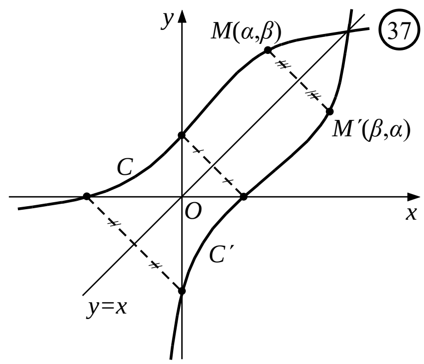
Παρουσιάζονται αναλυτικά όλες (συνολικά 22) οι αποδείξεις που είναι εντός εξεταστέας ύλης:

Απόδειξη 1η Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C' των f και της f^{-1} αντίστοιχα, είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες $x\widehat{O}y$ και $x'\widehat{O}y'$

Ας πάρουμε μια 1-1 συνάρτηση f και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις C και C' των f και της f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων (Σχ. 37).



Επειδή

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x,$$

Τότε αν ένα σημείο Μ(α,β) ανήκει στη C, τότε το σημείο Μ΄(β,α) θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\widehat{O}y$ και $x'\widehat{O}y'$, δηλαδή την ευθεία y=x

Απόδειξη 2η Έστω τώρα το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$

Απόδειξη

Σύμφωνα με τις ιδιότητες των ορίων έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = \lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0) = \lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu) + \lim_{x\to x_0}(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}) + \cdots + \lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$= \alpha_\nu \lim_{x\to x_0} x^\nu + \alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0} x^{\nu-1} + \cdots + \lim_{x\to x_0}\alpha_0 = \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0 = P(x_0).$$

Απόδειξη 3η
Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

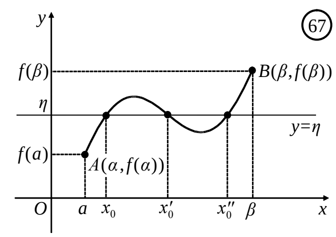
Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

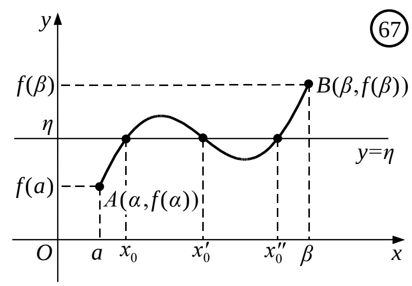
τότε, για κάθε αριθμό η, μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\eta$

Γεωμετρική ερμηνεία



Αν f συνεχής συνάρτησης στο $[\alpha,\beta]$ και τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας y=η, τότε η C_f τέμνει την ευθεία y=η σε ένα τουλάχιστον σημείο $M(x_0, \eta)$, με τετμημένη $x_0\in(\alpha,\beta)$.

Απόδειξη



Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,

αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

Απόδειξη 4η
Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη

Για $x\neq x_0$ έχουμε $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$, οπότε θα είναι:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Αποδείξεις 5η, 6η ,7η ,8η Να αποδείξετε ότι :

α) Αν $f(x)=c$, με $c\in\mathbb{R}$, τότε $f'(x)=0$

β) Αν $f(x)=x$, τότε $f'(x)=1$

γ) Αν $f(x)=x^{\nu}$, με $\nu\in\mathbb{N}-\{0,1\}$, τότε $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$

δ) Αν $f(x)=\sqrt{x}$, τότε $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$

Απόδειξη

α) Αν $x_0\in\mathbb{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{c-c}{x-x_0}=0$. Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0,\ \text{δηλαδή } (c)'=0.$$

β) Αν $x_0\in\mathbb{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει ότι : $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{x-x_0}{x-x_0}=1$.

Επομένως, $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1$, δηλαδή $(x)'=1$.

γ) Αν $x_0\in\mathbb{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},$$

Επομένως : $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1}$,

δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$.

δ) Αν $x_0\in(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε : $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

(Σημείωση: η $f(x)=\sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0).

Απόδειξη 9η

Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

Απόδειξη

Για $x\neq x_0$, ισχύει: $\dfrac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$.

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0)$, δηλαδή

$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Απόδειξη 10η Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}$

Απόδειξη Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε: $(x^{-\nu})'=\left(\dfrac{1}{x^{\nu}}\right)'=\dfrac{(1)'x^{\nu}-1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2}=\dfrac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-\nu x^{-\nu-1}$.

Απόδειξη 11η Έστω η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x \in \mathbb{R}-\{x|\sigma\upsilon\nu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\varphi x)'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Απόδειξη

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{x|\sigma\upsilon\nu x=0\}$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)'=\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

Σημείωση– Τύπος

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x \in \mathbb{R}-\{x|\eta\mu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, δηλαδή $(\sigma\varphi x)'=-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$

Αποδείξεις 12η, 13η, 14η

Να αποδείξετε ότι :

α) Η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$,

β) Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\alpha^x\ln\alpha$.

γ) Η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $x \in \mathbb{R}^*$ και ισχύει $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$

Απόδειξη

α) Πράγματι, αν $y=x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha\ln x$, τότε έχουμε $y=e^u$. Επομένως,

$$y'=(e^u)'=e^u\cdot u'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

β) Πράγματι, αν $y=\alpha^x=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y=e^u$. Επομένως,

$$y'=(e^u)'=e^u\cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^x\ln\alpha.$$

γ) Πράγματι·

— αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, ενώ

— αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$.

