ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΑ

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ΤΟΥ ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΥ

Αρχαίο Κείμενο
Απόδοση στη σύγχρονη Μαθηματική γλώσσα
Νίκος Ροκοπάνος, Αντώνης Τσολομύτης

Σάμος 2021–2022

Έκδοση 1.0 ¶ 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Στοιχειοθετήθηκε με το XƎLaTeX

Σάμος, Ελλάδα.
Επικοινωνία: atsol@aegean.gr

Version 1.0 ¶ 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Typeset with XƎLaTeX.

Samos, Greece.

Contact: atsol@aegean.gr

ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

Μέρος I

Σύγχρονη Μαθηματική Απόδοση

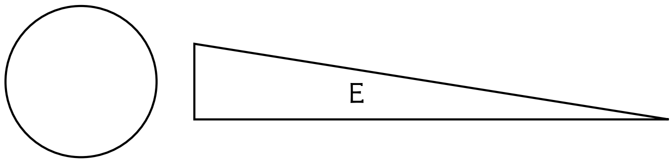
Πρόταση 1 (22)**.** *Έστω ένας κύκλος και ένα ορθογώνιο τρίγωνο ώστε:*

α) *η ακτίνα του κύκλου να είναι ίση με μια από τις δύο κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου και*

β) *η περιφέρεια του κύκλου να είναι ίση με την άλλη κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου.*

Τότε ο κύκλος έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου αυτού.

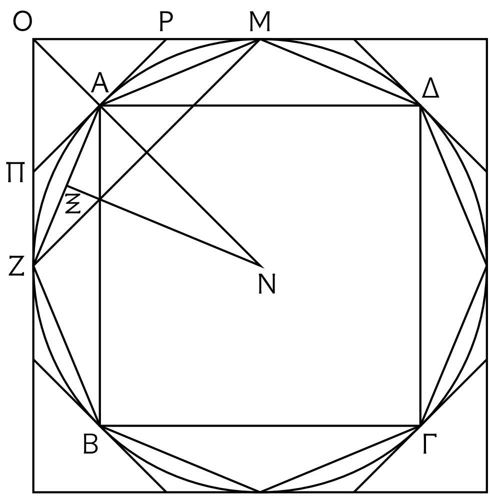
Απόδειξη. Θεωρούμε τον κύκλο ΑΒΔΓ και το ορθογώνιο τρίγωνο Ε σύμφωνα με την υπόθεση. Ισχυρίζομαι ότι ο κύκλος ΑΒΓΔ και το τρίγωνο Ε έχουν ίσα εμβαδά.



Υποθέτουμε αρχικά ότι το εμβαδόν του κύκλου είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τριγώνου Ε. Δηλαδή αν συμβολίσουμε με Α το εμβαδόν του κύκλου έστω ότι ισχύει $A > |E|$.

Εγγράφουμε στον κύκλο το τετράγωνο ΑΒΓΔ και λαμβάνουμε τα μέσα των τόξων $\widehat{A\Delta}$, $\widehat{\Delta\Gamma}$, $\widehat{B\Gamma}$ και $\widehat{AB}$.

Ενώνοντας τα μέσα των παραπάνω τόξων έχουμε εγγράψει στον κύκλο ένα κανονικό οκτάγωνο.



Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία μέχρι η διαφορά του εμβαδού του κανονικού πολυγώνου που έχει εγγραφεί στον κύκλο από το εμβαδόν του κύκλου αυτού να είναι μικρότερη από $A - |E|$ (Στοιχεία Ευκλείδη, Βιβλίο 10, Πρόταση 1).

Συμβόλιζοντας με B το εμβαδόν του κανονικού αυτού πολυγώνου θα είναι $A - B < A - |E|$ οπότε $B > |E|$. Δηλαδή το κανονικό πολύγωνο έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τριγώνου.

Στην συνέχεια λαμβάνουμε το κέντρο N του κύκλου και φέρνουμε το απόστημα NΞ προς την πλευρά AZ.

Τότε η NΞ θα είναι μικρότερη από την πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου E που είναι ίση με την ακτίνα.

Επίσης η περίμετρος του εγγεγραμμένου πολυγώνου είναι μικρότερη από την άλλη κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου E καθώς αυτή είναι ίση με την περιφέρεια του κύκλου (Περί Σφαιρών και Κυλίνδρων, Βιβλίο 1, Πρόταση 1).

Έτσι το εμβαδόν του εγγεγραμμένου πολυγώνου είναι μικρότερο από το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου E. Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς παραπάνω δείξαμε ότι $B > |E|$.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο κύκλος ΑΒΓΔ έχει μικρότερο εμβαδόν από το ορθογώνιο τρίγωνο E. Δηλαδή έστω ότι $A < |E|$ και $\delta = |E| - A$.

Περιγράφουμε περί τον κύκλο τετράγωνο και διχοτομούμε τα τόξα του κύκλου που αντιστοιχούν στις γωνίες του τετραγώνου.

Στην συνέχεια φέρνουμε τις εφαπτόμενες στα μέσα των παραπάνω τόξων οπότε έχουμε περιγράψει περί τον κύκλο ΑΒΓΔ ένα κανονικό οκτάγωνο.

Τότε $|OAP| > |APM|$ καθώς $OP > PM$ και άρα

$$|OA\Pi| + |OAP| > |OAP| + |APM|$$

ή

$$|O\Pi P| > |OAM|.$$

Συνεπώς το τρίγωνο ΟΠΡ έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από το μισό του εμβαδού του μεικτόγραμμου χωρίου OZAM .

Επαναλαμβάνοντας συνεχώς την ίδια διαδικασία (περιγραφής περί τον κύκλο κανονικών πολυγώνων με διχοτόμηση των τόξων που προκύπτουν κάθε φορά) η διαφορά του εμβαδού του τελευταίου κανονικού πολυγώνου και του εμβαδού του κύκλου θα είναι μικρότερη από το δ (Στοιχεία Ευκλείδη, Βιβλίο 10, Πρόταση 1).

Συμβολίζοντας με δ' την διαφορά αυτή θα είναι $\delta' < |E| - A$.

Αν συμβολίσουμε με B το εμβαδόν του τελευταίου εγγραφέντος κανονικού πολυγώνου από την παραπάνω έπεται $B - A < |E| - A$ ή $B < |E|$.

Η περίμετρος όμως του κανονικού πολυγώνου είναι μεγαλύτερη από την περιφέρεια του κύκλου και άρα από την μια κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου E.

