ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

(ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ-ΣΧΟΛΙΑ)

- **Αν γνωρίζουμε όλες τις πλευρές του τριγώνου**, μπορούμε να βρούμε:

1. Το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του (οξυγώνιο, ορθογώνιο, αμβλυγώνιο), συγκρίνοντας το τετράγωνο **της μεγαλύτερης πλευράς** με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών.

Έστω, π.χ. , ότι η μεγαλύτερη πλευρά τριγώνου ΑΒΓ είναι η α. Τότε:

- Αν $\alpha^2>\beta^2+\gamma^2$, το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο ($\mathrm{A}>90^\circ$)
- Αν $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ($\mathrm{A}=90^\circ$)
- Αν $\alpha^2<\beta^2+\gamma^2$, το τρίγωνο είναι οξυγώνιο ($\mathrm{A}<90^\circ$)

2. Οποιαδήποτε γωνία του, χρησιμοποιώντας το νόμο των συνημιτόνων.

   Ανάλογα με το ποια γωνία επιθυμούμε να βρούμε, επιλέγουμε τον κατάλληλο από τους ακόλουθους τύπους και τον επιλύουμε ως προς το συνημίτονο της γωνίας.

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\text{συν}\,\mathrm{A} \Leftrightarrow 2\beta\gamma\,\text{συν}\,\mathrm{A} = \beta^2+\gamma^2-\alpha^2 \Leftrightarrow \text{συν}\,\mathrm{A} = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$$

$$\beta^2=\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\,\text{συν}\,\mathrm{B} \Leftrightarrow 2\alpha\gamma\,\text{συν}\,\mathrm{B} = \alpha^2+\gamma^2-\beta^2 \Leftrightarrow \text{συν}\,\mathrm{B} = \frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}$$

$$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\,\text{συν}\,\Gamma \Leftrightarrow 2\alpha\beta\,\text{συν}\,\Gamma = \alpha^2+\beta^2-\gamma^2 \Leftrightarrow \text{συν}\,\Gamma = \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}$$

3. Οποιοδήποτε από τα ύψη του, χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο τύπο.

$$\upsilon_\alpha = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

$$\upsilon_\beta = \frac{2}{\beta}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

$$\upsilon_\gamma = \frac{2}{\gamma}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

όπου $\tau=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$, η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

Σημείωση 1η : Επειδή η ποσότητα $2\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ εμφανίζεται και στους τρεις τύπους, είναι σκόπιμο να την υπολογίσουμε χωριστά και στη συνέχεια να διαιρούμε με το μήκος της κάθε πλευράς, για να υπολογίζουμε το αντίστοιχο σ΄αυτήν ύψος.

Σημείωση 2η : Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα **ορθογωνίου** τριγώνου, προτιμούμε τον απλούστερο τύπο: $\alpha\upsilon_\alpha = \beta\gamma \Leftrightarrow \upsilon_\alpha = \dfrac{\beta\gamma}{\alpha}$

4. Το εμβαδόν του.

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\alpha\frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

5. Την προβολή οποιασδήποτε πλευράς του σε οποιαδήποτε πλευρά του, χρησιμοποιώντας το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα.

   Προσοχή!!! Για να προσδιορίσουμε ποιον από τους δύο τύπους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε, βρίσκουμε πρώτα το είδος της γωνίας που βρίσκεται απέναντι από την τρίτη πλευρά, συγκρίνοντας το τετράγωνό της με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών.

6. Οποιαδήποτε από τις διαμέσους του, εφαρμόζοντας το $1^{ο}$ θεώρημα διαμέσων (το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της περιεχόμενης διαμέσου, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς).

7. Την προβολή οποιασδήποτε διαμέσου του στην πλευρά που αντιστοιχεί, εφαρμόζοντας το $2^{ο}$ θεώρημα διαμέσων.

- Με το νόμο των συνημιτόνων μπορούμε να υπολογίσουμε μια οποιαδήποτε πλευρά ενός τριγώνου, αρκεί να γνωρίζουμε τις άλλες δύο και την περιεχόμενή τους γωνία.