Επομένως, $y'=(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'=\dfrac{1}{-x}(-1)=\dfrac{1}{x}$ και άρα $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$.

Απόδειξη 15η

Να αποδείξετε ότι για μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ που ισχύουν:

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Απάντηση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

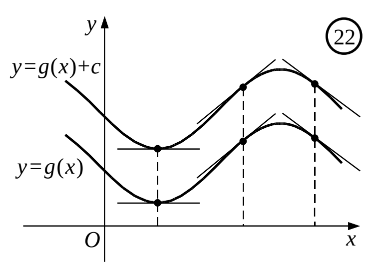
- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. (1). Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Απόδειξη 16η

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:
$f(x) = g(x) + c$



Απάντηση

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$.
Επομένως, σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.

Σχόλιο

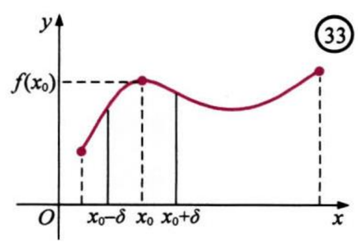
Τα παραπάνω θεωρήματα (3 και 4) ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

Απόδειξη 17η
Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι σ υ ν ε χ ή ς σε ένα διάστημα Δ.
Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Απάντηση
Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x)>0$. Έστω $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$. Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

Απόδειξη 18η
Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ.
Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0)=0$

Απόδειξη
Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε: $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq\Delta$ και $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. (1) Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.



Επομένως,

— αν $x\in(x_0-\delta,x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0 \quad (2)$$

— αν $x\in(x_0,x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0 \quad (3)$$

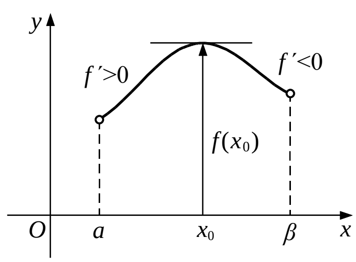
Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

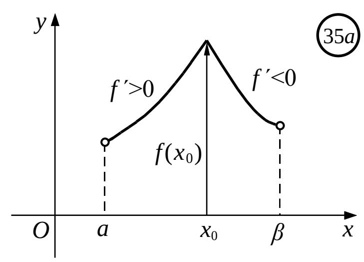
Γεωμετρική ερμηνεία
Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_o\in(\alpha,\beta)$ και είναι παραγωγίσιμη στο x_o, τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_o, f(x_o))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Αποδείξεις 19η, 20η
Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.
i) Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f (Σχ. 35α).
ii) Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f (Σχ. 35β). (δε μετριέται ως απόδειξη, γιατί δεν αναλύεται στο σχολικό βιβλίο)
iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β) (Σχ. 35γ).

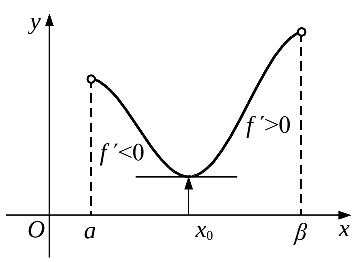
Απόδειξη

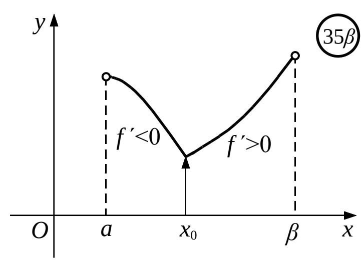
i) Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$ (1). Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in[x_0,\beta)$ (2).



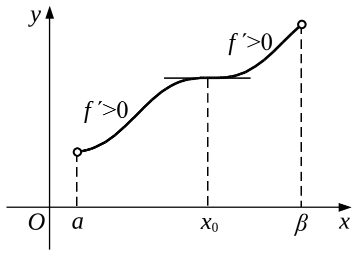


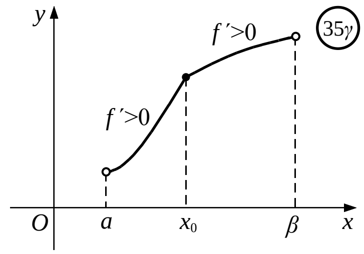
Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.
ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.





iii) Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.





Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

— Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Απόδειξη 21η

Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ,
Αν F είναι μία παράγουσα της f στοΔ, τότε
— όλες οι συναρτήσεις της μορφής G(x) =F(x) +c, c∈R είναι παράγουσες της f στο Δ και
— κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή: G(x) =F(x) +c, c∈R

Απόδειξη

— Κάθε συνάρτηση της μορφής G(x) =F(x)+c, όπου c∈R, είναι μία παράγουσα της f στο Δ, αφού G′(x) = (F(x) +c)′=F′(x) =f(x), για κάθε x∈Δ.

— ΄Εστω G μία άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε x∈Δ ισχύουν F′(x) =f(x) και G′(x) =f(x), οπότε G′(x) =F′(x), για κάθε x∈Δ.

Απόδειξη 22η

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σ΄ ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο[α,β], τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μία παράγουσα της f στο [α,β].

Επειδή και η G είναι μία παράγουσα της f στο[α,β], θα υπάρχει $c \in R$
τέτοιο, ώστε G(x) =F(x) +c.(1)

Από την (1), για x=α, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = 0 + c = c$, οπότε c=G(α).

Επομένως, G(x) =F(x) +G(α), οπότε, για x=β, έχουμε $G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$ και άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha).$$