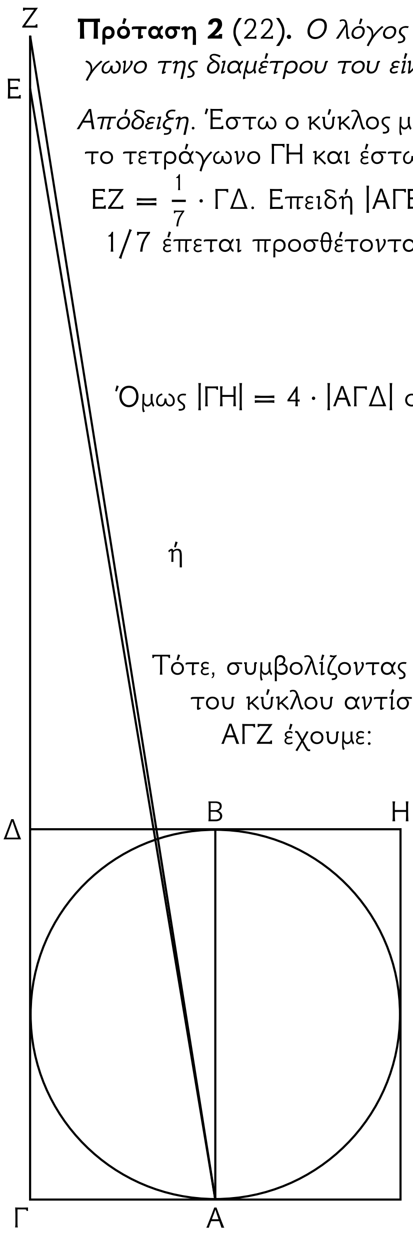
Έτσι αν συμβολίσουμε με λ_ν την πλευρά του κανονικού πολυγώνου που έχει περιγραφεί περί τον κύκλο και κ_1 την κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου που είναι ίση με την περιφέρεια του κύκλου θα είναι $\nu \cdot \lambda_\nu > \kappa_1$ οπότε

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \nu \cdot \lambda_\nu > \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \kappa_1$$

όπου με ρ έχουμε συμβολίσει την ακτίνα του κύκλου.

Έτσι θα είναι $\mathrm{B} > |\mathrm{E}|$ που όμως είναι αδύνατον να ισχύει καθώς παραπάνω δείξαμε ότι $\mathrm{B} < |\mathrm{E}|$.

Συνεπώς $\mathrm{A} = |\mathrm{E}|$ δηλαδή ο κύκλος και το ορθογώνιο τρίγωνο έχουν ίσα εμβαδά.



Πρόταση 2 (22). *Ο λόγος του εμβαδού ενός κύκλου προς το τετράγωνο της διαμέτρου του είναι μικρότερος από 11/14.*

Απόδειξη. Έστω ο κύκλος με διάμετρο ΑΒ. Περιγράφουμε περί αυτόν το τετράγωνο ΓΗ και έστω τα σημεία Ε και Ζ ώστε $\Delta\mathrm{E} = 2 \cdot \Delta\Gamma$ και $\mathrm{EZ} = \frac{1}{7} \cdot \Gamma\Delta$. Επειδή $|\mathrm{A}\Gamma\mathrm{E}|/|\mathrm{A}\Gamma\Delta| = 3 = 21/7$ και $|\mathrm{AEZ}|/|\mathrm{A}\Gamma\Delta| = 1/7$ έπεται προσθέτοντας ότι

$$\frac{|\mathrm{A}\Gamma\mathrm{Z}|}{|\mathrm{A}\Gamma\Delta|} = \frac{22}{7}.$$

Όμως $|\Gamma\mathrm{H}| = 4 \cdot |\mathrm{A}\Gamma\Delta|$ οπότε από την προηγούμενη έπεται

$$\frac{|\mathrm{A}\Gamma\mathrm{Z}|}{|\Gamma\mathrm{H}|/4} = \frac{22}{7}$$

ή

$$\frac{|\mathrm{A}\Gamma\mathrm{Z}|}{|\Gamma\mathrm{H}|} = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}.$$

Τότε, συμβολίζοντας με ρ και δ την ακτίνα και την διάμετρο του κύκλου αντίστοιχα, για το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΖ έχουμε:

$$|\mathrm{A}\Gamma\mathrm{Z}| = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{A}\Gamma\cdot\Gamma\mathrm{Z} = \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\frac{22}{7}\delta = \frac{22}{7}\rho^2$$

Στην συνέχεια παρατηρούμε ότι το εμβαδόν του κύκλου είναι μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΖ καθώς η κάθετη πλευρά ΑΓ του τριγώνου είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου ενώ η βάση του ΓΖ είναι ίση με τα $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ της διαμέτρου του κύκλου. Επειδή όπως αποδεικνύεται στην αμέσως επόμενη πρόταση, για την περιφέρεια Π του κύκλου ισχύει $\Pi < 3\frac{1}{7}\delta$, αν συμβολίσουμε με A το εμβαδόν του κύκλου έχουμε $A < |\mathrm{A\Gamma Z}|$ καθώς $A < \frac{22}{7}\rho^2$.

Συνεπώς

$$\frac{A}{\delta^2} < \frac{|\mathrm{A\Gamma Z}|}{|\mathrm{\Gamma H}|} = \frac{11}{14}.$$

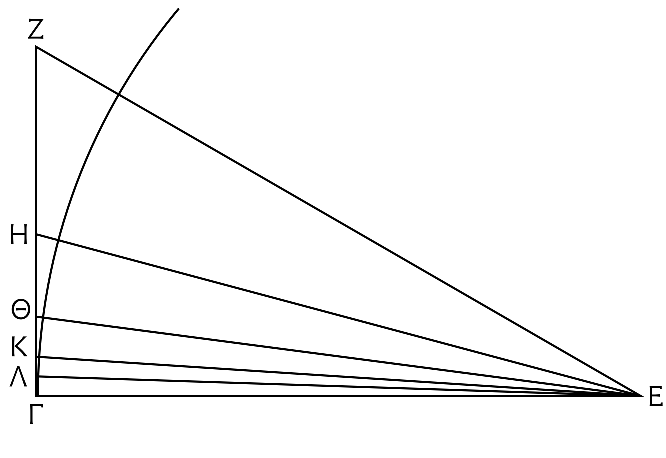
Πρόταση 3 (22). *Η περιφέρεια ενός κύκλου είναι μικρότερη από τα $3+1/7$ της διαμέτρου του και μεγαλύτερη από τα $3+10/71$ της διαμέτρου του. Δηλαδή αν Π είναι η περιφέρεια ενός κύκλου διαμέτρου δ ισχύει*

$$3\frac{10}{71}\delta < \Pi < 3\frac{1}{7}\delta.$$

Απόδειξη. Έστω κύκλος κέντρου Ε και διάμετρο $\mathrm{A\Gamma} = \delta$ και έστω Π η περιφέρειά του.

Ισχυρισμός 1: Ισχύει ότι $\Pi < 3\frac{1}{7}\delta$.

Φέρνουμε την εφαπτόμενη ΓΖ στο Γ ώστε $\widehat{\mathrm{ZE\Gamma}} = 1/3$ της ορθής, οπότε $\mathrm{ZE} = 2 \cdot \mathrm{Z\Gamma}$.



(Στμ: από την Πρόταση 1 παραπάνω και την Πρόταση 2 του Βιβλίου 12 των Στοιχείων του Ευκλείδη αρκεί να γίνει η απόδειξη για οποιαδήποτε συγκεκριμένη ακτίνα. Έτσι, ο Αρχιμήδης επιλέγει να κάνει την απόδειξη για κύκλο ακτίνας $\mathrm{E\Gamma} = 256$.)

Αν $\mathrm{Z\Gamma} = 153$ από την προηγούμενη έπεται ότι $\mathrm{EZ} = 306$ ενώ από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Στοιχεία Ευκλείδη, Βιβλίο Ι, Πρόταση 47) έπεται $\mathrm{E\Gamma} = \sqrt{306^2 - 153^2} = 265$.

