: $|-4| + |-10| - 7 =$

$$= 4 + 10 - 7 = 14 - 7 = 7$$

ii, Βρίσκουμε πρώτα στο μυαλό ή γράφουμε αναλυτικά ότι $|-6| = 6, \quad |-9| = 9,$

$$|-4| = 4, \quad |-5| = 5, \quad |-2| = 2$$

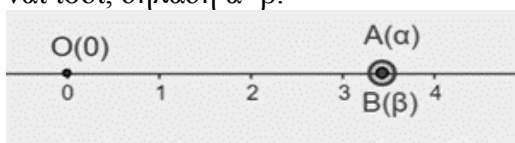
τότε έχουμε: $|-6| \cdot |-9| - \frac{|-4| \cdot |-5|}{|-2|} = 6 \cdot$

$$9 - \frac{4 \cdot 5}{2} = 54 - \frac{20}{2} = 54 - 10 = 44$$

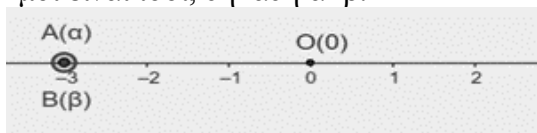
Πρόβλημα 5: Δύο αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές. Ποια σχέση συνδέει τους δύο αριθμούς;

Λύση: Εφόσον μας δίνεται ότι οι δύο αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές, αυτό σημαίνει ότι έχουν την ίδια απόσταση από το 0. Επομένως αν πούμε ο ένας είναι ο αριθμός α και ο άλλος ο αριθμός β αυτό σημαίνει είτε:

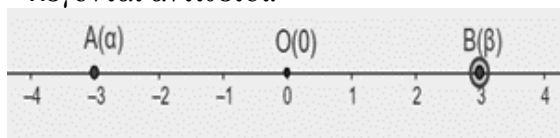
- Και οι δύο αριθμοί είναι θετικοί και έχουν την ίδια απόσταση από το 0, άρα οι τετμημένες ταυτίζονται και τελικά οι αριθμοί είναι ίσοι, δηλαδή $\alpha = \beta$.



- Και οι δύο αριθμοί είναι αρνητικοί και έχουν την ίδια απόσταση από το 0, άρα οι τετμημένες ταυτίζονται και τελικά οι αριθμοί είναι ίσοι, δηλαδή $\alpha = \beta$.



- Όμως υπάρχει και η περίπτωση που ο αριθμός β είναι θετικός και ο α είναι αρνητικός. Τότε δεν είναι ίσοι, αλλά είναι δύο αριθμοί συμμετρικοί ως προς το 0. Αυτοί λέγονται αντίθετοι.



Πρόβλημα 6 (χωρίς λύση):

Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας

x	2,5	-4,3	1/2	-3/4	-2024
-x					
-(-x)					
x					
-x					

Πρόβλημα 7: Δίνονται τρεις ρητοί αριθμοί: $x = -3, 2$, $y = 8$, $z = -4, 5$.

Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

- (α) Των x και y με το z,
- (β) Των x και y με το αντίθετο του z,
- (γ) Του x με το αντίθετο του y και το αντίθετο του z και
- (δ) Του αντίθετου του x με το αντίθετο του y και το αντίθετο του z.

Λύση: (α) Άθροισμα των x και y με το z, δηλαδή $(x+y)+z$. Αρκεί να βρούμε το αποτέλε-

σμα της πρόσθεσης των x και y και στη συνέχεια αυτό το άθροισμα να το προσθέσουμε τον αριθμό z. Έχουμε:

$$x + y = (-3,2) + (+8) = +(|+8| - |-3,2|) = +(8 - 3,2) = +4,8$$

και στην συνέχεια

$$(x + y) + z = (+4,8) + (-4,5) = +(|+4,8| - |-4,5|) = +(4,8 - 4,5) = +0,3$$

(β) Ο αντίθετος αριθμός του $z = -4,5$ είναι ο αριθμός $-z = +4,5$ επομένως έχουμε:

$$(x + y) + (-z) = (+4,8) + (+4,5) = +(|+4,8| + |+4,5|) = +(4,8 + 4,5) = +9,3$$

(γ) Ο αντίθετος αριθμός του $y = 8$ είναι ο αριθμός $-y = -8$ και ο αντίθετος αριθμός του $z = -4,5$ είναι ο αριθμός $-z = +4,5$ επομένως έχουμε:

$x + (-y) = (-3,2) + (-8) = -(|-3,2| - |-8|) = -(3,2 + 8) = -11,2$

και στην συνέχεια

$$(x + (-y)) + (-z) = (-11,2) + (+4,5) = -(|-11,2| + |+4,5|) = -(11,2 + 4,5) = -15,7$$

(δ) Ο αντίθετος αριθμός του $x = -3,2$ είναι ο αριθμός $-x = +3,2$, ο αντίθετος αριθμός του $y = 8$ είναι ο αριθμός $-y = -8$ και ο αντίθετος αριθμός του $z = -4,5$ είναι ο αριθμός $-z = +4,5$ επομένως έχουμε:

$-x + (-y) = (+3,2) + (-8) = -(|+3,2| + |-8|) = -(3,2 + 8) = -11,2$

και στην συνέχεια

$$(-x + (-y)) + (-z) = (-11,2) + (+4,5) = -(|-11,2| + |+4,5|) = -(11,2 + 4,5) = -15,7$$

Πρόβλημα 8 (χωρίς λύση): Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων:

$$A = -3 + 6 \cdot (2 - 4)$$

$$B = -2 - 3 \cdot (-7 - 2 + 1), \quad \Gamma = A \cdot B$$

$$\Delta = \frac{4}{5} \cdot 10 - 4 \cdot (-2) + 6 : (-3) - \frac{3}{7} \cdot (-14)$$

$$E = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \cdot (1 - 2)$$

$$Z = A^0 + (-B)^0 + \Gamma^0 - 2 \cdot \Delta^0 - E^0$$

$$H = \left(\frac{2}{5} - 1\right) \cdot \left(3 + \frac{3}{2}\right) - 2,$$

$$\Theta = \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right)$$

$$I = \frac{4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{8}}{-3 + \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{6}}, \quad K = \frac{\Delta}{E}$$