Φέρνουμε την διχοτόμο ΕΗ της $\widehat{\mathrm{ZE\Gamma}}$ και άρα από το Θεώρημα της Εσωτερικής Διχοτόμου στο τρίγωνο ΖΕΓ (Στοιχεία Ευκλείδη, Βιβλίο 6, Πρόταση 3) έχουμε

$$\frac{\mathrm{ZE}}{\mathrm{E\Gamma}} = \frac{\mathrm{ZH}}{\mathrm{H\Gamma}}.$$

Έτσι θα είναι και

$$\frac{\mathrm{ZE}+\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{E\Gamma}}=\frac{\mathrm{ZH}+\mathrm{H\Gamma}}{\mathrm{H\Gamma}}=\frac{\mathrm{Z\Gamma}}{\mathrm{H\Gamma}},$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\frac{\mathrm{ZE}+\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{Z\Gamma}}=\frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{H\Gamma}} \tag{1}$$

Όμως

$$\frac{\mathrm{ZE}}{\mathrm{Z\Gamma}}=\frac{306}{153}.$$

και άρα

$$\frac{\mathrm{ZE}^2}{\mathrm{Z\Gamma}^2}=\frac{93636}{23409}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{\mathrm{ZE}^2-\mathrm{Z\Gamma}^2}{\mathrm{Z\Gamma}^2}=\frac{93636-23409}{23409}.$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα όμως (Στοιχεία Ευκλείδη, Βιβλίο I, Πρόταση 47) είναι $\mathrm{ZE}^2-\mathrm{Z\Gamma}^2=\mathrm{\Gamma E}^2$ και έτσι από την παραπάνω έπεται ότι

$$\frac{\mathrm{\Gamma E}^2}{\mathrm{Z\Gamma}^2}=\frac{70227}{23409}.$$

Έτσι,

$$\frac{\mathrm{\Gamma E}}{\mathrm{Z\Gamma}}=\sqrt{\frac{70227}{23409}}=\frac{\sqrt{70225+2}}{\sqrt{23409}}=\frac{\sqrt{265^2+2}}{\sqrt{153^2}}>\frac{265}{153}, \tag{2}$$

και επειδή $\mathrm{ZE}/\mathrm{Z\Gamma}=306/153$ έπεται ότι

$$\frac{\mathrm{\Gamma E}+\mathrm{ZE}}{\mathrm{Z\Gamma}}>\frac{265+306}{153}=\frac{571}{153}.$$

Έτσι λόγω της (1) προκύπτει

$$\frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{H\Gamma}}>\frac{571}{153}. \tag{3}$$

Υψώνοντας τώρα στο τετράγωνο παίρνουμε

$$\frac{\mathrm{E\Gamma}^2}{\mathrm{H\Gamma}^2}>\frac{326041}{23409},$$

και άρα

$$\frac{\mathrm{E\Gamma}^2+\mathrm{H\Gamma}^2}{\mathrm{H\Gamma}^2}>\frac{326041+23409}{23409},$$

ενώ καθώς $\mathrm{E\Gamma}^2+\mathrm{H\Gamma}^2=\mathrm{HE}^2$ (Πυθαγόρειο Θεώρημα), από την τελευταία προκύπτει

$$\frac{\mathrm{HE}^2}{\mathrm{H\Gamma}^2}>\frac{349450}{23409}.$$

Τότε

$$\frac{ΗΕ}{ΗΓ} > \sqrt{\frac{349450}{23409}} > \frac{\sqrt{349428\frac{49}{64}}}{\sqrt{23409}} = \frac{\sqrt{\left(591\frac{1}{8}\right)^2}}{\sqrt{153^2}} = \frac{591\frac{1}{8}}{153},$$

δηλαδή

$$\frac{ΗΕ}{ΗΓ} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}. \tag{4}$$

Στη συνέχεια θα επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία άλλες τρεις φορές (σύνολο τέσσαρες).

2η επανάληψη:

Φέρνουμε την διχοτόμο ΕΘ της $\widehat{ΗΕΓ}$ οπότε από το Θεώρημα της Εσωτερικής Διχοτόμου στο ΗΕΓ έχουμε

$$\frac{ΗΕ}{ΓΕ} = \frac{ΗΘ}{ΓΘ},$$

οπότε ισχύει

$$\frac{ΗΕ + ΓΕ}{ΓΕ} = \frac{ΗΘ + ΓΘ}{ΓΘ} = \frac{ΗΓ}{ΓΘ}.$$

Άρα

$$\frac{ΗΕ + ΓΕ}{ΗΓ} = \frac{ΓΕ}{ΓΘ}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3) και (4) παίρνουμε

$$\frac{ΕΓ + ΗΕ}{ΗΓ} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153},$$

και έτσι από την παραπάνω έπεται ότι

$$\frac{ΓΕ}{ΓΘ} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153} \tag{5}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε

$$\frac{ΓΕ^2}{ΓΘ^2} > \frac{1350534\frac{33}{64}}{23409},$$

και άρα

$$\frac{ΓΕ^2 + ΓΘ^2}{ΓΘ^2} > \frac{1350534\frac{33}{64} + 23409}{23409}.$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι $ΓΕ^2 + ΓΘ^2 = ΘΕ^2$, και έτσι

$$\frac{ΘΕ^2}{ΓΘ^2} > \frac{1373943\frac{33}{64}}{23409},$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\frac{\Theta E}{\Gamma\Theta} > \sqrt{\frac{1373943\frac{33}{64}}{23409}} > \frac{\sqrt{1373877\frac{1}{64}}}{\sqrt{23409}} = \frac{\sqrt{\left(1172\frac{1}{8}\right)^2}}{\sqrt{153^2}} = \frac{1172\frac{1}{8}}{153},$$

δηλαδή ισχύει

$$\frac{\Theta E}{\Gamma\Theta} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}. \tag{6}$$

3η επανάληψη:

Φέρνουμε την διχοτόμο ΕΚ της $\widehat{\Theta E\Gamma}$ και άρα από το Θεώρημα της Εσωτερικής Διχοτόμου στο ΘΕΓ έχουμε

$$\frac{\Theta E}{\Gamma E} = \frac{\Theta K}{\Gamma K},$$

οπότε

$$\frac{\Theta E + \Gamma E}{\Gamma E} = \frac{\Theta K + \Gamma K}{\Gamma K} = \frac{\Gamma\Theta}{\Gamma K}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{\Theta E + \Gamma E}{\Gamma\Theta} = \frac{\Gamma E}{\Gamma K}.$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (5) και (6) και παίρνουμε

$$\frac{\Theta E + \Gamma E}{\Gamma\Theta} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153},$$

οπότε από την παραπάνω έπεται ότι

$$\frac{\Gamma E}{\Gamma K} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153}. \tag{7}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο λαμβάνουμε

$$\frac{\Gamma E^2}{\Gamma K^2} > \frac{5448723\frac{1}{16}}{23409},$$

από την οποία προκύπτει και ότι

$$\frac{\Gamma E^2 + \Gamma K^2}{\Gamma K^2} > \frac{5448723\frac{1}{16} + 23409}{23409}.$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα όμως είναι $\Gamma E^2 + \Gamma K^2 = KE^2$ και επομένως είναι και

$$\frac{KE^2}{\Gamma K^2} > \frac{5472132\frac{1}{16}}{23409}.$$

Από την τελευταία έχουμε:

$$\frac{\mathrm{KE}}{\Gamma\mathrm{K}} > \sqrt{\frac{5472132\frac{1}{16}}{23409}} > \frac{\sqrt{5472090\frac{9}{16}}}{\sqrt{23409}} = \frac{\sqrt{\left(2339\frac{1}{4}\right)^2}}{\sqrt{153^2}} = \frac{2339\frac{1}{4}}{153},$$

δηλαδή ισχύει

$$\frac{\mathrm{KE}}{\mathrm{K}\Gamma} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153}. \tag{8}$$

4η επανάληψη:

Τέλος, φέρνουμε και την διχοτόμο ΛΕ της $\widehat{\Gamma\mathrm{E}\mathrm{K}}$ οπότε από το Θεώρημα της Εσωτερικής Διχοτόμου στο τρίγωνο ΓΕΚ είναι:

$$\frac{\mathrm{KE}}{\Gamma\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{K}\Lambda}{\Gamma\Lambda}$$

και άρα

$$\frac{\mathrm{KE}+\Gamma\mathrm{E}}{\Gamma\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{K}\Lambda+\Gamma\Lambda}{\Gamma\Lambda} = \frac{\Gamma\mathrm{K}}{\Gamma\Lambda}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{\mathrm{KE}+\Gamma\mathrm{E}}{\Gamma\mathrm{K}} = \frac{\Gamma\mathrm{E}}{\Gamma\Lambda}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (7) και (8) παίρνουμε

$$\frac{\mathrm{KE}+\Gamma\mathrm{E}}{\Gamma\mathrm{K}} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153},$$

οπότε από την προηγούμενη έπεται:

$$\frac{\Gamma\mathrm{E}}{\Gamma\Lambda} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}. \tag{9}$$

Συνοψίζοντας, για τις ΓΖ, ΓΗ, ΓΘ, ΓΚ και ΓΛ ισχύουν οι επόμενες ανισότητες:

$$\frac{\Gamma\mathrm{E}}{\Gamma\mathrm{Z}} > \frac{265}{153} \qquad \text{(η σχέση 2)}$$

$$\frac{\Gamma\mathrm{E}}{\Gamma\mathrm{H}} > \frac{571}{153} \qquad \text{(η σχέση 3)}$$

$$\frac{\Gamma\mathrm{E}}{\Gamma\Theta} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153} \qquad \text{(η σχέση 5)}$$

$$\frac{\Gamma\mathrm{E}}{\Gamma\mathrm{K}} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153} \qquad \text{(η σχέση 7)}$$

$$\frac{\Gamma\mathrm{E}}{\Gamma\Lambda} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153} \qquad \text{(η σχέση 9)}$$

Η ΓΕ όμως είναι η ακτίνα του κύκλου ενώ οι ΓΖ, ΓΗ, ΓΘ, ΓΚ και ΓΛ είναι ίσες με τα μισά των πλευρών των περιγεγραμμένων περί τον κύκλο εξαγώνου, δωδεκαγώνου, εικοσιτετραγώνου, σαρανταοκταγώνου και ενενηνταεξαγώνου αντίστοιχα καθώς η $\widehat{ΖΕΓ}$ είναι ίση με το $1/3$ της ορθής διχοτομήθηκε διαδοχικά τέσσαρες φορές (και άρα η $\widehat{ΛΕΓ}$ είναι ίση με το $1/48$ της ορθής.)

Από τις παραπάνω ανισότητες παίρνουμε:

$$\frac{\delta}{2ΓΖ} > \frac{265}{153}$$
$$\frac{\delta}{2ΓΗ} > \frac{571}{153}$$
$$\frac{\delta}{2ΓΘ} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153}$$
$$\frac{\delta}{2ΓΚ} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153}$$
$$\frac{\delta}{2ΓΛ} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$$

όπου $\delta = 2ΓΕ$ είναι η διάμετρος του κύκλου.

Συμβολίζοντας με $Π_6$, $Π_{12}$, $Π_{24}$, $Π_{48}$ και $Π_{96}$ τις περιμέτρους των περιγεγραμμένων περί τον κύκλο εξαγώνου, δωδεκαγώνου, εικοσιτετραγώνου, σαρανταοκταγώνου και ενενηνταεξαγώνου αντίστοιχα από τις παραπάνω ανισότητες προκύπτουν:

$$\frac{\delta}{Π_6} > \frac{265}{6 \cdot 153}$$
$$\frac{\delta}{Π_{12}} > \frac{571}{12 \cdot 153}$$
$$\frac{\delta}{Π_{24}} > \frac{1162\frac{1}{8}}{24 \cdot 153}$$
$$\frac{\delta}{Π_{48}} > \frac{2334\frac{1}{4}}{48 \cdot 153}$$
$$\frac{\delta}{Π_{96}} > \frac{4673\frac{1}{2}}{96 \cdot 153}$$

και άρα

$$
\begin{aligned}
\frac{\Pi_6}{\delta} &< \frac{918}{265}\\
\frac{\Pi_{12}}{\delta} &< \frac{1836}{571}\\
\frac{\Pi_{24}}{\delta} &< \frac{3672}{1162\frac{1}{8}}\\
\frac{\Pi_{48}}{\delta} &< \frac{7344}{2334\frac{1}{4}}\\
\frac{\Pi_{96}}{\delta} &< \frac{14688}{4673\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, για την περίμετρο του περιγεγραμμένου περί τον κύκλο ενενηνταεξαγώνου ισχύει

$$\Pi_{96} < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} \cdot \delta.$$

Όμως

$$\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{7},$$

και άρα από την προηγούμενη ανισότητα έπεται ότι:

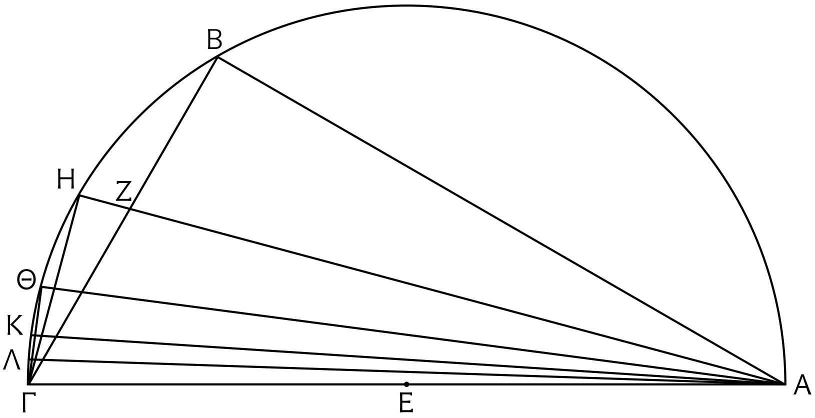
$$\Pi_{96} < 3\frac{1}{7} \cdot \delta.$$

Αλλά το ενενηνταεξάγωνο είναι περιγεγραμμένο περί τον κύκλο και έτσι συμπεραίνουμε ότι για την περιφέρεια Π του κύκλου ισχύει $\Pi < \Pi_{96}$, οπότε από την προηγούμενη, έπεται τελικά ότι

$$\Pi < 3\frac{1}{7} \cdot \delta.$$

Ισχυρισμός 2: Ισχύει ότι $\Pi > 3\frac{10}{71}\delta$.

Θεωρούμε τον κύκλο διαμέτρου ΑΓ και την εγγεγραμμένη σε αυτόν γωνία $\widehat{\mathrm{BA\Gamma}} = 1/3$ της ορθής.



Τότε θα είναι

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{2}{1}, \tag{10}$$

οπότε αν $\text{ΒΓ} = 780$ παίρνουμε

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{1560}{780},$$

και άρα υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε

$$\frac{\text{ΑΓ}^2}{\text{ΒΓ}^2} = \frac{1560^2}{780^2}.$$

Τότε είναι και

$$\frac{\text{ΑΓ}^2 - \text{ΒΓ}^2}{\text{ΒΓ}^2} = \frac{1560^2 - 780^2}{780^2}$$

ή

$$\frac{\text{ΑΒ}^2}{\text{ΒΓ}^2} = \frac{1825200}{608400} = 3.$$

Έτσι

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} = \sqrt{\frac{1825200}{608400}} < \frac{\sqrt{1825201}}{780} = \frac{1351}{780},$$

δηλαδή ισχύει

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} < \frac{1351}{780}. \tag{11}$$

1η επανάληψη:

Στην συνέχεια φέρνουμε την διχοτόμο ΑΗ της $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$ οπότε $\widehat{\text{ΒΑΗ}} = \widehat{\text{ΗΑΓ}}$. Όμως $\widehat{\text{ΒΑΗ}} = \widehat{\text{ΗΓΒ}}$ καθώς είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο και άρα τα τρίγωνα ΑΗΓ και ΓΗΖ είναι ισογώνια καθώς έχουν κοινή την $\widehat{\text{ΑΗΓ}}$ και $\widehat{\text{ΗΑΓ}} = \widehat{\text{ΗΓΖ}} = \widehat{\text{ΗΓΒ}}$. Συνεπώς,

$$\frac{\text{ΑΗ}}{\text{ΗΓ}} = \frac{\text{ΓΗ}}{\text{ΗΖ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΖ}}. \tag{12}$$

Επειδή όμως

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} < \frac{1351}{780}$$

και $\text{ΑΓ}/\text{ΒΓ} = 1560/780$ θα είναι

$$\frac{\text{ΑΒ}+\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} < \frac{1351+1560}{780}$$

ή

$$\frac{\text{ΑΒ}+\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} < \frac{2911}{780}. \tag{13}$$

Επιπλέον η ΑΗ είναι διχοτόμος της $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$ και επομένως από το Θεώρημα της Εσωτερικής Διχοτόμου στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΒΖ}}{\text{ΓΖ}},$$

οπότε θα είναι και

$$\frac{\text{ΑΒ}+\text{ΑΓ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΒΖ}+\text{ΖΓ}}{\text{ΖΓ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΖΓ}}.$$

Άρα

$$\frac{\text{ΑΒ}+\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΖΓ}},$$

και επομένως λόγω της (13) ισχύει

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΖΓ}} < \frac{2911}{780}.$$

Τότε όμως λόγω της (12) παίρνουμε

$$\frac{\text{ΑΗ}}{\text{ΗΓ}} < \frac{2911}{780}, \tag{14}$$

από όπου, υψώνοντας στο τετράγωνο

$$\frac{\text{ΑΗ}^2}{\text{ΗΓ}^2} < \frac{8473921}{608400}.$$

Από την παραπάνω έπεται όμως ότι

$$\frac{\text{ΑΗ}^2+\text{ΗΓ}^2}{\text{ΗΓ}^2} < \frac{8473921+608400}{608400},$$

και καθώς από το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι $ΑΗ^2+ΗΓ^2 = ΑΓ^2$, παίρνουμε

$$\frac{ΑΓ^2}{ΗΓ^2} < \frac{9082321}{608400}.$$

Από την τελευταία ανισότητα προκύπτει

$$\frac{ΑΓ}{ΓΗ} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}, \tag{15}$$

καθώς $9082321 < 9082689\frac{1}{16} = \left(3013\frac{3}{4}\right)^2$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (14) και (15) παίρνουμε

$$\frac{ΑΗ+ΑΓ}{ΗΓ} < \frac{5924\frac{3}{4}}{780} = \frac{23699}{3120} = \frac{1823}{240},$$

δηλαδή ισχύει

$$\frac{ΑΗ+ΑΓ}{ΗΓ} < \frac{1823}{240}. \tag{16}$$

2η επανάληψη:

Στην συνέχεια φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΘ της $\widehat{ΓΑΗ}$ και έστω Z_1 το σημείο τομής των ΑΘ και ΗΓ, τη διχοτόμο ΑΚ της $\widehat{ΘΑΓ}$ και έστω Z_2 το σημείο τομής των ΑΚ και ΘΓ, και τη διχοτόμο ΑΛ της $\widehat{ΚΑΓ}$ και έστω Z_3 το σημείο τομής των ΑΛ και ΚΓ.

Τότε από το Θεώρημα Εσωτερικής Διχοτόμου στο τρίγωνο ΑΗΓ είναι

$$\frac{ΑΗ}{ΑΓ} = \frac{ΗZ_1}{ΓZ_1},$$

και άρα

$$\frac{ΑΗ+ΑΓ}{ΑΓ} = \frac{ΗZ_1+ΓZ_1}{ΓZ_1} = \frac{ΗΓ}{ΓZ_1}.$$

Άρα

$$\frac{ΑΗ+ΑΓ}{ΗΓ} = \frac{ΑΓ}{ΓZ_1}.$$

Όμως τα τρίγωνα ΑΘΓ και ΓΘΖ είναι ισογώνια καθώς έχουν την $\widehat{ΑΘΓ}$ κοινή και $\widehat{ΘΑΓ} = \widehat{ΗΑΘ} = \widehat{ΘΓΗ}$, οπότε ισχύει

$$\frac{ΑΓ}{ΓZ_1} = \frac{ΑΘ}{ΘΓ}.$$

Έτσι από την προηγούμενη αναλογία παίρνουμε

$$\frac{ΑΗ+ΑΓ}{ΗΓ} = \frac{ΑΘ}{ΘΓ},$$

οπότε λόγω της (16) είναι

$$\frac{Α Θ}{ΘΓ} < \frac{1823}{240}. \tag{17}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε

$$\frac{ΑΘ^2}{ΘΓ^2} < \frac{3323329}{57600},$$

και άρα

$$\frac{ΑΘ^2 + ΘΓ^2}{ΘΓ^2} < \frac{3323329 + 57600}{57600}$$

Καθώς όμως από το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι $ΑΘ^2 + ΘΓ^2 = ΑΓ^2$ από την προηγούμενη έπεται

$$\frac{ΑΓ^2}{ΘΓ^2} < \frac{3380929}{57600}.$$

Έτσι,

$$\frac{ΑΓ}{ΘΓ} < \frac{\sqrt{3380929}}{\sqrt{57600}} < \frac{\sqrt{3381252\frac{37}{121}}}{\sqrt{57600}} = \frac{\sqrt{\left(1838\frac{9}{11}\right)^2}}{\sqrt{240^2}} = \frac{1838\frac{9}{11}}{240}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{ΑΓ}{ΘΓ} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}. \tag{18}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (17) και (18) παίρνουμε

$$\frac{ΑΘ + ΑΓ}{ΘΓ} < \frac{3661\frac{9}{11}}{240} = \frac{1007}{66}.$$

3η επανάληψη:

Από το Θεώρημα της Εσωτερικής Διχοτόμου στο τρίγωνο ΘΑΓ έχουμε

$$\frac{ΑΘ}{ΘΓ} = \frac{ΘZ_2}{ΓZ_2},$$

οπότε είναι και

$$\frac{ΑΘ + ΑΓ}{ΑΓ} = \frac{ΘZ_2 + ΓZ_2}{ΓZ_2} = \frac{ΘΓ}{ΓZ_2}.$$

Έτσι,

$$\frac{ΑΘ + ΑΓ}{ΘΓ} = \frac{ΑΓ}{ΓZ_2}. \tag{19}$$

Επιπλέον τα τρίγωνα ΑΚΓ και $\Gamma K Z_2$ είναι όμοια ως ισογώνια και άρα

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma Z_2} = \frac{AK}{K\Gamma},$$

οπότε από την προηγούμενη έπεται

$$\frac{A\Theta + A\Gamma}{\Theta\Gamma} = \frac{AK}{K\Gamma},$$

και άρα

$$\frac{AK}{K\Gamma} < \frac{1007}{66}. \tag{20}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο προκύπτει

$$\frac{AK^2}{K\Gamma^2} < \frac{1007^2}{66^2} = \frac{1014049}{4356},$$

και επομένως

$$\frac{AK^2 + K\Gamma^2}{K\Gamma^2} < \frac{1014049 + 4356}{4356}.$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα όμως είναι $AK^2 + K\Gamma^2 = A\Gamma^2$ οπότε από την παραπάνω παίρνουμε

$$\frac{A\Gamma^2}{K\Gamma^2} < \frac{1018405}{4356}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{A\Gamma}{K\Gamma} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}. \tag{21}$$

διότι

$$1018405 < 1018417\frac{13}{36} = \left(1009\frac{1}{6}\right)^2$$

Προσθέτοντας τώρα κατά μέλη τις (20) και (21) παίρνουμε

$$\frac{AK + K\Gamma}{K\Gamma} < \frac{2016\frac{1}{6}}{66}. \tag{22}$$

4η επανάληψη:

Από το Θεώρημα της Εσωτερικής Διχοτόμου στο ΚΑΓ έχουμε

$$\frac{AK}{A\Gamma} = \frac{KZ_3}{\Gamma Z_3},$$

και άρα

$$\frac{AK + A\Gamma}{A\Gamma} = \frac{KZ_3 + \Gamma Z_3}{\Gamma Z_3}.$$

Έτσι,

$$\frac{\text{ΑΚ}+\text{ΚΓ}}{\text{ΚΓ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΖ}_3}.$$

Επειδή τα τρίγωνα ΑΛΓ και ΓΛΖ είναι όμοια, ως ισογώνια, ισχύει

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΖ}_3} = \frac{\text{ΑΛ}}{\text{ΛΓ}},$$

και άρα από την παραπάνω παίρνουμε $\frac{\text{ΑΚ}+\text{ΚΓ}}{\text{ΚΓ}} = \frac{\text{ΑΛ}}{\text{ΛΓ}}$, και άρα λόγω της (22) θα είναι και

$$\frac{\text{ΑΛ}}{\text{ΛΓ}} < \frac{2016\frac{1}{6}}{66}.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε

$$\frac{\text{ΑΛ}^2}{\text{ΛΓ}^2} < \frac{4064928\frac{1}{36}}{4356}, \text{ οπότε } \frac{\text{ΑΛ}^2+\text{ΛΓ}^2}{\text{ΛΓ}^2} < \frac{4064928\frac{1}{36}+4356}{4356}.$$

Από την παραπάνω επειδή $\text{ΑΛ}^2+\text{ΛΓ}^2 = \text{ΑΓ}^2$ (Πυθαγόρειο Θεώρημα) προκύπτει ότι

$$\frac{\text{ΑΓ}^2}{\text{ΛΓ}^2} < \frac{4069284\frac{1}{36}}{4356}.$$

Έτσι θα είναι και

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΛΓ}} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}, \tag{23}$$

διότι

$$4069284\frac{1}{36} < 4069297\frac{9}{16} = \left(2017\frac{1}{4}\right)^2.$$

Συνοψίζοντας έχουμε:

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{1560}{780} = 2 \qquad \text{(η σχέση 10)}$$

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΗΓ}} = \frac{3013\frac{3}{4}}{780} \qquad \text{(η σχέση 15)}$$

$$\frac{\text{ΛΓ}}{\text{ΘΓ}} = \frac{1838\frac{9}{11}}{240} \qquad \text{(η σχέση 18)}$$

$$\frac{\text{ΑΚ}}{\text{ΚΓ}} = \frac{1009\frac{1}{6}}{66} \qquad \text{(η σχέση 21)}$$

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΛΓ}} = \frac{2017\frac{1}{4}}{66} \qquad \text{(η σχέση 23)}$$

με τις ΒΓ, ΗΓ, ΘΓ, ΚΓ, ΛΓ να είναι οι πλευρές των εγγεγραμμένων στον κύκλο διαμέτρου ΑΓ $= \delta$ εξαγώνου, δωδεκαγώνου, εικοσιτετραγώνου, σαρανταοκταγώνου και ενενηνταεξαγώνου αντίστοιχα.

Έτσι από τις παραπάνω προκύπτουν οι

$$\frac{\delta}{6 \cdot \mathrm{B\Gamma}} = \frac{1560}{6 \cdot 780}$$

$$\frac{\delta}{12 \cdot \mathrm{H\Gamma}} < \frac{3013\frac{3}{4}}{12 \cdot 780}$$

$$\frac{\delta}{24 \cdot \Theta\Gamma} < \frac{1838\frac{9}{11}}{24 \cdot 240}$$

$$\frac{\delta}{48 \cdot \mathrm{K\Gamma}} < \frac{1009\frac{1}{6}}{48 \cdot 66}$$

$$\frac{\delta}{96 \cdot \Lambda\Gamma} < \frac{2017\frac{1}{4}}{96 \cdot 66}$$

Αν τώρα συμβολίσουμε με π_6, π_{12}, π_{24}, π_{48} και π_{96} τις περιμέτρους των εγγεγραμμένων στον κύκλο εξαγώνου, δωδεκαγώνου, εικοσιτετραγώνου, σαρανταοκταγώνου και ενενηνταεξαγώνου αντίστοιχα έχουμε

$$\frac{\pi_6}{\delta} = \frac{4680}{1560} = 3$$

$$\frac{\pi_{12}}{\delta} > \frac{9360}{3013\frac{3}{4}}$$

$$\frac{\pi_{24}}{\delta} > \frac{5760}{1838\frac{9}{11}}$$

$$\frac{\pi_{48}}{\delta} > \frac{3168}{1009\frac{1}{6}}$$

$$\frac{\pi_{96}}{\delta} > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}}$$

Συνεπώς για την περίμετρο του εγγεγραμμένου στον κύκλο ενενηνταεξαγώνου ισχύει

$$\frac{\pi_{96}}{\delta} > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\frac{10}{71}$$

καθώς

$$\frac{6336}{2017\frac{1}{4}} \simeq 3,1409\ldots \quad \text{και} \quad 3\frac{10}{71} \simeq 3,1408\ldots$$

Επειδή το ενενηνταεξάγωνο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο ακτίνας ΑΓ έπεται ότι η περιφέρεια Π του κύκλου είναι μεγαλύτερη από την περιφέρεια του ενενηνταεξαγώνου, δηλαδή $\Pi > \pi_{96}$ και άρα ισχύει

$$\Pi > 3\frac{10}{71}\delta$$

Από τους ισχυρισμούς 1 και 2 προκύπτει η αποδεικτέα.

Στμ: Οι παραπάνω Προτάσεις είναι αυτές που μας δίνουν τους γνωστούς τύπους για το μήκος κύκλου (Π) και εμβαδόν (Ε) του κυκλικού δίσκου

$$\Pi = 2\pi\rho \qquad \text{και} \qquad \mathrm{E} = \pi\rho^2.$$

Πράγματι, αν έχουμε ένα κύκλο ακτίνας ρ, κατ᾽ αρχάς η Πρόταση 1 παραπάνω, μαζί με την Πρόταση 2 του Βιβλίου 12 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, συνεπάγονται ότι το πηλίκο Π/δ είναι σταθερό και ανεξάρτητο της διαμέτρου του κύκλου. Πράγματι, αν θεωρήσουμε δύο κύκλους διαμέτρου δ_1 και δ_2 αντίστοιχα με εμβαδά E_{δ_1}, E_{δ_2} και περιμέτρους Π_{δ_1}, Π_{δ_2}, τότε η Πρόταση 2 του Βιβλίου 12 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη λέει ότι

$$\frac{\mathrm{E}_{\delta_1}}{\mathrm{E}_{\delta_2}} = \frac{\delta_1^2}{\delta_2^2},$$

ενώ η Πρόταση 1 παραπάνω, λέει ότι

$$\mathrm{E}_{\delta_1} = \frac{1}{2}\frac{\delta_1}{2}\Pi_{\delta_1} \quad \text{και} \quad \mathrm{E}_{\delta_2} = \frac{1}{2}\frac{\delta_2}{2}\Pi_{\delta_2}.$$

Άρα

$$\frac{\delta_1^2}{\delta_2^2} = \frac{\mathrm{E}_{\delta_1}}{\mathrm{E}_{\delta_2}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\delta_1}{2}\Pi_{\delta_1}}{\frac{1}{2}\frac{\delta_2}{2}\Pi_{\delta_2}},$$

απ᾽ όπου απλοποιώντας προκύπτει ότι

$$\frac{\Pi_{\delta_1}}{\delta_1} = \frac{\Pi_{\delta_2}}{\delta_2},$$

επιβεβαιώνοντας την ανεξαρτησία του πηλίκου Π/δ από τη διάμετρο δ του κύκλου.

Ας το ονομάσουμε λοιπόν αυτό το σταθερό πηλίκο π. Η Πρόταση 3 τώρα μας λέει ότι $\pi \overset{\text{ορσ.}}{=} \Pi/(2\rho) \simeq 3{,}14$, ισοδύναμα $\Pi = 2\pi\rho$ όπου $\pi \simeq 3{,}14$. Και η Πρόταση 1 μας λέει ότι

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\rho \cdot \Pi = \frac{1}{2}\rho \cdot 2\pi\rho = \pi\rho^2.$$

Μέρος II
Αρχαίο Κείμενο

Πρότασις 1 (4). *Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει.*

Ἀπόδειξις. Ἐχέτω ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τριγώνῳ τῷ Ε, ὡς ὑπόκειται· λέγω ὅτι ἴσος ἐστίν.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μείζων ὁ κύκλος, καὶ ἐγγεγράφθω τὸ ΑΓ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου· τὸ εὐθύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον. Εἰλήφθω κέντρον τὸ Ν καὶ κάθετος ἡ ΝΞ· ἐλάσσων ἄρα ἡ ΝΞ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς. Ἔστιν δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ εὐθυγράμμου τῆς λοιπῆς ἐλάττων, ἐπεὶ καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιμέτρου· ἔλαττον ἄρα τὸ εὐθύγραμμον τοῦ Ε τριγώνου· ὅπερ ἄτοπον.

Ἔστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων τοῦ Ε τριγώνου, καὶ περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΟΑΡ. Ἡ ΟΡ ἄρα τῆς ΜΡ ἐστὶν μείζων· ἡ γὰρ ΡΜ τῇ ΡΑ ἴση ἐστί· καὶ τὸ ΡΟΠ τρίγωνον ἄρα τοῦ ΟΖΑΜ σχήματος μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ. Λελείφθωσαν οἱ τῷ ΠΖΑ τομεῖ ὅμοιοι ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· ἔτι ἄρα τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον τοῦ Ε ἐστὶν ἔλασσον· ὅπερ ἄτοπον· ἔστιν γὰρ μεῖζον, ὅτι ἡ μὲν ΝΑ ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ τοῦ τριγώνου, ἡ δὲ περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου. Ἴσος ἄρα ὁ κύκλος τῷ Ε τριγώνῳ.

Πρότασις 2 (6). *Ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν $\overline{\iota\alpha}$ πρὸς $\overline{\iota\delta}$.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ περιγεγράφθω τετράγωνον τὸ ΓΗ, καὶ τῆς ΓΔ διπλῆ ἡ ΔΕ, ἕβδομον δὲ ἡ ΕΖ τῆς ΓΔ. Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΓΕ πρὸς τὸ ΑΓΔ λόγον ἔχει, ὃν $\overline{\kappa\alpha}$ πρὸς $\overline{\zeta}$, πρὸς δὲ τὸ ΑΕΖ τὸ ΑΓΔ λόγον ἔχει, ὃν ἑπτὰ πρὸς ἕν, τὸ ΑΓΖ πρὸς τὸ ΑΓΔ ἐστίν, ὡς $\overline{\kappa\beta}$ πρὸς $\overline{\zeta}$. Ἀλλὰ τοῦ ΑΓΔ τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ΓΗ τετράγωνον, τὸ δὲ ΑΓΔΖ τρίγωνον τῷ ΑΒ κύκλῳ ἴσον ἐστίν [ἐπεὶ ἡ μὲν ΑΓ κάθετος ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ βάσις τῆς διαμέτρου τριπλασίων καὶ τῷ ζʹ ἔγγιστα ὑπερέχουσα δειχθήσεται]· ὁ κύκλος οὖν πρὸς τὸ ΓΗ τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν $\overline{\iota\alpha}$ πρὸς $\overline{\iota\delta}$.

Πρότασις 3 (7). *Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ ΑΓ καὶ κέντρον τὸ Ε καὶ ἡ ΓΛΖ ἐφαπτομένη καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τρίτου ὀρθῆς· ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΓ λόγον ἔχει, ὃν $\overline{\textit{τϛ}}$ πρὸς $\overline{\textit{ρνγ}}$, ἡ δὲ ΕΓ πρὸς [τὴν] ΓΖ λόγον ἔχει, ὃν $\overline{\textit{σξε}}$ πρὸς $\overline{\textit{ρνγ}}$. Τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ΖΕΓ δίχα τῇ ΕΗ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΖΗ πρὸς ΗΓ [καὶ ἐναλλὰξ καὶ συνθέντι]. Ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ΖΕ, ΕΓ πρὸς ΖΓ, ἡ ΕΓ πρὸς ΓΗ· ὥστε ἡ ΓΕ πρὸς ΓΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ $\overline{\textit{φοα}}$ πρὸς $\overline{\textit{ρνγ}}$. Ἡ ΕΗ ἄρα πρὸς ΗΓ δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν $\overset{\lambda\delta}{M}\overline{\textit{͵θυν}}$ πρὸς $\overset{\beta}{M}\overline{\textit{͵γυθ}}$· μήκει ἄρα, ὃν $\overline{\textit{φϘα}}$ η′ πρὸς $\overline{\textit{ρνγ}}$. Πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ ΗΕΓ τῇ ΕΘ· διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ἡ ΕΓ πρὸς ΓΘ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν $\overline{\textit{͵αρξβ}}$ η′ πρὸς $\overline{\textit{ρνγ}}$· ἡ ΘΕ ἄρα πρὸς ΘΓ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν $\overline{\textit{͵αροβ}}$ η′ πρὸς $\overline{\textit{ρνγ}}$. Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΘΕΓ τῇ ΕΚ· ἡ ΕΓ ἄρα πρὸς ΓΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν $\overline{\textit{͵βτλδ}}$ δ′ πρὸς $\overline{\textit{ρνγ}}$· ἡ ΕΚ ἄρα πρὸς ΓΚ μείζονα ἢ ὃν $\overline{\textit{͵βτλθ}}$ δ′ πρὸς $\overline{\textit{ρνγ}}$. Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΚΕΓ τῇ ΛΕ· ἡ ΕΓ ἄρα πρὸς ΛΓ μείζονα [μήκει] λόγον ἔχει ἤπερ τὰ $\overline{\textit{͵δχογ}}$ □′ πρὸς $\overline{\textit{ρνγ}}$. Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τρίτου οὖσα ὀρθῆς τέτμηται τετράκις δίχα, ἡ ὑπὸ ΛΕΓ ὀρθῆς ἐστι μη′. Κείσθω οὖν αὐτῇ ἴση πρὸς τῷ Ε ἡ ὑπὸ ΓΕΜ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΛΕΜ ὀρθῆς ἐστι κδ′. Καὶ ἡ ΛΜ ἄρα εὐθεῖα τοῦ περὶ τὸν κύκλον ἐστὶ πολυγώνου πλευρὰ πλευρὰς ἔχοντος $\overline{\textit{Ϙϛ}}$. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΛ ἐδείχθη μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ $\overline{\textit{͵δχογ}}$ □′ πρὸς $\overline{\textit{ρνγ}}$, ἀλλὰ τῆς μὲν ΕΓ διπλῆ ἡ ΑΓ, τῆς δὲ ΓΛ διπλασίων ἡ ΛΜ, καὶ ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν τοῦ $\overline{\textit{Ϙϛ}}$γώνου περίμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ $\overline{\textit{͵δχογ}}$ □′ πρὸς $\overset{\alpha}{M}\overline{\textit{͵δχπη}}$. Καί ἐστιν τριπλασία, καὶ ὑπερέχουσιν $\overline{\textit{χξζ}}$ □′, ἅπερ τῶν $\overline{\textit{͵δχογ}}$ □′ ἐλάττονά ἐστιν ἢ τὸ ἕβδομον· ὥστε τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν κύκλον τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλάσιον καὶ ἐλάττονι ἢ τῷ ἑβδόμῳ μέρει μεῖζον· ἡ τοῦ κύκλου ἄρα περίμετρος πολὺ μᾶλλον ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριπλασίων καὶ ἑβδόμῳ μέρει μείζων.

Ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ ΑΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τρίτου ὀρθῆς· ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν $\overline{\textit{͵ατνα}}$ πρὸς $\overline{\textit{ψπ}}$ [ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΒ, ὃν $\overline{\textit{͵αφξ}}$ πρὸς $\overline{\textit{ψπ}}$]. Δίχα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ΑΗ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΗ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ, καὶ ἡ ὑπὸ ΗΓΒ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ ΑΗΓ ὀρθή· καὶ τρίτη ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΖΓ τρίτῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΗ ἴση. Ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΗΓ τῷ ΓΗΖ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΖ καὶ ἡ ΑΓ πρὸς ΓΖ. Ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΖ, [καὶ] συναμφότερος ἡ ΓΑΒ πρὸς ΒΓ· καὶ ὡς συναμφότερος ἄρα ἡ ΒΑΓ πρὸς ΒΓ, ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ. Διὰ τοῦτο οὖν ἡ ΑΗ πρὸς [τὴν] ΗΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ $\overline{\textit{βϡια}}$ πρὸς $\overline{\textit{ψπ}}$, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΗ ἐλάσσονα ἢ ὃν ͵γιγ □′ δ′ πρὸς $\overline{\textit{ψπ}}$. Δίχα ἡ ὑπὸ ΓΑΗ τῇ ΑΘ· ἡ ΑΘ ἄρα διὰ τὰ αὐτὰ πρὸς τὴν ΘΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν $\overline{\textit{͵εϡκδ}}$ □′ δ′ πρὸς $\overline{\textit{ψπ}}$ ἢ ὃν $\overline{\textit{͵αωκγ}}$ πρὸς $\overline{\textit{σμ}}$· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας $\overline{\textit{δ}}$ ιγ′· ὥστε ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΘ ἢ ὃν $\overline{\textit{͵αωλη}}$ $\overline{\textit{θ}}$ ια′ πρὸς $\overline{\textit{σμ}}$. Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ΚΑ· καὶ ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΓ ἐλάσσονα [ἄρα] λόγον ἔχει ἢ ὃν ,α̅ζ̅ πρὸς ξ̅ϛ̅· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας ι̅α̅ μʹ. Ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς [τὴν] ΚΓ ἢ ὃν ,α̅θ̅ ϛʹ πρὸς ξ̅ϛ̅. Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΚΑΓ τῇ ΛΑ· ἡ ΑΛ ἄρα πρὸς [τὴν] ΛΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν τὰ β̅ι̅ϛ̅ ϛʹ πρὸς ξ̅ϛ̅, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΛ ἐλάσσονα ἢ τὰ ,β̅ι̅ζ̅ δʹ πρὸς ξ̅ϛ̅. Ἀνάπαλιν ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ,ϛ̅τ̅λ̅ϛ̅ πρὸς ,β̅ι̅ζ̅ δʹ, ἅπερ τῶν ,β̅ι̅ζ̅ δʹ μείζονά ἐστιν ἢ τριπλασίονα καὶ δέκα οαʹ· καὶ ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ ϙ̅ϛ̅γώνου τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ ι̅ οαʹ· ὥστε καὶ ὁ κύκλος ἔτι μᾶλλον τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ ι̅ οαʹ. Ἡ ἄρα τοῦ κύκλου περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μείζονι δὲ ἢ ι̅ οαʹ μείζων.